STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 39

Analytische getallentheorie.

Cursus 's-Gravenhage 1956-1957, incompl.

S.C. van Veen.

Analytische Getallentheorie

door

Prof. Dr S.C. van Veen

Cursus 's-Gravenhage, 1956-1957

Eerste voordracht:

I (Woensdag 7 november 1956)

De verdeling der priemgetallen.

§1. Definitie der functies, die zullen worden gebruikt.

In het volgende stelt p steeds een priemgetal voor.
Het aantal priemgetallen $\leqslant x$ wordt voorgesteld door $\pi(x)$.

Deze hele cursus zal worden opgebouwd om het bewijs van de fundamentele stelling, de priemgetal-stelling

Stelling A: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1 .$$

Na talrijke hulpstellingen zullen wij in staat zijn deze fundamentele stelling (Hadamard, de la Vallée-Poussin, 1896) te bewijzen.

Daarvoor moeten wij o.a. gebruik maken van de volgende arithmetische functies:

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p = \log \prod_{p\leqslant x} p. \qquad (1)$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \log p \quad (m \text{ geheel}) \qquad (2)$$

Onder invoering van het symbool van Dirichlet:

$$\Lambda(n) = \log p \quad (n=p^m) \qquad (3)$$
$$\Lambda(n) = 0 \quad (n\neq p^m)$$

kunnen wij inplaats van (2) schrijven:

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n).$$

Voorbeeld: $\Lambda(2) = \Lambda(4) = \Lambda(8) = \log 2$
$\Lambda(3) = \Lambda(9) = \log 3$
$\Lambda(5) = \log 5$
$\Lambda(7) = \log 7$

$$\psi(10) = \sum_{n\leqslant 10} \Lambda(n) = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7.$$

Als p^m de hoogste macht van p is $\leqslant x$, dan komt $\log p$ in $\psi(x)$ m maal voor. p^m is de hoogste macht van p, die deelbaar is op enig getal $\leqslant x$.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Hieruit volgt:

$$\psi(x) = \log U(x),$$

waarin $U(x)$ het <u>kleinste gemene veelvoud</u> is van alle getallen $\leqslant x$.

$$m \log p \leqslant \log x; \quad (m+1)\log p > \log x.$$

Dus

m is het grootste gehele getal $\leqslant \frac{\log x}{\log p}$.

Schrijfwijze: $m = \left[\frac{\log x}{\log p}\right]$.

Dus:

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p. \qquad (4)$$

§ 2. Het ordesymbool van Landau, benevens andere symbolen.

$f(x)$ is een willekeurige functie van x.
$\varphi(x)$ is een <u>positieve</u> functie van x.

a) $f(x) = O(\varphi(x))$ betekent: $|f(x)| < A\varphi(x)$, waarin A onafhankelijk is van x voor alle waarden van x, die in het spel zijn.
Voorbeeld: $10x = O(x)$; $\sin x = O(1)$; $x = O(x^2)$ voor $x \to \infty$.
Men zegt: <u>$f(x)$ is van de orde $\varphi(x)$</u>.

b) $f(x) = o(\varphi(x))$ betekent dat $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0$.
Voorbeeld: $x = o(x^2)$, $\sin x = o(x)$, voor $x \to \infty$.
Men zegt dan: $f(x)$ is van de nul-orde van $\varphi(x)$.

c) $f(x) \sim \varphi(x)$ betekent dat $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 1$.
Voorbeeld: $x+1 \sim x$ voor $x \to \infty$.
$\sin x \sim x$, $x+1 \sim 1$ voor $x \to 0$.

<u>Stelling 1</u>: $\psi(x) = \theta(x) + O\left\{x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2\right\}$ voor $x \to \infty$.

<u>Bewijs</u>: $p^2 \leqslant x$, $p^3 \leqslant x \ldots$ is gelijkwaardig met $p \leqslant x^{\frac{1}{2}}$, $p \leqslant x^{\frac{1}{3}}, \ldots$.
Dus:

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots = \sum \theta(x^{\frac{1}{m}}).$$

De reeks breekt automatisch af als $x^{\frac{1}{m}} < 2$ is, dus als

$$m > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Uit definitie volgt:

$\theta(x) < x \log x$ voor $x \geqslant 2$, dus a fortiori
$\theta(x^{\frac{1}{m}}) < x^{\frac{1}{m}} \log x \leqslant x^{\frac{1}{2}} \log x$ voor $m \geqslant 2$.

Dus:

$$\sum_{m \geq 2} \theta(x^{\frac{1}{m}}) = O\left\{x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2\right\}$$

omdat het aantal termen in de reeks is $\left[\frac{\log x}{\log 2}\right] = O(\log x)$.

Stelling 2: De functies $\theta(x)$ en $\psi(x)$ zijn beide $O(x)$ voor $x \to \infty$.

Wij moeten dus bewijzen, dat er positieve getallen A_1, B_1, A_2 en B_2 zijn, zodat

$$A_1 x < \theta(x) < A_2 x \; ; \qquad B_1 x < \psi(x) < B_2 x \qquad (x \geq 2).$$

In verband met stelling 1 is het voldoende om te bewijzen:

$$\theta(x) < A_2 x \quad \text{en} \quad \psi(x) > B_1 x \qquad (x \geq 2).$$

Wij zullen iets nauwkeuriger bewijzen:

Stelling 3: $\theta(n) < 2n \log 2$ voor alle waarden van $n \geq 1$.

Bewijs:

$$M = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \frac{(2m+1)(2m)---(m+2)}{m!} \quad \text{is } \underline{\text{geheel}}$$

Dit getal komt 2 maal voor in de binomiaal-ontwikkeling voor $(1+1)^{2m+1}$, dus $2M < 2^{2m+1}$, $M < 2^{2m}$.

Voor $m+1 < p \leq 2m+1$ is p deelbaar op de teller, maar niet op de noemer van M. Dus:

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \quad \text{is deelbaar op M.}$$

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) = \sum_{m+1 < p \leq 2m+1} \log p \leq \log M < 2m \log 2.$$

De waarheid van stelling 3 is triviaal voor n=1 en n=2.

Neem aan dat de stelling juist is voor $n \leq n_o - 1$.

Voor n_o even is $\theta(n_o) = \theta(n_o - 1) < 2(n_o - 1)\log 2 < 2n_o \log 2$.

Voor n_o oneven $=2m+1$ is

$$\theta(n_o) = \theta(2m+1) = \theta(2m+1) - \theta(m+1) + \theta(m+1) < 2m \log 2 + 2(m+1)\log 2$$
$$= 2(2m+1)\log 2 = 2n_o \log 2, \text{ omdat } m+1 < n_o.$$

Dus stelling 3 is juist voor $n = n_o$, dus bij inductie voor alle gehele waarden van n.

Hiermede is dus bewezen:

$$\theta(n) < A_2 n \qquad \text{met } A_2 = 2 \log 2.$$

Om nu te bewijzen: $\psi(x) > B_1 x$ merken wij op, dat de getallenrij $1, 2, \ldots. n$ juist $\left[\frac{n}{p}\right]$ p-vouden bevat

juist $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ p^2-vouden "

juist $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ p^3-vouden " , etc.

Dus:

<u>Stelling 4</u>: $$n! = \prod_p p^{\sum_{p^m \geq 1} \left[\frac{n}{p^m}\right]}$$

Stel nu

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)}$$

Iedere term $\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right] = 1$ als $\left[\frac{2n}{p^m}\right]$ is oneven

$= 0$ als " " even.

Deze term is verder ook $=0$ voor $p^m > 2n$.

Dus $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right) \leq \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]$

$$\log N \leq \sum_{p \leq 2^n} \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \log p = \psi(2n)$$

Ook is $N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdots \frac{2n}{n} \geq 2^n$

Dus $\psi(2n) \geq \log N \geq n \log 2$.

Voor $x \geq 2$ stellen wij $\left[\frac{x}{2}\right] = n \geq 1$ dus

$$\psi(x) \geq \psi(2n) \geq n \log 2 \geq \frac{x}{4} \log 2$$

Dus $\psi(x) > B_1 x$ met $B_1 = \frac{1}{4}\log 2$.

Met behulp van stelling 1 ziet men nu gemakkelijk:

$$A_1 x < \theta(x) < A_2 x \; ; \quad B_1 x < \psi(x) < B_2 x$$

met bepaalde constanten A_1, A_2, B_1, B_2.

Door verscherping van deze beschouwingen waren reeds Tschebycheff en anderen ($\pm$ 1850) er in geslaagd voor de bovengrenzen A_2 en B_2 getallenwaarden te vinden, die slechts weinig groter dan 1 waren, en evenzo voor A_1 en B_1 getallenwaarden, die slechts weinig kleiner waren dan 1. Het was echter eerst aan een latere generatie (Hadamard, de la Vallée-Poussin 1896) om streng te bewijzen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

Het bewijs van deze uitkomst vereist echter veel meer.

Alvorens daartoe over te gaan, nog een kleinigheidje:

<u>Stelling 5</u>: Voor $n > 1$ is er tenminste één priemgetal p, zodat

$n < p < 2n$

zodat $p_{r+1} < 2p_r$ voor alle waarden van r,
als p_r het r^{de} priemgetal voorstelt.
(Deze stelling werd als postulaat uitgesproken door Bertrand).

Vooropmerking: Deze 2 uitspraken van de stelling zijn duidelijk equivalent.

Bewijs: Stel uit het ongerijmde, dat voor zekere $n > 2^9 = 512$ geen p bestaat met $n < p \leq 2n$.

Laat p een priemfactor zijn van

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{k_p},$$

$$\text{met } k_p = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right] \right)$$

Dan is dus: $k_p \geq 1$ (1)

Volgens onze aanname is $p \leq n$.

Als: $\frac{2}{3}n < p \leq n$ is, dan is $2p \leq 2n < 3p$, dus $p^2 > \frac{4}{9} n^2 = \frac{4}{9} n.n > 2n$.

Dus:

$$k_p = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 2-2=0 \quad \text{in strijd met (1).}$$

Dus:

$$p \leq \frac{2}{3} n \text{ voor elke priemfactor van N.}$$

Dus:

$$\sum_{p \mid N} \log p \leq \sum_{p \leq \frac{2}{3} n} \log p = \theta\left(\frac{2}{3} n\right) < \frac{4}{3} n \log 2 \quad \text{(st.3).}$$

Als vervolgens

$$k_p \geq 2 \text{ is}$$

dan is $\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \geq k_p \geq 2$, dus $2 \log p \leq k \log p \leq \log 2n$
$p \leq \sqrt{2n}$

$$\sum_{k_p \geq 2} k_p \log p \leq \sqrt{2n} \log (2n).$$

$$\log N \leq \sum_{k_p=1} \log p + \sum_{k_p \geq 2} k_p \log p \leq \sum_{p \mid N} \log p + \sqrt{2n}.\log 2n$$

$$\leq \frac{4}{3} n \log 2 + \sqrt{2n}.\log 2n.$$

Anderzijds:

N is de maximumterm van de ontwikkeling $2^{2n} = (1+1)^{2n}$

dus:

$$2^{2n} = 2 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots \binom{2n}{2n-1} \leq 2n \, N$$

of:

$$2n\log 2 \leq \log 2n + \log N \leq \frac{4}{3} n \log 2 + (\sqrt{2n}+1)\log 2n$$

dus:

$$2n \log 2 \leq 3(1+\sqrt{2n}) \log 2n$$

Stel $\dfrac{\log\left(\frac{n}{512}\right)}{10 \log 2} = x > 0$, dus $2n = 2^{10(1+x)}$.

dus $2^{10(1+x)} \log 2 \leq 3(1+2^{5(1+x)}).10(1+x)\log 2.$

$$2^{10(1+x)} \leq 30(1+x)(1+2^{5(1+x)})$$

$$2^{5x} \leq 30(1+x).2^{-5}(1+2^{-5-5x}).$$

$$< (1-2^{-5})(1+2^{-5})(1+x). < 1+x$$

Maar $2^{5x} > 1+5x \log 2 > 1+x$. <u>Tegenspraak!</u>

Dus als $n > 512$, dan moet er een priemgetal zijn met

$$n < p \leq 2n$$

Voor $n \leq 512$ volgt uit de rij der priemgetallen

$$2,3,5,7,13,23,43,83,163,317,631$$

dat dan ook aan

$$p_{r+1} < 2p_r$$

wordt voldaan. Dus <u>algemeen</u>

$p_{r+1} < 2p_r$. Dit bewijs is van Erdös en Kalmar.

§ 2. Uit stelling 2 kan gemakkelijk worden afgeleid:

<u>Stelling 6</u>: $A_1 < \dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < A_2$ (A_1 en A_2 zijn eindige getallen)

<u>Bewijs</u>:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x.$$

Dus: $\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq \dfrac{\theta(x)}{x} > A_1$

Anderzijds is voor $0 < \delta < 1$

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} \log p \geq (1-\delta)\log x \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} 1$$

$$= (1-\delta)\log x \left\{\pi(x) - \pi(x^{1-\delta})\right\} \geq (1-\delta)\log x \left\{\pi(x) - x^{1-\delta}\right\}$$

$$\pi(x) \leq x^{1-\delta} + \frac{\theta(x)}{(1-\delta)\log x} < \frac{A_2 x}{\log x}$$

Wij kunnen nog meer bewijzen, n.l.

Stelling 7:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{\theta(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{\psi(x)}=1.$$

Bewijs: Het is alleen nodig de eerste bewering:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{\theta(x)}=1$$

te bewijzen. (St.1).

Uit bewijs stelling 6 volgt:

$$1\leqslant\frac{\pi(x)\log x}{\theta(x)}\leqslant\frac{x^{1-\delta}\log x}{\theta(x)}+\frac{1}{1-\delta}$$

Wij kiezen bij gegeven $\varepsilon>0$ een getal $\delta=\delta(\varepsilon)$ met

$$\frac{1}{1-\delta}<1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Vervolgens $x_0=x_0(\delta,\varepsilon)=x_0(\varepsilon)$ met

$$\frac{x^{1-\delta}\log x}{\theta(x)}<\frac{\log x}{x^{\delta}.A_1}<\frac{\varepsilon}{2}\text{ voor }x>x_0,$$

m.a.w. $1\leqslant\dfrac{\pi(x)\log x}{\theta(x)}<1+\varepsilon$ voor $x>x_0$ w.t.b.w.

Stelling 8: Het n^e priemgetal p_n voldoet aan

$$B_1 n\log n<p_n<B_2 n\log n\quad(B_1\text{ en }B_2\text{ zijn eindige getallen})$$

Bewijs:

$$n=\pi(p_n)<\frac{A_2p_n}{\log p_n},\quad p_n>\frac{n\log p_n}{A_2}>\frac{n\log n}{A_2}.$$

Vervolgens is

$$n=\pi(p_n)>\frac{A_1p_n}{\log p_n}$$

$$\sqrt{p_n}<\frac{A_3p_n}{\log p_n}<A_3n,\text{ dus }p_n<A_3^2n^2$$

$$p_n<\frac{n\log p_n}{A_1}<B_2\,n\log n.$$

§3. Enige algemene transformatieformules.

Stelling 9: $c_1,c_2,\ldots\ldots$ is een rij getallen, met

$$C(t)=\sum_{n\leqslant t}c_n.$$

f(t) is een functie van t.

Dan geldt:

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = \sum_{n \leq x-1} C(n) \left\{ f(n) - f(n+1) \right\} + C(x) f\left([x]\right) .$$

Als bovendien $c_j = 0$ voor $j < n_1$ en als f(t) <u>continu</u> <u>differentieerbaar</u> is voor $t \geq n_1$, dan is

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = C(x) f(x) - \int_{n_1}^{x} C(t) f'(t) dt.$$

<u>Bewijs</u>: $N = [x]$.

$$\sum_{n \leq x} c_n f(n) = C(1) f(1) + \left\{ C(2) - C(1) \right\} f(2) + \ldots + \left\{ C(N) - C(N-1) \right\} f(N)$$

$$= C(1)\left\{ f(1) - f(2) \right\} + \ldots + C(N-1)\left\{ f(N-1) - f(N) \right\} + C(N) f(N)$$

waarmede de eerste formule bewezen is, wegens $C(N) = C(x)$.

Voor $n \leq t < n+1$ is $C(t) = C(n)$ dus

$$C(n) \left\{ f(n) - f(n+1) \right\} = -\int_{n}^{n+1} C(t) f'(t) dt.$$

Wegens $C(t) = 0$ voor $t < n_1$ is hiermede de 2^e formule bewezen.

Als toepassing bewijzen we:

<u>Stelling 10</u>: $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$,

waarin C een constant getal is (de constante van Euler).

<u>Bewijs</u>: Stel $c_n = 1$, $f(t) = \frac{1}{t}$, dus $C(x) = [x]$.

Volgens de 2^e formule uit stelling 9 is:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} + \int_{1}^{x} \frac{[t]}{t^2} dt.$$

$$= \frac{[x] - x}{x} + 1 - \int_{1}^{x} \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$$

$$= \log x + \left\{ 1 - \int_{1}^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \right\} + \int_{x}^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt - \frac{x - [x]}{x}$$

$$= \log x + C + E,$$

waarin

$$C = 1 - \int_{1}^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt = \text{constant}.$$

$$E = \int_{x}^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt - \frac{x - [x]}{x} < \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} .$$

§ 4. Belangrijke sommatieformules.

Stelling 11 (hulpstelling).

$$\sum_{n \leqslant x} \log^h \left(\frac{x}{n}\right) = O(x). \quad (h > 0).$$

Bewijs: $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \log^h\left(\frac{x}{t}\right) dt \geqslant \log^h\left(\frac{x}{n}\right)$

dus $\displaystyle\sum_{n=2}^{[x]} \log^h\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant \int_1^x \log^h\left(\frac{x}{t}\right) dt = x\int_1^x \frac{\log^h u}{u^2}\, du < x\int_1^\infty \frac{\log^h u}{u^2}\, du = Ax.$

w.t.b.w.

Speciaal geval:

h=1 $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \log n = [x] \log x + O(x) = x \log x + O(x).$

Wegens stelling 4 is

$$\sum_{n \leqslant x} \log n = \sum_{p \leqslant x} \sum_{m \geqslant 1} \left[\frac{[x]}{p^m}\right] \log p = \sum_{p^m \leqslant x} \left[\frac{x}{p^m}\right] \log p = \sum_{n \leqslant x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n)$$

$$= \sum_{n \leqslant x} \frac{x}{n} \Lambda(n) + \sum_{n \leqslant x} \left\{\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right\} \Lambda(n)$$

De restterm $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \left\{\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right\} \Lambda(n)$ is in absolute waarde

$$< \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \psi(x) = O(x)$$

m.a.w. $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \frac{x}{n} \Lambda(n) = \sum_{n \leqslant x} \log n + O(x) = x \log x + O(x)$

Hiermede is bewezen:

Stelling 12: $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1),$

en hieruit volgt weer:

Stelling 13: $\displaystyle\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$

Bewijs: $\displaystyle\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \sum_{m \geqslant 2} \sum_{p^m \leqslant x} \frac{\log p}{p^m}$

$$< \sum_p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right) \log p = \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n(n-1)} = A.$$

Als in de 2e formule van stelling 9 wordt gesteld:

$$f(t) = \frac{1}{t}\ ; \quad c_n = \Lambda(n), \text{ dus } C(x) = \psi(x)$$

dan levert deze:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt.$$

Uit stelling 2 en stelling 12 volgt dan:

$$\int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = \log x + O(1).$$

Uit de laatste uitkomst kan gemakkelijk worden afgeleid:

<u>Stelling 14</u>: $\underline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$; $\overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1$.

<u>Bewijs</u>: Als $\underline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} = 1 + \delta$ met $\delta > 0$, dan is voor $x > x_0$

$$\psi(x) > (1 + \tfrac{\delta}{2})x$$

dus

$$\int_2^x \frac{\psi(t)}{t}\, dt > \int_2^{x_0} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt + \int_{x_0}^x \frac{1+\frac{\delta}{2}}{t}\, dt > (1+\tfrac{\delta}{2})\log x - A,$$

in tegenspraak met $\int_2^x \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = \log x + O(1)$.

Op analoge wijze komt men tot een tegenspraak, als men veronderstelt dat

$$\overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} = 1 - \delta.$$

Uit deze stelling en stelling 7 volgt nu onmiddellijk de belangrijke uitkomst:

<u>Stelling 15</u>:

$$\underline{\lim} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq 1 \; ; \quad \overline{\lim} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq 1,$$

m.a.w.: <u>als</u> $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ bestaat, dan kan deze limiet niet anders dan 1 zijn.

Inderdaad bestaat deze limiet (Stelling A), maar hierin schuilt juist de grootste moeilijkheid, die wij alleen op "elementaire" wijze (dus zonder complexe functietheorie) kunnen overwinnen na het bewijs van enige zeer gecompliceerde hulpstellingen.