STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 36

Complexe functietheorie.

Cursus Sittard 1955/56.

H.J.A.Duparc.

1956

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Complexe Functietheorie

te

Sittard

door

Dr H.J.A. Duparc

Hoofdstuk I

Inleiding

§1. Complexe getallen.

Wij onderstellen bekend:

1e. de eigenschappen der complexe getallen;
2e. de belangrijkste eigenschappen uit de reële analyse;
3e. de voornaamste eigenschappen van het Euclidische platte vlak.

Wat 1e betreft, zij opgemerkt, dat het rekenen met complexe getallen (dit zijn getallen, die in de gedaante $a+ib$ te schrijven zijn) formeel geheel geschiedt volgens de rekenregels der algebra, waarbij men bovendien nog voor i^2 de waarde -1 mag substitueren. De schrijfwijze van een complex getal in de gedaante $a+ib$ is ondubbelzinnig, d.w.z. twee complexe getallen $a+ib$ en $c+id$ zijn dan en slechts dan gelijk als geldt $a=c$ én $b=d$. Hierbij is uiteraard ondersteld, dat a,b,c en d reëel zijn.

Wat 3e betreft, onderstellen we, dat in de streng opgebouwde Euclidische meetkunde o.a. een hoekbegrip is ingevoerd, dat aan de bekende eigenschappen uit de Euclidische meetkunde voldoet. Voor reële x denken we voorts de functies $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ enz. gedefineerd en de eigenschappen dezer functies, die in de goniometrie worden behandeld, bekend.

Thans gaan we een verband leggen tussen de complexe getallen en de punten van het Euclidische platte vlak door het getal $z=x+iy$ te doen corresponderen met het punt (x,y) van dit vlak; de coördinaten x en y zijn betrokken op een eenmaal gegeven vast coördinatenstelsel. De oorsprong correspondeert dan met het getal 0.

Zoals bekend noemt men x het reële deel van z, en y het imaginaire. Men schrijft $x=Rz$ of $Re z$; $y=Iz$ of $Im z$.

Onder de modulus van een complex getal $z=x+iy$ verstaat men het niet negatieve getal $\sqrt{x^2+y^2}$; men geeft de modulus van z aan door $|z|$.

Opg.1. Bewijs, dat de modulus van het complexe getal z gelijk is aan de afstand van het punt z tot de oorsprong. Van welke complexe getallen is de modulus positief en van welke is de modulus nul?

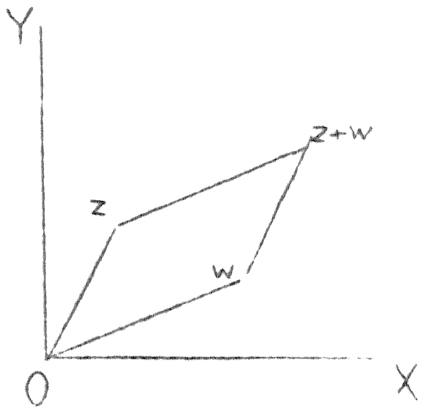
de modulus positief en van welke is de modulus nul?

Evenals een punt (x,y) van het platte vlak eveneens bepaald is door zijn poolcoördinaten (r,φ), kan men een complex getal ook bepalen door de lengte $|z|$ van de voerstraal en de hoek φ, die deze met de positieve x-as maakt. Deze hoek φ wordt het argument van het complexe getal z genoemd; men schrijft $\varphi = \arg z$. Men kan nog opmerken $\arg z = \operatorname{bg\,tg} \frac{I(z)}{R(z)}$.

Opg. 2. Bewijs: $|z| \sin \arg z = Iz$; $|z| \cos \arg z = Rz$.

Opg. 3. Is $\arg z$ door het complexe getal z eenduidig bepaald?

Om het punt $z+w$, waarin $z = x+iy$ en $w = u+iv$, aan te geven, merken we op, dat de coördinaten hiervan gelijk zijn aan $x+u$ resp. $y+v$, zodat dit op grond van meetkundige overwegingen het vierde hoekpunt is van een parallelogram, waarvan drie der hoekpunten zijn z, 0 en w.



Men kan ook opmerken, dat het punt $z+w$ gevonden wordt door de vector Oz evenwijdig aan zichzelf te verplaatsen, zodanig, dat het punt O in w komt. Verplaatst men Ow zodanig, dat O in z komt, dan vindt men wederom hetzelfde punt. Men kan dit feit beschouwen als een meetkundige illustratie van de eigenschap $z+w = w+z$.

Het punt $z_1+z_2+\ldots+z_n$ kan men vinden uit het punt $z_1+\ldots+z_{n-1}$ door van daar uit een vector te construeren gelijk en evenwijdig aan Oz.

Opg. 4. Bewijs meetkundig de bekende ongelijkheid

$$|z+w| \leqq |z| + |w|.$$

Opg. 5. Bewijs

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{N} |z_n|.$$

Bij gegeven z en w bestaat er één en slechts één getal s, zodanig dat $z+s = w$. Immers s is het vierde hoekpunt van een parallelogram, waarvan drie opeenvolgende hoekpunten zijn z, 0 en s.

Wensen we op grond van deze definitie het punt $-z$ bij gegeven z te construeren, dan vinden we dat de punten $-z$ en z symmetrisch t.o.v. de oorsprong gelegen zijn.

Opg. 6. Bewijs meetkundig $z-w = z+(-w)$.

Opg. 7. Bewijs meetkundig $|z-w| \geqq |z| - |w|$

$$|z-w| \geqq |w| - |z| \quad \text{(derhalve } |z-w| \geqq \big||z| - |w|\big|\text{)}.$$

$$|z-w| \leqq |z| + |w|$$

Het product p van de complexe getallen z en w zijn het gemakkelijkst te vinden door de getallen te schrijven in de gedaante $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; $w = s(\cos\psi + i \sin\psi)$. Dan geldt

$$p = rw = rs(\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi) = rs(\cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi)),$$

zodat wij hiermee hebben gevonden, dat de modulus van p is gelijk aan rs en het argument van p is gelijk aan $\varphi + \psi$, in formule $|zw| = |z||w|$; $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

Opg. 8. Bewijs deze formules ook door van de reële en imaginaire gedeelten i.p.v. de moduli en argumenten van z en w gebruik te maken.

De constructie van $s = zw$ geschiedt het eenvoudigste door op te merken, dat de driehoeken sOw en $zO1$ gelijkvormig zijn. Hierbij is het punt 1 het punt, dat met het getal 1 correspondeert.

Opg. 9. Bewijs: $zw = 0$ dan en slechts dan als ten minste een der factoren z en w nul is.

De deling $\frac{z}{w}$ is bij gegeven z en w mogelijk, mits $w \neq 0$ is.

Opg. 10. Geef aan hoe men meetkundig de plaats van $\frac{z}{w}$ uit die van z en w $(\neq 0)$ kan bepalen.

De complexe getallen vormen een commutatief lichaam. Een deellichaam hiervan is o.a. het commutatieve lichaam der reële getallen.

Het toegevoegde complexe getal $\bar{z}$ van z vindt men door z in de x-as te spiegelen.

Men heeft $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ en verder $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z}$. Hieruit volgt opnieuw gemakkelijk de formule voor de modulus van het product van twee complexe getallen z en w. Immers $|zw|^2 = zw.\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$, dus, omdat moduli ≥ 0 zijn, $|zw| = |z||w|$.

De punten van het "rechter"halfvlak zijn gekarakteriseerd door $Rz > 0$.

De omtrek van de eenheidscirkel (de cirkel met straal = 1 en middelpunt in de oorsprong) wordt gegeven door $|z| = 1$.

Opg. 11. Bewijs dat de inversie t.o.v. de eenheidscirkel door de volgende transformatie wordt gegeven

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Opg. 12. Door welke betrekking worden de punten gekarakteriseerd, die binnen de cirkel met middelpunt z_0 en straal r liggen?

De vergelijking van een kromme $f(x,y) = 0$ in het complexe vlak is te schrijven in de gedaante $f(Rz, Iz) = 0$ dus $g(z,\bar{z}) = 0$, waarin de functie g door f bepaald is.

Onder de ε-omgeving van een punt z_0 verstaat men de verzameling der punten z gelegen op een afstand $\leq \varepsilon$ van z_0.

In tegenstelling tot bij de projectieve meetkunde, waarbij men het ~~Eucl.~~ platte vlak uitbreidt met een oneigenlijke rechte en met "complexe" punten, wordt het complexe platte vlak "afgesloten" met één enkel punt, het punt $z = \infty$.

Onder een omgeving van het punt ∞ wordt verstaan de verzameling der punten gelegen buiten een cirkel.

Er is een één-éénduidige afbeelding mogelijk tussen de punten van het afgesloten complexe vlak en de punten van een bol d.m.v. stereografische projectie. Men denke zich een bol met middellijn = 1, die het complexe vlak in de oorsprong raakt en voege aan een punt z van het complexe vlak toe het snijpunt van deze bol en de verbindingsrechte van het punt z met het op de bol gelegen tegenpunt van de oorsprong. Met het punt ∞ laat men voorts dit tegenpunt corresponderen.

Opg. 13. Met de eenheidscirkel van het complexe vlak correspondeert de "aequator" van de bol.

Opg. 14. Met twee punten, die elkaars inverse zijn t.o.v. de eenheidscirkel, corresponderen op de bol punten, die symmetrisch liggen t.o.v. het aequatorvlak.

Opg. 15. Welke krommen in het complexe vlak wordt bepaald door de relaties

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1; \quad \left|\frac{z}{z-1}\right| = 3; \quad R(z^2) = 1; \quad I(z_1z_2z_3z) = 0\ ?$$

(Hierin zijn z_1, z_2 en z_3 gegeven complexe getallen en $(z_1z_2z_3z)$ stelt de dubbelverhouding $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ voor).

Opg. 16. De oppervlakte van de driehoek met hoekpunten a, b en c is gelijk aan de absolute waarde van de determinant

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Opg. 17. De rechte door de punten a en b is in parametervorm te schrijven in de gedaante $z = sa+(1-s)b$ (s willekeurig reëel). Bewijs dit direct en met behulp van de vorige opgave.

§ 2. Wegen, gebieden en continua.

Beschouw twee reële getallen α en β met $\alpha<\beta$.

Laat f(t) en g(t) voor $\alpha \leq t \leq \beta$ continue reële functies zijn van t. Dan wordt de verzameling der punten $z = x+iy$ met $x = f(t)$ en $y = g(t)$ een continue kromme genoemd.

Men kan deze aangeven door de formule $z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$.

Corresponderen met verschillende waarden van t verschillende punten, $z = x+iy$, dan heet de kromme een Jordanboog.

Opg. 1. Een recht lijnsegment is een Jordanboog.

Een Jordanboog heeft steeds een oriëntatie; men zegt nl. dat een punt z_1 aan een punt z_2 voorafgaat als voor de bijbehorende parameters t_1

en t_2 geldt $t_1 < t_2$. Het punt $z(\alpha)$ heet beginpunt, het punt $z(\beta)$ heet eindpunt van de Jordanboog.

Een punt z ligt tussen twee punten z_1 en z_2, als voor de bijbehorende parameters t, t_1 en t_2 geldt $t_1 < t < t_2$.

Een Jordanboog heet gesloten als $f(\alpha) = f(\beta)$; $g(\alpha) = g(\beta)$. Het begin- en het eindpunt vallen dan samen. Dit is het enige punt, dat door twee verschillende waarden van de parameter kan worden bepaald.

Opg. 2. Een cirkel is een gesloten Jordanboog.

Kies op de Jordanboog $z = z(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$ een aantal opeenvolgende tussen $z_0 = z(\alpha)$ en $z_n = z(\beta)$ gelegen punten $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Indien de gebroken rechte $z_0 z_1, \ldots, z_{n-1}\ z_n$ voor iedere keuze van n en van de ligging der punten $z_1, \ldots, z_{n-1}$ een begrensde lengte heeft, noemt men de Jordanboog rectificeerbaar.

De lengte van de Jordanboog is de bovenste grens van de lengten der beschouwde gebroken rechten.

Het is bekend, dat de beschouwde Jordanboog dan en slechts dan rectificeerbaar is, als de functies $f(t)$ en $g(t)$ van begrensde variatie zijn.

Een rectificeerbare Jordanboog heet een wegsegment.

Beschouw een aantal wegsegmenten met de eigenschap dat het eindpunt van elk (behalve het laatste) samenvalt met het beginpunt van het volgende. De zo ontstane puntverzameling heet een weg.

Het beginpunt van de weg is het beginpunt van het eerste, het eindpunt is het eindpunt van het laatste wegsegment, waaruit de weg bestaat. Vallen begin- en eindpunt van een weg samen, dan heet deze gesloten.

Zijn de wegsegmenten alle rechte lijnsegmenten dan ontstaat een gebroken rechte. Is de gebroken rechte gesloten dan heet deze een veelhoek.

De lengte van een weg is gelijk aan de som der lengten der wegsegmenten waaruit de weg bestaat.

Een wegsegment kan zichzelf niet snijden, maar een weg wel. Snijdt een weg zichzelf niet, dan heet deze enkelvoudig.

Opg. 3. Een recht lijnsegment is een weg; een cirkel is een gesloten enkelvoudige weg.

Volgens een theorema van Jordan verdeelt iedere gesloten enkelvoudige weg het platte vlak in twee gedeelten: een binnen- en een buitengedeelte.

Een gesloten georiënteerde weg heeft een positieve oriëntering als het inwendige er links van ligt; ligt dit rechts, dan heeft de weg een negatieve oriëntering.

In het vervolg onderstellen we, als het tegendeel niet vermeld is, dat de te beschouwen gesloten wegen een positieve oriëntering bezitten.

Een verzameling heet open als bij ieder punt der verzameling een positief getal ε te vinden is, zodanig, dat de ε-omgeving van dat punt geheel tot de verzameling behoort.

Een open verzameling heet samenhangend als twee willekeurige punten ervan kunnen worden verbonden door een boogsegment dat geheel tot de verzameling behoort.

Een verzameling heet een gebied als zij open en samenhangend is.

Een verdichtingspunt van een verzameling is een punt met de eigenschap dat bij iedere gegeven positieve ε minstens één punt der verzameling in de ε-omgeving van dit punt te vinden is.

Een verzameling heet begrensd als er een positief getal M te bepalen is, zodat elk punt z der verzameling de eigenschap bezit dat $|z| < M$ is.

Een verzameling heet gesloten als zij al haar verdichtingspunten bevat.

Onder een ε-keten verstaat men een rij punten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, zodanig dat elk tweetal opeenvolgende punten der rij een afstand $< \varepsilon$ bezit.

Een gesloten verzameling heet samenhangend als elk tweetal punten A en B ervan bij iedere positieve gegeven ε kan worden verbonden door een ε-keten, die geheel tot de verzameling behoort, d.w.z. door een rij punten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ met $A_0 = A$ en $A_n = B$, waarbij de punten $A_1, \ldots, A_{n-1}$ alle tot de verzameling behoren.

Een verzameling heet een continuum als zij begrensd, afgesloten en samenhangend is.

We vermelden zonder bewijs nog een paar eigenschappen:

1°. Elke gesloten veelhoek is te verdelen in een eindig aantal enkelvoudige veelhoeken en een eindig aantal segmenten die tweemaal doorlopen worden, eenmaal in de ene en eenmaal in de andere richting. Elk der enkelvoudige veelhoeken wordt geheel in positieve of geheel in de negatieve richting doorlopen.

2°. Elke enkelvoudige gesloten veelhoek kan door diagonalen, die geheel binnen de veelhoek liggen, in driehoeken worden verdeeld.

Tenslotte bewijzen we in verband met latere toepassingen de overdekkingsstelling van Heine-Borel.

Zij D een afgesloten begrensde verzameling. Bij elk punt z van D construeren we een cirkel C(z) met z als middelpunt. Deze cirkels overdekken D geheel (d.w.z. elk punt van D ligt in minstens een dezer cirkels).

De stelling van Heine-Borel zegt nu, dat men uit de verzameling van deze cirkels C(z) er <u>eindig</u> veel kan kiezen, die D reeds geheel overdekken.

<u>Bewijs</u>: Wij geven een indirect bewijs en onderstellen dat het niet mogelijk is om eindig veel cirkels C(z) te vinden, die D geheel overdekken.

Daar D begrensd is, bestaat er een rechthoek R_0, waar D geheel in ligt. We mogen aannemen, dat R_0 zijden heeft, die evenwijdig lopen met de coördinaatassen. We verdelen deze rechthoek in vier rechthoeken door de beide rechten, die de middens der overstaande zijden verbinden. Op grond van de onderstelling is ten minste het in een dezer vier rechthoeken gelegen deel van D niet door eindig veel cirkels te overdekken. Deze rechthoek R_1 verdelen we op overeenkomstige wijze in vier gedeelten en vinden zo een rechthoek R_2 met de eigenschap, dat het in R_2 gelegen gedeelte van D niet door eindig veel cirkels te overdekken is. Zo voortgaande vinden wij een rij rechthoeken $R_0, R_1, R_2, \ldots,$ elk bevat in de voorgaande.

Beschouw de linkeronderhoekpunten dezer rechthoeken. De abcissen hiervan vormen een monotoon niet afnemende naar boven begrensde rij en bezitten derhalve een limiet ξ. Evenzo bezitten hun ordinaten een limiet η. De linkeronderhoekpunten convergeren derhalve tot een limietpunt $\zeta = \xi + i\eta$. Zij ε een willekeurig positief getal. Beschouw een cirkel C met straal ε en met middelpunt ζ. Er bestaat dan een getal N zodanig dat alle rechthoeken R_n met $n \geq N$ geheel in C liggen.

De doorsnede van zo'n R_n en D is niet door eindig veel cirkels te overdekken; dus deze bevat oneindig veel punten van D. Binnen iedere ε-omgeving van ζ liggen dus oneindig veel punten van D. Dus ζ is verdichtingspunt van D. D is afgesloten. Derhalve behoort ζ tot D. Dus bestaat er een cirkel $C(\zeta)$, die het punt ζ van D tot middelpunt heeft. Voor voldoende grote n bestaat er een R_n, die geheel in C ligt. Dit voert tot een contradictie, want enerzijds is de doorsnede van R_n en D op grond van de constructie van R_n niet door eindig veel cirkels te overdekken, anderzijds overdekt echter $C(\zeta)$ deze doorsnede. Hiermede is de stelling bewezen.

Hoofdstuk II
FUNCTIES

1. Continuiteit.

Indien aan elk punt z van een gebied G één complex getal w is toegevoegd, noemt men w een eenwaardige functie van de complexe variabele z. Men schrijft $w = f(z)$.

G heet de definitieverzameling van de functie f; z heet het argument der functie.

Beschouwt men de reële en imaginaire delen der getallen w en z,

$$w = u + iv; \quad z = x + iy;$$

dan kan men de relatie $w = f(z)$ ook schrijven in de gedaante

$$u = u(x,y); \; v = v(x,y); \; f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Hierin stellen $u(x,y)$ en $v(x,y)$ reële functies voor van de beide reële variabelen x en y.

De functie $w = f(z)$ wordt in een punt z_0 continu genoemd als $f(z_0)$ bestaat en $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ is. Anders geformuleerd: $f(z)$ is continu in een punt z_0, als bij iedere gegeven ε een getal δ te vinden is zodanig dat voor alle z met $|z - z_0| < \delta$ geldt $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Dit getal δ is in het algemeen afhankelijk van ε, z_0 en de beschouwde functie f. Men schrijft $\delta = \delta(\varepsilon, z_0, f)$.

Opg. 1. Onderzoek voor welke waarden van z de functie $\frac{1}{z}$ continu is.
Opg. 2. Als de functie $f(z)$ continu is in een punt $z_0 = x_0 + iy_0$, zijn de functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ ook continu in het punt (x_0, y_0) en omgekeerd.
Definitie. Indien het in de hierboven gegeven definitie van continuiteit van een functie $f(z)$ bedoelde getal δ onafhankelijk is van z voor alle z in een zeker gebied G, dan zegt men dat de functie $F(z)$ in dat gebied G gelijkmatig of uniform continu is.
Stelling. Als een functie $f(z)$ in een begrensd en afgesloten gebied G continu is, is zij daar gelijkmatig continu.
Bewijs: Zij gegeven een willekeurig positief getal ε.

Wegens de continuiteit der functie $f(z)$ in G bestaat er bij ieder punt z van G een getal δ_z zodanig dat $|f(z) - f(z')| < \frac{1}{2}\varepsilon$ zodra $|z - z'| < \delta_z$. Beschouw nu bij ieder punt z van G de cirkel C_z met middelpunt z en straal $\frac{1}{2}\delta_z$. Deze cirkels overdekken G geheel, zodat uit deze verzameling dezer cirkels een eindig aantal te nemen is, die G ook al geheel overdekken. Laat de straal van de kleinste dezer cirkels δ zijn. Dit getal δ is derhalve alleen afhankelijk van het getal ε en de functie f.

Beschouw thans twee willekeurige punten z_1 en z_2 van G met $|z_1 - z_2| < \delta$. Het punt z_1 wordt dan overdekt door een der eindig veelgevonden cirkels. Het middelpunt hiervan zij ζ en de straal $\frac{1}{2}\delta_z$. Wegens $|z_1 - \zeta| < \frac{1}{2}\delta_\zeta$ en $|z_1 - z_2| < \delta \leq \frac{1}{2}\delta_\zeta$ is $|z_2 - \zeta| < \delta_\zeta$. Dus z_1 en z_2 liggen beiden binnen de cirkel met middelpunt ζ en straal δ_ζ. Hieruit volgt $|f(z_1) - f(\zeta)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $|f(z_2) - f(\zeta)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

§ 2. Differentieerbaarheid.

Def. Men noemt een functie $f(z)$ differentieerbaar in een punt z_0 als bij elk positief getal ε een getal δ en een getal L te vinden zijn zodanig dat voor iedere z met $|z - z_0| < \delta$ geldt

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L \right| < \varepsilon .$$

Het getal L, afhankelijk van de keuze der functie f, is ook afhankelijk van het beschouwde punt z_0. Men schrijft $L = f'(z_0)$. De functie $f'(z)$ wordt de afgeleide functie van de functie $f(z)$ genoemd.

Definitie: Een functie $f(z)$ heet analytisch in een gebied G, als voor elke z in G de afgeleide functie $f'(z)$ bestaat.

Een functie $f(z)$ is analytisch in een punt, als er een omgeving van dat punt bestaat, waarin de functie analytisch is.

Stelling. Een analytische functie is continu.

Bewijs. Zij gegeven een willekeurig positief getal ε. Bepaal het getal δ zodanig dat voor alle ζ met $|z - \zeta| < \delta$ geldt

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - L \right| < \varepsilon .$$

Voor $|z - \zeta| < \min\left(\delta, \dfrac{\varepsilon}{|L| + \varepsilon}\right)$ heeft men dan

$$|z - \zeta| < \delta \text{ dus } \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - L \right| < \varepsilon ,$$

dus

$$|f(z) - f(\zeta)| < (|L| + \varepsilon)\, |z - \zeta| < \varepsilon .$$

Opg. 1. Onderzoek de differentieerbaarheid en continuiteit der functies

$$f(z) = z;\ f(z) = \bar{z};\ f(z) = \frac{1}{z};\ f(z) = \arg z .$$

Wij gaan thans het begrip differentieerbaarheid nader beschouwen.

Als de functie $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ in een punt $z = x + iy$ differentieerbaar is, bestaat de limiet

$$\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$

voor het geval het punt $z_1 = x_1 + iy$ langs een rechte evenwijdig met de X-as tot z nadert. Dus:

$$f'(z) = \lim_{x_1 \to x} \frac{u(x_1,y) + iv(x_1,y) - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{(x_1 + iy) - (x + iy)} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{u(x_1,y) - u(x,y)}{x_1 - x} + i \lim_{x_1 \to x} \frac{v(x_1,y) - v(x,y)}{x_1 - x}$$

Dit houdt in dat de beide in het laatste lid genoemde limieten bestaan, d.w.z. dat de partiële afgeleiden $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ in het punt (x,y) bestaan. Men vindt $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, of korter geschreven $f'(z) = u_x + i\, v_x$.

Opg. 2. Bewijs dat uit de differentieerbaarheid van f in het punt $z = x + iy$ volgt $f'(z) = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$.

Opg. 3. Als $f'(z) = 0$ is voor alle punten in een gebied G, dan is $f(z)$ in dat gebied gelijk aan een constante.

Op grond van de gevonden formules volgt dat als f in $z = x + iy$ differentieerbaar is, de formules

$$u_x = v_y;\ u_y = -v_x \quad \text{(differentiaalvergelijkingen van Riemann-Cauchy)}$$

gelden.

Zij omgekeerd gegeven dat de betrekkingen $u_x = v_y$; $u_y = -v_x$ gelden in een punt (x,y). Beschouw een willekeurig punt (ξ, η); dan is uit de analyse bekend

$$u(\xi,\eta)-u(x,y)=\{u_x(x,y)+r_1(\xi,\eta)\}(\xi-x)+\{u_y(x,y)+r_2(\xi,\eta)\}(\eta-y)$$
$$v(\xi,\eta)-v(x,y)=\{v_x(x,y)+r_3(\xi,\eta)\}(\xi-x)+\{v_y(x,y)+r_4(\xi,\eta)\}(\eta-y)$$

waarin $\lim\limits_{\zeta \to z} r_i(\xi,\eta) = 0 \qquad (i = 1,2,3,4)$.

Dus wegens

$$\left|\frac{\xi-x}{\zeta-z}\right| \leqq 1; \qquad \left|\frac{\eta-y}{\zeta-z}\right| \leqq i,$$

$$\lim_{\zeta\to z}\frac{w(\zeta)-w(z)}{\zeta-z} = \lim_{\zeta\to z}\frac{(u_x+iv_x)(\xi-x)+(u_y+iv_y)(\eta-y)}{\zeta-z} =$$

$$= u_x + iv_x,$$

waarmee de differentieerbaarheid is aangetoond.

Later zullen we aantonen, dat uit differentiëerbaarheid van $w = u + iv$ in een punt z volgt, dat de partiële afgeleiden van de tweede orde der functies u en v bestaan. Daaruit volgt dan

$$u_{xx}+u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$
$$v_{xx}+v_{yy} = -u_{xy}+u_{xy} = 0$$

De functies u en v voldoen dus aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Deze vergelijking wordt differentiaalvergelijking van Laplace genoemd. Functies, die hieraan voldoen heten harmonisch.

Een groot aantal bekende regels uit de differentiaalrekening is ook geldig voor complexe functies.

Opg. 4. De functies z; z^2; $\frac{1}{z}$; z^n (n geheel) zijn analytisch.

Opg. 5. Als f en g analytisch zijn heeft men

$$(f \pm g)' = f' \pm g'; \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Opg. 6. Is f analytisch in z en φ analytisch in $f(z)$, dan is $\varphi(f(z))$ een analytische functie van z.

Men heeft $\varphi_z = \varphi_f\, f_z$.

Opg. 7. Een analoge stelling geldt over het begrip continuiteit. Is f continu in z en φ continu in $f(z)$, dan is $\varphi(f(z))$ continu in z.

HOOFDSTUK III

Integratie in het complexe vlak.

§1. Definitie van lijnintegraal.

Beschouw een willekeurige in het complexe vlak gelegen weg C bepaald door
$$z(t)=x(t)+iy(t);\ \alpha \leqq t \leqq \beta;\ \text{zij } z(\alpha)=a,\ z(\beta)=b.$$
Laat op ieder punt z van deze weg een eenwaardige continue functie f(z) van z gegeven zijn.

Beschouw thans een willekeurig stel reële getallen $t_0=\alpha, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, t_n=\beta$ met $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n$ en stel
$$z_k=z(t_k) \quad (k=0,1,\ldots,n).$$
Zij ζ_k een willekeurige op het segment (z_k, z_{k+1}) van C gelegen punt. Dan noemt men de som
$$S=(z_1-z_0)f(\zeta_0)+(z_2-z_1)f(\zeta_1)+\ldots+(z_n-z_{n-1})f(\zeta_{n-1})$$
een som van Riemann. De waarde van S hangt af van de kromme C, de getallen α en β, de functie f, het getal n en de keuze der punten $z_1,\ldots, z_{n-1}$ en $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$. Wij zeggen dat door het getal n en de getallen $t_1,\ldots,t_{n-1}$, die de punten $z_1,\ldots,z_{n-1}$ bepalen, een verdeling V wordt vastgelegd. De som S hangt dan af van C, α, β, f en V en $\zeta_0,\ldots,\zeta_{n-1}$. Men schrijft S=S(V). De uitdrukking
$$\max_{k=0,\ldots,n-1} |t_{k+1}-t_k|$$
noemen we de fijnheid $\Delta(V)$ van de verdeling V.

Wij zullen aantonen, dat als een overigens willekeurige rij verdelingen $V_1, V_2, \ldots$ de eigenschap heeft, dat $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(V_n)=0$, de uitdrukkingen $S(V_1)$, $S(V_2), \ldots$ tot een eindige limiet naderen, die de integraal van f(z) langs de beschouwde weg C wordt genoemd. Men schrijft
$$\lim_{n\to\infty} S(V_n)=\int_\alpha^\beta f(\zeta)d\zeta \quad \text{of} \quad \int_C f(\zeta)d\zeta.$$
De eerste schrijfwijze is in zoverre onvolledig, dat er niet uit blijkt hoe, d.w.z. langs welke weg het punt ζ van a naar b loopt.

Bewijs: De functie f(z) is een continue functie van z en z is een continue functie van t, dus f(z(t)) is een continue functie van t. Wegens een stelling uit hoofdstuk II, § 1, is in het afgesloten interval (α,β) deze functie f(z(t)) dan een uniform continue functie van t, d.w.z. er is bij ieder getal ε een van t en t' onafhankelijk getal δ te vinden met

(1) $$|f(z(t))-f(z(t'))|<\frac{\varepsilon}{2L}, \text{ zodra } |t-t'|<\delta.$$

Hierin stelt L de lengte van de weg C voor.

We beschouwen nu twee verdelingen V en V', waarin $\Delta(V)$ en $\Delta(V')$ beide kleiner zijn dan het zojuist gevonden getal δ. Tevens beschouwen we de verdeling V", die alle deelpunten van V en V' tot deelpunten heeft.

De fijnheid van V" is dan ook $<\delta$. Om een bovengrens voor $|S(V)-S(V')|$ af te leiden, beschouwen we eerst het verschil S(V)-S(V"). Hierin is

$$S(V)=\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)f(\zeta_k)\ ;\ \zeta_k=z(\tau_k);\quad t_k\leqq\tau_k\leqq t_{k+1},$$

$$S(V')=\sum_{k=0}^{n}(z'_{k+1}-z_k')f(\zeta_k');\zeta_k'=z(\tau_k');\ t_k'\leqq\tau_k'\leqq t_{k+1}',$$

$$S(V'')=\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}''-z_k'')f(\zeta_k'');\ \zeta_k''=z(\tau_k'');t_k''\leqq\tau_k''\leqq t_{k+1}.$$

Kies nu twee willekeurige opvolgende deelpunten z_h en z_{h+1} van V. Wij bepalen de bijdrage van het hierdoor bepaalde segment van de beschouwde kromme tot S(V) en S(V"). De eerstgenoemde bijdrage is $(z_{h+1}-z_h)f(\zeta_h)$. Bij de verdeling V" kunnen behalve z_h en z_{h+1} meer deelpunten optreden, nl.

$z_p''=z_h,\ z_{p+1}'',\dots,z_{p+m-1}''=z_{h+1}$ (het natuurlijke getal m hierin is $\geqslant 1$).

Dan is de bijdrage van deze verdeling

$$\sum_{k=0}^{m}(z_{p+k+1}''-z_{p+k}'')f(\zeta_{p+k}'').$$

Het verschil der bijdragen is derhalve

$$(z_{h+1}-z_h)f(\zeta_h)-\sum_{k=0}^{m-1}(z_{p+k+1}''-z_{p+k}'')f(\zeta_{p+k}'')=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(z_{p+k+1}''-z_{p+k}'')(f(\zeta_h)-f(\zeta_{p+k}'')).$$

Daar de bij ζ_h en ζ_{p+k}'' behorende waarden τ_h en τ_{p+k}'' minder verschillen dan δ (immers men heeft $t_h\leqq\tau_h\leqq t_{h+1},t_h\leqq\tau_{p+k}''\leqq t_{h+1}$ en $t_{h+1}-t_h<\delta$), is wegens (1)

$$|f(\zeta_h)-f(\zeta_{p+k}'')|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

Derhalve is de absolute waarde van het verschil der beschouwde bijdragen

$$\leqq\frac{\varepsilon}{2L}\sum_{k=0}^{m-1}|z_{p+k+1}''-z_{p+k}''|\leqq\frac{\varepsilon}{2L}.L(z_h,z_{h+1}),$$

waarin $L(z_h,z_{h+1})$ de lengte van het segment van de kromme, begrensd door z_h en z_{h+1} aangeeft.

We vinden dus

$$|S(V)-S(V'')|\leqq\frac{\varepsilon}{2L}.L=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Evenzo

$$|S(V')-S(V'')|\leqq\frac{\varepsilon}{2},$$

waaruit volgt

$$|S(V)-S(V')|<\varepsilon,$$

zodra de fijnheid der verdelingen V en V' kleiner is dan het van ε en L afhankelijke getal δ.

Beschouw nu een willekeurige rij verdelingen $V_1,V_2,\dots$ met

$$\lim_{n\to\infty}\Delta(V_n)=0.$$

Er bestaat dus een getal N zodanig, dat voor alle $m > N$ en $n > N$ geldt

$$\Delta(V_m) < \delta(\tfrac{\varepsilon}{2L});\ \Delta(V_n) < \delta(\tfrac{\varepsilon}{2L}),$$

dus wegens het bovenstaande $|S(V_m)-S(V_n)| < \varepsilon$, zodra $m,n > N$. Volgens het convergentiecriterium van Cauchy bestaat dan $\lim\limits_{n\to\infty} S(V_n)$, waarmede de gevonden stelling bewezen is.

De gevonden limiet is onafhankelijk van de keuze der rij $V_1, V_2, \ldots$. Beschouw nl. twee rijen verdelingen $V_1, V_2, \ldots; V_1', V_2', \ldots$ met $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(V_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \Delta(V_m')=0$.

Dan nadert voor de rij verdelingen $V_1, V_1', V_2, V_2', \ldots$ ook de fijnheid tot nul, dus deze rij levert een limiet der bijbehorende Riemann-sommen op, die men kan vinden door hetzij de deelrij $V_1, V_2, \ldots$ hetzij de deelrij $V_1', V_2', \ldots$ dezer rij te nemen, zodat de limieten van $S(V_n)$ en $S(V_n')$ dus gelijk zijn.

<u>Toepassingen</u>.

We berekenen de integraal $\int\limits_C p\,dz$ genomen langs een weg C met beginpunt a en eindpunt b; hierbij stelt p een van z onafhankelijk constant getal voor. Bij een willekeurige verdeling V met deelpunten $z_0=a, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n=b$ vindt men voor de Riemannsom S(V) de waarde

$$\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)p=(b-a)p;$$

deze waarde is onafhankelijk van de verdeling, dus

$$\int\limits_C p\,dz=(b-a)p.$$

Om de integraal $\int\limits_a^b z\,dz$ genomen langs een weg C te berekenen, gaat men analoog te werk. Men heeft

$$S(V)=\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)\zeta_k.$$

We kiezen eerst $\zeta_k=z_k$, daarna $\zeta_k=z_{k+1}$ en krijgen dan

$$2S(V)=\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)(z_{k+1}+z_k)=\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}^2-z_k^2)=b^2-a^2,$$

dus

$$\int\limits_C z\,dz=\tfrac{1}{2}(b^2-a^2).$$

De waarde van beide integralen bleek onafhankelijk te zijn van de keuze van de weg C, die de punten a en b verbindt. Anders is dat bij de integraal der functie R(z), zoals uit de volgende opgave blijkt.

<u>Opg. 1</u>. Bereken $\int\limits_{W_1} R(z)dz$ en $\int\limits_{W_2} R(z)dz$. Hierin is W_1 de weg, die het punt 0 rechtlijnig verbindt met p en p rechtlijnig met p+iq, terwijl W_2 de oorsprong rechtlijnig verbindt met iq en iq rechtlijnig met p+iq.

Opg. 2. Bewijs: $\int_C \{f(z)+g(z)\}dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$.

Opg. 3. Bewijs: $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz$

als a een constante voorstelt.

Tenslotte leiden we een schatting af voor $\int_W f(z)dz$, die van groot belang is.

Onderstel dat op W de functie f(z) voldoet aan $|f(z)| \leq M$. Beschouw eerst weer een Riemannsom $S = \sum_k (z_{k+1}-z_k)f(\zeta_k)$.

Dan is

$$|S| \leq M\sum_k |z_{k+1}-z_k|.$$

De som $\sum_k |z_{k+1}-z_k|$ stelt voor de lengte van de gebroken rechte $z_0, z_1, z_2, .., z_n$, die $\leq L$ is, waarin L wederom de lengte van W voorstelt.
Dan heeft men

$$|S| \leq ML, \text{ dus ook } \left|\int_W f(z)dz\right| \leq ML.$$

§ 2. Berekening van lijnintegralen.

Beschouw een wegsegment C gelegen in het complexe vlak, dat bepaald is door

$$z(t) = x(t)+iy(t);\ \alpha \leq t \leq \beta.$$

De functies x(t) en y(t) worden hier continu differentieerbaar verondersteld. Zij w=u+iv een continue complexe functie van z op C. Wij stellen ons thans tot taak om de integraal van w langs C te berekenen, d.w.z. wij zullen voor de reële en imaginaire delen van de integraal zekere reële integraalvoorstellingen afleiden.

Beschouw weer een rij verdelingen $V_1, V_2, \ldots$ met $\lim_{m\to\infty} \Delta(V_m) = 0$. Wij gaan nu de bij een dier verdelingen behorende Riemannsom

$$\sum_{k=0}^{n} (z_{k+1}-z_k)w(\zeta_k)$$

vervormen. Deze som is nl. gelijk aan

$$\sum_k (x_{k+1}-x_k)u(\zeta_k) - \sum_k (y_{k+1}y_k)v(\zeta_k) + i\sum_k (x_{k+1}-x_k)v(\zeta_k)$$
$$+i\sum_k (y_{k+1}-y_k)u(\zeta_k).$$

We bepalen de limiet van de eerste der vier sommen in de laatste formule. Voor de andere drie vindt men op analoge wijze de limiet.

Wegens de middelwaardestelling van de reële analyse vindt men dat de eerste som gelijk is

$$\sum_k \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_k'} u(\zeta_k)(t_{k+1}-t_k),$$

waarin τ_k' een geschikt gekozen in het interval (t_k, t_{k+1}) gelegen punt is. Voor deze som kan men ook schrijven

$$\sum_k \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_k} u(\zeta_k)(t_{k+1}-t_k)+\sum_k r_k\, u(\zeta_k)(t_{k+1}-t_k),$$

waarin

$$r_k=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_k'} -\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_k}$$

Wegens de continuïteit van $\frac{dx}{dt}$ in het gesloten interval (α,β) bestaat er een van t onafhankelijk getal δ, zodanig dat $\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_1}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_2}\right|<\varepsilon$, zodra $|t_1-t_2|<\delta$.

Daar de fijnheid der verdelingen $V_1, V_2, \ldots$ tot nul nadert bestaat er een getal N, zodanig dat de fijnheid van V_n kleiner is dan δ, zodra $n>N$. Beschouw nu Riemannsommen voor zulke verdelingen V_n. Daarvoor geldt dan $|r_k|<\varepsilon$, zodat een der termen der Riemannsom voor zo'n verdeling gelijk is aan

$$(1) \qquad S_1(V_n)=\sum_k \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_k} u(\zeta_k)(t_{k+1}-t_k)+R,$$

waarin

$$|R|<\varepsilon\left|\sum_k u(\zeta_k)(t_{k+1}-t_k)\right|\leq \varepsilon U$$

hierin stelt U het maximum voor van de continue functie $u(z(t))$ in het gesloten interval (α,β).

Gaan wij thans in (1) over tot de limiet dan vinden we links de gezochte integraal, terwijl het rechterlid tot limiet heeft

$$\int_\alpha^\beta u(z(t))\, \frac{dx}{dt}\, dt,$$

waarmee de gevraagde herleiding gevonden is. Men heeft dus:

$$\int_W w(z)dz=\int_\alpha^\beta (u+iv)(x'+iy')dt,$$

waarin in de integrand in het rechterlid onder x' en y' wordt verstaan resp. $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$.

<u>Toepassing</u>.

Kies voor W de eenheidscirkel met vergelijking $x=\cos t$; $y=\sin t$; $0\leq t<2\pi$.

Zij $w(z)=z^m$ (m geheel en $\neq -1$). Dan heeft men

$$\int_W z^m dz=\int_0^{2\pi}(\cos t+i\sin t)^m(-\sin t+i\cos t)dt=i\int_0^{2\pi}(\cos t+i\sin t)^{m+1}dt$$

$$=i\int_0^{2\pi}\left\{\cos(m+1)t+i\sin(m+1)t\right\}dt=0.$$

Voor $m=-1$ heeft men daarentegen

$$\int_W \frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}(\cos t+i\sin t)^{-1}(-\sin t+i\cos t)dt=\int_0^{2\pi} i\,dt=2\pi i.$$

Opg. 1. Zij gegeven een willekeurig punt $z \neq 0$. Laat de verbindingsrechte van z en 0 de eenheidscirkel in een punt a snijden. Bereken nu de integraal $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, waarin de integratieweg van 1 via de eenheidscirkel naar a loopt en vervolgens rechtlijnig naar z. Bereken deze integraal ook, indien men eerst van 1 rechtlijnig naar het op de reële as gelegen punt $|z|$ loopt en daarna vandaar naar z langs een cirkel met de oorsprong tot middelpunt.

Opg. 2. Zijn a, b en c drie punten, die op een weg W liggen, dan geldt voor de integratie langs W

$$\int_a^b f(z)dz + \int_b^c f(z)dz = \int_a^c f(z)dz.$$

Opg. 3. Bewijs $\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$, waar bij de beide integralen wordt geintegreerd langs eenzelfde weg W, echter in verschillende richting.

Hoofdstuk IV
Integraalstellingen

§1. Integraalstelling van Cauchy.

Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied. Beschouw een gesloten in G gelegen weg W.

Laat $f(z)$ een in G analytische functie voorstellen. Deze functie $f(z)$ is dan ook analytisch, dus continu, dus integreerbaar op W.

De integraalstelling van Cauchy zegt nu dat onder de genoemde voorwaarden geldt

$$\int_W f(z)dz = 0.$$

Wij bewijzen de stelling eerst voor het geval, dat W een driehoek is, daarna dat W een veelhoek is en daaruit tenslotte voor het geval, dat W een willekeurige gesloten weg is.

Allereerst beschouwen wij dus een in W gelegen driehoek D. Onderstel dat de langs de omtrek Δ van D genomen integraal van $f(z)$, niet gelijk was aan nul. Dan gold $\left|\int_\Delta f(z)dz\right| = p > 0$. Door de middens der drie zijden van driehoek D met elkaar te verbinden, ontstaan vier congruente driehoeken D', D'', D''', D^{iv}, resp. met omtrekken Δ', Δ'', Δ''', Δ^{iv}. Op grond van opg. 2 en opg. 3 der voorafgaande § heeft men als bij elk dezer driehoeken de integratieweg dezelfde oriëntering heeft,

$$\left|\int_{\Delta'} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta''} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta'''} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{iv}} f(z)dz\right| \geq p,$$

zodat zeker één dezer integralen in absolute waarde $\geq \frac{p}{4}$ is. Die drie-driehoek, voor welke de integraal van $f(z)$ langs zijn omtrek, absoluut genomen, $\geqslant \frac{p}{4}$ is, noemen wij D_1 en zijn omtrek Δ_1. Uit D_1 krijgen we door verbinding der middens van de zijden zeker één driehoek D_2 (met omtrek Δ_2), waarvoor

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \geqslant \frac{p}{4^2}.$$

Zo voortgaande vinden we een rij driehoeken $D, D_1, D_2, \ldots$ (met omtrekken resp. $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$), waarvoor geldt

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \geqslant \frac{p}{4^n}.$$

Evenals bij het bewijs der stelling van Heine Borel is het duidelijk, dat de overeenkomstige hoekpunten van de driehoeken $D, D_1, D_2, \ldots$ een puntenrij vormen, die een limiet ζ bezit. Het is duidelijk, dat het punt ζ gelegen is binnen of op de omtrek van elk der driehoeken $D, D_1, D_2, \ldots$. Deze driehoeken liggen geheel in G dus ζ ook. Daar f(z) in G analytisch is, is f(z) analytisch in ζ zodat bij een willekeurige gegeven positieve ε een δ te vinden is met

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta)\right| < \varepsilon \quad , \text{ zodra } \quad |z-\zeta| < \delta \quad (\text{en } z \in G)$$

Derhalve $f(z) = f(\zeta)+(z-\zeta)f'(\zeta)+(z-\zeta)\Theta\varepsilon$, waarin $|\Theta|<1$. Daar elk der driehoeken $D, D_1, D_2, \ldots$ afmetingen heeft, die de helft zijn van die van zijn voorganger, bestaat er een getal N zodanig dat D_n geheel binnen de δ omgeving van ζ ligt als $n \geqslant N$. Voor $n \geqslant N$ heeft men derhalve

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} f(\zeta)dz + \int_{\Delta_n} (z-\zeta)f'(\zeta)dz + \int_{\Delta_n} (z-\zeta)\,\Theta\,\varepsilon\, dz,$$

dus wegens enige reeds bekende eigenschappen van integralen

$$\frac{p}{4^n} \leqslant |f(\zeta)|\int_{\Delta_n} dz + |f'(\zeta)|\left|\int_{\Delta_n} zdz\right| - |\zeta f'(\zeta)|\int_{\Delta_n} dz + \varepsilon\left|\int_{\Delta_n} (z-\zeta)\,\Theta\, dz\right| =$$

$$= 0 + 0 - 0 + \varepsilon\left|\int_{\Delta_n} (z-\zeta)\Theta\, dz\right|.$$

De laatste integraal is wegens de schattingsformule van de integralen, absoluut genomen, ten hoogste gelijk aan

$$1.\quad \max_{z\in\Delta_n} |z-\zeta|\cdot s_n,$$

waarin s_n de lengte aangeeft van de omtrek van D_n. Derhalve vindt men

$$\frac{p}{4^n} \leqslant \varepsilon\cdot s_n^2 = \varepsilon\,\frac{s_o^2}{2^{2n}},$$

dus $p \leqslant \varepsilon\, s_o^2$. Kiest men het willekeurige getal $\varepsilon < \frac{p}{s_o^2}$, dan is hiermee een contradictie gevonden zodat de onderstelling $p \neq 0$ onjuist is.

Derhalve $\int_{\Delta} f(z)dz = 0$.

Is vervolgens de integratieweg W een veelhoek V, dan is deze door diagonalen, die geheel in het inwendige van V liggen, te verdelen in driehoeken. Langs de omtrekken $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ van elk dezer driehoeken

$D_1, D_2, \ldots, D_n$ integrerend met een vaste oriëntatie heeft men

$$\int_{\Delta_k} f(z)dz = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dus na optelling vindt men wegens het wegvallen van de integraal over twee rechten, die in tegengestelde richting worden, doorlopen,

$$\int_V f(z)dz = 0.$$

Beschouw tenslotte een willekeurige enkelvoudige gesloten weg W, gelegen in G. Er bestaat dan een getal η zodanig, dat alle punten op afstand $\leq \eta$ van W verwijderd, geheel binnen G liggen. Beschouw al deze punten, die een, zoals men gemakkelijk aantoont, gesloten deelverzameling D van G vormen. Daar de functie f(z) continu is in G, is zij uniform continu in D, d.w.z. bij elk getal $\varepsilon > 0$ is een getal δ te vinden zodanig dat voor elk tweetal punten z' en z" in D geldt,

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}, \text{ zodra } |z'-z''| < \delta .$$

Hierbij stelt L voor de lengte van de gesloten weg W; het getal δ is onafhankelijk van de keuze der punten z' en z".

Om nu $\int_W f(z)dz$ te bepalen, kiezen we op W een aantal deelpunten $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z_0$ met de eigenschap, dat de gebroken rechte $z_0 z_1 z_2 \ldots z_{n-1} z_n$, die wij C noemen, geheel binnen D ligt en verder dat voor elk punt z op W, gelegen "tussen" z_h en z_{h+1}, geldt $|z-z_h| < \delta$ $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$. Dan heeft men als $\int_{(W)}$ en $\int_{(C)}$ resp. integralen voorstellen langs delen van W en C

$$\left| \underset{(W)}{\int_{z_h}^{z_{h+1}}} f(z)dz - \underset{(C)}{\int_{z_h}^{z_{h+1}}} f(z)dz \right| = \left| \underset{(W)}{\int_{z_h}^{z_{h+1}}} \{f(z)-f(z_h)\}\, dz - \underset{(C)}{\int_{z_h}^{z_{h+1}}} \{f(z)-f(z_h)\} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2L} L(z_h, z_{h+1}) + \frac{\varepsilon}{2L} |z_{h+1} - z_h| \leq \frac{\varepsilon}{L} L(z_h, z_{h+1})$$

Dus

$$\left| \int_W f(z)dz \right| = \left| \int_W f(z)dz - \int_C f(z)dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{L} \sum_{h=0}^{n-1} L(z_h, z_{h+1}) \leq \varepsilon .$$

Hieruit volgt het verlangde resultaat dat voor een willekeurige gesloten enkelvoudige weg W de integraal $\int_W f(z)dz = 0$ is. Voor een willekeurige niet enkelvoudige weg W is de stelling ook juist, want men kan deze beschouwen als som van een aantal enkelvoudige wegen.

Uit de thans gevonden stelling leiden wij een belangrijke eigenschap af.

Zij in een gebied G de functie f(z) analytisch. Beschouw twee willekeurige in G gelegen wegen W_1 en W_2, die beide twee punten a en b verbinden. Dan heeft men wegens het bovenstaande

$$\int_W f(z)dz = 0,$$

waarin W een weg voorstelt, die in a aanvangt, langs W_1 naar b loopt en van daar langs $W_2' = -W_2$ naar a gaat. Derhalve heeft men

$$\int_{W_1} f(z)dz = \int_{W_2} f(z)dz$$

zodat de waarde van de integraal $\int f(z)dz$ onafhankelijk is van de ligging van de weg, die a met b verbindt, mits deze geheel in het gebied G gelegen is, waarin f(z) analytisch is. Bij gevolg definiëert de integraal

$$\int_a^b f(z)dz$$

een eenwaardige functie F(b) van b, waarvan de waarde onafhankelijk is van de keuze van de in G gelegen weg, die a en b verbindt.

Wij bewijzen dat deze functie F(b) een analytische functie van b is. Daartoe beschouwen we een vast positief getal ε. Daar f(z) in b analytisch, dus continu is, bestaat er een getal δ, zodanig dat $|f(b')-f(b)| < \varepsilon$ is voor elk punt b' met $|b'-b| < \delta$. Dan heeft men

$$F(b')-F(b) = \int_a^{b'} f(z)dz - \int_a^b f(z)dz = \int_b^{b'} f(z)dz,$$

waarbij we in de laatste integraal de integratieweg rechtlijnig mogen kiezen. Wij vinden dan

$$\frac{F(b')-F(b)}{b'-b} - f(b) = \frac{\int_b^{b'} f(z)dz - \int_b^{b'} f(b)dz}{b'-b} = \frac{\int_b^{b'} \{f(z)-f(b)\} dz}{b'-b}.$$

De absolute waarde van het laatste lid is ten hoogste

$$|b'-b| \cdot \max \frac{|f(z)-f(b)|}{|b'-b|} \leqslant \varepsilon ,$$

zodat wij vinden dat de functie F(z) in b analytisch is, terwijl bovendien blijkt, dat $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ is.

Tenslotte vinden we nog dat voor een op een integratieweg, die de punten a en b verbindt, analytische functie f(z) geldt

$$\int_W f(z)dz = F(b) - F(a).$$

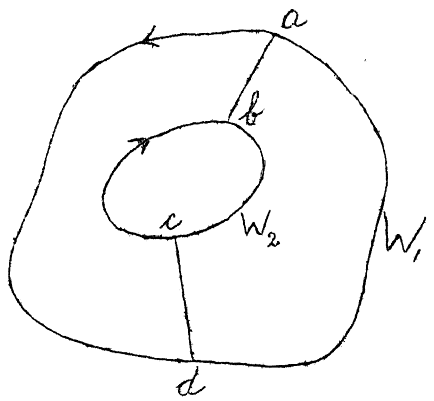
Immers linkerlid en rechterlid zijn beide functies van b en hebben resp. tot afgeleiden f(b) en F'(b) welke functies identiek zijn. Derhalve is de integraal, afgezien van een van b onafhankelijke constante, gelijk aan F(b) en door de keuze b = a vindt men dat die constante gelijk is aan -F(a), dus dat de beschouwde integraal gelijk is aan F(b) - F(a).

Van de eerste gevonden integraalstelling geven wij thans enige toepassingen.

§ 2. De residuenstelling.

Beschouw een gesloten georiënteerde enkelvoudige weg W_1, gelegen binnen een gebied G. Zij W_2 een eveneens gesloten enkelvoudige weg, die geheel binnen W_1 ligt en dezelfde oriëntering heeft als W_1. Als een functie f(z) analytisch is in G, heeft men

$\int_{W_1} f(z)dz = \int_{W_2} f(z)dz$. Immers door het aanbrengen van een tweetal verbindingsrechten ab en cd van de wegen W_1 en W_2 ontstaan twee gesloten wegen abW_2cdW_1a en aW_1dcW_2b binnen en op welke f(z) analytisch is, zodat over die wegen geldt $\int f(z)dz = 0$. Na optelling vindt men uit deze beweringen



$$\int_{W_1} f(z)dz - \int_{W_2} f(z)dz = 0.$$

Het is duidelijk, dat de bewering ook geldt als men niet weet of f(z) binnen W_2, maar nog wel dat f(z) op W_2 analytisch is.

Opg. 1. Bewijs $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$, waarin C een willekeurig gesloten positief georiënteerde weg is, die het punt a in zijn inwendige bevat.

Beschouw thans een aantal gelijk georiënteerde buiten elkaar gelegen gesloten enkelvoudige wegen $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Zij W een gesloten enkelvoudige weg met dezelfde oriëntatie, die de wegen $W_1, W_2, \ldots, W_n$ in zijn inwendige bevat. Dan geldt voor iedere functie f(z), die analytisch is binnen W (maar binnen $W_1, W_2, \ldots, W_n$ niet analytisch behoeft te zijn)

$$\int_W f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{W_\nu} f(z)dz.$$

Voor het bewijs verbinde men W met W_1, W_1 met W_2, W_2 met W_3, ..., W_n met W door "kanaaltjes" en merke op, dat het verschil van linker- en rechterlid der te bewijzen betrekking te schrijven is als een som van een aantal integralen genomen over gesloten wegen, waarop en waarbinnen f(z) analytisch is, zodat elk dezer integralen volgens het bovenstaande nul is.

De zojuist bewezen stelling wordt de residuenstelling genoemd. Zij leert ons de waarde van $\int_W f(z)dz$ berekenen, zonder dat binnen de gesloten weg W de functie f(z) overal analytisch behoeft te zijn. Is nl. f(z) slechts niet analytisch in de punten $z_1, z_2, \ldots, z_n$, dan is de integraal gelijk aan de som van een aantal termen. De eerste is afkomstig van $\int_{C_1} f(z)dz$, waarin C_1 b.v. een cirkeltje met middelpunt z_1 voorstelt, waarvan de straal zo gekozen is, dat geen der punten $z_2, z_3, \ldots, z_n$ gelegen is binnen C_1. Men noemt de waarde van de integraal $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)dz$ wel het residu van f(z) in het punt z_1.

Men ziet dan dat $\frac{1}{2\pi i}\int_W f(z)dz$ gelijk is aan de som der residuen van $f(z)$ in de binnen C gelegen eindig veel punten, waarin $f(z)$ niet regulier is.

N.B. Als $f(z)$ in een punt z_0 wel regulier is, is het residu van $f(z)$ in z_0 natuurlijk nul, zoals uit de integraalstelling van Cauchy volgt.

§3. Toepassingen van de integraalstelling van Cauchy.

Stelling. Als $f(z)$ in een gebied G analytisch is, dan geldt voor elke positief georiënteerde enkelvoudige in G gelegen gesloten weg C en elk punt z in het inwendige van C

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

Wij zien dus dat, als een analytische functie vastgelegd is op een gesloten enkelvoudige weg C, haar waarde in elk punt van het inwendige van C bepaald is.

Bewijs: Men heeft

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{s-z}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds =$$

$$= \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{ds}{s-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds,$$

waarin C_1 een in G gelegen cirkel voorstelt met z tot middelpunt. Wegens $\int_C \frac{ds}{s-z} = 2\pi i$ rest ons dus slechts aan te tonen, dat $\int_{C_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds$ gelijk is aan nul. Kies nu de straal r van cirkel C_1 zo klein dat voor elk punt s op C_1 geldt $|f(s)-f(z)| < \varepsilon$, hetgeen wegens de analyticiteit dus continuïteit van f in G (dus in z) mogelijk is. Dan heeft men

$$\left|\int_{C_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon\, 2\pi r}{r} = 2\pi\varepsilon,$$

dus de beschouwde integraal is inderdaad nul, waarmee de stelling bewezen is.

Stelling. Als een functie $f(z)$ in een gebied G analytisch is, bestaat in ieder punt z van G de functie $\frac{d^n f(z)}{dz^n} = f^{(n)}(z)$ en men heeft

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds,$$

waarin C wederom een gesloten enkelvoudige positief georiënteerde in G gelegen weg is, die het punt C in zijn inwendige bevat.

Bewijs: Voor $n = 0$ is de bewering identiek met die van de vorige stelling. Zij thans de bewering aangetoond voor $n-1$ in plaats van n. Daaruit leiden wij haar dan af voor n zelve. Wij mogen de willekeurige gesloten integratieweg C vervangen door een cirkel C_1 met straal r en middelpunt z. Nu is voor een willekeurig punt z_m met $|z-z_m| < \min(\frac{1}{2}r, \varepsilon_1)$

$$\frac{f^{(n-1)}(z_m)-f^{(n-1)}(z)}{z_m-z} - \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C_1}\left\{\frac{\dfrac{f(s)}{(s-z_m)^n} - \dfrac{f(s)}{(s-z)^n}}{z_m-z} - \frac{nf(s)}{(s-z)^{n+1}}\right\} ds =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C_1} f(s)\left\{\frac{1}{(s-z_m)^n(s-z)} + \frac{1}{(s-z_m)^{n-1}(s-z)^2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s-z_m)(s-z)^n} - \frac{n}{(s-z)^{n+1}}\right\} ds =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{C_1} f(s)\left\{\frac{1}{(s-z_m)^{n-\nu}(s-z)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-z)^{n+1}}\right\} ds.$$

Wij tonen aan dat elk der in het laatste lid optredende integralen willekeurig klein is. Immers men heeft voor de ν^e integraal

$$I_\nu = \int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{(s-z_m)^{n-\nu}} - \frac{1}{(s-z)^{n-\nu}}\right) ds =$$

$$= \int_{C_1}\frac{f(s)(z-z_m)\left\{(s-z_m)^{n-\nu-1}+(s-z_m)^{n-\nu-2}(s-z)+\ldots+(s-z)^{n-\nu-1}\right\} ds}{(s-z_m)^{n-\nu}\;(s-z)^{n+1}},$$

dus, wegens de bekende schattingsformule, aangezien $|z-z_m| < \varepsilon$, $|s-z| = r$ en

$$|s-z_m| \geqslant |s-z| - |z-z_m| \geqslant r-\tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}r$$

is,

$$|I_\nu| \leqslant \frac{M|z-z_m|\,(n-\nu)r^{n-\nu-1}\;2\pi r}{(\frac{1}{2}r)^{n-\nu}\;r^{n+1}} = \frac{M|z-z_m|.2^{n-\nu+1}(n-\nu)\pi}{r^{n+1}},$$

waarin M de bovengrens van $|f(z)|$ op C is.

Zij gegeven een vast positief getal ε. Door het getal ε_1 op passende wijze alleen afhankelijk van de vaste getallen n, r, M en ε te kiezen, vinden we voor $|z-z_m| < \min(\frac{1}{2}r, \varepsilon_1)$ de relaties

$$|I_\nu| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (\nu = 0,1,\ldots,n-1),$$

waaruit volgt, dat de afgeleide $\dfrac{d^nf(z)}{dz^n}$ bestaat en gelijk is aan de uitdrukking $\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds$.

<u>Stelling</u>. Als in een gebied G een functie f(z) eenmaal differentieerbaar is, is zij oneindig vaak differentieerbaar. Immers, als de functie f(z) eenmaal differentieerbaar is in G, is ze aldaar analytisch en dan bestaat

$$\int_W \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds$$

genomen over een in G gelegen weg W die z in zijn inwendige bevat. Volgens de vorige stelling bestaat dan de uitdrukking $\dfrac{d^nf(z)}{dz^n}$ in het beschouwde punt z.

Stelling van Morera. Als een functie $f(z)$ in een gebied G de eigenschap heeft dat voor elke gesloten weg W geldt $\int_W f(z)dz = 0$, is zij in elk punt van G analytisch.

Bewijs: Beschouw de integraal $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$, waarbij geïntegreerd wordt langs een willekeurige in G gelegen weg, die het punt z_0 met een willekeurig punt z van G verbindt. Daar voor iedere in G gelegen integratieweg van z_0 naar z de integraal dezelfde waarde bezit, is de waarde van de integraal, zoals wij reeds weten, een eenwaardige analytische functie $F(z)$ van z, die de eigenschap bezit, dat $F'(z) = f(z)$ is. Voor de functie F, die dus overal in G analytisch is, geldt de vorige stelling, die zegt, dat alle afgeleiden van F in z bestaan. Dus bestaat in elk punt van G de functie $\frac{d^2F(z)}{dz^2}$, derhalve wegens $F'(z) = f(z)$, bezit $f(z)$ in elk punt van G een afgeleide, die gelijk is aan $\frac{d^2F(z)}{dz^2}$, zodat $f(z)$ in G analytisch is.

Wij zien dus, dat in eenzelfde gebied het nulzijn van een "kringintegraal" van $f(z)$ en het analytisch zijn van $f(z)$ aequivalente begrippen zijn.

§4. Toepassingen van de residuenstelling.

Om $\int_W f(z)dz$ in bepaalde gevallen te berekenen, beschouwen we het geval dat $f(z)$ overal op en binnen de gesloten integratieweg W analytisch behalve in één punt a. Wij onderstellen echter dat aldaar wel de functie $F(z) = (z-a)\ f(z)$ analytisch is. De functie $F(z)$ is verder ook overal elders op en binnen W analytisch, zodat men heeft

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{F(z)}{z-a}\, dz,$$

dus $\frac{1}{2\pi i}\int_W f(z)dz = F(a) = \lim_{z\to a} F(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\ f(z)$. Het residu van $f(z)$ in het punt a is dus onder de beschouwde voorwaarde dat $(z-a)\ f(z)$ in a analytisch is gelijk aan $\lim_{z\to a}(z-a)\ f(z)$.

Toepassing. Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-2)(z-3)}.$$

Daar het enige binnen $|z|=1$ gelegen singuliere punt van $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z-3)}$ het punt $z=0$ is en daar in $z=0$ de functie $zf(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ analytisch is, heeft men

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-2)(z-3)} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\pi i}{3}.$$

Opg. 1. Bereken

$$\int_{|z|=2\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z-2)(z-3)}. \qquad (-\tfrac{2}{3}\pi i)$$

Opg. 2. Bereken

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z(z-2)(z-3)}. \qquad (0)$$

Opg. 3. Bereken

$$\int_{|z|=4} \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-3)}\, dz. \qquad (8\pi i)$$

Een analoge methode levert ons de waarde van de integraal

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z-4)} .$$

Het enige binnen de integratieweg gelegen singuliere punt is $z=1$. In dit punt is echter de met $(z-1)$ vermenigvuldigde integrand $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-4)}$ niet analytisch. Daar $F(z) = (z-1)^2 f(z)$, wel overal op en binnen $|z|=2$ analytisch is, gaan we uit van

$$F'(1) = \frac{1!}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{F(z)}{(z-1)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} f(z)dz.$$

Dus

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i F'(1) = 2\pi i\left(\frac{d}{dz}\,\frac{1}{z-4}\right)_{z=1} = \left(\frac{-2\pi i}{(z-4)^2}\right)_{z=1} = -\frac{2\pi i}{9}.$$

Opg. 4. Bereken

$$I = \int_{|z|=3} \frac{(z-1)^2}{z^3(z-2)^2}\, dz;$$

men vindt

$$I = 2\pi i\left\{\left(\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)^2\right)_{z=0} + \left(\frac{d}{dz}\,\frac{(z-1)^2}{z^3}\right)_{z=2}\right\} = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right) = 0.$$

Zij thans gevraagd de integraal

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$$

te berekenen. Om eerst vast te stellen dat deze integraal bestaat, beschouwen we $F(b) = \int_0^b \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$. Dan heeft men voor $b > c > 0$

$$\left|F(b)-F(c)\right| = \int_c^b \frac{dx}{x^4+5x^2+4} \leq \int_c^b \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right) < \varepsilon ,$$

zodra c voldoende groot is. Volgens het convergentiebeginsel van Cauchy bestaat dan $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$.

Opg. 5. Bewijs dat $\int_0^\infty \frac{f(x)}{g(x)}dx$ bestaat, waarin $f(x)$ en $g(x)$ veeltermen in x voorstellen en de graad van $g(x)$ tenminste 2 hoger is dan die van $f(x)$ en $g(x)$ geen nulpunten ≥ 0 bezit.

Opg. 6. Bewijs dat $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ bestaat, als er een vast getal x_0 bestaat zodanig dat voor alle $x > x_0$ de continue functie $\varphi(x)$ voldoet aan de voorwaarde dat $x^\lambda \varphi(x)$ begrensd is, waarin $\lambda - 1$ een natuurlijk getal is. Keren wij terug tot de berekening van $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$. Men vindt door de substitutie $x' = -x$ dat

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^4+5x^2+4}, \text{ dus } \quad I = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}.$$

Beschouw thans een gesloten integratieweg W, die bestaat uit het interval $(-N, N)$ der x-as en het in het eerste en tweede quadrant gelegen deel C van de cirkel $|z| = N$.

Men heeft

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4+5z^2+4}\right| \leq \pi N \max_{z\in C}\left|\frac{1}{z^4+5z^2+4}\right|.$$

Op $|z| = N$ heeft men

$$|z^4+5z^2+4| \geq |z^4| - 5|z^2| - 4 \geq N^4-5N^2-4 \geq \tfrac{1}{2}N^4$$

bij voldoende grote N. Dus $\max\limits_{z\in C} \frac{1}{|z^4+5z^2+4|} \leq \frac{2}{N^4}$, dus

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4+5z^2+4}\right| \leq \frac{2\pi}{N^3} < \varepsilon ,$$

als N voldoende groot wordt gekozen.

De enige punten binnen W waar $\frac{1}{z^4+5z^2+4}$ niet analytisch is, zijn $z=i$ en $z=2i$. Het residu van deze functie in $z=i$ is

$$\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{6i}$$

en in $z=2i$ is dit

$$\lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z^2+1)} = -\frac{1}{12i} .$$

Men vindt dus

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \tfrac{1}{2}\int_W \frac{dz}{z^4+5z^2+4} = \tfrac{1}{2}\, 2\pi i\left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

<u>Opg. 7</u>. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+z+1} \qquad \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

<u>Opg. 8</u>. Bewijs

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-i)(z-2i)} = 0.$$

<u>Opg. 9</u>. Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^4+2z^2+1} \qquad \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

<u>Opg. 10</u>. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z-1}{z^4+1}dz. \qquad \left(\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{2}\right)$$

<u>Opg. 11</u>. Bereken het verschil van de integralen

$$\int_{-\infty+bi}^{+\infty+bi} \frac{dz}{z^3+1} \quad \text{en} \quad \int_{-\infty-bi}^{+\infty-bi} \frac{dz}{z^3+1} ,$$

waarbij b een reëel getal voorstelt.

Opg. 12. Bereken voor reële a en b integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} \qquad \left(\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}\right)$$

Opg. 13. Bereken

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad \left(\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,.\pi\right)$$

Hoofdstuk V.

Reeksen.

§1. Algemene eigenschappen.

Beschouw een puntverzameling V in het complexe vlak. Onderstel dat op V oneindig veel functies $f_1(z)$, $f_2(z)$,... gedefinieerd zijn. Als er voor elke z in V bij ieder gegeven positief getal ε een getal N te bepalen is, zodanig dat

$$\left|f(z) - \{f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)\}\right| < \varepsilon \quad \text{zodra } n \geqslant N,$$

dan zegt men dat de reeks

(1) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots$$

convergeert en f(z) tot som heeft. Men schrijft dan wel

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots$$

Het convergentiebeginsel van Cauchy zegt, dat de nodig en voldoende voorwaarde voor de convergentie van reeks (1) is, dat bij iedere positieve ε voor elke p de uitdrukking

$$f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)$$

in absolute waarde kleiner is dan ε, zodra n groter is dan een eventueel van ε, z en van de functies f_1, f_2,... afhankelijk getal N.

Het is duidelijk, dat deze voorwaarde nodig is, want er bestaat als de reeks (1) tot de limiet f(z) convergeert, bij gegeven positieve ε een getal N zodanig dat

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ is voor alle } n > N.$$

Derhalve is zeker $\left|\sum_{\nu=1}^{n+p} f_\nu(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle $n > N$ en willekeurige natuurlijke p, dus

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f_\nu(z)\right| < \varepsilon .$$

De voorwaarde is ook voldoende. Beschouw nl. de variant

$$S_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z).$$

Zij gegeven een positief getal ε . Dan is er een getal N, zodanig dat

(2) $$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \quad \text{(p geheel en positief) als } n \geqslant$$

De getallen $S_{n+p}(z)$ $(p = 1,2,\dots)$ hebben dan de eigenschap dat ze alle, absoluut genomen, kleiner zijn dan

$$\max\left\{ |S_N(z)| + \varepsilon \, , \, |S_1(z)| \, , |S_2(z)| \, , \dots , |S_{N-1}(z)| \right\}$$

en vormen dus een oneindige begrensde verzameling, die volgens de stelling van Bolzano-Weierstrass tenminste één verdichtingspunt bezit. Onze bewering is aangetoond, als wij laten zien, dat de verzameling precies één verdichtingspunt bezit. Dit is evident, want waren er meer dan één dus tenminste twee, die wij a en b noemen, met $a \neq b$, dan was er bij ieder getal N_s een getal $n > N_s$ te vinden waarvoor geldt

$$|S_n(z) - a| < \frac{|a-b|}{3}$$

en ook een getal $m > N_s$ met

$$|S_m(z) - b| < \frac{|a-b|}{3} \, ,$$

dus boven ieder getal N_s waren getallen m en n te vinden met

$$|S_n(z) - S_m(z)| > |a-b| - \frac{|a-b|}{3} - \frac{|a-b|}{3} = \frac{|a-b|}{3}$$

in strijd met (2).

<u>Definitie</u>: Geldt voor iedere gehele positieve n de relatie

$$|f_n(z)| \leqslant F_n(z),$$

dan zegt men dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$ tot majorante heeft

Men schrijft wel $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z) << \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$.

<u>Definitie</u>: Men zegt dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ absoluut convergeert als de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)|$ eveneens convergeert.

<u>Stelling</u>. Heeft een reeks een convergente majorante, dan convergeert zij zelf absoluut. Immers bij elke $\varepsilon > 0$ is een getal N te vinden, zodanig dat $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} F_\nu(z) < \varepsilon$ voor alle $p > 0$ en $n \geqslant N$, dus

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |f_\nu(z)| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+p} F_\nu(z) < \varepsilon,$$

voor alle $p > 0$ en $n \geqslant N$.

<u>Gevolg</u>. Als een reeks absoluut convergeert, convergeert zij.

Voor een convergente reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ merken wij nog op, dat

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = 0,$$

want voor p = 1 heeft men $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+1} f_\nu(z)\right| = \left|f_{n+1}(z)\right| < \varepsilon$, als $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Verder merken wij op, dat de termen van een convergente reeks, absoluut genomen begrensd zijn want voor $n > N$ heeft men

$$\left|f_{n+1}(z)\right| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{n+1} f_\nu(z)\right| < 1 \quad \text{voor } n \geqslant N,$$

dus elk der termen $f_\nu(z)$ heeft de eigenschap, dat

$$|f_\nu(z)| < \max(1, |f_1(z)|, |f_2(z)|, \ldots, |f_{N-1}(z)|).$$

Definitie: Men noemt een reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in een puntverzameling V gelijkmatig of uniform convergent, als voor iedere z in V bij iedere gegeven positieve ε een getal N bestaat, dat onafhankelijk is van z, met de eigenschap

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z) - f(z)\right| < \varepsilon ,$$

zodra $n \geqslant N$ gekozen wordt.

Stelling. De noodzakelijk en voldoende voorwaarde opdat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ uniform convergent is in een puntverzameling V, is dat formule (2) geldt voor elke $\varepsilon > 0$, elke natuurlijke p en elke $n \geqslant N$, waarin N onafhankelijk is van z.

Bewijs. Zij de convergentie uniform. Bij gegeven $\varepsilon > 0$ heeft men dan $\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z) - F(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, als $n > N$, waarin N onafhankelijk is van z.

Door deze relatie af te trekken van dezelfde relatie met n + p in plaats van n vindt men

$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f_\nu(z)\right| < \varepsilon$, zodra $n > N$, onafhankelijk van z voor alle natuurlijke p, waarmee het ene gedeelte der bewering bewezen is.

Zij thans omgekeerd gegeven dat voor iedere natuurlijke p en iedere z in V geldt

(3) $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f_\nu(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, zodra n groter is dan een van z onafhankelijk getal N.

Dus

(4) $\left|\sum_{\nu=1}^{n+p} f_\nu(z) - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor iedere $n \geqslant N$ en elke natuurlijke p.

Uit (3) volgt in ieder geval dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ convergeert. Dus bestaat de limiet

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n+p} f_\nu(z) = f(z).$$

Dus

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n+p} f_\nu(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ als } p > P$$

Derhalve levert (4)

$$\left|f(z) - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\right| < \varepsilon\ , \text{ als } n > N, \text{ onafhankelijk van } z.$$

Hiermee is het tweede deel van de bewering bewezen. Een stelling die wij veelvuldig zullen toepassen is de volgende:

Stelling: Bezit de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in een puntverzameling V een uniform convergente majorante $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$, dan convergeert de oorspronkelijke reeks in V eveneens uniform.

Immers voor elke natuurlijke p en elke $\varepsilon > 0$ heeft men voor iedere $n > N$, waarbij N onafhankelijk is van z

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} F_\nu(z) < \varepsilon\ .$$

In het beschouwde geval weten wij uit een voorgaande stelling reeds, dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in V eveneens absoluut convergent is.

Gevolg. ("M-test van Weierstrass"). Geldt voor een reeks $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)$ in een gebied G de relatie $|f_\nu(z)| \leq M_\nu$ voor alle $\nu \geq N$ en is $\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu$ convergent, dan is de reeks $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)$ absoluut en uniform convergent in G.

Stelling. Als elk der functies $f_\nu(z)$ in een puntverzameling V continu is en als de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in V uniform convergeert tot een limiet f(z), dan is de functie f(z) in V eveneens continu.

Bewijs. Men heeft

$$f(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z) + r_n(z),$$

waarin voor elke z in V geldt $|r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, als $n > N(\varepsilon)$.

Beschouw een willekeurig punt a in V. Dan geldt dus ook $|r_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$, als $n > N(\varepsilon)$. Derhalve

$$|f(z) - f(a)| = \left|\sum_{\nu=1}^{N} \{ f_\nu(z) - f_\nu(a)\} + r_N(z) - r_N(a)\right|$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{N} |f_\nu(z) - f_\nu(a)| + |r_N(z)| + |r_N(a)|.$$

Daar $f_\nu(z)$ in V continu is, is

$$|f_\nu(z) - f_\nu(a)| < \frac{\varepsilon}{3N}, \text{ als } \quad |z-a| < \delta_\nu\ ,$$

waarin het getal δ_ν afhangt van de getallen ε , 3N, a en . Zij $\min\limits_{\nu=1,\ldots N} \delta_\nu = \delta$.
Voor $|z-a| < \delta$ heeft men dan

$$\left|f(z) - f(a)\right| < N\frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{zodra } |z-a| < \delta ,$$

dus f(z) is continu in het punt a van V.
N.B. Wij hebben bij het bewijs van deze stelling slechts gebruik gemaakt van de continuïteit van de functies $f_\nu(z)$ in de omgeving van een punt a van V. We zien dus dat f(z) continu is in elk punt a van V, waar de functies $f_\nu(z)$ continu zijn.

Verder merken wij op, dat als we een afgesloten deelverzameling D van V beschouwen, die a in haar inwendige bevat, de functies $f_\nu(z)$ in D alle uniform continu zijn, dus dan is het getal δ voor alle punten a van D hetzelfde te nemen, zodat dan f(z) in D ook uniform continu is. Trouwens, dit volgt ook daaruit, dat wij bewezen dat f(z) in V continu is, dus f(z) is op iedere afgesloten deelverzameling D van V uniform continu.

Stelling. Beschouw een rij van in een puntverzameling V continue functies $f_1(z)$, $f_2(z)$,... Laat de rij in V uniform convergeren tot een limiet f(z). Zij W een willekeurige in V gelegen eindige weg. Dan heeft men

$$\int_W f(s)ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_W f_\nu(s)ds.$$

Bewijs. Daar elk der functies $f_\nu(z)$ in V continu is, is elk der functies in V, dus langs W, integreerbaar. Daar de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ uniform convergeert, is de som f(z) ervan continu in V, dus in V (derhalve langs W) integreerbaar. In de te bewijzen betrekking bestaan dus alle integralen. Om de betrekking nu aan te tonen, schrijven we

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z) + r_n(z).$$

Dus

$$\int_W f(s)ds = \sum_{\nu=1}^{n} \int_W f_\nu(s)ds + \int_W r_n(s)ds.$$

We merken op dat de laatste integraal bestaat, daar die een lineaire combinatie is van een aantal integralen, die, zoals wij zojuist opmerkten, alle bestaan.

Wegens de uniforme convergentie der reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in V, dus op W, heeft men $|r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$ als $n \geq N$, waarin N onafhankelijk is van z. Hierin is ε een willekeurig gegeven positief getal, terwijl L de lengte van de weg W voorstelt. Derhalve is

$$\left|\int_W r_n(s)ds\right| < \frac{\varepsilon}{L}.L = \varepsilon ,$$

waarmee de bewering is aangetoond.

Stelling. Als elke term der in een gebied G uniform convergente reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ in G analytisch is, is dat ook het geval met de som der reeks. Immers men heeft als W een willekeurige gesloten weg in G voorstelt

$$\int_W f_\nu(s)ds = 0 \qquad (\nu = 1,2,\dots)$$

Verder is

$$\int_W f(s)ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_W f_\nu(s)ds = 0.$$

Dus wegens de stelling van Morera is dan f(z) in G analytisch.
Wij merken verder nog op, dat elke term van onze reeks, wegens het analytisch zijn ervan, p× differentieerbaar is. Ook f(z) is analytisch in G, dus p × differentieerbaar. Wij laten nog zien, dat

$$\frac{d^p f(z)}{dz^p} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d^p f_\nu(z)}{dz^p} .$$

Immers men heeft voor een willekeurige in G gelegen gesloten weg W, die het punt z in zijn inwendige bevat,

$$(4) \qquad \frac{d^p f(z)}{dz^p} = \frac{p!}{2\pi i} \int_W \frac{f(s)}{(s-z)^{p+1}} ds = \frac{p!}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_W \frac{f_\nu(s)}{(s-z)^{p+1}} ds,$$

aangezien de functies $\frac{f_\nu(s)}{(s-z)^{p+1}}$ voor elke s op W analytisch zijn en

aangezien de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu(s)}{(s-z)^{p+1}}$ op W uniform convergeert tot de som $\frac{f(s)}{(s-z)^{p+1}}$. Voor het laatste lid in (4) kan men nog schrijven $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d^p f_\nu(z)}{dz^p}$, waarmede de bewering aangetoond is.

§ 2. Machtreeksen.

Wij gaan de in § 1 gevonden resultaten toepassen op het geval, dat $f_\nu(z) = a_{\nu-1}(z-z_0)^{\nu-1}$, zodat wij nu reeksen beschouwen, die de gedaante

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

bezitten. Dergelijke reeksen noemt men machtreeksen.
Stelling. Als een machtreeks convergeert in een punt $z_1 \neq z_0$, dan convergeert deze voor iedere z met $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.
Bewijs. Daar de reeks in z_1 convergeert, is elke term begrensd, dus voor alle n geldt $|a_n(z_1-z_0)^n| < M$,
dus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^\nu (z_1-z_0)^\nu << M \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^\nu .$$

De laatste reeks is een meetkundige reeks met reden $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$, zodat de reeks $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ een convergente majorante bezit, waarmee de bewering bewezen is,

Gevolg. Als een reeks $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ divergeert (= niet convergeert) in een punt z_1, dan divergeert deze in elk punt z met $|z-z_0| > |z_1-z_0|$, want gesteld dat de reeks in zo'n punt z convergeerde, dan zou deze wegens de zo juist bewezen stelling eveneens convergeren in het punt z_1, wat evenwel niet het geval is.

Wij verdelen nu de reële getallen in twee klassen A en B. De klasse A bevat alle getallen a waarbij een z te vinden is met $a < |z-z_0|$, zodanig dat de reeks $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ in z convergeert.

De klasse B bevat al die getallen b met de eigenschap, dat er een getal z bestaat met $|z-z_0| < b$, zodanig dat die reeks in z divergeert. Op grond van het bovenstaande is het duidelijk, dat ieder getal a uit A kleiner is dan ieder getal b uit B. Men ziet verder onmiddellijk in, dat elk reëel getal in een der klassen A of B moet liggen, afgezien van ten hoogste één reëel getal R. Dat er geen twee verschillende van dergelijke getallen R en S zijn, is evident, want zij $R < S$, dan is R zo, dat voor iedere z met $|z-z_0| > R$ de beschouwde reeks niet convergeert en voor iedere z met $|z-z_0| < S$ deze reeks wel convergeert, zodat b.v. in het punt $\frac{R+S}{2}$ de reeks tegelijkertijd wel en niet convergent zou zijn. Onze klasse-indeling definieert volgens Dedekind een reëel getal R, dat wij de convergentiestraal van onze reeks noemen. Voor iedere z met $|z-z_0| < R$ convergeert deze dus en voor iedere z met $|z-z_0| < R$ divergeert deze. In hoeverre de beschouwde reeks op de cirkel $|z-z_0| = R$ convergeert, laten wij thans buiten beschouwing. De cirkel $|z-z_0| = R$ noemt men de convergentiecirkel van onze reeks. Er binnen convergeert deze dus en er buiten divergeert de reeks. Er kunnen zich, aangezien $R \geq 0$ is, de volgende gevallen voordoen:

1°. $R = 0$. De reeks convergeert dan nergens behalve in z_0 zelf.

2°. Het eindige getal R is groter dan 0. De reeks heeft een gebied van convergentie en een gebied van divergentie.

3°. $R = \infty$. De reeks convergeert dan in het gehele eindige z-vlak.

Het is duidelijk, dat in dit geval de klasse B leeg is. Wij merken nog op, dat de convergentie binnen de convergentiecirkel absoluut is. Immers zij z willekeurig met $|z-z_0| < R$. Kies een getal z' met $|z'-z_0| < R$ en $|z-z_0| < |z'-z_0|$. Onze reeks convergeert dan in z', dus elke term $a_n (z'-z_0)^n$ is absoluut genomen $\leq M$. Derhalve

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (z'-z_0)^n \left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n \right| << M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right|^n$$

en de laatste majorante convergeert.

Stelling. Is de convergentiestraal R van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ eindig, dan convergeert deze reeks uniform op elke afgesloten begrensde deelverzameling D van het inwendige van de convergentiecirkel.

Bewijs: Allereerst merken wij op, dat er een getal $a < R$ bestaat, zodanig dat voor ieder punt d van D geldt $|d-z_o| \leq |a-z_o|$.

Onderstel n.l. dat er niet een zodanig punt a te vinden was. Zij $z_1, z_2, \ldots$ een binnen de convergentiecirkel gelegen rij met $|z_o-z_k| < |z_o-z_{k+1}|$, die convergeert naar een punt p van deze cirkel. Bij iedere z_k bestaat dan een in D gelegen punt d_k met $|d_k-z_o| > |z_k-z_o|$. De rij $d_1, d_2, \ldots$, gelegen in de afgesloten verzameling D, bezit tenminste één in D gelegen verdichtingspunt d, dat binnen de convergentiecirkel moet liggen. Omdat D een deelverzameling is van de verzameling $|z-z_o| < R$ heeft men $|d-z_o| = s < R$. Dus er bestaat bij iedere positieve ε een getal N, zodanig dat voor $n > N$ geldt $|d_n-d| < \varepsilon$, dus $|d_n-z_o| < s+\varepsilon$. Kies nu $\varepsilon < \frac{1}{2}(R-s)$. Voor alle voldoengrote k echter hebben wij $|z_k-p| < \varepsilon$ dus $|z_k-z_o| > R-\varepsilon$, dus voor alle voldoende grote k geldt $|d_k-z_o| > R-\varepsilon > s+\varepsilon > |z_k-z_o|$, waarmede een contradictie is gevonden. Er bestaat dus een getal $a < R$ met $|d-z_o| \leq a$ voor alle d in D, Onze reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ heeft dan de in D uniform convergente majorante $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z-z_o}{a-z_o}\right|^n$. Hierin voldoet het getal M aan $|a_n(a-z_o)^n| < M$; dat dit getal M bestaat, weten wij op grond van het feit, dat de oorspronkelijke reeks in a (welk punt binnen de convergentiecirkel lag) convergeert.

N.B. In het geval dat $R = \infty$, weten wij het bestaan van het getal a direct op grond van het feit, dat D begrensd is.

Hoewel wij in het bovenstaande het bestaan van een convergentiestraal R hebben aangetoond, geeft de gevolgde methode ons niet de waarde van R. Om deze te vinden, beschouwen wij bij de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ de rij getallen

$$|a_o|,\ |a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|a_n|},\ \ldots$$

Zij $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Wij laten hierbij de gevallen, dat deze limiet 0 of ∞ is, toe; in die gevallen is R resp. ∞ of 0. Voor voldoende grote n heeft men dan voor elke positieve $\varepsilon < 1$ de relatie $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{R(1-\varepsilon)}$,

dus $|a_n(z-z_o)^n| < \dfrac{|z-z_o|^n}{R^n(1-\varepsilon)^n}$, dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n << \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_o|}{R(1-\varepsilon)}\right)^n .$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ convergeert dus voor alle z met $|z-z_o| < R$, immers de majorante convergeert voor $|z-z_o| < R$, omdat als $|z-z_o| < R$ is, een positieve ε te vinden is, die voldoet aan $|z-z_o| < R(1-\varepsilon)$. De convergentiestraal van onze reeks is dus $\geqslant R$.

Anderzijds divergeert onze reeks voor alle z met $|z-z_o| > R$. Immers uit

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ volgt, dat voor een oneindige deelrij $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ der getallen $a_1, a_2, \dots$ voor voldoende grote h geldt

$$\left| \sqrt[n_h]{|a_{n_h}|} - \frac{1}{R} \right| < \frac{\varepsilon}{R}, \quad \text{dus} \quad \sqrt[n_h]{|a_{n_h}|} > \frac{1-\varepsilon}{R},$$

dus

$$\left| a_{n_h}(z-z_0)^{n_h} \right| > \left(\frac{(1-\varepsilon)|z-z_0|}{R}\right)^{n_h} > 1,$$

als maar ε klein genoeg gekozen wordt (n.l. $\varepsilon < \frac{|z-z_0|-R}{|z-z_0|}$). Omdat dus $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n \neq 0$, zal de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dus voor geen enkele z met $|z-z_0| > R$ convergeren, want bij convergentie is $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n = 0$. Onze reeks divergeert dus voor alle punten z met $|z-z_0| > R$.

De convergentiestraal is dus juist gelijk aan $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Dat het gedrag van een reeks op de convergentiecirkel zelf onbepaald is, blijkt uit de volgende drie voorbeelden, waarin de convergentiecirkel de cirkel $|z| = 1$ is.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ is voor geen enkel punt der eenheidscirkel convergent, want in een convergente reeks nadert de algemene term tot een limiet nul, maar $\lim_{n\to\infty} |z^n| = 1$, dus $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$. Bij de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ heeft men voor $z = +1$ de divergente harmonische reeks, maar voor $z = -1$ krijgt men een convergente reeks. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ heeft voor elke z op de eenheidscirkel de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tot majorante en convergeert dus absoluut en uniform voor alle z op de eenheidscirkel.

Een eigenschap, die vaak gemakkelijk voert tot het vinden van een convergentiestraal is de volgende gegeven door d'Alembert

Stelling. Als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ de eigenschap heeft dat $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ bestaat, dan convergeert zij voor $|z-z_0| < R$ en voor $|z-z_0| > R$ divergeert zij.

Bewijs: Zij ε een willekeurig positief getal. Voor voldoende grote n geldt dan $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{R}(1+\varepsilon)$ dus voor elke z met $|z-z_0| < R$ heeft men

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| < \frac{|z-z_0|(1+\varepsilon)}{R},$$

dus

$$\left|\frac{a_{n+h}(z-z_0)^{n+h}}{a_n(z-z_0)^n}\right| < \left(\frac{|z-z_0|(1+\varepsilon)}{R}\right)^h,$$

dus

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_{n+h}(z-z_0)^{n+h} << |a_n||z-z_0|^n \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|(1+\varepsilon)}{R}\right)^h$$

en als men ε zo klein kiest, dat $\frac{|z-z_0|(1+\varepsilon)}{R} < 1$ is, dan convergeert de laatste reeks, dus ook de oorspronkelijke.

Verder heeft men als al weer ε een positief getal < 1 voorstelt voor voldoende grote n $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \frac{1}{R}(1-\varepsilon)$. Gesteld dat de gegeven reeks in een punt z met $|z-z_o| > R$ convergeerde, dan convergeerde zij absoluut voor iedere z_1 met $R < |z_1-z_o| < |z-z_o|$. Men had dan

$$\left|\frac{a_{n+1}(z_1-z_o)^{n+1}}{a_n(z_1-z_o)^n}\right| > \frac{|z_1-z_o|}{R(1-\varepsilon)}, \text{ dus } \left|\frac{a_{n+h}(z_1-z_o)^{n+h}}{a_n(z_1-z_o)^n}\right| > \left(\frac{|z_1-z_o|}{R(1-\varepsilon)}\right)^h,$$

dus

$$\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{|z_1-z_o|}{R(1-\varepsilon)}\right)^h < < \frac{1}{|a_n|\,|z-z_o|^n}\sum_{h=0}^{\infty}|a_{n+1}|\,|z-z_o|^{n+1},$$

zodat ook de reeks $\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{|z_1-z_o|}{R(1-\varepsilon)}\right)^h$ in z_1 zou convergeren, maar als men ε klein genoeg kiest, is $\frac{|z_1-z_o|}{R(1-\varepsilon)} > 1$, zodat die reeks dan divergeert. Hiermede is de bewering bewezen.

Opg. 1. Bepaal de convergentiestraal van de reeksen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\log n};\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n}\, z^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{\log n}$$

§3. Ontwikkeling van analytische functies in machtreeksen.

Wij bewezen reeds, dat een uniform convergente reeks van analytische functies een analytisch functie voorstelt. Daar de functies $a_n(z-z_o)^n$ voor $n = 0, 1, \ldots$ analytisch zijn, stelt de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ in ieder afgesloten deelgebied van het inwendige van de convergentiecirkel (in zo'n deelgebied convergeert de reeks n.l. uniform) een analytische functie voor. Men heeft dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$$

is analytisch in ieder afgesloten deelgebied D van het gebied $|z-z_o| \leq R$. Beschouw nu verder zo'n deelgebied D. Wij weten verder, dat daarin geldt

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_o)^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_o)^{n-2}, \text{ enz.},$$

dus

$$f'(z_o) = a_1; \quad f''(z_o) = 2!a_2; \ldots; f^{(m)}(z_o) = m!a_m, \ldots,$$

derhalve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_o)^n}{n!}f^{(n)}(z_o) \quad \text{(reeksontwikkeling van Taylor).}$$

Hiermede is voor een analytische functie in elk punt binnen de convergentiecirkel de formule van Taylor gevonden.

Wij zien dus dat iedere convergente machtreeks in een afgesloten gebied een analytische functie voorstelt. Ook het omgekeerde is waar, n.l. dat een analytische functie in zeker afgesloten gebied door een machtreeks voor te stellen is.

Beschouw n.l. een in een gebied G analytische functie f(z). Zij z een punt van G. Zij C een cirkel met middelpunt z_0 en straal r, die geheel binnen G ligt en zij z een willekeurig punt van C. Dan heeft men volgens Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

Wij vinden verder wegens $|z-z_0| = \Theta|z_0-s|$, met $0 < \Theta < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)ds}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)ds}{(s-z_0)(1-\frac{z-z_0}{s-z_0})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)(z-z_0)^n\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}.$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}$ convergeert op C uniform tot de limiet $\frac{f(s)}{s-z}$. Immers de restterm bij afbreken na de N^e term is $R_N = \frac{f(s)(z-z_0)^N}{(s-z_0)^{N+1}}$, dus

$$|R_N| = \frac{|f(s)|}{|z_0-s|}\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right|^N < \frac{M}{r}\Theta^N < \varepsilon$$

(waarin M de bovengrens van $|f(z)|$ op de afgesloten verzameling C voorstelt), als N voldoende groot gekozen wordt. Dit getal N is onafhankelijk van s, de convergentie is dus uniform. Derhalve kunnen wij integratie en sommatie verwisselen en vinden dan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C\frac{f(s)(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

waarmee de bewering bewezen is.

De vraag is nu of meer dergelijke ontwikkelingen mogelijk zijn voor een analytische functie. Hierop geeft ons een antwoord de <u>Identiteitsstelling van machtreeksen</u>. Als voor zeker gebied G dat z_0 bevat een analytische functie f(z) twee ontwikkelingen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

bezit, geldt $a_n = b_n$ voor $n = 0,1,2,\ldots$.

<u>Bewijs</u>: Door $z = z_0$ te nemen ziet men direct, dat voor n=0 de bewering juist is. Onderstel thans, dat men reeds weet, dat $a_n = b_n$ voor alle natuurlijke $n < N$. Dan heeft men

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=N}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

voor alle z in G, dus

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-N} = \sum_{n=N}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-N}$$

voor alle $z \neq z_0$ in G. Laat men z in G tot z_0 naderen, dan naderen linker- en rechterlid van de laatste betrekking resp. tot a_N en b_N, dus $a_N = b_N$.

Opg. 1. Ontwikkel de functie

$$f(z) = \int_0^z \frac{dw}{1-2aw+w^2},$$

waarin $-1 \leq a \leq 1$, in een machtreeks in z. Bepaal de convergentiestraal van deze reeks.

Beschouw thans een rij binnen een cirkel $|z-z_0| = R$ analytische functies $f_1(z)$, $f_2(z)$, . . . Laat op elke afgesloten deelverzameling D van het inwendige van deze cirkel de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ convergeren (dus uniform convergeren) tot een limietfunctie $f(z)$. Voor de functies $f_n(z)$ heeft men in D

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(z-z_0)^k \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Dan geldt $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, waarin $a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$. Immers men weet, dat de beschouwde functie $f(z)$ analytisch is in D en men mag de reeks $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ van analytische functies in het gebied D termsgewijze differentiëren en vindt dan voor ieder natuurlijk getal k

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Derhalve

$$\frac{a_k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{k!}, \quad \text{dus} \quad a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}. \text{ Dus } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Toepassing. Op elk afgesloten deelgebied D van de eenheidscirkel (waarvoor dus voor elke z in D geldt $|z| < a < 1$) beschouwe men de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ met $f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}$. Men heeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{-n}-1} << \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{-n}-1} << \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}a^{-n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n,$$

zodat die reeks uniform in D convergeert tot een limiet $f(z)$. Voor deze functie $f(z)$ geldt in D, wegens

$$f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{t=1}^{\infty} z^{tn},$$

de betrekking

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} z^{tn} = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{t|m} 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) z^m.$$

Onder de functie $\tau(m) = \sum_{t|m} 1$ verstaat men het aantal delers van het getal m.

Opg. 2. Bewijs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(m) z^m$,
waarin $\sigma(m)$ de som der delers van het getal m aangeeft.

Opg. 3. Bewijs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$,
waarin $a_k = k\zeta(k+2)$.

Hierbij verstaat men onder $\zeta(s)$ de som $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Is s reëel, dan convergeert deze, zoals bekend is voor $s > 1$.

Tenslotte bewijzen we nog de volgende belangrijke

Stelling. Een in een gebied G analytische functie f(z) kan in het inwendige van het analyticiteitsgebied G geen maximale waarde van de modulus $|f(z)|$ bezitten, tenzij f(z) in het gehele gebied G constant is.

Opmerking. Een gevolg hiervan is dus dat de maximale waarde van f(z) voor een in een gebied G analytische functie f(z) uitsluitend op de rand van G kan liggen.

Bewijs: Aangezien f(z) in G analytisch is, geldt bij een willekeurig punt z_0 van G de convergente ontwikkeling

$$f(z) = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots$$

met convergentiestraal R.

Aangezien f(z) niet constant is, bestaat er onder de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots$ een eerste coëfficiënt, die $\neq 0$ is. Noem deze a_k. Dan heeft men dus

$$f(z) = a_0+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\dots .$$

Voor de getallen a_0 en a_k stellen we

$$|a_0| = A_0; \quad |a_k| = A_k; \quad \arg a_0 = \alpha_0; \quad \arg a_k = \alpha_k.$$

Wij beschouwen nu die punten z waarvoor geldt

$$\arg(z-z_0) = \frac{1}{k}(\alpha_0 - \alpha_k),$$

dus

$$\arg(z-z_0)^k = \arg a_0.$$

Noem $|z-z_0| = r$; dan heeft men

$$|f(z)| \geq |a_0+a_k(z-z_0)^k| - |a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\dots| =$$

$$= A_0+A_k r^k - r^{k+1}|a_{k+1}+\dots| = A_0+r^k(A_k - r|a_{k+1}+\dots|).$$

Wegens de convergentie van de reeksontwikkeling voor f(z) is ook de uitdrukking $a_{k+1}+\dots$ voor $r < R$ convergent, dus absoluut genomen, begrensd. Derhalve kan men r zo klein kiezen, dat

$$A_k - r|a_{k+1}+\dots| > \tfrac{1}{2}A_k;$$

zijn alle coëfficiënten $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ gelijk aan nul, dan geldt de laatste ongelijkheid natuurlijk eveneens. Wij vinden derhalve

$$|f(z)| \geq A_0+\tfrac{1}{2}A_k r^k = |f(z_0)| + \tfrac{1}{2}A_k r^k > |f(z_0)|$$

voor $0 < r < R$. Er is dus steeds een richting vanuit het punt z_0 te vinden, waarvoor in zekere omgeving van z_0 geldt $|f(z)|>|f(z_0)|$. Hiermee is de stelling bewezen.

Hoofdstuk VI
Analytische voortzetting.

§1. Het begrip analytische voortzetting.

Indien men de waarde van een willekeurige functie geeft in een eindig aantal punten van het complexe vlak, is deze daardoor in het gehele platte vlak nog niet vastgelegd. Zelfs als men de functiewaarden b.v. op het segment (0,1) van de reële as voorschrijft, ligt de functie evenmin vast. Anders wordt dit, als men aan de functie speciale voorwaarden oplegt. Zo is b.v. een gehele rationale functie van de 3e graad reeds vastgelegd door haar waarden in 4 punten. En een continue functie, gegeven op het segment (0,1) kan in de omgeving van dit segment niet willekeurig gekozen worden.

Heeft men te doen met een analytische functie, dan is, zoals wij zullen zien die vrijheid van keuze nog geringer. Zo is b.v. de waarde van een op en binnen de eenheidscirkel analytische functie in een punt z binnen die cirkel vastgelegd door de waarden der functie op de eenheidscirkel. Immers volgens Cauchy geldt in zo'n punt z

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=1}\frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

In dit verband bewijzen wij het volgende belangrijke theorema:

Identiteitsstelling voor analytische functies.

Beschouw 2 functies $f(z)$ en $g(z)$, die beide analytisch zijn in een gebied G. Als in iedere omgeving van een punt z_0 in G een punt gelegen is, waar de beide functies $f(z)$ en $g(z)$ gelijk zijn, dan zijn die functies in het gehele gebied G gelijk.

Voor het bewijs beschouwen we de grootste cirkel met middelpunt z_0, die geheel in G ligt. Binnen deze bezitten $f(z)$ en $g(z)$ reeksontwikkelingen, die in zoveel punten dezelfde waarde bezitten, dat zij volgens de identiteitsstelling van machtreeksen, in elk punt van die cirkel C_0 dezelfde waarde bezitten.

Beschouw nu een willekeurig punt z van G en verbind dit door een geheel in G gelegen weg W met z_0. Aan de topologie ontlenen we het bestaan van een positief getal r, zodanig dat de afstand van W tot de rand van G groter is dan r. Wij verdelen de weg W in gedeelten door punten $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$ zodanig dat elk der wegsegmenten $(z_0,z_1),(z_1,z_2),\ldots,(z_{n-1},z_n)$ een lengte bezit die $< r$ is. Beschrijf met het punt z_k als middelpunt een cirkel C_k, die geheel in G ligt

($k = 1,2,\ldots,n$). De straal van elke dier cirkels neme men $= r$, dus voor $k = 0,1,\ldots$ bevat de cirkel C_k het punt z_{k+1} in zijn inwendige.

De functies $f(z)$ en $g(z)$ hebben in C_0 dezelfde waarden dus ook in het binnen C_0 gelegen punt z_1 en zelfs in een binnen C_0 gelegen omgeving van z_1. Derhalve stemmen $f(z)$ en $g(z)$ overeen overal binnen C_1, dus in een punt z_2 met zekere omgeving ervan, die geheel binnen C_1 ligt, enz. Na n stappen ziet men dat $f(z)$ en $g(z)$ ook in het oorspronkelijke gegeven punt $z = z_n$ overeenstemmen.

De methode in het bewijs gebruikt, noemt men de cirkelketen-methode. Wij geven thans nog een geheel ander bewijs van dezelfde stelling.

Bij dit bewijs zullen wij de punten van G verdelen in goede en niet-goede. Wij noemen een punt p van G goed, als $f(z)$ en $g(z)$ in ieder punt van k tussen z_0 en p overeenstemmen; een punt heet niet-goed als het niet goed is.

Evenals bij het andere bewijs gebruiken wij de identiteitsstelling van machtreeksen, die ons leert, dat z_0 een goed punt is. Zij z een willekeurig punt van G. Wij bewijzen dat z ook een goed punt is. Verbind daartoe z met z_0 door een kromme K, geheel in G gelegen. Was z geen goed punt, dan lagen op K goede en niet-goede punten. Zij z_1 het laatste op K gelegen punt (van z_0 naar z te rekenen), dat goed is, d.w.z. alle punten op K tussen z_0 en z_1 zijn goed. In iedere omgeving van z_1 (n.l. op K tussen z_0 en z_1) ligt dan een goed punt z_1'. Al weer volgens de identiteitsstelling van machtreeksen is z_1 dan zelf goed, dus ook punten op K in zekere omgeving van z_1, maar nu gelegen tussen z_1 en z zijn goed. Derhalve is dan z_1 niet het laatste op K gelegen goede punt, zodanig dat alle punten op K tussen z_0 en z_1 goed zijn, in strijd met de onderstelling over z_1. Bijgevolg bestaat er geen punt z_1 op K met de eigenschap, dat dit het laatste op K gelegen punt is waarvoor alle punten tussen z_0 en z_1 goed zijn, zodat elk punt van K, dus ook het gegeven punt z, goed is.

Wij maken uit het voorafgaande enige gevolgtrekkingen.

Stelling. Is $f(z)$ een in een punt z_0 analytische functie en is $f(z)$ niet constant, dan bestaat er een omgeving van z_0, in elk punt waarvan $f(z)$ een andere waarde $\neq f(z_0)$ aanneemt.

Immers bestond er zo'n omgeving niet, dan was er in iedere omgeving van z_0 een punt z met $f(z) = f(z_0)$, zodat de functie in de gehele omgeving van z_0 constant is in tegenspraak met de veronderstelling.

Als gevolg zien wij dat binnen iedere cirkel om z_0 een in die cirkel analytische niet constante functie slechts in een eindig aantal punten eenzelfde waarde aanneemt.

Stelling. Zijn de functies $f(z)$ en $g(z)$ analytisch in een gebied G en stemmen deze functies in een punt z_0 van G overeen, en ook al hun afgeleiden, dan zijn deze functies in dat gehele gebied G identiek.

Immers in zekere omgeving van z_0 in G zijn de functies in machtreeksen in $z-z_0$ te ontwikkelen. De coëfficiënten in die beide machtreeksen stemmen wegens het gelijk zijn van alle afgeleiden van $f(z)$ en $g(z)$ overeen, zodat in die omgeving geldt $f(z) = g(z)$. Wegens de identiteitsstelling van analytische functies zijn dan $f(z)$ en $g(z)$ overal in G gelijk.

Stelling. Is de niet constante functie $f(z)$ in een punt z_0 analytisch, dan bestaat er een getal k, zodanig, dat in een omgeving van z_0 geldt

$$f(z) - f(z_0) = (z-z_0)^k \, g(z),$$

waarin $g(z)$ analytisch is en $g(z_0) \neq 0$.

Voor het bewijs beschouwe men de ontwikkeling

$$f(z) = f(z_0) + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots .$$

Daar $f(z)$ niet constant is, zijn niet alle coëfficiënten $a_1, a_2, \dots$ gelijk aan nul. Zij a de eerste coëfficiënt, die $\neq 0$ is. Dan heeft men

$$f(z) - f(z_0) = (z-z_0)\left\{ a_1 + a_2(z-z_0) + \dots \right\},$$

waarin de uitdrukking tussen accoladen een analytische functie voorstelt, die in z_0 de waarde $a_1 \neq 0$ aanneemt.

Stelling. Beschouw twee gebieden G_1 en G_2, waarvan de doorsnede G weer een gebied is. Zij in G_1 een analytische functie $f(z)$ gegeven, dan bestaat er ten hoogste één in G_2 analytische functie $g(z)$, die in G met $f(z)$ overeenstemt.

Immers waren er twee gelijke functies $g(z)$ en $g_1(z)$, dan had men in G de relatie $g(z) = f(z) = g_1(z)$, maar dan stemden $g(z)$ en $g_1(z)$ volgens het bovenstaande in het gehele gebied G_2 overeen.

In het geval, dat een dergelijke functie $g(z)$ inderdaad gevonden kan worden, heeft men de oorspronkelijke functie $f(z)$, gedefinieerd in G, uitgebreid (analytisch voortgezet) over het gebied $G_1 \cup G_2$.

Voorbeeld. De reeks

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

convergeert in het gebied $|z| < 1$ en stelt daar een analytische functie voor. Nu stemt deze binnen dit gebied overeen met de functie $\frac{1}{1-z}$. Deze laatste functie is overal gedefinieerd behalve in het punt $z = 1$ en is dus te beschouwen als de analytische voortzetting van de door de beschouwde reeks gedefinieerde functie.

De vorige stelling leert ons nog:
Is $f(z)$ in een gebied G analytisch en is op een kromme K die tenminste één punt met G gemeen heeft, een analytische functie $g(z)$ gedefinieerd, die op de in G gelegen punten van K met $f(z)$ overeenstemt, dan is $g(z)$ de enige op K te vinden analytische voortzetting van $f(z)$. Immers bestonden er meer voortzettingen $g(z)$ en $g_1(z)$, dan zouden op de doorsnede van K en G de functies $f(z)$ en $g(z)$ en ook $f(z)$ en $g_1(z)$, dus $g(z)$ en $g_1(z)$ overeenstemmen, maar volgens het bovenstaande stemmen zij dan op K overal overeen, waarmede de bewering bewezen is.

§2. De monodromiestelling.

Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied en zij $f(z)$ een in een punt a van G gegeven analytische functie. Indien deze functie in G analytisch kan worden voortgezet, dan is die voortzetting eenwaardig, d.w.z.

is b willekeurig gelegen in G, dan neemt die voortzetting in b dezelfde waarde aan, langs welke weg men ook de oorspronkelijk functie van a naar b heeft voortgezet.

De stelling is ook zo te formuleren: Zet men een analytische functie voort langs een gesloten kromme K gelegen in G, dan is de waarde waarmee men "thuiskomt" gelijk aan die waarmee men is vertrokken.

Voor het bewijs mag men ve onderstellen, dat de gesloten kromme K een in G gelegen gebroken rechte is, want is hiervoor de bewering bewezen, dan geldt deze door limietovergang ook voor een willekeurige in G gelegen kromme. Daar G enkelvoudig samenhangend is, kan men K door diagonalen in driehoeken verdelen, die geheel in G liggen. Gesteld de stelling was onjuist. Dan moet voor tenminste één zo'n driehoek de stelling onjuist zijn, d.w.z. gaat men langs de omtrek van die driehoek rond, dan komt men met een andere waarde thuis, dan waarmee men is vertrokken.

Door nu de middens der zijden van die driehoek te verbinden, wordt deze in 4 driehoeken verdeeld, voor één van welke de bewering onjuist moet zijn. Dit laatste proces is willekeurig vaak te herhalen, maar het is duidelijk, dat voor zo'n rij van driehoeken een in G gelegen limietpunt wordt gevonden, waarin de functie f(z) dan niet meer analytisch zou zijn. Hiermede is de monodromiestelling bewezen.

Is f(z) analytisch in het gehele complexe z-vlak met uitzondering van de oorsprong, dan is bij het voortzetten van f(z) b.v. langs de eenheidscirkel het niet zeker, dat men na één omloop in een punt dezelfde waarde terugvindt, als waarmede men is begonnen. B.v. levert de integraal

$$f(z) = \int_1^z \frac{dw}{w},$$

waarbij het punt z op de eenheidscirkel ligt en geïntegreerd wordt in positieve zin langs deze cirkel totdat men het punt z voor het eerst ontmoet, de waarde i arg z. Men vindt dus f(1) = 0, maar na een rondloop f(1) = $2\pi i$, zodat de uitgangswaarde van f(1) en de nieuwe waarde van f(1) ongelijk zijn. Het is wegens de residuenstelling in dit geval duidelijk, dat de oorzaak van dit verschil enkel en alleen ligt aan het feit, dat in 0 de integrand (en ook dus de integraal als men op wat voor wijze ook van 1 naar 0 integreert) niet bestaat.

§3. De exponentiële functie en de goniometrische functies.

Wij gebruiken thans het begrip analytische voortzetting om een aantal functies, die voor reële z reeds bekend zijn, ook voor niet reële z te definiëren. Zo beschouwen wij allereerst de functie $f(x) = e^x$. Om deze ook voor complexe z te definiëren, merken we op, dat men uit de voorstelling

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

geldig voor iedere eindige reële x in de voortzetting geen vrije keuze meer heeft. Men moet wegens de identiteitsstelling van machtreeksen f(z) ~~voor complexe~~ z definiëren als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Wij schrijven in dit geval weer $f(z) = e^z$ en vinden dus, dat men e^z moet definiëren door de ~~reeks~~ reeksontwikkeling

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ,$$

welke in het gehele eindige z-vlak convergeert. Men ziet direct in, dat $e^0 = 1$. Volgens een stelling over differentiëren van reeksen geldt $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

Allereerst leiden we thans af de eigenschap $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Hiertoe beschouwen wij de functie $e^{z+a}e^{-z}$, waarin a een willekeurig complex getal voorstelt. Voor de afgeleide hiervan vindt men volgens de bekende regels van differentiëren

$$e^{z+a}e^{-z} - e^{z+a}e^{-z} = 0,$$

dus wegens een vroeger bewezen stelling heeft men

$$e^{z+a}e^{-z} = C,$$

waarin de constante C onafhankelijk is van z. Substitutie $z = 0$ leert $e^a = C$, dus $e^{z+a}e^{-z} = e^a$.

Kiest men hierin $a = 0$, dan vindt men

$$e^z e^{-z} = 1, \quad \text{dus} \quad e^{z+a} = (e^{-z})^{-1}e^a = e^z e^a,$$

geldig voor alle complexe z en a. Uit de relatie $e^z e^{-z} = 1$ volgt, dat in het gehele eindige complexe z-vlak de functie e^z geen nulpunt bezit. Verder is e^x voor alle eindige reële x positief. Immers uit de reeksontwikkeling $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ volgt direct dat voor alle $x > 0$ de functie e^x positief is en derhalve is dat ook het geval voor negatieve x, want daarvoor heeft men $e^x = 1 : e^{-x} > 0$, daar $e^{-x} > 0$.

Het getal $e^{\bar{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!}$ is natuurlijk toegevoegd complex aan e^z, dus als men $z = x+yi$ stelt,

$$|e^z| = \sqrt{e^z\overline{e^z}} = \sqrt{e^z e^{\bar{z}}} = \sqrt{e^{z+\bar{z}}} = \sqrt{e^{2x}} = e^x,$$

wegens $e^x > 0$. In het bijzonder is voor alle reële y dat $|e^{iy}| = e^0 = 1$.

Men definieert $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$; $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$; $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ enz. en heeft dan voor sin z en cos z de bekende reeksontwikkelingen:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots ; \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots ,$$

die, zoals te verwachten was de analytische voortzettingen zijn der reeksontwikkelingen van sin x resp. cos x voor reële x. Uit de definities van sin z en cos z volgt door de goniometrische functies uit te drukken in e-machten onmiddellijk voor alle complexe u en v

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v;$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v.$$

Verder volgen hieruit voor elke complexe z wegens de bekende formules over de sinus en cosinus van 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $1\frac{1}{2}\pi$ en 2π resultaten als b.v.

$$\sin(2\pi+z) = \sin z; \quad \cos(2\pi+z) = \cos z;$$
$$\sin(\pi-z) = \sin z; \quad \cos(-z) = \cos z.$$

De eerste twee dezer formules drukt men wel uit door te zeggen, dat de functies $\sin z$ en $\cos z$ elk de periode 2π bezitten.

Opg. 1. Bewijs $\mathrm{tg}(\pi+z) = \mathrm{tg}\, z$; $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; $\sin(\frac{\pi}{2}-z) = \cos z$.

Wij kunnen dus de bekende theorema's uit de goniometrie ook voor complexe hoeken gebruiken.

De enige nulpunten van $\sin z$ zijn de bekende reële nulpunten. Immers bij $z = x+iy$ volgt uit $\sin z = 0$, $\sin \bar{z} = 0$ met de bekende formules, dat
$$\sin 2x = \sin z \cos \bar{z} + \cos z \sin \bar{z} = 0,$$
dus
$$x = n\pi \text{ (n geheel)}$$
en
$$\sin 2iy = \sin z \cos \bar{z} - \cos z \sin \bar{z} = 0.$$
Nu geldt voor reële y
$$\sin 2iy = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2y)^{2h+1}}{(2h+1)!} \geqslant 0$$
en omdat elke term der oneindige reeks $\geqslant 0$ is, volgt uit $\sin 2iy = 0$, dat $y = 0$, waarmede wij het resultaat $z = n\pi$ terugvinden.

Opg. 2. Bepaal alle complexe nulpunten van $\cos z$ en van $\mathrm{tg}\, z$.

Opg. 3. Bewijs $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

§ 4. De omkering van de exponentiële functie.

Uit de monotonie van de functie e^x volgt, dat er ten hoogste één waarde x bestaat met $e^x = a$, waarin a een gegeven positief getal is. Men heeft voor $a \geqslant 1$ de relaties
$$e^0 = 1 \leqslant e^x = a < e^a,$$
dus aangezien de continue functie e^x iedere tussenwaarde aanneemt, bestaat er zeker één getal x met $e^x = a$. Is $0 < a < 1$, dan bestaat er een getal x' met $e^{x'} = \frac{1}{a}$, dus het getal $x = -x'$ voldoet aan $e^x = a$. Het getal x is dus eenduidig door a bepaald.

De elementaire eigenschappen van $\log a$ (voor $a > 0$) achten wij bekend, evenals de daaruit afgeleide reeksontwikkeling, geldig voor $|a| < 1$,
$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \dots .$$
Het is duidelijk, dat voor alle z met $|z| < 1$ de convergente reeks
$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots ,$$
de analytische voortzetting is van de vorige. De analytische voortzetting van $\log(a+1)$ voor $|z| < 1$ moet men derhalve definiëren als
$$\log(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots , \tag{1}$$
waarvoor men dan ook $\log(z+1)$ schrijft.

Beschouwen wij thans de functie
$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dw}{w+1} .$$
Hierbij wordt rechtlijnig van 0 naar z geïntegreerd als z niet op de reële as links van -1 ligt en anders b.v. rechtlijnig van 0 naar i en van i naar z.

Voor alle $z \neq -1$ is $\varphi(z)$ een analytische functie van z (ook voor $z < -1$), want de functie $\varphi'(z) = \frac{1}{z+1}$ bestaat dan. Men heeft verder

$$\varphi^{(k)}(z) = \frac{(-)^{k-1}(k-1)!}{(z+1)^k},$$

dus wegens Taylor

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}}{k} z^k.$$

Hiermede hebben wij de functie $\log(z+1)$ door middel van de integraal $\int_0^z \frac{dw}{w+1}$, waarvan de ontwikkeling voor $|z| < 1$ overeenstemt met (1), voor alle eindige $z \neq -1$ gedefinieerd. Wij noemen deze functie wederom $\log(z+1)$.

Wij merken verder op, dat de functie

$$\psi(z) = \frac{e^{\log(z+1)}}{z+1} = \frac{e^{\int_0^z \frac{dw}{w+1}}}{z+1}$$

de eigenschap heeft, dat

$$\psi'(z) = \frac{\frac{1}{z+1}\, e^{\int_0^z \frac{dw}{w+1}}}{z+1} - \frac{e^{\int_0^z \frac{dw}{w+1}}}{(z+1)^2} = 0$$

is, dus

$$\psi(z) = \frac{e^{\int_0^z \frac{dw}{w+1}}}{z+1} = c.$$

Wij bepalen de constante c door $z = 0$ te nemen en vinden dan

$$c = \psi(0) = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Derhalve heeft men $e^{\log(z+1)} = z+1$, waarmee voor iedere $u \neq 0$ de eigenschap $e^{\log u} = u$, geldig voor reële u, ook geldig blijkt voor willekeurige complexe u. Wij merken verder op dat $\log uv$ voldoet aan

$$e^{\log uv} = uv = e^{\log u}\, e^{\log v} = e^{\log u + \log v};$$

omdat uit $e^{z_1} = e^{z_2}$ volgt $z_1 = z_2 + 2k\pi i$ (k geheel), vindt men

$$\log uv = \log u + \log v + 2k\pi i \quad (k \text{ geheel}).$$

Hieruit volgt onmiddellijk voor $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \neq 0$ de relatie

$$\log z = \log r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \log re^{i\varphi} = \log r + \log e^{i\varphi} + 2k\pi i =$$

$$= \log z + i\varphi + 2k\pi i = \log|z| + i \arg z + 2k\pi i.$$

Opg. 1. Bepaal $\log -1$; $\log(1+i)$; $\log i$.

Opg. 2. Laat zien, dat de functie $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ voldoet aan de differentiaalvergelijkingen van Riemann-Cauchy.

Opg. 3. Bereken $\sin(\frac{\pi}{3} + i)$; $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - i)$.

Na het voorafgaande is de definitie van $z = a^b$ eenvoudig. Voor reële $a > 0$ en b heeft men $z = e^{b \log a}$. Wij geven thans ook voor willekeurige $a \neq 0$ en b de definitie

$$a^b = e^{b \log a}.$$

Daar $\log a$ slechts mod $2\pi i$ bepaald is, is a^b slechts bepaald op factoren

$$e^{2\pi ib} = \cos 2\pi b + i \sin 2\pi b$$

na. Wij merken nog op, dat men in tegenstelling tot het voorafgaande onder e^b alleen de waarde $1 + b + \frac{b^2}{2!} + \dots$ verstaat.

Opg. 4 Bereken de kleinste waarde 1 die door i^i wordt voorgesteld.

Men heeft niet steeds $a^b a^c = a^{b+c}$, want

$$a^b a^c = e^{b(\log a + 2k\pi i)}\, e^{c(\log a + 2l\pi i)} = e^{(b+c)\log a + 2\pi i(kb+lc)},$$

terwijl

$$a^{b+c} = e^{(b+c)\log a + 2\pi i m(b+c)}.$$

Als ten minste één der getallen b en c geheel is, geldt de formule zeker wèl.

Opg. 5. Toon aan een voorbeeld aan, dat men niet steeds heeft

$$(a^b)^c = a^{bc}.$$

Opg. 6. Toon aan dat de functie $w=z^a$ voor $z\neq 0$ analytisch is en als afgeleide bezit de functie $w' = az^{a-1}$.

Voor de functie

$$f(z) = (1+z)^a = e^{a \log(1+z)}$$

heeft men voor $|z| < 1$

$$f^{(k)}(z) = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{(1+z)^k}\, e^{a \log(1+z)}. \qquad (k = 1,2,\dots)$$

Wij kiezen $|\operatorname{Im} \log(1+z)| \leq \pi$ en vinden dan volgens Taylor

$$f(z) = (1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} e^{a \log 1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k,$$

waarmede de binomiaalreeks ook voor complexe a en z is teruggevonden.

Uit $\operatorname{tg} w = z$ volgt

$$iz = \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}, \quad \text{dus} \quad e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z},$$

derhalve $w = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}$. Het getal w is dus een analytische functie van z voor $z \neq \pm i$, die men bg tg z noemt.

Daar $\log \frac{i-z}{i+z}$ bepaald is mod $2\pi i$, is w als functie van z bepaald mod π. Wij vinden dus

$$\operatorname{bg} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}.$$

Opg. 7. Laat zien, dat deze formule te interpreteren is als de bekende formule van Laguerre voor een hoek in de Euclidische meetkunde.

Opg. 8. Bereken de afgeleide van bg tg z.

Uit $\sin w = z$ volgt $2iz = e^{iw} - e^{-iw}$, dus

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

derhalve

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

dus

$$w = \frac{1}{i} \log(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

De functie in het rechterlid is voor $z \neq 1$ een analytische functie van z, die men bg sin z noemt. De logarithme rechts is bepaald mod $2\pi i$, dus het getal w is bepaald mod 2π. Overigens hebben de twee gevonden waarden van e^{iw} een product -1, dus hun logarithmen hebben een som $(2k-1)\pi i$, dus naast een waarde w vindt men zowel $w+2k\pi i$ als $\pi-w+2k\pi i$, juist als bij de reële omkering der sinus-functie. Wij vinden dus

$$\text{bg} \sin z = \frac{1}{i}\log(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Opg. 9. Bereken de afgeleide van bg sin z.

Opg. 10. Bepaal z uit $\sin z = 1\frac{1}{4}$.

Opg. 11. Voor welke waarden van z is sin z reëel?

Tenslotte definiëren we nog

$$\text{sh } z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}; \quad \text{ch } z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}; \text{ tgh } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}; \text{ cotgh } z = \frac{1}{\text{tgh } z}.$$

Opg. 12. Bewijs dat de vier hierboven gedefinieerde functies periodiek zijn en bepaal hun perioden.

Opg. 13. Bewijs dat voor de omkering w = bg sh z van sh z geldt

$$w = \log(z \pm \sqrt{z^2-1}).$$

Hoofdstuk VII
Singuliere punten.

§1. Gehele transcendente functies.

Onder een gehele functie verstaat men een functie, die in het gehele eindige complexe vlak analytisch is. Zo'n functie bezit dan een in het gehele eindige complexe vlak convergente reeksontwikkeling. Omgekeerd is een functie met zo'n reeksontwikkeling geheel.

Opg. 1. Onderzoek of elk der volgende functies geheel is:

$$e^z; \quad \cos z; \quad \frac{1}{z}; \quad \frac{1}{e^z}; \quad \frac{\sin z}{z}.$$

Een gehele functie is geheel transcendent als haar reeksontwikkeling niet afbreekt.

Stelling van Liouville. Een begrensde gehele functie is constant. Immers, laat voor de functie f(z) gelden $|f(z)| < M$, dan heeft men voor elke coëfficiënt a_n van haar reeksontwikkeling

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| < \frac{M}{R^n}$$

geldig voor iedere R binnen het convergentiegebied. Dit gebied omvat het gehele eindige z-vlak, dus $a_n = 0$ voor $n = 1,2,\ldots$, waaruit volgt $f(z) = a_0$.

Aequivalent met deze stelling is de uitspraak dat een niet constante gehele functie buiten iedere cirkel absoluut genomen willekeurig grote waarden aanneemt.

Het is ons thans mogelijk een bewijs te geven van de hoofdstelling van de algebra, die zegt, dat iedere veelterm van een graad ≥ 1 ten minste één nulpunt bezit.

Eerst bewijzen wij dat voor een veelterm van een graad n die ≥ 1 is,

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_{n-1}z + a_n$$

voor voldoende grote waarde van $|z|$ geldt

$$|f(z)| > \tfrac{1}{2} |a_0| |z|^n.$$

Immers kies z zo, dat $|z| > \max_{k=1,\dots,n} \sqrt[k]{\frac{2n|a_k|}{|a_0|}}$. Dan is

$$|a_k z^{n-k}| < \frac{1}{2n} |a_0| |z|^n,$$

dus

$$|f(z)| \geqslant |a_0 z^n| - \left\{|a_1 z^{n-1}| + \dots + |a_{n-1} z| + |a_n|\right\} \geqslant \tfrac{1}{2} |a_0| |z|^n.$$

Wij zien dus dat onze veelterm f(z) voor voldoende grote waarden van $|z|$ in absolute waarde boven iedere grens groeit.

Onderstel nu, dat f(z) geen enkel eindig nulpunt bezat. De functie $\frac{1}{f(z)}$ was dan in het gehele eindige z-vlak analytisch en is op grond van de stelling van Liouville voor voldoende grote $|z|$ willekeurig groot in absolute waarde, in strijd met het feit, dat $|f(z)|$ voor voldoend grote $|z|$ ook willekeurig groot is.

<u>Opgave 2</u>. Zij f(z) een gehele functie met de eigenschap, dat $\frac{f(z)}{z^m}$ in het gehele eindige z-vlak begrensd is. Bewijs dan dat f(z) een veelterm is in z van een graad $\leq$ m.

Een gehele functie met afbrekende reeksontwikkeling heet geheel rationaal. Breekt de reeksontwikkeling niet af, dan noemt men de functie geheel transcendent.

<u>Opgave 3</u>. Bepaal van elk der volgende functies of ze geheel of niet geheel en rationaal of transcendent zijn

$$\sin z; \quad \frac{\cot z+i}{\cot z-i}\, e^{-2iz}; \quad \frac{e^z}{z}; \quad \frac{\sin z}{z}.$$

<u>Stelling van Casorati-Weierstrass</u>.

Een gehele transcendente functie benadert buiten elke cirkel elke waarde willekeurig dicht.

Dit wil zeggen, dat bij ieder positief getal ε, ieder positief getal R, ieder complex getal c een getal z te vinden is met

$$|z| > R \quad \text{en} \quad |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Wij onderscheiden bij het bewijs verschillende gevallen.

1°. Heeft f(z) oneindig veel punten met f(z) = c, dan liggen die niet alle binnen de cirkel $|z| = R$ (want wegens vroeger gevonden stellingen zou men dan vinden f(z) = c overal binnen die cirkel), zodat er zeker een punt z met $|z| > R$ bestaat, waarvoor f(z) = c is.

2°. Heeft f(z) geen punt met f(z) = c, beschouw dan de niet constante gehele functie $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$, dan is er al weer wegens het theorema van Liouville een getal z met $|z| > R$ te vinden, waarvoor geldt $|g(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$, dus voor dit punt z geldt $|f(z)-c| < \varepsilon$.

3°. Heeft f(z) eindig veel punten $z_1, z_2, \dots, z_k$, waar f(z) = c, dan bestaan er natuurlijke getallen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, zodanig dat de functie

$$g(z) = \frac{f(z)-c}{(z-z_1)^{\alpha_1} \dots (z-z_k)^{\alpha_k}}$$

in c niet de waarde nul aanneemt en de functie $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ is dan een gehele transcendente functie, die voor voldoende grote $|z|$ voldoet aan

$|h(z)| > \frac{2}{\varepsilon}|z|^\alpha$, waarin $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ gesteld is. Dus

$$f(z) - c < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|z-z_1|^{\alpha_1} \ldots |z-z_k|^{\alpha_k}}{|z^\alpha|},$$

voor voldoende grote $|z|$. Kies verder nog $|z|$ zo groot dat

$$\frac{|z-z_1|^{\alpha_1} \ldots |z-z_k|^{\alpha_k}}{|z|^\alpha} = \left|1 - \frac{z_1}{z}\right|^{\alpha_1} \ldots \left|1 - \frac{z_k}{z}\right|^{\alpha_k} < 2,$$

dan vindt men $|f(z)-c| < \varepsilon$ voor de bovenaangegeven keuze van $|z|$, waarmee de stelling bewezen is.

Opgave 4. Bepaal een punt z met $|z| > 10$, waarvoor geldt $e^z = 3$.

§2. Laurentreeksen.

Beschouw een functie $f(z)$, die analytisch is in de cirkelring bepaald door $r < |z-z_0| < R$, waarin r en R twee willekeurige reële getallen zijn met $0 \leq r < R \leq \infty$. Wij gaan een ontwikkeling voor $f(z)$ afleiden, geldig in deze cirkelring. Kies hiertoe voor een gegeven z met $r < |z-z_0| < R$ twee getallen a en b met $r < a < |z-z_0| < b < R$, en beschouw de cirkels $|z-z_0| = a$ en $|z-z_0| = b$, die wij C_a en C_b noemen. Verbindt men deze door twee radiale verbindingswegen k en k', dan vindt men uit de stelling van Cauchy gemakkelijk

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_b} \frac{f(s)}{s-z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

Voor de eerste integraal schrijven wij

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_b} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds$$

en wegens de uniforme convergentie der optredende reeks (immers $\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < \frac{b}{R} < 1$) vinden wij hiervoor

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{C_b} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

waarin

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_b} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}}.$$

Op gelijke wijze zien wij in, dat voor de tweede integraal te schrijven is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{f(s)ds}{(z-z_0)\left(1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,ds,$$

wegens de uniforme convergentie der laatste reeks (immers $\left|\frac{s-z_0}{z-z_0}\right| < \frac{r}{a} < 1$) kunnen wij het laatste lid verder herleiden tot

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} f(s)(s-z_0)^n\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

waarin

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} f(s)(s-z_0)^{n-1}\,ds.$$

Wij kunnen het resultaat samenvatten tot de Laurentreeks

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a \text{ of } C_b} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\, ds.$$

Als integratieweg kan men i.p.v. de cirkels C_a en C_b eenzelfde binnen het ringgebied gesloten weg kiezen, b.v. de cirkel $|z-z_0| = \rho$ met $r<\rho<R$.

Alle coëfficiënten in de gevonden Laurentreeks zijn ondubbelzinnig door de functie $f(z)$ bepaald. De ontwikkeling is geldig voor ieder punt z binnen de ring $r<|z-z_0|<R$, want bij ieder zo'n punt zijn de bovengebruikte getallen a en b te vinden.

Wij merken nog op, dat de gevonden reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convergeert overal binnen de cirkel $|z-z_0| = R$ en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ overal buiten de cirkel $|z-z_0| = r$, zodat hun som slechts binnen de beschouwde ring convergeert.

Opg. 1. Ontwikkel de functie $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ binnen elk der drie ringen $0<|z|<1$; $1<|z|<2$; $2<|z|<\infty$.

De gevonden ontwikkeling $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ is de enige binnen de beschouwde ring geldige, want bestond er ook nog een ontwikkeling $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, vermenigvuldig dan beide reeksen met $(z-z_0)^{k-1}$ en integreer de resultaten langs een willekeurige cirkel, gelegen binnen de ring. Dan vindt men $2\pi i a_k = 2\pi i b_k$, waarmede voor alle gehele k de identiteit der coëfficiënten a_k en b_k vaststaat.

Opg. 2. Bepaal de Laurentontwikkeling van de functies

$e^{\frac{1}{z}} - e^z$ voor $0<|z|<\infty$;

$\cos \frac{1}{z-1}$ voor $1<|z|<\infty$;

$e^{\frac{1}{1-z}}$ voor $|z|>1$;

$\sqrt{(z-1)(z-3)}$ voor $|z|>3$.

§3. Geïsoleerde singuliere punten.

Zij $f(z)$ analytisch in de omgeving van een punt z_0, dit punt z_0 zelf eventueel uitgezonderd. Voor alle $z \neq z_0$ met voldoende kleine $|z-z_0|$ is dan $f(z)$ volgens het voorafgaande te ontwikkelen in een Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$; hierin is

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\, ds,$$

waarin C een willekeurige cirkel met middelpunt z_0 en voldoende kleine straal voorstelt. Er zijn nu verschillende gevallen mogelijk.

1°. De Laurentontwikkeling bevat uitsluitend termen met $n \geq 0$, dus $a_{-h} = 0$ voor $h = 1,2,\ldots$. Definieert men dan $f(z_0) = a_0$, dan is hierdoor de functie $f(z)$ analytisch in het punt z_0. Het punt z_0 is in dit geval dus een regulier punt van de functie $f(z)$ geworden.

2^o. De Laurentontwikkeling bevat slechts eindig veel termen met negatieve exponent. Zij k het grootste gehele getal met $a_{-k} \neq 0$, dan is de functie $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ in de omgeving van z_0 te ontwikkelen in een machtreeks $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k}(z-z_0)^m$, zodat deze functie door de definitie $g(z_0) = a_{-k}$ ook in z_0 analytisch te maken is. Voor de oorspronkelijke functie f(z) noemt men het punt z_0 een pool van de k^e orde of een k-voudige pool. Het is duidelijk, dat er een omgeving van z_0 is, waarbinnen geen andere singuliere punten van f(z) liggen. De pool z_0 is dus een geïsoleerd singulier punt. In het beschouwde geval spreekt men van een niet-essentiëel singulier punt.

3^o. De Laurentreeks bevat oneindig veel termen met negatieve exponent. In dit geval noemt men het punt z_0 een geïsoleerd essentiëel singulier punt.

Men noemt bij een geïsoleerd singulier punt de som der termen met negatieve exponent, optredende in de Laurentontwikkeling, het hoofddeel van f(z) in z_0.

Opg. 1. Bepaal het hoofddeel van elk der volgende functies in de oorsprong

$$\frac{\sin z}{z};\quad (1+\frac{1}{z})^4;\quad \frac{\operatorname{tg} z - \sin z}{z^5};\quad \cot z.$$

Opg. 2. Stelt men het hoofddeel van f(z) in het geïsoleerde singuliere punt z_0 voor door $\varphi(\frac{1}{z-z_0})$, dan is bij een k-voudige pool z_0 de functie $\varphi(w)$ een veelterm van de k^e graad en bij een essentiëel singulier punt is de functie $\varphi(w)$ een gehele transcendente functie van w.

In de omgeving van een pool is de functie, absoluut genomen, groter dan iedere vaste grens, want men heeft bij een pool z_0 van de k^e orde

$$|z-z_0|^k |f(z)| \geq \tfrac{1}{2}|a_{-k}|,$$

waaruit de bewering gemakkelijk af te leiden is.

Stelling van Casorati-Weierstrass. In de omgeving van een geïsoleerd essentiëel singulier punt z_0 benadert de functie f(z) iedere waarde willekeurig dicht, want zij $\varphi(\frac{1}{z-z_0})$ het hoofddeel van f(z) in het punt z_0 en zij a_0 de bekende term van de Laurentontwikkeling van f(z), dan benadert de gehele transcendente functie $\varphi(w) + a_0$ voor voldoende grote waarden van $|w|$ iedere waarde willekeurig dicht, dus benadert f(z) in de omgeving van z_0 iedere waarde willekeurig dicht, want in een voldoende kleine omgeving van z_0 is de functie

$$f(z) - \varphi(\frac{1}{z-z_0}) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

willekeurig klein.

Opg. 3. Beschouw de functie $e^{\frac{1}{z}}$ in de omgeving van het essentiëel singuliere punt 0. Bepaal een punt in die omgeving waarvoor geldt

$$e^{\frac{1}{z}} = i,$$

en eveneens een punt, waar deze functie de waarde 10 aanneemt.

§ 4. Het oneindige.

Wij dienen nu nog een waarde toe te kennen aan een analytische functie in het oneindige. Zij f(z) een eenwaardige buiten een cirkel $|z| = R$ analytische functie. Wij zeggen dan dat de functie f(z) hetzelfde gedrag in het oneindige bezit als de functie $\varphi(w) = f(\frac{1}{w})$ in de oorsprong $w = 0$.

Een functie f(z) is dus in het oneindige regulier als $f(\frac{1}{w})$ regulier is in de oorsprong, d.w.z. dat in de Laurentontwikkeling van $f(\frac{1}{w})$ de termen met negatieve exponent ontbreken, zodat in de Laurentontwikkeling van f(z) geldig buiten de cirkel $|z| = R$ de termen met positieve exponent ontbreken.

Heeft voorts $\varphi(w) = f(\frac{1}{w})$ in $w = 0$ een pool van de k^e orde, dan zegt men dat f(z) in het oneindige een pool van de k^e orde bezit. In dit geval bevat de Laurentontwikkeling van $\varphi(w)$ slechts k termen met negatieve exponent, zodat de termen met positieve exponent, die in de Laurentontwikkeling van f(z) buiten de cirkel $|z| = R$ optreden, slechts zijn

$$\sum_{n=1}^{k} a_n(z-z_o)^n.$$

Is de oorsprong voor $\varphi(w)$ tenslotte een essentiëel singulier punt, dan is het oneindige voor f(z) een essentiëel singulier punt. In dit geval bevat de Laurentontwikkeling van $\varphi(w)$ in de omgeving van de oorsprong oneindig veel termen met negatieve exponent, dus de Laurentontwikkeling van f(z) buiten de cirkel $|z| = R$ bevat oneindig veel termen met positieve exponent.

Opg. 1. Als f(z) in het oneindige een pool bezit, dan is bij elk positief getal c een getal R te vinden met

$$|f(z)| > c \quad \text{voor} \quad |z| > R.$$

Opg. 2. Heeft f(z) in het oneindige een essentiëel singulier punt, dan benadert f(z) buiten iedere cirkel $|z| = R$ iedere gegeven waarde willekeurig dicht (Stelling van Casorati-Weierstrass).

Onder een omgeving van het oneindige verstaat men het buitengebied van een willekeurige cirkel. Men zegt dan ook, dat een functie in het oneindige een bepaalde eigenschap bezit, als een cirkel gevonden kan worden, zodanig dat buiten die cirkel de functie die eigenschap bezit.

Stelling van Riemann. Zij f(z) eenwaardig en analytisch in de omgeving van een punt z_o (dat ook ∞ mag zijn), dit punt zelf eventueel uitgezonderd. Het punt z_o is dan en slechts dan regulier voor f(z) als er een omgeving van z_o bestaat, waarbinnen $|f(z)|$ begrensd is. Het punt z_o is dan en slechts dan een pool van f(z) als bij ieder getal c een omgeving z_o te vinden is, waarin geldt $|f(z)| > c$. In ieder ander geval is het punt z_o een essentiëel singulier punt van de functie f(z).

Immers in het geval dat z_o eindig is, heeft men de drie gevallen te beschouwen, dat in de Laurentontwikkeling van f(z)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$$

hetzij nul, hetzij een positief eindig aantal, hetzij oneindig veel termen optreden met negatieve exponent, in elk van welke gevallen de bewering na het voorafgaande direct duidelijk is.

Is $z_0 = \infty$, dan onderscheiden wij dezelfde drie gevallen voor de Laurentontwikkeling van $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

Opg. 3. Bepaal het gedrag in het oneindige van elk der functies

$$\frac{z^2+4}{e^z}; \quad \frac{z^2+4}{z^2-4}; \quad \cot z; \quad \cos z - \sin z; \quad \frac{z^2+z+1}{z-1}.$$

§ 5. Verdere toepassingen van de residuenstelling.

Reeds in hoofdstuk IV § 4 hebben wij de residuenstelling geformuleerd, die ons leerde dat de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(s)ds$$

genomen over een gesloten weg C gelijk is aan de som der residuen van de functie $f(z)$ in de binnen C gelegen singuliere punten $z_1, \dots, z_k$. Hierbij is het residu van de functie $f(z)$ in een punt z_0 gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(s)ds,$$

waarbij de gesloten weg C_0 zo gekozen is, dat op en binnen C_0 de functie $f(z)$ overal analytisch is, afgezien eventueel van z_0 zelf. Wij merken nog op, dat wij de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(s)ds$$

ook tegenkwamen bij de Laurentontwikkeling

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

van de functie $f(z)$ in de omgeving van z_0 en wel

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(s)ds.$$

Stelling. Als $f(z)$ binnen de gesloten enkelvoudige weg de nulpunten $z_1, z_2, \dots, z_k$ resp. met multipliciteiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ bezit, dan is

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds,$$

waarbij men onder N de z.g. nulsom $\sum_{k=1}^{k} \alpha_k$ verstaat.

Bewijs: Laat de functie $f(z)$ in z_1 een nulpunt van de orde n_1 hebben. Dan heeft men

$$f(z) = (z-z_1)^{n_1}(b_0+b_1(z-z_1)+b_2(z-z_2)^2+\dots),$$

waarin $b_0 \neq 0$ en dus

$$f'(z) = n_1(z-z_1)^{n_1-1}(b_0+c_1(z-z_1)+c_2(z-z_2)^2+\dots),$$

zodat men voor het quotiënt $\frac{f'(z)}{f(z)}$ een ontwikkeling vindt van de gedaante

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z-z_1}(1+d_1(z-z_1)+d_2(z-z_1)^2+\ldots).$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat het residu van $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in het punt z_1 gelijk is aan n_1, waarna uit de residuenstelling volgt, dat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = N$$

is.

<u>Stelling</u>. Heeft $f(z)$ binnen de enkelvoudige gesloten weg C in de punten $z_1, z_2, \ldots, z_k$ polen resp. van de orde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ en is $f(z)$ verder op en binnen C regulier en ongelijk aan nul, dan is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = -P,$$

waarin onder P de z.g. poolsom $\sum_{k=1}^{k} \alpha_k$ verstaan wordt.

Voor het bewijs beschouwe men een pool z_1 van $f(z)$ van de orde n_1 en merke op, dat in de omgeving van de pool de functie $\frac{f'(z)}{f(z)}$ een Laurentontwikkeling van de gedaante

$$-\frac{n_1}{z-z_1}(1+e_1(z-z_1)+e_2(z-z_1)^2+\ldots)$$

bezit, waaruit het gewenste resultaat onmiddellijk volgt.

<u>Stelling</u>. Bezit de functie $f(z)$ binnen de enkelvoudige gesloten weg C nulpunten in de punten $z_1, \ldots, z_h$ en polen in de punten $z_1', \ldots, z_k'$, en is op C de functie $f(z)$ analytisch en $\neq 0$, dan is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = N-P,$$

waarbij N en P de nulsom resp. poolsom van $f(z)$ voorstellen in het door C omsloten gebied.

Het bewijs verloopt analoog aan dat der beide vorige stellingen door op te merken, dat de enige punten waar de integrand niet regulier is, de nulpunten en polen van $f(z)$ zijn.

Wij passen het voorgaande toe om nogmaals de hoofdstelling van de algebra te bewijzen.

Allereerst merken wij op dat voor voldoende grote $|z|$ de functie $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ geen nulpunten bezit, want men kan $|z|$ zo groot kiezen, dat $|f(z)| > \frac{1}{2}|a_0|.|z|^n$ (zie blz. 48 regel 2). Beschouw nu een willekeurige enkelvoudige gesloten weg C, gelegen in het zoëven genoemde gebied, waarin $f(z) \neq 0$. Dan heeft men

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = N-P.$$

Nu is voor de veelterm $f(z)$ de poolsom $P=0$ en de nulsom N is gelijk aan de som der multipliciteiten van alle nulpunten van $f(z)$. Verder vindt men bij $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ voor de integrand de waarde

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z}(1+b_1 z+b_2 z^2+\ldots),$$

dus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = n,$$

waaruit direct volgt $n = N$.

Wij bewijzen thans met behulp van de residuenstelling de uit de reëele analyse bekende formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Hiertoe kiezen wij een contour C, die bestaat uit het deel der reële as van r naar R (waarbij $R > r > 0$), de halve cirkel $z = Re^{i\varphi}$ (waarbij φ loopt van 0 tot π), het deel van $-R$ tot $-r$ der negatieve reële as en de halve cirkel $z = re^{i\varphi}$ (waarbij φ loopt van π tot 0). Binnen deze contour is de functie $\frac{e^{iz}}{z}$ regulier, zodat

$$\int_C \frac{e^{is}}{s}\, ds = 0.$$

Wij splitsen de integratieweg in de vier bovenopgesomde gedeelten. Men vindt dan voor het eerste en derde deel

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

dus

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iRe^{i\varphi}} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ire^{i\varphi}} d\varphi\,.$$

In de eerste integraal in het rechterlid is de integrand, absoluut genomen, ten hoogste gelijk aan

$$\left|e^{iR\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)}\right| = e^{-R\,\sin\varphi}\,.$$

Wij splitsen die integraal in drie integralen

$$\int_0^\delta + \int_\delta^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^\pi$$

en zien dat hun som, absoluut genomen ten hoogste gelijk is aan

$$\delta + \pi e^{-R\,\sin\delta} + \delta = 2\delta + \pi e^{-R\,\sin\delta}\,.$$

Wij kiezen $\delta = \frac{1}{\sqrt{R}}$ en zien dan dat voor voldoende grote R wegens $\sin\delta > \frac{1}{2}\delta$ de integraal langs de halve cirkel $|z| = R$ absoluut genomen ten hoogste gelijk is aan

$$\frac{2}{\sqrt{R}} + \pi e^{-\frac{1}{2}\sqrt{R}}$$

en derhalve voor $R \to \infty$ tot nul nadert.

Verder heeft men

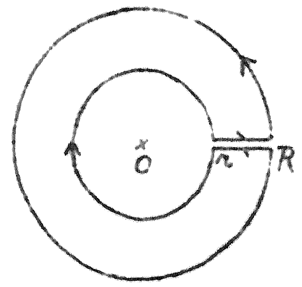
$$\int_0^\pi e^{ire^{i\varphi}} d\varphi = \int_0^\pi d\varphi + \int_0^\pi (e^{ire^{i\varphi}} - 1)\, d\varphi$$

Daar in de omgeving van $r = 0$ de functie $\frac{e^{ire^{i\varphi}}-1}{r}$ begrensd is, nadert de tweede integraal in het rechterlid der laatste formule met $r \to 0$ tot nul, zodat men uiteindelijk vindt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Op analoge wijze bewijzen wij de formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1)$$



Beschouw daartoe de integraal

$$\int_C \frac{z^{a-1}}{z+1}\,dz$$

waarbij arg $z = 0$ op de positieve reële as.

Hierbij bestaat C uit vier gedeelten:

C_1 loopt rechtlijnig langs de reële as van r naar R (met $0 < r < 1 < R$);
C_2 is de cirkel $|z| = R$, in positieve zin doorlopen;
C_3 is de rechte van R naar r;
C_4 is de cirkel $|z| = r$ in negatieve zin doorlopen.

Men vindt:

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = \int_r^R \frac{x^{a-1}dx}{x+1} + e^{2\pi i(a-1)}\int_R^r \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$$

$$= -2ie^{\pi i(a-1)}\sin\pi(a-1)\int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx.$$

Verder is $\left|\int_{C_2}\right| = \left|i\int_0^{2\pi}\frac{R^{a-1}e^{i(a-1)\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}Re^{i\varphi}\,d\varphi\right| < \frac{2\pi R^a}{R-1} \to 0,$

voor $R \to \infty$ wegens $a > 0$

en $\left|\int_{C_4}\right| = \left|-i\int_0^{2\pi}\frac{r^{a-1}e^{i(a-1)\varphi}re^{i\varphi}\,d\varphi}{1+re^{i\varphi}}\right| < \frac{2\pi r^a}{1-r} \to 0$ voor $r \to 0$

Dus

$$\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = -2ie^{\pi ia}\sin\pi a\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx.$$

De integraal in het linkerlid is wegens de residuenstelling gelijk aan $2\pi i$ maal het residu der functie $\frac{z^{a-1}}{z+1}$ in het punt $z = -1$, het enige binnen C gelegen singuliere punt van deze functie. Dit residu is

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{a-1}}{z+1} = e^{(a-1)\pi i}$$

Derhalve is

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1} = -\frac{2\pi i\, e^{(a-1)\pi i}}{2i\, e^{\pi ai}\sin\pi a} = \frac{\pi}{\sin\pi a}$$

Van belang bij het sommeren van bepaalde reeksen is de volgende eigenschap:
Zijn binnen de contour C de functies $\varphi(z)$ en $f(z)$ eenwaardig en analytisch en is op C de functie $f(z) \neq 0$, dan is:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(s)f'(s)}{f(s)}\,ds = \sum_z \text{Res.}\ \frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)}\ ,$$

waarbij de som in het rechterlid wordt uitgestrekt over de nulpunten van $f(z)$.
Onderstelt men verder dat $f(z)$ en $\varphi(z)$ geen nulpunt gemeen hebben. Dan vindt men voor het residu der uitdrukking $\frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)}$ in een k-voudig nulpunt a van $f(z)$ de waarde

$$\lim_{z\to a} \frac{(z-a)\,\varphi(z)f'(z)}{f(z)} = k\,\varphi(a).$$

Derhalve is

(1)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(s)f'(s)}{f(s)}\,ds = \sum \varphi(a),$$

waarin de som wordt uitgestrekt over alle binnen C gelegen nulpunten van $f(z)$ en bij een k-voudig nulpunt a in het rechterlid k termen $\varphi(a)$ te nemen zijn.

Wij passen dit resultaat eens toe om de som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ te bepalen. Wij kiezen daartoe $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ en $f(z) = \sin z$, welke de enkelvoudige nulpunten $z = n\pi$ bezit. Neemt men voor de contour C de cirkel $|z| = R$, dan heeft men binnen die contour als enige de singulariteiten van de integrand de punten $z = n\pi$. Voor $n \neq 0$ is het residu van $\frac{\cos z}{z^2 \sin z}$ in $z = n\pi$ gelijk aan

$$\lim_{z\to n\pi} \frac{(z-n\pi)\cot z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z \cot z}{(z+n\pi)^2} = \frac{1}{n^2\pi^2}$$

Voor $n = 0$ daarentegen is de integrand te ontwikkelen in de gedaante

$$\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots}{z^2\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right)} = \frac{1}{z^3}\ \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots}{1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots}$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right)\left(1 + \frac{z^2}{6} + c\,z^4 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z} + dz + ez^3 + \dots,$$

zodat het beschouwde residu in $z = 0$ gelijk is aan $\frac{1}{3}$.

Verder bewijzen wij dat voor $R \to \infty$ de integraal

$$I = \int_C \frac{\cos s\,ds}{s^2 \sin s}$$ tot nul nadert.

Stel daartoe $s = Re^{i\varphi}$; aangezien de integrand een oneven functie van s is, heeft men dan:

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos s \, id\varphi}{Re^{i\varphi} \sin s} = -2\int_0^{\pi} \frac{(e^{2Ri\,e^{i\varphi}}+1)d\varphi}{Re^{i\varphi}(e^{2Ri\,e^{i\varphi}}-1)}.$$

Voor $0 \leq \varphi \leq \pi$ heeft men

$$\left|e^{2Ri\,e^{i\varphi}}+1\right| = \left|e^{2Ri\cos\varphi - 2R\sin\varphi}+1\right| \leq e^{-2R\sin\varphi}+1 \leq 2.$$

en voor $\delta \leq \varphi \leq \pi - \delta$ geldt

$$\left|e^{2Ri\,e^{i\varphi}}-1\right| = \left|e^{2R\,i\cos\varphi - 2\,R\sin\varphi}-1\right| \geq 1 - e^{-2R\sin\varphi} \geq 1 - e^{-2R\sin\delta}$$

Derhalve is

$$\left|\int_{\delta}^{\pi-\delta} \frac{\cot s \, id\varphi}{Re^{i\varphi}}\right| \leq \frac{2\pi}{R(1-e^{-2R\sin\delta})} \rightarrow 0 \text{ voor } R \rightarrow \infty.$$

Beschouw voorts de afgesloten $\frac{\pi}{4}$-omgeving U van het punt $R = (n+\frac{1}{2})\pi$.
Hierin is de functie cot s begrensd. ($\leq M$).
Neem nu voor δ een positief getal $< \frac{\pi}{4R}$. Dan heeft men $\sin\frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{8R}$, dus $|Re^{i\delta} - R| = 2R\sin\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{4}$, dus het gedeelte van de integratieweg $s = Re^{i\varphi}$ met $0 \leq \varphi \leq \delta$ ligt geheel binnen U en daar geldt dus $|\cot s| < M$; men heeft dus

$$\left|\int_0^{\delta} \frac{\cot s \; i \; d\varphi}{Re^{i\varphi}}\right| \leq \frac{M\delta}{R} \leq \frac{M\pi}{4R^2} \rightarrow 0 \text{ als } n \longrightarrow \infty.$$

Evenzo vindt men dat

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\delta}^{\pi-\delta} \frac{\cot s \; i \; d\varphi}{R\;e^{i\varphi}}\right| = 0.$$

Derhalve is

$$\int_C \frac{\cot s}{s^2}\, ds = 0, \text{ dus}$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\pi^2} - \frac{1}{3} = 0, \text{ dus} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Opg. 1. Op geheel dezelfde wijze tone men aan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Opg. 2. Bewijs voor natuurlijke k $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = c_k \pi^{2k}$, waarin c_k eèn rationaal getal voorstelt.

Stelling van Rouché.

Zijn de functies f(z) en g(z) eenwaardig en analytisch op en binnen de enkelvoudige gesloten weg C, en gelden op C de relaties $f(z) \neq 0$; $|f(z)| > |g(z)|$, dan hebben de functies f(z) en f(z) + g(z) evenveel nulpunten binnen C.

Immers het aantal nulpunten van $f(z)$ resp. $f(z) + g(z)$ gelegen binnen C, is gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(s)+g'(s)}{f(s)+g(s)}\,ds$$

zodat het verschil dier aantallen gelijk is aan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f'(s)+g'(s)}{f(s)+g(s)} - \frac{f'(s)}{f(s)}\right)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(1+\frac{g(s)}{f(s)}\right)'}{1+\frac{g(s)}{f(s)}}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\ \log\left(1+\frac{g(s)}{f(s)}\right)\Bigg|_C$$

Men heeft dus de aangroeiing van de logarithme te bestuderen voor het geval s de contour C doorloopt. Het getal $p = 1 + \frac{g(s)}{f(s)}$ blijft daarbij voldoen aan $|p-1| = \left|\frac{g(s)}{f(s)}\right| < 1$, dus p blijft in het rechterhalfvlak, waaruit volgt dat de beschouwde logarithme langs C een aangroeiing $= 0$ heeft, waarmede de stelling bewezen is.

Ook uit de stelling van Rouché is de hoofdstelling der algebra te bewijzen.

Beschouw daartoe de functies $f(z) = a_0 z^n + \ldots + a_1$; $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; $h(z) = a_0 z^n$. Er bestaat een getal R, zodanig dat voor $|z| \geqslant R$ geldt

$$|g(z)| < |h(z)|$$

(neem bv. $|z| > \max\limits_{p=1,\ldots,n-1} \sqrt[p]{\frac{n\,|a_p|}{|a_0|}}$; vergelijk blz.48, 3e regel)

Derhalve hebben $f(z) = g(z) + h(z)$ en $h(z)$ binnen de cirkel $|z| = R$ evenveel nulpunten. De functie $h(z)$ heeft er binnen die cirkel C juist n, want

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{n a_0 s^{n-1}}{a_0 s^n}\,ds = n.$$

Dus $f(z)$ heeft binnen C ook n nulpunten. Daar een veelterm van de graad n niet meer dan n nulpunten kan bezitten, heeft $f(z)$ in het gehele complexe vlak juist n nulpunten.

Splitsing in partieelbreuken.

Beschouw de functie

$$\cot \pi z = i\,\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1}.$$ Deze bezit enkelvoudige polen met residu $\frac{1}{\pi}$ in de punten $z_n = n$ (n geheel). Men beschouwe cirkeltjes met zo'n punt z_n als middelpunt en straal $\delta < \frac{1}{2}$. Buiten deze cirkeltjes is $\cot \pi z$ begrensd voor $|z| \leqslant (2m+1)\pi$. Zij H het rechts van de imaginaire as gelegen gedeelte van de cirkel C bepaald door $|z| = (2m+1)\,\pi$. Dan heeft men

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cot \pi s}{s-t}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_H \cot \pi s\left(\frac{1}{s-t} - \frac{1}{s+t}\right)ds.$$

Opg. 3 Men tone aan dat voor $m \to \infty$ het rechterlid tot nul nadert, en leide daaruit af

$$\pi \cot \pi t = \frac{1}{t} - 2t \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 - t^2}.$$

Opg. 4. Toon evenzo aan

$$\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{t} + 2t \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 h^2 + t^2}.$$

Opg. 5. Toon aan voor $0 < a < 1$

$$\frac{e^{at}}{e^t - 1} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \text{[illegible]}}}{t - 2\pi i h}$$

Opg. 6. Toon aan dat de functie $f(z) = \operatorname{tg} z - z$ slechts reële nulpunten bezit. Bewijs vervolgens

$$\sum \frac{1}{z_k^2} = \frac{1}{10},$$

waarbij in het linkerlid gesommeerd wordt over alle positieve nulpunten z_k der beschouwde functie. Men beschouwe hiertoe de integraal

$$\int_{|z|=R} \frac{f's}{s^2 f(s)}\, ds .$$

Wij berekenen thans de integraal

$$I = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-z^2}\, dz$$

Hierbij wordt rechtlijnig geintegreerd langs een halfrechte door de oorsprong, die met de positieve reële as een hoek φ maakt met $|\varphi| < \frac{\pi}{4}$. Wij onderstellen bekend dat in het geval $\varphi = 0$ de integraal gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Thans beschouwen wij de contourintegraal $\int_C e^{-z^2} dz$, waarbij geintegreerd wordt rechtlijnig van 0 naar R, verder langs de cirkelboog $|z| = R$ van R naar $Re^{i\varphi}$ en tenslotte rechtlijnig van $Re^{i\varphi}$ naar 0. Wij tonen aan dat de integraal langs het gebogen gedeelte van de integratieweg C voor $R \to \infty$ tot nul nadert, zodat wij vinden

$$\int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \text{voor } |\varphi| < \frac{\pi}{4}.$$

Nu is de integraal over het genoemde gebogen gedeelte van de contour absoluut genomen ten hoogste gelijk aan

$$\max \left| e^{-R^2(\cos 2\psi + i \sin 2\psi)} \right| . R\varphi \leq e^{-R^2 \cos 2\varphi} . R\varphi$$

en de laatste uitdrukking nadert voor $R \to \infty$ tot nul wegens $\cos 2\varphi > 0$. Kiezen wij thans $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dan is

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\psi + i \sin 2\psi)} i R e^{i\psi} d\psi$$

gelijk aan $\int_0^{\frac{\pi}{4}-\delta} + \int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}}$, dus in absolute waarde ten hoogste gelijk aan

$$\frac{\pi R}{4}.e^{-R^2 \sin 2\delta} + \delta e^{-R^2 \cos\frac{\pi}{2}} < e^{-R^2\delta}\ \frac{\pi R}{4} + \delta < \frac{\pi R}{4}\ e^{-R} + \frac{1}{R} \text{ voor } \delta = \frac{1}{R}.$$

Voor $R \to \infty$ nadert deze uitdrukking ook tot nul, zodat men vindt

$$\int_0^{\infty e^{\frac{\pi i}{4}}} e^{-z^2} dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Op de integratieweg heeft men $z = t(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$, dus

$$\int_0^{\infty} e^{-it^2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{2})dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

dus

$$\int_0^{\infty} (\cos t^2 - i \sin t^2)(1 + i)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

dus

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Thans berekenen wij integralen van het type

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx \qquad (a > 0),$$

waarbij de functie $f(z)$ op en boven de reële as eenwaardig en analytisch is afgezien van eindig veel punten z met $Iz > 0$. Verder is ondersteld, dat $f(z)$ tot nul nadert voor $|z| \to \infty$ met $Iz \geq 0$. Wij beschouwen hiertoe de integratieweg C bestaande uit de rechte weg van $-R$ naar $+R$ en de halve cirkel H met straal R, lopende van R naar $-R$ in het 1e en 2de quadrant. Men heeft dan

$$\left|\int_H e^{ias} f(s)ds\right| \leq \varepsilon\int_0^{\pi} e^{-aR \sin\varphi} R d\varphi = 2\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin\varphi} R d\varphi$$

Splits weer de laatste integraal in de gedeelten $\int_0^{\delta}$ en $\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}$. Voor het

eerste deel vindt men de majorante $R\delta$ en voor het tweede deel $e^{-aR \sin\delta}\ \frac{R\pi}{2}$. Kies $\delta = \frac{1}{\sqrt{R}}$, dan is de gevonden uitdrukking ten hoogste gelijk aan

$$\frac{R\pi}{2}\ e^{-\frac{a\sqrt{R}}{2}}.$$

Voor $R \to \infty$ nadert derhalve $\left|\int_H\right|$ tot nul, dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = \int_C e^{iax} f(z)dz$$

<u>Opg. 7.</u> Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\ dx.$$

Wij gaan thans de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\ dx}{u-e^{-iz}}$$

berekenen. Hierin is $u > 0$. Beschouw de rechthoek R met hoekpunten $-\pi, \pi, \pi + iN, -\pi + iN$ (waarin N voldoet aan $N > \log u$). De integraal langs R is dan $2\pi i$ maal de som der residuen van $\frac{z}{u-e^{-iz}}$ in de binnen R gelegen nulpunten van $u-e^{-iz}$, dus de punten $i \log u + 2\pi k$ (k geheel), ~~voorzover deze binnen~~ R gelegen. In ons geval is dat slechts het punt $i \log u$ als $u > 1$ en treedt er niet zo'n singulier punt op als $u < 1$. Is $u > 1$, dan is het beschouwde residu gelijk aan $\frac{\log u}{u}$ (bewijs dat).

Dus

$$\int_R \frac{z\,dz}{u-e^{-iz}} = \begin{cases} 2\pi i \frac{\log u}{u} & \text{als } u > 1; \\ 0 & \text{als } u < 1. \end{cases}$$

Nu nadert

$$\int_{-\pi + iN}^{\pi + iN} \frac{z\,dz}{u-e^{-iz}} \quad \text{voor } N \to \infty \text{ tot nul (bewijs dit)}$$

en verder geldt:

$$\int_{\pi}^{\pi + iN} - \int_{-\pi}^{-\pi + iN} = \int_0^N \left\{ \frac{i(\pi + is)}{u-e^{-\pi i + s}} - \frac{i(-\pi + is)}{u-e^{\pi i + s}} \right\} ds$$

$$= 2\pi i \int_0^N \frac{ds}{u+e^s} = 2\pi i \left. \frac{\log(1+ue^{-s})}{u} \right|_N^0 = \frac{2\pi i}{u} \left\{ \log(1+u) - \log(1+ue^{-N}) \right\}.$$

Neemt men de limiet voor $N \to \infty$ dan vindt men

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,dx}{u-e^{-ix}} = \begin{cases} \frac{2\pi i}{u} \log u - \frac{2\pi i}{u} \log(1+u) = \frac{2\pi i}{u} \log \frac{u}{u+1} & \text{als } u > 1; \\ -\frac{2\pi i}{u} \log(1+u) = \frac{2\pi i}{u} \log \frac{1}{u+1} & \text{als } 0 < u < 1. \end{cases}$$

<u>Opg. 8.</u> Leidt uit het gevondene af

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{u^2 - 2u \cos x + 1}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{u} \log \frac{u+1}{u}, & \text{als } u \geq 1; \\ \frac{\pi}{u} \log (u+1), & \text{als } 0 < u \leq 1. \end{cases}$$

Wij vonden vroeger voor een op en binnen C analytische functie $f(z)$ de formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(s)\, \pi \cot \pi s\, ds = \sum_n f(n),$$

waarbij gesommeerd wordt over de binnen C gelegen gehele getallen n. Heeft $f(z)$ binnen eindig veel polen, dan vermeerdere men het rechterlid met de residuen van de integrand in die polen. Dit resultaat passen wij toe met $f(z) = (z+a)^{-2}$ (a niet geheel). Daar $\lim \int_C = 0$, als C een cirkel met straal $n+\frac{1}{2}$ voorstelt en $n \to \infty$, heeft men

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \operatorname*{Res}_{z=-a} \frac{\pi \cot \pi z}{(z+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

<u>Opg. 9.</u> Bewijs

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \, \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}$$

<u>Opg. 10.</u> Bewijs

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi f(s)}{\sin \pi s}\, ds = \sum_{n \text{ binnen } C} (-)^n f(n) + \sum_a \operatorname*{Res}_a \frac{\pi f(s)}{\sin \pi s},$$

waarbij de laatste som wordt genomen over alle binnen C gelegen polen a van $f(s)$, mits geen dezer polen samenvalt met een geheel getal.

Ten slotte leggen wij verband tussen de formules voor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ en de splitsing in partieelbreuken van cot π z.

Hiertoe voeren wij in de getallen van Bernoulli $B_0, B_1, B_2, \ldots$ gedefinieerd door

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h z^h}{h!}$$

Uit $\frac{-z}{e^{-z}-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h(-z)^h}{h!}$

volgt na aftrekking

$$z = \frac{z}{e^z-1} - \frac{-z}{e^{-z}-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h}{h!} \left\{ z^h-(-z)^h \right\},$$

dus voor oneven $h \geq 3$ geldt $B_h = 0$.

Verder heeft men

$$z = \sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{z^h}{h!} (e^z-1)$$

dus

$$1 = \sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{z^h}{h!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{(s+1)!} \sum_{h=0}^{s} B_h \binom{s+1}{h},$$

dus voor s = 2, 3, ... krijgt men

$$\sum_{h=0}^{s} B_h \binom{s+1}{h} = 0,$$

waaruit de getallen $B_0, B_1, \ldots$ successievelijk kunnen worden berekend.

Men vindt

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

Met behulp der getallen van Bernoulli is het gemakkelijk de Laurentontwikkeling van cot z in de omgeving van de oorsprong te geven. Men heeft

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\left(1+\frac{2}{e^{2iz}-1}\right) =$$

$$= i + \frac{1}{z}\,\frac{2iz}{e^{2iz}-1} = i + \frac{1}{z}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h}{h!}(2iz)^h =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k-1}$$

Wij vergelijken deze formule met het resultaat van opgave 3, dat wij nog verder omvormen

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-z^2} = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{n^{2m+2}} =$$

$$= \frac{1}{z} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}$$

Wij vinden dan direct

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-)^{k-1}2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}\,\pi^{2k},$$

waarmede de formule van opgave 2 is teruggevonden.

§ 6. De omkering van een analytische functie.

Zij $w = f(z)$ analytisch in een punt z_0 en in een omgeving van dit punt, d.w.z. zij $f(z)$ analytisch op en binnen een cirkel $C\ |z-z_0| = R$. Onderstel $f'(z_0) \neq 0$. Daar $f(z)$ als analytische functie zeker continu is, bestaat er bij ieder positief getal ε een getal δ, zodanig dat

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \text{ zodra } |z - z_0| < \delta .$$

Dit wil zeggen dat door de functie $f(z)$ punten in zekere omgeving van z_0 worden overgevoerd in punten in zekere omgeving van het punt $w_0 = f(z_0)$; of die laatste omgeving gedeeltelijk, geheel of meer dan eens wordt overdekt door de beelden der punten binnen de eerstgenoemde omgeving, blijkt hierbij nog niet. Wij tonen echter aan dat op grond van $f'(z_0) \neq 0$ omgevingen zijn aan te geven, zodanig dat het tweede het geval is, m.a.w. dat bij ieder punt w van een omgeving van w_0 juist één punt z van een omgeving van z_0 behoort. Dit kan men ook zo formuleren dat er een eenwaardige functie φ bestaat, zodanig dat $z = \varphi(w)$ voor alle w in de bewuste omgeving van w_0. De eigenschappen van deze inverse functie φ volgen daarna op eenvoudige wijze. Allereerst bewijzen wij het bestaan van de inverse functie φ.

Beschouw een cirkel $C_z\ |z - z_0| = R_1$, waarbij het getal $R_1 < R$ zo gekozen is dat overal op en binnen C_z geldt $f(z) \neq w_0$ mits $z \neq z_0$ (dat kan; verg. de stelling op blz. 40). De functie $|f(z) - w_0|$ heeft dan een positieve ondergrens m op de cirkel C_z. Beschouw nu de cirkel C_w met straal m om w_0. Wij tonen aan dat deze de gewenste omgeving van w_0 omsluit. Kies daartoe een punt w binnen C_w en toon aan dat $f(z) - w$ juist één enkelvoudig nulpunt z bezit binnen C_z, d.w.z. dat de uitdrukking

(1) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z} \frac{f'(s)}{f(s)-w}\,ds$$

die het aantal der gezochte nulpunten aangeeft, gelijk is aan 1 x). Wij weten dat deze uitdrukking

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z} \frac{f'(s)}{f(s)-w_0}\,ds = 1$$

---

x) Ook met de stelling van Rouché is dit resultaat te verkrijgen. Immers uit $|f(z)-w_0| \geq m > |w-w_0|$ geldig op C_w volgt dat de functies $f(z)-w_0$ en $f(z)-w_0+(w_0-w) = f(z)-w$ binnen C_w evenveel nulpunten bezitten. Omdat $f(z)-w_0$ er precies één bezit, is dit ook het geval met $f(z)-w$.

is, want $f(z)-w_0$ heeft juist één enkelvoudig nulpunt binnen C_z. Aangezien de uitdrukking (1) een reëel geheel getal is en voor $w = w_0$ de waarde 1 aanneemt, zijn wij zeker dat deze voor iedere w binnen C_w de waarde 1 bezit, zodra wij maar aantonen, dat die uitdrukking continu is in w. Nu heeft men

$$\left| \int_{C_z} \frac{f'(s)}{f(s)-w_1}\,ds - \int_{C_z} \frac{f'(s)}{f(s)-w_2}\,ds \right| = \left| \int_{C_z} \frac{f'(s)(w_2-w_1)}{(f(s)-w_1)(f(s)-w_2)}\,ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{M|w_2-w_1| 2\pi r_1}{d^2};$$

hierin is $M = \max |f'(s)|$ voor s op C_z; wegens $|f(s)-w_0| \geq m$ voor s op C_z en $|w_j - w_0| < \frac{1}{2}m$ voor w_j binnen C_w ziet men dat $|w_j-f(s)|$ een positieve ondergrens bezit ($j=1,2$) die d genoemd is. Wij zien dus dat het beschouwde verschil willekeurig klein wordt, als w_1 en w_2 dicht genoeg bij elkaar worden gekozen (mits binnen C_w). Hiermede is de stelling bewezen. Als gevolg van het gevondene leiden wij enige eigenschappen af van de functie $z = \varphi(w)$. Wij gaan n.l. de afgeleide van $\varphi(w)$ bepalen, dus de limiet van

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}$$

als w tot w_0 nadert. Wij weten dat $w \to w_0$ aequivalent is met $z = \varphi(w) \to \varphi(w_0) = z_0$, dus

$$\lim_{w \to w_0} \frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Derhalve bestaat de afgeleide van $\varphi(w)$ en voldoet aan

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Voor ieder punt z met $f'(z) \neq 0$ is een analytische functie dus omkeerbaar en men heeft voor die omkering $z = \varphi(w)$ de relatie $\varphi'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$

Wij willen de aard der afbeelding $w = f(z)$ in het geval $f'(z) \neq 0$ nog iets nader bestuderen. Beschouw daartoe in het $z = x+iy$-vlak een Jordankromme $x = x(t)$; $y = y(t)$. Onder de raaklijn hieraan in een punt $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ verstaan we zoals bekend de rechte

$$x = x_0 + (t-t_0)x'(t_0);\; y = y_0 + (t-t_0)y'(t_0)$$

of wel de verzameling der punten

$$z = z_0 + (t-t_0)z'(t_0).$$

De richtingscoëfficiënt dier raaklijn is $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$; deze raaklijn maakt dus een hoek α met de reële as, die voldoet aan

$$\cos\alpha = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}} = \frac{Rz'(t_0)}{|z'(t_0)|};\; \sin\alpha = \frac{Iz'(t_0)}{|z'(t_0)|},\ \text{dus } \alpha = \arg z'(t_0)$$

Wij passen nu de transformatie toe, waardoor onze kromme getransformeerd wordt in een kromme $u = u(t)$, $v = v(t)$, dus $w = u+iv = w(t)$, bepaald door $w = f(z(t))$.

De raaklijn in het punt $w_o = f(z)$, d.w.z. het punt $f(z(t_o))$ maakt volgens het zojuist gevondene met de positieve u-as een hoek $\beta =$
$= \arg w'(t_o) = \arg \frac{d}{dt_o} f(z(t_o)) = \arg (f'(z_o).z'(t_o)) = \arg f'(z_o)+\alpha$,
zodat de oorspronkelijke kromme na de transformatie gedraaid blijkt over een hoek $\gamma = \arg f'(z_o)$. Hieruit volgt onmiddellijk dat de hoek van 2 krommen in het z-vlak door een transformatie $w = f(z)$ waarin $f(z)$ in een punt z analytisch is en aldaar voldoet aan $f'(z) \neq 0$, ongewijzigd blijft. Het is daarom dat men de afbeelding $w = f(z)$ onder de genoemde voorwaarden conform noemt.

Opg. 1. Laat zien dat door de transformatie $w = \log z$ bewezen kan worden dat de raaklijn in een punt a aan een cirkel loodrecht staat op de straal. (Neem als cirkel de eenheidscirkel. Kies a erop en transformeer deze cirkel en ook de rechte Oa).

Opg. 2. Toon aan dat de cirkel $|z| = r$ door de transformatie van $z + \frac{1}{z}$ overgaat in een ellips, tenzij $r = 0$ of 1 is. Waarin gaat de cirkel in de cirkel in deze gevallen over?

Opg. 3. Beschouw een analytische functie $w = f(z)$ met $f'(a) = f''(a) =$
$= \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$; $f^{(n)}(a) \neq 0$. Toon aan dat de hoek van twee krommen in het z-vlak, gaande door a, $\frac{1}{n}$ maal zo groot is als de hoek der getransformeerde krommen in hun snijpunt $f(a)$.

Opg. 4. Voldoet een analytische functie $w = f(z)$ aan $f'(a) = 0$, dan kan de afbeelding van de omgeving van het punt a niet omkeerbaar zijn (verg. opg. 3).

Alvorens nog enige speciale afbeeldingen te beschouwen leiden wij een eigenschap af van cirkels en rechte lijnen.

Wij brengen daartoe de vergelijking van een cirkel met middelpunt m en straal r in een iets andere vorm dan de gebruikelijke gedaante $|z-m| = r$. Laat nl. p en q een willekeurig paar ten opzichte van de cirkel inverse punten voorstellen, d.w.z. p, q en m zijn collineair, m ligt niet tussen p en q en $|p-m| \cdot |q-m| = r^2$. Men kan dan stellen

$$p-m = ae^{i\psi}, \quad q-m = \frac{r^2}{a} e^{i\psi},$$

waarbij $\psi = \arg (p-m)$ is. Stelt men $z-m = re^{i\varphi}$, dan geldt

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = \left|\frac{z-m+m-p}{z-m+m-q}\right| = \left|\frac{re^{i\varphi}-ae^{i\psi}}{re^{i\varphi}-\frac{r^2}{a}e^{i\psi}}\right| = \frac{a}{r}\left|\frac{re^{i\varphi}-ae^{i\psi}}{ae^{i\varphi}-re^{i\psi}}\right| = \frac{a}{r}.$$

Ook de punten van een rechte voldoen aan een dergelijke betrekking. Vormen nl. p en q een willekeurig puntenpaar waarvan de rechte de middenloodlijn is, dan geldt kennelijk voor elk punt z der rechte

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = 1.$$

Omgekeerd beschouwen wij twee willekeurige punten p en q van het complexe vlak en een reëel getal $u \geq 0$, dan liggen alle punten die voldoen aan de vergelijking

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = u$$

op een rechte als $u = 1$ is (dit is triviaal) en als $u \neq 1$ is, op een cirkel, ten opzichte waarvan de punten p en q elkaars inverse zijn. Immers uit $|z-p| = u|z-q|$ volgt

$$z\bar{z} - p\bar{z} - \bar{p}z + p\bar{p} = u^2 z\bar{z} - u^2 q\bar{z} - u^2\bar{q}z + q\bar{q},$$

dus, $z = x+iy$ stellende

$$(1-u^2)(x^2+y^2) - 2x(\Re p-u^2\Re q) - 2y(\Im p-u^2\Im q) + p\bar{p} - u^2 q\bar{q} = 0$$

hetgeen een cirkel voorstelt met middelpunt $m = \dfrac{p-u^2q}{1-u^2}$ en een straal r die na een elementaire berekening gelijk blijkt te zijn aan $\dfrac{u|p-q|}{|1-u^2|}$.
Verder is

$$m-p = \frac{u^2(p-q)}{1-u^2}, \quad m-q = \frac{p-q}{1-u^2},$$

dus $\dfrac{m-p}{m-q} = u^2 \geq 0$, waaruit volgt dat m, p en q collineair zijn en m niet tussen p en q ligt, en verder

$$|m-p|\,|m-q| = \frac{u^2|p-q|^2}{(1-u^2)^2} = r^2,$$

zodat inderdaad p en q invers gelegen zijn ten opzichte van deze cirkel.

Vervolgens beschouwen wij gebroken lineaire afbeeldingen

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{dus } z = \frac{b-wd}{wc-a},$$

waarbij a, b, c en d complexe getallen voorstellen en $ad-bc \neq 0$. Aan $z = \infty$ is $w = \dfrac{a}{c}$ toegevoegd en aan $z = -\dfrac{d}{c}$ het punt $w = \infty$. Is $c = 0$, dan corresponderen $z = \infty$ en $w = \infty$ met elkaar.
Uit

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \text{mits } z \neq \infty$$

volgt dat voor $z \neq \infty$, $z \neq -\dfrac{d}{c}$ de afbeelding conform is.

Wij passen deze transformatie toe op de krommen $\left|\dfrac{z-p}{z-q}\right| = u$ en vinden dan na een korte herleiding

$$\left|\frac{w-p_1}{w-q_1}\right| = u_1, \text{ waarbij } p_1 = f(p),\ q_1 = f(q),\ u_1 = u\left|\frac{qc+d}{pc+d}\right|.$$

Er komt dus weer een kromme van hetzelfde type en de punten p_1 en q_1, waarin p en q door de transformatie zijn overgegaan, liggen invers ten opzichte van de nieuwe kromme.

Wij geven thans met behulp van het bovengevondene een afleiding van een bekende stelling uit de planimetrie, dat de cirkels van Apollonius van een willekeurige driehoek elkaar in hun twee snijpunten onder hoeken van 60° snijden.

Laat nl. a, b en c de hoekpunten van een gegeven driehoek zijn. Dan zijn a en b elkaars inverse ten opzichte van de door c gaande cirkel C_3 van Apollonius enz. Er is een gebroken lineaire transformatie te vinden die de punten a, b en c overvoert in de hoekpunten a', b' en c' van een gelijkzijdige driehoek. Hierdoor gaan de cirkels van Apollonius van driehoek abc over in de cirkels van Apollonius van driehoek a'b'c', d.w.z. in de drie hoogtelijnen van deze driehoek. Deze snijden elkaar onder hoeken van 60°, dus omdat de beschouwde lineaire afbeelding conform is, is dit ook het geval met de Apolloniuscirkels van driehoek abc.

Hulpstelling. Als f(z) analytisch is op en binnen de eenheidscirkel, als verder $f(0) = 0$ en $|f(z)| = 1$ voor $|z| = 1$, dan is voor elke z binnen de eenheidscirkel $|f(z)| \leq |z|$.

Bewijs: Daar f(z) analytisch en $f(0) = 0$ is, is ook de functie $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ overal op en binnen de eenheidscirkel analytisch. Verder is op de eenheidscirkel $|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$. Volgens het maximummodulustheorema (zie blz. 38) is dan overal binnen de eenheiscirkel $|g(z)| \leq 1$, dus $|f(z)| \leq |z|$.

Gevolg. Als f(z) bovendien nog een-eenduidig is, dan geldt het gevondene ook voor de omkering van f(z), dus $|z| \leq |f(z)|$. Derhalve geldt dan $|f(z)| = |z|$ overal op en binnen de eenheidscirkel.

De functie $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ heeft dan overal op en binnen de eenheidscirkel een absolute waarde 1. Op grond van het maximummodulustheorema (blz. 38) geldt dan $g(z) = c$, met $|c| = 1$, dus $f(z) = cz$ overal op en binnen de eenheidscirkel. Wij vinden dus:

Stelling. Iedere conforme afbeelding f(z) die de eenheidscirkel in zichzelf afbeeldt en de oorsprong invariant laat is van de gedaante $f(z)=cz$, waarbij $|c| = 1$. De afbeelding is dus een draaiing om de oorsprong.

Wij zoeken nu de lineaire transformaties die de eenheidscirkel in zichzelf overvoert en een punt m in de oorsprong. De punten m en $\overline{m}^{-1}$, invers gelegen ten opzichte van $|z| = 1$, moeten dan overgaan in de punten 0 en ∞, die invers liggen ten opzichte van $|w| = 1$. Zij $w = \frac{az+b}{cz+d}$ de gezochte transformatie. Dan geldt dus $m = -\frac{b}{a}$; $\overline{m} = -\frac{c}{d}$, derhalve

$$w = \frac{a}{d} \quad \frac{z-m}{-\overline{m}z+1}.$$

Verder moet een punt z met $|z| = 1$ overgaan in een punt w met $|w| = 1$, dus

$$1 = \left|\frac{a}{d}\right| \left|\frac{z-m}{-\overline{m}z+1}\right| = \left|\frac{a}{d}\right|.$$

Stelt men $-\frac{a}{d} = e^{it}$, waarbij t reëel is, dan luidt de gezochte transformatie dus

$$w = e^{it} \frac{z-m}{\overline{m}z-1}.$$

Men merke nog op dat de transformatie overal conform is op en binnen de eenheidscirkel, want haar singuliere punt $\overline{m}^{-1}$ ligt er buiten.

Opgave 5. Men overtuige zich ervan dat de hier op heuristische wijze verkregen transformatie inderdaad aan de gestelde eisen voldoet.

Opgave 6. Men bewijze op een analoge manier dat alle lineaire transformaties die het bovenhalfvlak (d.w.z. de verzameling der punten z met $\Im z \geq 0$) overvoeren in de eenheidscirkel (d.w.z. de verzameling der punten z met $|z| \leq 1$) van de gedaante

$$w = e^{it}\frac{z-m}{z-\overline{m}}$$

zijn, waarbij m een willekeurig complex en t een willekeurig reëel getal is.

Ten slotte bewijzen wij de volgende belangrijke

Stelling. Iedere conforme transformatie die de eenheidscirkel in zichzelf overvoert is lineair.

Bewijs: Laat f(z) de eenheidscirkel in zich zelf overvoeren. Zij f(0)=m. Zij g(z) de hierboven afgeleide lineaire transformatie die de eenheidscirkel in zichzelf overvoert en zij g(m) = 0. Volgens het zoeven gevondene geldt dan

$$g(z) = n\frac{z-m}{\overline{m}z-1}, \text{ waarbij } |n| = 1.$$

De transformatie $h(z) = g(f(z))$, die eveneens conform is, voert dan zowel de eenheidscirkel als de oorsprong in zichzelf over, dus volgens de vorige stelling geldt $h(z) = cz$ met $|c| = 1$. Bij gevolg is

$h(z) = n\frac{f(z)-m}{\overline{m}f(z)-1} = cz$, dus $f(z) = \frac{cz-nm}{cz\overline{m}-n} = \frac{z-bm}{z\overline{m}-b}$ met $|b| = 1$, waarmede de bewering is bewezen.

Het is nu mogelijk in tal van gevallen de meest algemene conforme afbeelding f te geven, die een gebied A in een gebied B overvoert. Men bepale daartoe eerst een speciale conforme afbeelding g die B overvoert in de eenheidscirkel E en een speciale conforme afbeelding h die E in A overvoert. Dan is de transformatie gfh de meest algemene die E in zichzelf overvoert en dus, blijkens het voorgaande gebroken lineair. Uit de bekende gedaante van gfh bepaalt men dan de gezochte transformatie f.

Opgave 7. Bepaal de meest algemene conforme afbeelding die het gebied $\Re z \geq 4$ overvoert in het inwendige van de cirkel $|z| = 2$.

Wij beschouwen nu nog de transformatie $w = z^2$, die overal behalve in de oorsprong conform is. Door deze transformatie wordt het z-vlak afgebeeld op het "dubbelgetelde" w-vlak. Immers een gebied $\alpha < \arg z < \beta$ gaat over in het gebied $2\alpha < \arg w < 2\beta$. Zodra $\beta - \alpha > \pi$ is, wordt een deel van het w-vlak twee maal overdekt.

Het bovenhalfvlak, de positieve reële as en de oorsprong worden reeds in het gehele w-vlak overgevoerd.

De rechten $\Re w = a$ zijn de beelden van orthogonale hyperbolen $x^2-y^2=a$ en de rechten $\Im w = b$ zijn de beelden van orthogonale hyperbolen $xy = \frac{1}{2}b$. Omdat de transformatie voor $z \neq 0$ conform is, snijden de door een punt $z \neq 0$ gaande hyperbolen van de beide typen elkaar orthogonaal. In de oorsprong maken zij echter hoeken van 45° (vergelijk opg. 3).

De transformatie $w = \log z$ voert ook het z-vlak conform over in het w-vlak in de omgeving van ieder punt $z \neq 0$. Hier heeft echter elk punt z oneindig veel beelden $w = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ Binnen een strook $\alpha \leqq \Im w < \alpha + 2\pi$ is slechts één beeld w gelegen.

Bij de inverse transformatie $w = e^z$ wordt het gehele z-vlak afgebeeld op het w-vlak, uitgezonderd de oorsprong $w = 0$. Deze transformatie is conform in de omgeving van ieder punt z. Een punt $w \neq 0$ heeft echter vele originelen.

Wij vragen ons nu af hoe de meest algemene transformatie luidt die het 1e quadrant van het z-vlak overvoert in het inwendige van de eenheidscirkel. Nu voert de transformatie $s = z^2$ het 1e quadrant over in het halfvlak $\Re s > 0$. Men heeft dus nog te bepalen de meest algemene transformatie die dat halfvlak overvoert in het inwendige van de eenheidscirkel. Hiervoor vonden wij in opgave 6

$$w = e^{it} \frac{s-m}{s-\overline{m}},$$

dus de gezochte transformatie luidt $w = e^{it} \dfrac{z^2-m}{z^2-\overline{m}}$.

Wij bepalen als verdere toepassing de meest algemene conforme transformatie die de strook $0 < \Re z < 1$, $\Im z > 0$ afbeeldt in het inwendige van de eenheidscirkel.

Hiertoe passen wij eerst de conforme transformatie $s = 2\pi i z$ toe, die de beschouwde strook overvoert in de strook $\Re s < 0$; $0 < \Im s < 2\pi$. De transformatie $p = e^s$ voert deze strook over in het inwendige van de eenheidscirkel. Ten slotte moet dan het p-vlak conform op het w-vlak worden afgebeeld, waarbij het inwendige van de eenheidscirkel invariant blijft. Hiervoor vonden wij hierboven

$$w = \frac{p-bm}{p\overline{m}-b}, \text{ dus } w = \frac{e^{2\pi i z}-bm}{e^{2\pi i z}\overline{m}-b}, \quad (|b| = 1, \ m \text{ willekeurig})$$

Wij bepalen nog een transformatie die het gebied $|z| < 1$, $\Im z > 0$ overvoert in het gebied $\Im w > 0$ Nu weten wij volgens opgave 6 dat de lineaire transformatie

$$z = e^{it} \frac{is-m}{is-\overline{m}} \quad (t \text{ reëel})$$

de imaginaire s-as overvoert in de eenheidscirkel. Eist men ook nog dat de reële as bij deze transformatie invariant blijft, dan vindt men gemakkelijk $z = \pm \frac{s-c}{s+c}$ (c reëel).

<u>Opgave 8</u>. Bewijs dit

De transformatie $z = -\frac{s-c}{s+c}$ (c reëel) voert derhalve de positieve imaginaire as over in de kromme $|z| = 1$, $\Im z \geqq 0$. Dus de inverse transformatie $s = \dfrac{c(1-z)}{1+z}$ voert het gebied $|z| < 1$, $\Im z > 0$ over in het eerste kwadrant van het s-vlak en de transformatie $w = s^2 = \dfrac{c^2(1-z)^2}{(1+z)^2}$ levert ons de gezochte transformatie.

Hoofdstuk VIII. De Γ-functie.

§1. Oneindige producten.

Eerst geven wij een inleiding over oneindige producten.

Een uitdrukking $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ wordt convergent genoemd als vanaf een zekere index k geldt dat $u_n \neq 0$ is en als verder de rij $u_k, u_k u_{k+1}$, $u_k u_{k+1} u_{k+2}, \ldots$ een limiet $\neq 0$ bezit. Is deze limiet u dan schrijft men

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 u_2 \ldots u_{k-1} u.$$

Gevolg. Een oneindig product is dan en slechts dan nul als tenminste een der factoren nul is. (Ga dit na!).

Bij een convergent oneindig product volgt uit $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=k}^{N} u_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{n=k}^{N+1} u_n \neq 0$ dat $\lim_{N\to\infty} u_N = 1$. We schrijven wel $u_n = 1+a_n$ en hebben dan $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$. Een oneindig product $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ wordt absoluut convergent genoemd als het product $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ convergent is.

Het is mogelijk dat de grootheden a_n functies zijn van een veranderlijke z. We bewijzen thans de volgende fundamentele

Stelling. Zijn alle functies $f_n(z)$ analytisch in een gebied G en is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ uniform convergent in ieder afgesloten deelgebied van G, dan stelt de uitdrukking

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))$$

een overal in G analytische functie voor.

Bewijs. Er bestaat op grond van de tweede onderstelling een index h zodat voor $n > h$ geldt

$$|f_h(z)| + \ldots + |f_n(z)| < \tfrac{1}{2},$$

dus in het bijzonder $|f_n(z)| < \frac{1}{2}$ en $1+f_n(z) \neq 0$.

Verder voeren wij in de grootheden

$$(1) \qquad P_N(z) = \prod_{n=m}^{N} (1+f_n(z)) \qquad (m \geqq h).$$

Dan heeft men

$$|P_N(z)| \leqq \prod_{n=m}^{N} (1+|f_n(z)|) \leqq \prod_{n=m}^{N} e^{|f_n(z)|} = e^{\sum_{n=m}^{N} |f_n(z)|} < e^{\frac{1}{2}} < 2,$$

dus vinden wij voor $N \geqq h$

$$|P_{N+1}(z) - P_N(z)| = |P_N(z)\, f_{N+1}(z)| < 2|f_{N+1}(z)|$$

en

$$\sum_{N=p}^{p+q} (P_{N+1}(z) - P_N(z)) < 2 \sum_{N=p}^{p+q} |f_{N+1}(z)|,$$

waaruit blijkt dat de reeks $\sum_{N=m}^{\infty} (P_{N+1}(z)-P_N(z))$ absoluut en uniform convergent is en dus een analytische functie voorstelt. Hieruit volgt dat de limiet $\lim_{N\to\infty} P_N(z)= \prod_{n=m}^{\infty} (1+f_n(z))$ eveneens een in ieder afgesloten deelgebied van G analytische functie $P(z)$ voorstelt.

Opgave 1. Ga na dat deze functie $\neq 0$ is voor alle G in z.

Opmerking. De functie

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z)) \tag{2}$$

wordt wegens $P(z)\neq 0$ slechts nul in die punten waar één der factoren $1+f_1(z),\dots,1+f_m(z)$ nul is.

Wij bewijzen ook nog dat de formule (1) logarithmisch mag worden gedifferentieerd, dus dat

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)},$$

mits het punt z geen nulpunt is van $F(z)$.

Inderdaad, wij vonden hierboven dat

$$F(z) = (1+f_1(z))\dots(1+f_m(z))\,P(z),$$

dus

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)} + \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

De absoluut en uniform convergente reeks $\sum_{N=m}^{\infty} (P_{N+1}(z)-P_N(z))$ mag termsgewijze worden gedifferentieerd en levert dan op

$$P'(z)= \sum_{N=m}^{\infty} (P_{N+1}'(z)-P_N'(z)) = \lim_{N\to\infty} P_N'(z)$$

Dus wegens (1)

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \lim_{N\to\infty} \frac{P_N'(z)}{P_N(z)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

en

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}.$$

Het bovenstaande passen wij toe om in navolging van Weierstrass een complexe functie te maken die in voorgeschreven punten polen of nulpunten bezit. B.v. de functie die nulpunten bezit in de punten $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ dient, als oneindig product geschreven, zeker de factoren z, $1 \pm \frac{z}{1}$, $1 \pm \frac{z}{2},\dots, 1 \pm \frac{z}{n}$ te bezitten, zodat men hiervoor het product

$$P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

zou kunnen proberen. Dit product convergeert inderdaad wegens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} = \frac{z^2\pi^2}{6}.$$

Ook de functie $\sin \pi z$ heeft als eindige nulpunten slechts de punten $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Hun quotiënt $Q(z) = \frac{P(z)}{\sin \pi z}$ is dus een gehele functie. Inderdaad heeft men (zie blz.60, opg.3)

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} - \pi \cot \pi z = 0.$$

dus $Q(z) = c$ (constant) en $c \sin \pi z = P(z)$. Deelt men beide leden door z en laat men daarna z tot 0 naderen. dan vindt men de waarde van c en tenslotte het resultaat

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

§ 2 De Γ-functie.

Thans geven wij een andere toepassing van het bovenstaande en vragen naar een functie $F(z)$ die in de punten $0, -1, -2, \ldots$ polen heeft van de eerste orde en overal elders in het eindige analytisch is. Voor het reciproke dier functie zou men in eerste instantie willen nemen

$$\frac{1}{F(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

maar wegens de divergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n}$ dient bij elke factor nog een nulpunts- en polenvrije factor worden toegevoegd, zodanig dat het dan verkregen product convergeert. Wij nemen hiervoor de e-macht $e^{-\frac{z}{n}}$ en proberen nu

$$\frac{1}{F(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Wegens $e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ heeft de n^e factor nu de gedaante $1 - \frac{z^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en wegens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ is de nu verkregen uitdrukking convergent. Natuurlijk krijgen wij nu maar een willekeurige oplossing van ons probleem. Ook $e^{f(z)} \frac{1}{F(z)}$ waarin $f(z)$ een gehele functie is van z, voldoet. Wij doen nu een keuze en definiëren

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

waarin C de constante van Euler

$$C = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} - \log N\right)$$

voorstelt.
Men heeft dan

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = e^C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^C \lim_{N \to \infty} e^{\sum_{n=1}^{N} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{C} \lim_{N\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{N}(\log(N+1)-1-\frac{1}{2}\dots-\frac{1}{N})} = e^{C}e^{-C}=1,$$

dus $\Gamma(1)=1$. Verder heeft men voor willekeurige $z(\neq 0,-1,-2,\dots)$

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{z}{z+1}\, e^{C} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{n+z}{n+z+1}\,.e^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{z}{z+1}\, e^{-C} \lim_{N\to\infty} \frac{z+1}{z+N+1}\, e^{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}$$

$$= z\, e^{-C} \lim_{N\to\infty} e^{-\log(z+N+1)+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}} = z,$$

dus $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ (1e functionaalrelatie der Γ-functie). Bijgevolg heeft men voor natuurlijke m de relatie $\Gamma(m)=(m-1)!$
Voorts heeft men voor niet gehele z de tweede functionaalrelatie der Γ-functie

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\ .$$

In het bijzonder volgt hieruit voor $z=\frac{1}{2}$

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi\ , \text{ dus } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \text{ (want } \Gamma(\tfrac{1}{2}) > 0).$$

Opgave 1. Bewijs dat $\Gamma(\frac{1}{2})>0$ is.
Opgave 2. Geef voor gehele n een formule voor $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

Verder vinden wij nog

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{N\to\infty} e^{z(1+\dots+\frac{1}{N}-\log N)}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = z\lim_{N\to\infty} N^{-z}\prod_{n=1}^{N}\frac{n+z}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+N)}{N!N^{z}} \quad \text{(formule van Gauss).}$$

§3. Integraalvoorstellingen.

Wij geven thans een geheel andere voorstelling van de Γ-functie (gegeven door Euler) en wel een waarin integralen optreden. Hiertoe gaan wij uit van de door partiële integratie gemakkelijk af te leiden formule (waarbij n een natuurlijk getal is)

$$\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \int_0^1 (1-t)^n\, t^{z-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\ z>0);$$

hierbij is de integrand zo gedefinieerd dat arg $z=0$ voor $z>0$.
Opgave 1. Bewijs deze formule.

Uit deze formule volgt onder gebruikmaking der formule van Gauss dat

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-t)^n\, t^{z-1}\, n^z dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}du.$$

Wij tonen nu aan dat de laatste limiet gelijk is aan $\int_0^\infty e^{-u}\, u^{z-1} du$ en hebben dan de formule van Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{z-1} du \qquad (\mathrm{Re}\ z > 0)$$

gevonden. Het is voldoende om aan te tonen dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left\{(1-\frac{u}{n})^n - e^{-u}\right\} u^{z-1} du = 0$$

is. Nu heeft men

$$(1-\frac{u}{n})^n < e^{-u},$$

dus de laatste integraal is, absoluut genomen, ten hoogste gelijk aan

$$\int_0^n \left\{e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n\right\} u^{x-1}\, du < \int_0^p + \int_p^\infty .$$

$$= \int_0^p \left\{e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n\right\} u^{x-1} du + \int_p^\infty e^{-u}\, u^{x-1} du.$$

Allereerst kiezen wij nu p zo groot dat de laatste integraal $< \frac{1}{2}\varepsilon$ is. Verder kiezen wij daarna n zo groot dat voor $0 \leq u \leq p$ geldt

$$e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n < \tfrac{1}{2}\varepsilon\, x\, p^{-x},$$

hetgeen wegens $\lim_{n\to\infty} \left\{e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n\right\} = 0$ mogelijk is.

De eerste integraal is dan te majoreren door

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\, x p^{-x} \int_0^p u^{x-1} du = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

en hiermee is het gewenste resultaat gevonden.

Opgave 2. Bewijs $\int_0^\infty e^{-kt}\, t^{z-1} dt = \dfrac{\Gamma(z)}{k^z}$ $(\mathrm{Re}\ z > 0,\ \mathrm{Re}\, k > 0)$.

De thans afgeleide formule van Euler was door hem opgesteld met de bedoeling om a.h.w. een interpolatieformule voor de functie $f(n)=(n-1)!$ te vinden. Hetgeen hier is bereikt, is meer. Ook voor sommige complexe z (nl. die met $\mathrm{Re}\ z > 0$) convergeert de gevonden integraal. De vraag blijft of ook voor andere complexe z een integraalvoorstelling van de Γ-functie mogelijk is. Dit blijkt het geval te zijn; zo'n voorstelling is gegeven door Hankel.

Beschouw de integratieweg C bestaande uit de volgende drie gedeelten

I. de positieve reële as doorlopen van ∞ tot δ $(\delta > 0)$;

II. de cirkel met straal δ om de oorsprong, eenmaal in positieve zin doorlopen vanuit het punt δ ;

III. de positieve reële as, doorlopen van δ tot ∞ .

Voor Re $s > 0$ bekijken we nu de zgn. lusintegraal

$$\int_C (-z)^{s-1} e^{-z} dz,$$

waarbij ter definitie van de integrand genomen is

$$\arg(-z) = -\pi \quad \text{op I}, \quad \arg(-z) = \pi \quad \text{op III}.$$

Dan heeft men:

$$\int_{I+III} = \int_\delta^\infty e^{-x} x^{s-1} \left(e^{\pi i(s-1)} - e^{-\pi i(s-1)}\right) dx$$

$$= 2i \sin\pi(s-1) \int_\delta^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \to -2i \sin\pi s\, \Gamma(s) \text{ als } \delta \to 0.$$

Verder geldt

$$\left| \int_{II} \right| = \left| i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta e^{i\varphi}} (\delta e^{i\varphi})^s \, d\varphi \right|$$

$$\leqq 2\pi \max_{-\pi \leqq \delta \leqq \pi} e^{\delta \cos\varphi} \delta^{\text{Re } s} e^{-\varphi \text{Im } s} \to 0 \quad \text{als} \quad \delta \to 0$$

omdat Re $s > 0$. Dus

$$\lim_{\delta \to 0} \int_C (-z)^{s-1} e^{-z} dz = -2i \sin\pi s\, \Gamma(s)$$

en na gebruikmaking van de 2^e functionaalrelatie der Γ-functie

$$\lim_{\delta \to 0} \int_C (-z)^{s-1} e^{-z} ds = -\frac{2i\pi}{\Gamma(1-s)}.$$

Wegens de stelling van Cauchy mag de integratieweg worden vervangen door een willekeurige lus, die in het oneindige begint en met een positieve slag om de oorsprong loopt om weer in het oneindige te eindigen. Wij schrijven

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\infty^{(0^+)} (-z)^{s-1} e^{-z} ds = -\frac{1}{\Gamma(1-s)}.$$

Daar beide leden analytische functies zijn van s voor alle eindige s vindt men na analytische voortzetting dat het gevonden resultaat geldt, niet alleen als Re $s > 0$ is, maar zelfs als s willekeurig complex is.

<u>Opgave 4</u>. Ga na wat het afgeleide resultaat oplevert voor natuurlijke s en verklaar het dan gevondene.

§4. B-integralen.

Naast de Γ-functie zijn in de practijk van belang de zgn. B-integralen

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (\mathrm{Re}\ p > 0,\ \mathrm{Re}\ q > 0).$$

Wij bewijzen dat $B(p,q) = \dfrac{B(p)B(q)}{B(p+q)}$ is. Men heeft nl.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2p-1}du \int_0^\infty e^{-v^2}v^{2q-1}dv$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2p+2q-1}\cos^{2p-1}\varphi\ \sin^{2q-1}\varphi\ dr\,d\varphi$$

$$= 2\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\ \sin^{2q-1}\varphi\ d\varphi\ .$$

In de laatste integraal stelle men $\cos\varphi = t$, waarna men gemakkelijk vindt dat ze gelijk is aan $\frac{1}{2}B(p,q)$, waarmee het gewenste resultaat is gevonden.

Opgave 1. Voer dat uit.

Opgave 2. Bewijs voor $\mathrm{Re}\ n > -1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}\ .$$

Evenals voor de Γ-functie een lusintegraalvoorstelling, geldig voor alle z, van Hankel bestaat, is er voor $B(p,q)$ een integraalvoorstelling, geldig voor alle p en q; deze is gegeven door Pochhammer. Wij gaan daarop hier niet verder in.

Als toepassing berekenen wij de inhoud $I_n(R)$ van de n-dimensionale bol met straal R, dat wil zeggen van de puntverzameling gegeven door

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq R^2.$$

Wij bewijzen dat deze gelijk is aan c_nR^n en geven voor de getallen c_n een recursierelatie.

Voor n=1 heeft men $c_n=2$.

Opgave 3. Bewijs dit.

Zij thans de relatie $I_{n-1}=c_{n-1}R^{n-1}$ afgeleid. Doorsnijd nu de n-dimensionale bol met straal R met een vlak $x_n=t=R\sin\varphi$. De doorsnijdingsfiguur is de (n-1)-dimensionale bol

$$x_1^2+\ldots.+x_n^2=R^2-t^2=R^2\cos^2\varphi,$$

en heeft dus een (n-1)-dimensionale inhoud $I_{n-1}(R\cos\varphi)$.
Dus

$$2\int_0^1 I_{n-1}(R\cos\varphi)R\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= 2c_{n-1}R^n\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n\varphi\,d\varphi = 2c_{n-1}R^n\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)},$$

wegens het resultaat van opgave 2.

Uit $c_1=2$ vindt men dan door volledige inductie direct

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}.$$

Opgave 4. Voer dit uit.

Wij vinden dus $I_n(R)=\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}R^n$. Voor de oppervlakte $O_n(R)$ van de n-dimensionale bol vindt men dan

$$O_n(R) = \frac{d\,I_n(R)}{dR} = \frac{2.\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}R^{n-1}.$$

Als toepassing geven wij nog de integraal van Dirichlet

$$\int_G f(t_1+\ldots+t_n)t_1^{a_1-1}\,t_2^{a_2-1}\ldots t_n^{a_n-1}\,dt_1\ldots dt_n,$$

uitgestrekt over het gebied G, bepaald door $t_1\geq 0$, $t_2\geq 0,\ldots,t_n\geq 0$ en $t_1+\ldots+t_n\leq 1$. Stelt men $t_1=(1-v)u, t_2=vu$, dan gaat de integraal over in

$$\int_H f(u+t_3+\ldots t_n)(1-v)^{a_1-1}u^{a_1+a_2-1}\,v^{a_2-1}\,t_3^{a_3-1}\ldots t_n^{a_n-1}\,du\,dv\,dt_3\ldots dt_n,$$

uitgestrekt over een gebied H met $u\geq 0$, $v\geq 0$, $t_3\geq 0,\ldots,t_n\geq 0$, $u+t_3+\ldots+t_n\leq 1$, $v\leq 1$, dus in

$$\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}\int_K f(u+t_3+\ldots+t_n)u^{a_1+a_2-1}\,t_3^{a_3-1}\ldots t_n^{a_n-1}\,du\,dt_3\ldots dt_n,$$

uitgestrekt over het gebied K dat uit H ontstaat door de eisen voor v weg te laten. Deze integraal is van hetzelfde type als de oorspronkelijke, maar heeft één integratie-veranderlijke minder. Zo voortgaande vindt men ten slotte dat de oorspronkelijke integraal gelijk is aan

$$\frac{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1+\ldots+a_n)}\int_0^1 f(s)s^{a_1+\ldots+a_n-1}\,ds.$$

Toepassing. Bepaal het traagheidsmoment T om de z-as van de homogene ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ met dichtheid 1.

Men vindt $T=\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = 8\int x^2dx\,dy\,dz+8\int y^2dx\,dy\,dz$, de laatste twee integralen uitgestrekt over het gebied $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$. Stelt men $\dfrac{x^2}{a^2}=u$, $\dfrac{y^2}{b^2}=v$, $\dfrac{z^2}{c^2}=w$, dan vindt men na toepassing van de formule van Dirichlet het antwoord $\frac{4}{15}\pi\,abc(a^2+b^2)$.