STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 41

Colloquium matrixrepresentaties 1956/57

N.G.de Bruijn.

1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

ZC 41

Colloquium Matrixrepresentaties.

1956/57

Colloquium Matrixrepresentaties 1956-'57

o.l.v. Prof.Dr N.G. de Bruijn

I. Theorie der representaties voor eindige groepen

door Prof.Dr N.G. de Bruijn

I.1. Representaties. Een representatie (in algemene zin) van een groep G is niets anders dan een homomorfe afbeelding in een andere groep G', dus een afbeelding φ met de eigenschap dat

$$\varphi(g) \in G' \qquad (g \in G)$$

$$\varphi(g_1).\varphi(g_2) = \varphi(g_1\, g_2) \qquad (g_1 \in G,\ g_2 \in G).$$

(de groepsoperatie zullen we steeds als vermenigvuldiging noteren).

Van bijzonder belang zijn voor ons de gevallen dat G' is a) een groep van permutaties, b) een groep van lineaire transformaties, c) een groep van lineaire substituties, d.i. een groep van matrices (waarin de vermenigvuldiging de matrixvermenigvuldiging is). Matrix betekent bij ons steeds eindige matrix.

Ad a. Een bekend voorbeeld is de Cayley-representatie. De beschouwde permutaties zijn hier permutaties van de elementen van de groep zèlf. Aan $a \in G$ wordt toegevoegd de permutatie P_a, gedefinieerd door

$$g \rightarrow P_a(g), \text{ met } P_a(g) = ag.$$

Daar het product PQ=R van de permutaties P en Q gedefinieerd is door

$$R(g) = P(Q(g)) \qquad (g \in G)$$

is nu, als $a \in G$, $b \in G$,

$$(P_a P_b)(g) = P_a(P_b(g)) = a(bg) = (ab)g = P_{ab}(g),$$

zodat inderdaad de afbeelding $a \rightarrow P_a$ homomorf is.

Ad b en c. De lineaire transformaties in een n-dimensionale vectorruimte kan men, door de keuze van n basisvectoren, één-éénduidig in verband brengen met de matrices $n \times n$, waarbij dan het transformatieproduct correspondeert met de matrixvermenigvuldiging.

Dit maakt dat alles wat over het geval b kan worden gezegd, zonder moeite op c kan worden overgebracht. We zullen ons zoveel mogelijk tot het geval c beperken.

Een groep van permutaties van een eindig aantal objecten 1,...,n is steeds isomorf met een $n \times n$ matrixgroep. Voeg nl. aan de permutatie P toe de lineaire afbeelding die de basisvectoren $v_1, \ldots, v_n$ onderling permuteert volgens $v_j \rightarrow v_{P(j)}$ (dit legt de lineaire transformatie éénduidig vast). Deze afbeelding correspondeert nu met de matrix (p_{ij}), gedefinieerd door $p_{ij}=\delta_{i,P(j)}$ (δ = Kronecker-symbool). We controleren nog even de homomorfie: Aan $PQ=R$ wordt toegevoegd de matrix (r_{ij}) met $r_{ij}=\delta_{i,R(j)}$. Inderdaad is nu $(p_{ij})(q_{ij})=(r_{ij})$, want

$$\sum_k p_{ik}\, q_{kj} = \sum_k \delta_{i,P(k)} \cdot \delta_{k,Q(j)} = \delta_{i,P(Q(j))} = \delta_{i,R(j)}$$

<u>Reguliere representatie</u>. Is G een <u>eindige</u> groep, met orde n, dan kunnen we op de zojuist beschreven wijze uit de Cayley-representatie een matrixrepresentatie maken. Deze heet <u>de reguliere representatie</u>. (We mogen eigenlijk pas over <u>de</u> spreken als er een volgorde van de elementen van de groep is vastgelegd). Gemakshalve gebruiken we als indices de elementen van de groep zèlf, i.p.v. de symbolen 1,...,n.

Cayley voegt aan $a \in G$ toe de permutatie P, gedefinieerd door $P(g)=ag$. Op de zoëven beschreven wijze behoort daarbij de matrix (p_{ij}), gedefinieerd door $p_{ij}=\delta_{i,P(j)}$. De representatie is dus

$$a \longrightarrow A \qquad \text{met } a_{ij} = \delta_{i,aj} \quad (i,j \in G) \quad (a \in G)$$

(A stelt een matrix voor, met kentallen a_{ij}).

Van belang is later het spoor $\sigma(A)$ van de matrix A:

$$\sigma(A) = \sum_{i \in G} a_{ii} = \sum_{i \in G} \delta_{i,ai} = \begin{cases} \text{orde van } G & \text{als } a=e \\ 0 & \text{als } a \neq e \end{cases}$$

Hierin stelt e het eenheidselement van G voor.

<u>Van nu af aan zullen we het woord representatie steeds gebruiken in de beperktere betekenis van matrixrepresentatie</u>, terwijl we ons bovendien zullen beperken tot matrices waarvan de elementen complexe getallen zijn.

I.2. <u>Equivalentie en reductie.</u> Zij ρ een representatie van een willekeurige groep G in matrices $n \times n$. Het getal n heet de <u>graad</u> van de matrices, en ook de graad van de representatie. We noteren het beeld van $a \in G$ met $\rho(a)$.

Is S een niet-singuliere $n \times n$ matrix, met inverse S^I, dan kunnen we uit ρ een nieuwe representatie $S^I \rho S$ maken, gedefinieerd door

$$S^I \rho S: \qquad a \longrightarrow S^I \rho(a) S \qquad (a \in G)$$

Dat dit weer een representatie is, volgt uit

$$S^I \rho(ab) S = S^I \rho(a)\, \rho(b) S = S^I \rho(a) S \,.\, S^I \rho(b) S.$$

De representaties ρ en σ heten <u>equivalent</u> als er een S is met $\rho = S^I \sigma S$. Notatie: $\rho \sim \sigma$. Gemakkelijk blijkt dat $\sim$ een equivalentierelatie is: merk op dat $T^I(S^I \rho S)T = (ST)^I \rho (ST)$.

Equivalente representaties hebben dezelfde graad.

Zijn ρ en σ representaties resp. van de graad n en m, dan verstaan we onder een <u>directe som</u> $\rho+\sigma$ de representatie van de graad n+m, gegeven door de blokmatrices

$$(\rho+\sigma)(a) = \begin{pmatrix} \rho(a) & 0 \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix}.$$

Een representatie heet <u>reducibel</u> als zij equivalent is met een directe som van representaties van lagere graad.

Een representatie heet <u>half-reducibel</u> als zij equivalent is met een half-gereduceerde representatie, d.i. een representatie ρ waarbij alle matrices de blokvorm

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

hebben, waarbij P,Q en R resp. $k\times k$, $k\times(n-k)$ en $(n-k)\times(n-k)$ zijn, waarin $0<k<n$, en k voor alle $a\in G$ dezelfde is.

Is i.h.b. Q=0 voor alle $a\in G$, dan is dus de representatie reducibel.

Een representatie heet <u>irreducibel</u> als zij niet half-reducibel is (soms gebruikt men het in de zin van niet-reducibel.

Voor eindige groepen zal blijken dat de begrippen reducibel en half-reducibel samenvallen (§ I,3).

We geven nog een voorbeeld van een half-reducibele doch niet reducibele representatie van een oneindige groep. Zij G de oneindige cyclische groep met voortbrengend element g. We definieren ρ door

$$\rho(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

Deze ρ is half-gereduceerd. Doch ρ is niet reducibel, want voor geen enkele $n\neq 0$ en voor geen enkele S is $S^I\rho(g^n)S$ een diagonale matrix (want $\rho(g^n)$ heeft de eigenwaarden 1,1, en een diagonale matrix met deze eigenwaarden is noodzakelijk de eenheidsmatrix).

Triviaal is de stelling: <u>Elke reducibele representatie is equivalent met de direct some van een aantal niet-reducibele representaties.</u> Hiertoe dient men slechts op te merken dat $\rho'\sim\rho$, $\sigma'\sim\sigma$ impliceert dat $\rho'+\sigma'\sim\rho+\sigma$.

De begrippen reducibel, etc. kunnen nog worden gewijzigd door het equivalentie-begrip te beperken. Is K een getallenlichaam, dan heten ρ en σ K-equivalent als $\sigma = S^I\rho S$, waarbij S een matrix met elementen in K is. Is K het lichaam van de rationale getallen, dan komt men zo tot de begrippen rationaal-reducibel, etc.: is K het lichaam der complexe getallen dan spreekt men over absoluut-reducibel, etc.

I.3. De stelling van Maschke. Deze luidt

St.1.3.1. Elke half-reducibele representatie van een eindige groep is reducibel.

We geven twee bewijzen. Het tweede bewijs levert iets meer op, nl. dat voor elk lichaam K geldt: elke K-half-reducibele ρ is K-reducibel, (mits alle elementen van alle door ρ opgeleverde matrices in K liggen). Niettemin is het eerste bewijs voor verschillende toepassingen en generalisaties van belang. Het eerste bewijs berust op reductie tot unitaire matrices.

Een matrix U heet unitair als $U=U^{CTI}$ (de operatoren C, T en I betekenen respectievelijk complex conjugeren, transponeren en inverteren). Een matrix $T=(t_{ij})$ heet triangulair als $t_{ij}=0$ voor $i>j$. Een matrix H heet hermitisch als $H=H^{CT}$, en positief definiet hermitisch als $x^{CT}Hx>0$ voor alle kolomvectoren $x\neq 0$.

Stelling 1.3.2. Is H positief definiet hermitisch, dan is er een triangulaire T met $H=T^{CT}T$.
Bewijs: berust op de mogelijkheid om de vorm $x^{CT}Hx$ te splitsen als

$$|t_{11}x_1+\dots+t_{1n}x_n|^2+|t_{21}x_2+\dots+t_{2n}x_n|^2+\dots+|t_nx_n|^2 .$$

Merk op dat een splitsing $H=T^{CT}DT$ (D positief diagonaal) nog wèl met rationale operaties lukt, doch dat voor het verwijderen van D worteltrekkingen nodig zijn.

Stelling 1.3.3. Bestaat een eindige matrixgroep G uit de matrices $A_1,\dots,A_g$, dan is er een triangulaire T zó dat alle T^IA_iT unitair zijn.
Bewijs. De matrix

$$H=\sum_{j=1}^{g} A_j^{CT}A_j$$

is hermitisch, omdat elke term hermitisch is. Bovendien is elke term niet-negatief definiet, terwijl één ervan de eenheidsmatrix is (dus positief definiet is). Derhalve is H p.d. hermitisch, en dus $=T^{CT}T$ met triangulaire T (st.1.3.2). T is niet-singulier, omdat H het is. Zij $T_1=T^I$; T_1 is weer triangulair.

De matrices A_i voldoen aan $A_i^{CT}HA_i=H$, omdat de A's een groep vormen. (Doorloopt A_j de groep, dan doet A_jA_i bij vaste i dat ook, dus $\sum A_j^{CT}A_j=\sum(A_jA_i)^{CT}(A_jA_i)$).

Nu blijkt dat

$$T^{ICT} A_i^{CT} T^{CT} T A_i T^I = T^{ICT} H T^I = I,$$

dus $\quad (TA_iT^I)^{CT} (TA_iT^I) = I.$

De TA_iT^I's, oftewel de $T_1^I A_i T_1$'s zijn nu alle unitair.

<u>Eerste bewijs van de stelling van Maschke</u>: Zij ρ een half-gereduceerde representatie van de groep G (met elementen $e=a_1,a_2,\dots,a_g$):

$$\rho(a_j) = \begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

Zij T triangulair en zó (st.1.3.3) dat de $T^I \rho(a_j) T$ alle unitair zijn. Nu heeft elke triangulaire matrix eveneens deze blokvorm, met de nulmatrix linksonderaan, en bij vermenigvuldiging blijft deze vorm behouden. De $T^I \rho(a_j)T$ hebben dus ook deze blokvorm. Om nieuwe notaties te vermijden nemen we nu aan dat de $\rho(a_j)$ zèlf unitair zijn.

Nu is $\rho(a_j)^{CT} = \rho(a_j)^I = \rho(a_j^{-1})$, en deze heeft weer nullen links-onder. Derhalve heeft $\rho(a_j)$ zèlf nullen rechtsboven, dus $Q_j=0$ (dit argument zegt: een halfgereduceerde unitaire representatie <u>is</u> gereduceerd; bovendien blijkt dat het de direct som van twee representaties is die elk weer unitair zijn). Hiermee is de stelling van Maschke bewezen.

<u>Tweede bewijs van de stelling van Maschke.</u> Neem aan dat ρ halfgereduceerd is, in de vorm (1.3.1).
We zullen nu een matrix S zó bepalen dat

$$\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}^I \begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & R_j \end{pmatrix}$$

voor elke j. (S is een matrix van dezelfde afmetingen als de Q_j's).
Daartoe is nodig en voldoende dat

$$Q_j + P_jS - SR_j = 0 \qquad (j=1,\dots,g)$$

en dit betekent

$$\begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix} \qquad (j=1,\dots,g)$$

Het is niet moeilijk matrices aan te geven die met alle $\rho(a_j)$'s verwisselbaar zijn. Voor elke $n \times n$ matrix M heeft $\sum_j \rho(a_j)^I M \rho(a_j)$ deze eigenschap. We willen in het bijzonder een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$ hebben. Daartoe proberen we

$$\sum_j \begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix}^I \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

Daar $\begin{pmatrix} P_j & Q_j \\ 0 & R_j \end{pmatrix}^I = \begin{pmatrix} P_j^I - P_j^I Q_j R_j^I \\ 0 \quad\quad R_j^I \end{pmatrix}$,

vinden we voor (1.3.2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sum P_j^I Q_j \\ 0 & gI \end{pmatrix}$$

Derhalve heeft $S = -\frac{1}{g}\sum P_j^I Q_j$ de verlangde eigenschap.

We merken op dat hier van het lichaam waarin wordt gerepresenteerd slechts wordt gebruikt dat de karakteristiek niet op g(=orde van G) deelbaar is.

Dit tweede bewijs levert nog iets meer op dan de stelling van Maschke zegt, nl.: een halfgereduceerde representatie is equivalent met de representatie die ontstaat door het blok rechtsboven door nullen te vervangen. Daaruit volgt bijv. weer: elke triangulaire representatie is equivalent met een diagonale, en wel met zijn eigen diagonaal.

Opmerking: de stelling van Maschke geldt ook voor begrensde representaties van een willekeurige groep.

I.4. Het lemma van Schur. We bewijzen eerst

Stelling 1.4.1. Zijn ρ en σ irreducibele representaties van een groep G, met graden m en n, en is er een $m \times n$ matrix S zó dat

$$\rho(a)\, S = S\,\sigma(a) \qquad (\text{alle } a \in G),$$

dan is òf S kwadratisch en inverteerbaar (dus m=n, en $\rho \sim \sigma$)
òf S = 0.

Bewijs. Voordat we het bewijs beginnen mogen we S voor en achter met inverteerbare matrices P $(m \times m)$ en Q$(n \times n)$ vermenigvuldigen, want dit is weer op te heffen door ρ en σ door equivalente te vervangen:

$$(P\rho P^I)(PSQ) = (PSQ)(Q^I \sigma Q).$$

Door geschikte P en Q te kiezen kunnen we S krijgen in één der vormen

$$0, \quad I, \quad \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (I \quad 0), \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We moeten laten zien dat de laatste drie niet kunnen voorkomen. Maken we in ρ de corresponderende blokkenindeling, dan blijkt uit

$$\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\sigma$$

direct dat C=o, in strijd met de irreducibiliteit van ρ.

Met de andere gevallen gaat het bewijs overeenkomstig.

Merk op dat slechts gewerkt behoeft te worden met K-equivalentie en K-irreducibiliteit, waarin K een lichaam is waarin de elementen van S liggen. Merk verder op dat G niet eindig behoeft te zijn, en dat de stelling zelfs geldt voor op een willekeurige verzameling G gedefinieerde matrixwaardige functies ρ en σ. De laatste opmerking geldt ook t.a.v. de volgende stelling.

Stelling 1.4.2. (Lemma van Schur). Is ρ een absoluut-irreducibele representatie (graad n) van een groep G, en is S ($n \times n$) met alle $\rho(a)$ ($a \in G$) verwisselbaar, dan is $S = \lambda I$ (I=eenheidsmatrix, λ=complex getal).

Bewijs. Laat λ een eigenwaarde van S zijn. Daar S met alle $\rho(a)$ verwisselbaar is, is $S-\lambda I$ het ook. Daar $S-\lambda I$ niet inverteerbaar is, blijkt uit st.1.4.1 dat $S-\lambda I=0$ is.

Stelling 1.4.3. Laat ρ en σ (absoluut) irreducibele representaties van de eindige groep G zijn, met graden m en n. Zij C een willekeurige $m \times n$ matrix, en zij

$$S = \sum_{b \in G} \rho(b)\, C\, \sigma(b^{-1}).$$

Dan is $S = o$ als niet $\rho \sim \sigma$

$S = \lambda I$ als $\rho = \sigma$

Bewijs. Is $a \in G$, dan is

$$\rho(a)S = \sum_b \rho(ab)\, C\, \sigma(b^{-1}) = \sum_c \rho(c)\, C\, \sigma(c^{-1}a) = S\,\sigma(a),$$

dus er is voldaan aan de gegevens van st.1.4.1., en als $\rho = \sigma$ ook aan die van st.1.4.2.

I.5. Karakters.

Is ρ een representatie van de groep G, dan wordt met het spoor S_ρ van ρ bedoeld de functie, die aan elke $a \in G$ het spoor van de matrix $\rho(a)$ toevoegt: $S_\rho(a)=sp\{\rho(a)\}$.

Is ρ absoluut-irreducibel, dan wordt S_ρ een karakter genoemd, en meestal met de letter χ aangeduid.

Stelling 1.5.1. Zijn ρ en ρ' equivalente representaties van G, en behoren a en a' tot dezelfde klasse van G, dan is $S_\rho(a)=S_{\rho'}(a')$.

Bewijs. Zij $\rho = T^I\rho'T$, $a=c^{-1}a'c$ (T is een matrix, c een element van G). Dan is

$$\rho(a) = T^I\rho'(a)T = T^I\rho'(c^{-1})\rho'(a')\rho'(c)T = X^I\rho'(a')X.$$

Hieruit volgt dat $\rho(a)$ en $\rho'(a')$ hetzelfde spoor hebben. (Hetzelfde geldt overigens voor de verzameling der eigenwaarden).

Daar $\rho(e)$ de eenheidsmatrix is geldt voor elke representatie:

Stelling 1.5.2. $S_\rho(e)$ = graad van ρ .

Uit de stellingen van I,4 laat zich een soort orthogonaliteitsrelatie voor de karakters afleiden. We noteren een volledig stel onderling inequivalente irreducibele representaties met $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$ (straks blijkt dat er maar eindig vele zijn als G eindig is), en de karakters daarvan met $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots$. De graad van $\Gamma^{(i)}$ heet n_i, dus

$$\chi^{(i)}(e) = n_i.$$

Van nu af aan stelt steeds G een <u>eindige</u> groep voor, met orde g.

<u>Stelling 1.5.3</u>. Is G eindig (orde g), dan is voor alle i,j en alle $a \in G$

$$\sum_{b \in G} \chi^{(i)}(ab)\,\chi^{(j)}(b^{-1}) = \delta_{ij} \cdot \frac{g}{n_i}\, \chi^{(i)}(a).$$

<u>Bewijs</u>. Neem eerst $i \neq j$, zodat $\Gamma^{(i)}$ en $\Gamma^{(j)}$ inequivalent zijn. Blijkens st.1.4.3 is nu (na linksvermenigvuldiging met $\Gamma^{(i)}(a)$)

$$\sum_{b \in G} \Gamma^{(i)}(ab)\; C\; \Gamma^{(j)}(b^{-1}) = 0$$

voor elke matrix C van passende vorm. Nemen we in het bijzonder voor C een matrix waarin alle elementen nul zijn op één 1 na, dan blijkt

$$\sum_{b \in G} \Gamma^{(i)}_{pq}(ab)\; \Gamma^{(j)}_{rs}(b^{-1}) = 0$$

voor willekeurige p,q,r,s ($1 \leq p,q \leq n_i$, $1 \leq r, s \leq n_j$). Hierin duiden de $\Gamma^{(i)}_{pq}(a)$ de elementen van de matrix $\Gamma^{(i)}(a)$ aan. Door p=q, r=s te nemen en over p en r te sommeren, vinden we dat

$$\sum_{b \in G} \chi^{(i)}(ab)\;\chi^{(j)}(b^{-1}) = 0, \qquad (i \neq j).$$

Nemen we vervolgens i=j, dan is volgens st.1.4.3

$$(1.5.1) \qquad \sum_{b \in G} \Gamma^{(i)}(ab)\; C\; \Gamma^{(i)}(b^{-1}) = \lambda_C\, \Gamma^{(i)}(a),$$

waarin λ_C een van C afhankelijk, doch van a onafhankelijk complex getal is. Door a=e te nemen en links en rechts de sporen te vormen blijkt dat

$$(1.5.2) \qquad g \text{ sp } C = \lambda_C \cdot n_i$$

Nemen we voor C de matrix (c_{pq}), gedefinieerd door $c_{pq} = \delta_{pr}\,\delta_{qs}$, dan blijkt dat

$$(1.5.3) \qquad \sum_{b \in G} \Gamma^{(i)}_{pr}(ab)\; \Gamma^{(i)}_{sq}(b^{-1}) = \frac{g}{n_i}\, \delta_{rs}\, \Gamma^{(i)}_{pq}(a).$$

Nemen we p=r, s=q, en sommeren we over p en q, dan komt de gewenste formule (in het geval j=i) tevoorschijn.

We zullen st.1.5.3 alleen gebruiken voor het geval dat a=e. Het wordt dan

(1.5.4) $$\sum_{b \in G} \chi^{(i)}(b)\,\chi^{(j)}(b^{-1}) = \delta_{ij}.g.$$

<u>Stelling 1.5.4</u>. Is de representatie ρ equivalent met de directe som van de absoluut-irreducibele representaties $\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots$, en is m_i het aantal k's waarvoor $\rho_k \sim \Gamma^{(i)}$, dan hangt m_i alleen van ρ en i af, en

(1.5.5) $$m_i = \frac{1}{g}\sum_{b\in G} \chi^{(i)}(b)\,S_\rho(b^{-1}).$$

Is $S_\rho = S_\tau$, dan is $\rho \sim \tau$.

<u>Bewijs</u>. Gemakkelijk in te zien dat

$$S_\rho = S_{\rho_1} + S_{\rho_2} + \ldots = \sum_i m_i\,\chi^{(i)}.$$

We laten zich de m_i's bepalen met behulp van (1.5.4):

$$\sum_{b\in G} \chi^{(i)}(b)\,S_\rho(b^{-1}) = \sum_j \sum_b m_j\,\chi^{(i)}(b)\,\chi^{(j)}(b^{-1}) = g\,m_i$$

Is $S_\rho=S_\tau$, dan blijkt dat ρ en τ op equivalentie na dezelfde splitsing hebben, want de m_i's zijn volledig door S_ρ bepaald.

De splitsing van een representatie ρ in irreducibele bestanddelen is dus éénduidig op equivalentie na. In het in stelling 1.5.4 genoemde geval noteren we

(1.5.6) $$\rho \sim m_1\Gamma^{(1)} + m_2\Gamma^{(2)} + \ldots\,,$$

en we zeggen dat ρ het irreducibele bestanddeel $\Gamma^{(i)}$ m_i keer bevat.

De volgende stelling leert ons dat er geen andere irreducibele representaties bestaan dan degene die door volledige reductie van de reguliere representatie worden opgeleverd.

<u>Stelling 1.5.5</u>. De reguliere representatie bevat elke $\Gamma^{(i)}$ precies n_i keer (n_i is ook de graad van $\Gamma^{(i)}$; elke irreducibele representatie "komt dus in de reguliere voor").

<u>Bewijs</u>. Stelt ρ de reguliere representatie voor, dan is $S_\rho(b)=g\,\delta_{be}$ (zie het slot van § I,1). In (1.5.5) blijft dus slechts de term met b=e over, en we vinden $m_i = \chi^{(i)}(e)=n_i$.

<u>Stelling 1.5.6</u>. $\sum_i n_i^2=g$. Het aantal $\Gamma^{(i)}$'s is dus eindig.

<u>Bewijs</u>. Is ρ de reguliere representatie, dan is

$$\rho \sim n_1\Gamma^{(1)} + n_2\Gamma^{(2)} + \ldots$$

blijkens de vorige stelling. Door links en rechts de graad te bepalen volgt de gewenste formule.

I.6. De groepsring. Zij weer steeds G een eindige groep.

Onder de groepsring R_G van G verstaan we het g-dimensionale hypercomplexe systeem bestaande uit alle formele sommen

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_g a_g$$

(waarin $a_1,\dots,a_g$ de elementen van G zijn, en de $\xi_1,\dots,\xi_g$ complexe getallen, terwijl de som op de triviale wijze gedefinieerd is, en het product door formele uitwerking, waarbij steeds $a_i \xi_j a_j$ door $\xi_j a_k$ wordt vervangen, als a_k bij de groepsvermenigvuldiging het product van a_i en a_j is.

We kunnen de groep G inbedden in R_g, door

$$a_i \longrightarrow 0.a_1 + \dots + 0.a_{i-1} + 1.a_i + \dots + 0.a_g.$$

Het rechtsstaande element duiden we ook met a_i aan. Is $a_i a_j = a_k$ in G, dan is ook $a_i a_j = a_k$ in R_g.

Is ρ een representatie van G van de graad n, dan is ρ een afbeelding van G in M_n (M_n= volledige matrixring $n \times n$). Is $a_i a_j = a_k$ in G, dan is $\rho(a_i)\,\rho(a_j) = \rho(a_k)$ in M_n.

We kunnen deze afbeelding van G in M_n voortzetten tot een afbeelding van R_g in M_n. Is $x = \sum_{a \in G} \xi_a . a$ een element van R_g, dan definieren we

$$\rho(x) = \sum_{a \in G} \xi_a \, \rho(a),$$

waarbij in het rechterlid de scalaire vermenigvuldiging en optelling van M_n is bedoeld.

Gemakkelijk is in te zien dat ρ een ringhomomorfe afbeelding van R_g in M_n is:

$$\rho(u+v) = \rho(u) + \rho(v),\ \rho(uv) = \rho(u)\,\rho(v),\ \rho(\lambda u) = \lambda\rho(u) \quad (u,v \in R_g,\ \lambda \text{ complex getal}).$$

Neem nu voor ρ de reguliere representatie van G. Deze valt uiteen:

$$\rho \sim n_1 \Gamma^{(1)} + \dots + n_k \Gamma^{(k)}$$

We construeren nu de representatie

$$\sigma = \Gamma^{(1)} + \dots + \Gamma^{(k)},$$

die een ringhomomorfe afbeelding oplevert van R_g in $M_{n_1+\dots+n_k}$, doch ook reeds in $M_{n_1} + \dots + M_{n_k}$ (hiermee is de directe som van de volledige matrixringen bedoeld). Merk op dat de $\Gamma^{(i)}$'s willekeurig gekozen zijn uit de klassen van onderling equivalente representaties.

Stelling 1.6.1. R_g is isomorf met de directe som $M_{n_1}+\ldots+M_{n_k}$.

Bewijs. We laten zien dat σ een isomorfie is. De dimensies van R_g en van $M_{n_1}+\ldots+M_{n_k}$ (als lineaire ruimten beschouwd) zijn resp. g en $n_1^2+\ldots+n_k^2$, en zijn dus gelijk op grond van st.1.5.6. Het is nu voldoende te laten zien dat σ trouw is, d.w.z. dat

$x\in R_g, \sigma(x)=0$ impliceert $x=0$.

Uit $\sigma(x)=0$ volgt dat elke $\Gamma^{(i)}(x)=0$ is. Dus ook de representatie $\rho'=n_1\Gamma^{(1)}+\ldots+n_k\Gamma^{(k)}$ voldoet aan $\rho'(x)=0$. Doch $\rho\sim\rho'$, dus $\rho=S^I\rho'S$ met een zekere $S\in M_g$. D.w.z. dat $\rho(v)=S^I\rho'(v)S$ voor alle $v\in G$, doch daar de voortzetting van ρ tot R_g door lineair combineren geschiedt, is deze relatie voor alle $v\in R_g$ geldig. Toegepast op onze x levert zij $\rho(x)=0$.

Schrijf nu $x=\sum_{a\in G}\xi_a.a$. De matrix $\rho(a)$ heeft de elementen (zie I,1)

$$\rho_{bc}(a) = \delta_{b,ac},$$

zodat, speciaal voor $c=e$

$$\rho_{be}(x) = \sum_{a\in G}\xi_a\,\delta_{b,a} = \xi_b.$$

Daar $\rho(x)=0$, blijkt nu dat alle ξ_b's nul zijn. Dus $x=0$, q.e.d.

Stelling 1.6.2. $k=h$, waarin h het aantal klassen in G voorstelt (klassen genomen in de zin van equivalentieklassen bij de equivalentie: $a\sim b \rightleftarrows$ er is een $c\in G$ met $b=c^{-1}ac$).

Bewijs. Onder het centrum $Z(R)$ van een ring verstaan we de verzameling van alle elementen z van R met $zr=rz$ voor alle $r\in R$. Het centrum van een hypercomplex systeem is weer een hypercomplex systeem.

We laten nu zien dat de dimensies van de centra van de in st. 1.6.1 genoemde ringen resp. h en k zijn; uit de isomorfie volgt dan $h=k$.

Zij $x=\sum_{a\in G}\xi_a.a$ een element van $Z(R_g)$. Dan is $bxb^{-1}=x$ voor alle $b\in G$, dus ook

$$x = \sum_{a\in G}\xi_a.bab^{-1} = \sum_{a\in G}\xi_{b^{-1}ab}.a$$

(de laatste gelijkheid blijkt door $c=bab^{-1}$ als nieuwe sommatievariabele te nemen, en die achteraf weer a te noemen).

We hebben nu twee schrijfwijzen van x. De coefficienten moeten overeenstemmen, dus $\xi_a=\xi_{b^{-1}ab}$ voor alle a en b uit G. Zijn $K_1,\ldots,K_h$ de klassen van G, dan blijkt dus dat ξ_a constant is op elke K_i. Noem deze constante ξ_i. Verder is

$$x = \sum_{i=1}^{h} \xi_i . z_i, \text{ met } z_i = \sum_{a \in K_i} a .$$

Elk element van $Z(R_g)$ is dus een lineaire combinatie van $z_1, \ldots, z_h$. Omgekeerd is direct in te zien dat alle z_i in $Z(R_g)$ liggen, omdat elke z_i verwisselbaar is met alle $b \in G$:

$$b^{-1} z_i b = \sum_{a \in K_i} b^{-1} a \; b;$$

de $b^{-1}a\, b$ liggen ook in K_i, en elk element van K_i wordt (bij vaste b) zo één keer voorgesteld.

Daar alle z_i in $Z(R_g)$ liggen, is dit dus ook met de lineaire combinaties het geval, zodat nu bewezen is dat $Z(R_g)$ precies bestaat uit de lineaire combinaties van $z_1, \ldots, z_h$, (en deze zijn lineair onafhankelijk). Dus de dimensie van $Z(R_g)$ is h.

Het centrum van $M_{n_1} + \ldots + M_{n_k}$ is kennelijk $Z(M_{n_1}) + \ldots + Z(M_{n_k})$, en daar het centrum van de volledige matrixring M_n bestaat uit alle veelvouden van de eenheidsmatrix (lemma van Schur), is dit centrum k-dimensionaal. Hiermee is st.1.6.2 bewezen.

<u>Opmerking.</u> Uit st.1.6.1 volgt dat R_g geen radikaal heeft. Men kan ook st.1.6.1 onafhankelijk van de inhoud der vorige paragrafen bewijzen door eerst te laten zien dat R_g geen radikaal heeft, en dan dat elk hyperkomplex systeem zonder radikaal een directe som van volledige matrixalgebra's is.

Dat R_g geen radikaal heeft, blijkt als volgt. Als $x = \sum_{a \in G} \xi_a . a$, en definieer $\bar{x}$ door $\bar{x} = \sum_{a \in G} \bar{\xi}_a . a^{-1}$. . Dan is, als ρ de reguliere representatie voorstelt,

$$S\rho(x\bar{x}) = \sum_{a \in G} \sum_{b \in G} \xi_a \bar{\xi}_b . \; S\,\rho(ab^{-1}) = g \sum_{a \in G} |\xi_a|^2$$

Is $x \neq 0$, dan blijkt nu sp $\rho(x\bar{x}) \neq 0$, en daaruit volgt dat $\rho(x\bar{x})$ niet nilpotent is (van een nilpotente matrix zijn alle eigenwaarden nul, dus het spoor ook). Bijgevolg is $x\bar{x}$ niet nilpotent. Behoorde x tot het radikaal, dan was elk product xy nilpotent.

<u>Opmerking</u>. Is G abels, dan is k=g, dus ook h=g (gevolg van st.1.6.2). Daar verder $n_1^2 + \ldots + n_h^2 = g$ is, en alle $n_i \geq 1$, is nu $n_1 = \ldots = n_h = 1$. Dus: alle irreducibele representaties hebben de graad 1. De karakters zijn nu multiplicatieve functies op de groep.

Een tweede bewijs: Elke matrix van een irreducibele representatie is met alle matrices van die representatie verwisselbaar (G abels), en heeft dus de diagonaalvorm.

Een derde bewijs berust op het feit, dat elk stel onderling verwisselbare normale matrices (maak de representatie normaal door haar unitair te maken) simultaan op diagonaalvorm te transformeren is.

I.7. Het orthogonaalsysteem der karakters. De karakters $\chi^{(i)}$ waren gedefinieerd als functies op G. Daar $\chi^{(i)}(a) = \chi^{(i)}(b)$ als a en b in dezelfde klasse liggen (st.1.5.1), is $\chi^{(i)}$ constant op de klassen. De waarde die $\chi^{(i)}(a)$ voor alle $a \in K_j$ heeft, duiden we met $\chi^{(i)}(K_j)$ aan. Het aantal elementen van K_j duiden we aan met k_j.

Doorloopt a de klasse K_i, dan doorloopt a^{-1} ook een klasse; die geven we met $K_{i'}$ aan. De relatie (1.5.4) laat zich nu schrijven als

$$\text{(1.7.1)} \qquad \sum_{p=1}^{h} k_p \chi^{(i)}(K_p)\, \chi^{(j)}(K_{p'}) = \delta_{ij}.g, \qquad (i,j=1,\ldots,h)$$

en dit is als een matrixproduct relatie op te vatten. Korten we af

$$k_p \chi^{(i)}(K_p) = a_{ip}, \quad \chi^{(j)}(K_{p'}) = b_{pj},$$

dan staat er AB=gI. Daar h=k is, zijn A en B kwadratisch, zodat we tot BA=gI kunnen besluiten. Dus

$$\sum_i b_{pi}\, a_{iq} = g.\, \delta_{pq},$$

en dit betekent

$$\text{(1.7.2)} \qquad \sum_{i=1}^{h} \chi^{(i)}(K_q)\, \chi^{(i)}(K_{p'}) = \frac{g}{k_q}\, \delta_{pq}.$$

We kunnen deze relaties nog iets anders schrijven, daar

$$\text{(1.7.3)} \qquad \chi^{(i)}(K_{p'}) = \overline{\chi^{(i)}(K_p)},$$

waarbij de streep complex conjugeren betekent. We mogen nl. aannemen dat de representatie $\Gamma^{(i)}$ unitair is (st.1.3.3). Dan is $\Gamma^{(i)}(a^{-1}) = (\Gamma^{(i)}(a))^{I} = (\Gamma^{(i)}(a))^{CT}$, dus $\chi^{(i)}(a^{-1}) = \overline{\chi^{(i)}(a)}$.
Ook op een geheel andere wijze blijkt (1.7.3). Voor elke a is $a^g = e$, dus $(\Gamma^{(i)}(a))^g = \Gamma^{(i)}(e) = I$. Hieruit volgt dat de eigenwaarden van $\Gamma^{(i)}(a)$ g-demachts-eenheidswortels zijn. Het spoor is de som der eigenwaarden, dus bijv.

$$\chi^{(i)}(a) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n_i}.$$

De eigenwaarden van A^2 zijn de kwadraten der eigenwaarden van A, etc., dus voor elke gehele m is

$$\chi^{(i)}(a^m) = \varepsilon_1^{\,m} + \ldots + \varepsilon_{n_i}^{\,m}.$$

Nemen we in het bijzonder m=-1, dan blijkt direct dat $\chi^{(i)}(a^{-1}) = \overline{\chi^{(i)}(a)}$

We kunnen nu (1.7.1) en (1.7.2) als volgt uitspreken:

<u>Stelling 1.7.1.</u> De $h \times h$ matrix $X=(x_{ij})$, gedefinieerd door

$$x_{ij} = \left(\frac{k_j}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \chi^{(i)}(K_j),$$

is unitair.

Overigens is $\overline{\chi^{(i)}}$ zèlf weer een karakter. Uit het feit dat $\Gamma^{(i)}$ een representatie is, volgt dat $(\Gamma^{(i)})^{IT}$ weer een representatie is (want de matrixproductrelatie $AB=C$ impliceert $A^{IT} B^{IT} = C^{IT}$). Deze is weer irreducibel, want anders zou $\Gamma^{(i)}$ reducibel zijn. Daar $(\Gamma^{(i)})^{IT}$ is een $\Gamma^{(j)}$:

$$(\Gamma^{(i)}(a))^{IT} = \Gamma^{(j)}(a) \qquad (a \in G)$$

dus $(\Gamma^{(i)}(a^{-1}))^T = \Gamma^{(j)}(a)$. Nemen we nu het spoor, dan doet de operatie niet terzake, zodat $\chi^{(i)}(a^{-1}) = \chi^{(j)}(a)$.

De representatie $(\Gamma^{(i)})^{IT}$ heet de geconjugeerde van $\Gamma^{(j)}$.

Ook $(\Gamma^{(i)})^C$ is weer een representatie. Daar $\Gamma^{(i)}$ unitair kan worden gemaakt, is $(\Gamma^{(i)})^C$ met $(\Gamma^{(i)})^{IT}$ equivalent.

<u>I.8. Reductie van een willekeurige representatie</u>. Hoe maken we uit of een gegeven representatie reducibel is? En zo ja, hoe vinden we een reductie? Gaan we van de reguliere representatie uit, dan betekent de laatste vraag: hoe vinden we alle irreducibele representaties van de gegeven groep?

Het eerste is heel eenvoudig. Is de representatie ρ reducibel tot

$$\rho \sim m_1 \Gamma^{(1)} + \ldots + m_h \Gamma^{(h)},$$

dan is

$$S_\rho = m_1 \chi^{(1)} + \ldots + m_h \chi^{(h)},$$

en dus

$$\sum_{b \in G} |S_\rho(b)|^2 = \sum_{j=1}^{h} \sum_{k=1}^{h} \sum_{b \in G} m_j . m_k \chi^{(j)}(b) \overline{\chi^{(k)}(b)},$$

en dus op grond van (1.5.4) en (1.7.3):

$$(1.8.1) \qquad \frac{1}{g} \sum_{b \in G} |S_\rho(b)|^2 = m_1^2 + \ldots + m_h^2.$$

Duidelijk is dat ρ reducibel is als $m_1^2 + \ldots + m_h^2 > 1$, en irreducibel als $m_1^2 + \ldots + m_h^2 = 1$. Dit is dus een gemakkelijk toepasbaar criterium om de reducibiliteit na te gaan.

Blijkt volgens deze formule dat ρ reducibel is, dan is (althans theoretisch) de reductie als volgt uit te voeren.

Laten we eens nagaan hoe we voor irreducibele representaties aan $\sum |S_\rho(b)|^2 = g$ zijn gekomen. Uit het bewijs van st.1.5.3 is af te lezen: als

$$(1.8.2) \qquad \sum_{b \in G} \rho(b)\, C\, \rho(b^{-1})$$

voor elke matrix C een diagonale matrix is, dan is

$$\sum_{b\in G} |S_\rho(b)|^2 = g \ ,$$

(en hierbij is de irreducibiliteit van ρ niet gebruikt) dus blijkens het voorgaande is dan ρ irreducibel. Is dus ρ reducibel, dan is C zó te bepalen dat (1.8.2) niet diagonaal is, en wel kan men voor C één der n^2 matrices kiezen die één 1 en verder nullen hebben (n=graad van ρ). (Men kan ook een "willekeurige C nemen, want de matrices C die (1.8.2) tot diagonaal matrix maken liggen dun gezaaid: ze vormen een echte deelruimte in de n^2-dimensionale ruimte van alle matrices). Zo hebben we dus een matrix (1.8.2) die niet diagonaal is, maar wèl verwisselbaar met alle $\rho(b)$. Noem die S en bepaal vervolgens een eigenwaarde λ van S. Nu is $S-\lambda I$ singulier, en niet 0. Het beeld van de n-dimensionale vectorruimte bij $S-\lambda I$ is een bij alle afbeeldingen $\rho(b)$ invariante deelruimte, en met behulp daarvan is ρ half te reduceren (vgl. ook het bewijs van st.1.4.1). Met de stelling van Maschke (zie 2^e bewijs daarvan) is ρ geheel te reduceren. Interesseert men zich alleen voor de bestanddelen en niet voor de transformatie waarmee die bestanddelen tevoorschijn komen, dan kan men die volledige reductie achterwege laten doordat uit de half gereduceerde vorm de bestanddelen (op equivalentie na) zijn af te lezen (zie slot van het 2^e bewijs st. van Maschke).

Men kan zelfs, door C "voldoend willekeurig" te kiezen, bereiken dat, na reductie van S op eigenruimten, de hele representatie automatisch gesplitst in irreducibele bestanddelen tevoorschijn komt.

Wanneer we alle karakters van de groep kennen, kunnen we een gegeven representatie heel gemakkelijk reduceren tot een directe som van primaire representaties. ρ heet <u>primair</u> als in de formule (1.5.6) slechts één van nul verschillende m voorkomt). Deze splitsing is geheel met rationale operaties uit te voeren, zodat we voor de primaire componenten matrices krijgen waarvan alle elementen liggen in het lichaam dat èn de oorspronkelijke representatie èn de karakters bevat.

De splitsing in primaire componenten is als volgt uit te voeren. Is ρ de gegeven representatie, en i een index waarvoor

$$m_i = g^{-1} \textstyle\sum_{b\in G} \chi^{(i)}(b)\ S_\rho(b^{-1}) \qquad \text{(zie 1.5.5.)}$$

van nul verschilt, dan vormen we

$$\frac{1}{m_i}\frac{1}{g}\sum_b \chi^{(i)}(b)\ \rho(b^{-1}) = P_i .$$

Door gebruik te maken van de existentie van een transformatie die ρ in een directe som van irreducibele transformeert, is gemakkelijk in te zien dat P_i een projector is ($P_i^2=P_i$), en dat P_i en P_j met $i\neq j$ elkaar annuleren.

Is R de gehele ruimte, dan spannen $P_1(R)$, $P_2(R)$,... samen R op. Elke $P_i(R)$ wordt door de matrices van ρ in zichzelf getransformeerd, daar uit de definitie van P_i blijkt dat $P_i \rho(a) = \rho(a) P_i$ voor alle $i \in G$. Kiezen we nu een nieuwe basis voor R, bestaande uit een basis voor $P_1(R)$ + een basis voor $P_2(R)$+..., dan is de reductie tot primaire componenten geleverd.

II. Representaties van compacte groepen

door

Prof.Dr W.T. van Est

II.1. Een groep G heet topologische groep als G tevens een topologische ruimte is en (i) ab continu van a en b afhangt (continue functie van twee variabelen), (ii) a^{-1} continu van a afhangt.

Onder de matrixrepresentaties van G beschouwen we uitsluitend diegenen, waarbij de matrixelementen als functies op G beschouwd continu zijn. Als G een discrete groep is krijgen we het oorspronkelijke representatiebegrip weer terug.

Begrippen als equivalentie, (half)reducibiliteit, irreducibiliteit, karakter blijven ongewijzigd (er zal uitsluitend met het absolute equivalentiebegrip worden gewerkt (vgl.slot §I.2)).

We sommen nu eerst een aantal stellingen uit Hfst. I op die ook voor dit representatiebegrip geldig blijven.(Voor bewijzen van de eerste drie stellingen vgl. §I.4).

<u>Stelling II. 1.1.</u> (Lemma van Schur) Zij ρ een irreducibele lineaire representatie van G in een vectorruimte V en T een lineaire afbeelding $V \rightarrow V$ zodat $\rho(a)T=T\rho(a)$, dan is $T=\lambda I$.

<u>Stelling II.1.2.</u> Zijn ρ_1, ρ_2 irreducibele representaties van G in ruimten V_1 en V_2 en is $T : V_1 \rightarrow V_2$ een equivalentie (d.i. een ééneenduidige lineaire afbeelding van V_1 op V_2), terwijl $A : V_1 \rightarrow V_2$ een lineaire afbeelding is met $A\rho_1(a) = \rho_2(a)A$ (voor iedere $a \in G$), dan is $A=\lambda T$ voor geschikte λ.

<u>Stelling II.1.3.</u> Zij ρ een irreducibele representatie van G in V_1, en σ een representatie van G in V_2. Zij $A \neq 0$ een lineaire afbeelding van V_1 <u>op</u> V_2 zodat $\sigma(a)A=A\rho(a)$. Dan is σ irreducibel en A een equivalentie.

<u>Stelling II.1.4.</u> (gedeeltelijk stelling I.5.4). Zij ρ een lineaire representatie in V en $V=V_1+V_2+\ldots+V_k$, waarbij de V_i invariant en irreducibel zijn t.a.v. ρ. Stel $\rho | V_i = \rho_i$. Zij verder $V=W_1+W_2+\ldots+W_r$ met W_i invariant en irreducible t.a.v. ρ. Stel $\rho | W_j = \sigma_j$. Dan is r=k en men kan de V_i vernummeren zodanig dat $\rho_j \sim \sigma_j$ $(i=1,\ldots,k)$.

<u>Bewijs</u>: Iedere $x \in V$ is éénduidig voor te stellen als $x=x_1+\ldots+x_k$ met $x_i \in V_i$. De afbeelding T_i (projectie) gedefinieerd door $T_i x = x_i$ is een lineaire afbeelding $V \rightarrow V_i$ met $\rho T_i = T_i \rho$.

Als $T_i W_1 = 0$ was voor iedere i dan zou $W_1 = 0$ zijn. Dus $T_i W_1 \neq 0$ voor zekere i. Door vernummering van de V_i-en is te bereiken, dat $T_1 W_1 \neq 0$. Uit stelling I.4.1 volgt dat T_1 een equivalentie is tussen

V_1 en W_1. Hieruit volgt

(i) $\rho_1 \sim \sigma_1$,

(ii) T_1 1-1 op W_1, d.w.z. $W_1 \cap (V_2 + \ldots V_k) = 0$,

(iii) $\dim (V_2 + \ldots + V_k) = \dim (W_2 + \ldots + W_r)$.

Iedere $x \in V$ is ook eenduidig te schrijven als $x = x_1' + \ldots + x_r'$ met $x_i' \in W_i$. Stel $Px = x_2' + \ldots + x_r'$. W_1 is de nulruimte van P en $\rho P = P\rho$. In verband met (ii) en (iii) betekent dit dat P een equivalentie tussen $V_2 + \ldots + V_k$ en $W_2 + \ldots + W_r$ bewerkstelligt. We hebben nu voor $W_2 + \ldots + W_r$ de directe som splitsing $P(V_2) + \ldots + P(V_k)$. Door volledige inductie is het bewijs te voltooien.

<u>II.2.</u> Laat $F(G)$ voorstellen de lineaire ruimte van alle complexe continue functies op G. Binnen $F(G)$ bezit G een representatie P gedefinieerd als volgt: $P(a)f = {}_af$ waarbij ${}_af(x) = f(xa)$. P heet voortaan <u>reguliere</u> representatie.
Opmerking: Het representatiebegrip is hier in iets ruimere zin gebezigd dan we aanvankelijk hadden vastgelegd. De representatieruimte is nl. i.h.a. oneindig dimensionaal en het continuiteitsbegrip voor oneindigdimensionale representaties is niet zonder meer zinvol.

<u>Stelling II.2.1.</u> Een irreducibele representatie ρ in een vectorruimte V van dimensie n is op equivalentie na precies n keer in P vertegenwoordigd.
<u>Bewijs</u>: Kies een basis $e_1, \ldots, e_n$ in V. ρ wordt met betrekking tot deze basis door een matrixrepresentatie (u_{ij}) weergegeven. Dus $u_{ij}(ga) = \sum u_{is}(g)\, u_{sj}(a)$. (*)
Laat U_i de deelruimte van $F(G)$ zijn opgespannen door de functies $u_{i1}, \ldots, u_{in}$. Uit (*) volgt klaarblijkelijk dat de lineaire afbeelding $T_i : V \to U_i$ gedefinieerd door $T_i(e_s) = u_{is}$ de eigenschap heeft $P(a)T_i = T_i\,\rho(a)$. U_i is een ruimte $\neq 0$ (want $u_{ii}(1)=1$, dus $u_{ii} \neq 0$), T_i is een afbeelding op (zie def.van U_i). Dus volgens stelling II.1.3 is T_i een equivalentie, en U_i is een invariante deelruimte bij P.

We bewijzen nu, dat de ruimten U_i onafhankelijk van elkaar zijn, d.w.z. $(U_1 + \ldots + U_{i-1}) \cap U_i = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Veronderstel dit reeds bewezen t/m $i-1$. Dan is $U_1 + \ldots + U_{i-1} = V_{i-1}$ een directe som, d.w.z. iedere $x \in V_{i-1}$ is eenduidig voor te stellen als $x = x_1 + \ldots + x_{i-1}$ met $x_j \in U_j$. Zij $Q_j x = x_j$, $j = 1, \ldots, i-1$. Er geldt $P(a)Q_j = Q_j P(a)$ voor iedere $a \in G$. Veronderstel dat $V_{i-1} \cap U_i \neq 0$, dan zou volgen wegens de invariantie van $V_{i-1} \cap U_i$ en de irreducibiliteit van U_i dat $V_{i-1} \cap U_i = U_i$, dus $U_i \subset V_{i-1}$. Tussen U_i en U_j bestaat de equivalentie $T_j\, T_i^{-1}$. Dus moet op U_i gelden dat

$Q_j = \lambda_j T_j T_i^{-1}$. Dus voor $f \in U_i$ geldt $f = Q_1 f + \ldots + Q_{i-1} f =$ $\lambda_1 T_1 T_i^{-1} f + \ldots + \lambda_{i-1} T_{i-1} T_i^{-1} f$. Neem $f = u_{ii}$ dan blijkt aldus $u_{ii} = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_{ji}$. Tegenstrijdigheid, want $u_{ii} = 1$, $u_{ii}(1) = 1$ en $u_{ji}(1) = 0$ voor $j < i$.

Op deze manier is aangetoond, dat ρ tenminste n keer voorkomt in P.

Laat nu W een eindigdimensionale invariante deelruimte van F(G) zijn, zodat P in W equivalent ρ is. D.w.z. er is een basis $f_1, \ldots, f_n$ in W te kiezen zodat P met betrekking tot deze basis de matrixrepresentatie u_{ij} heeft. Dus $f_j(ga) = \sum u_{ij}(a)\, f_i(g)$. Door $g=1$ te stellen vinden we dat $f_j \in U_1 + \ldots + U_n$ voor iedere j, dus $W \subset U_1 + \ldots + U_n$. Dus ρ komt precies n keer in P voor.

Kan iedere eindigdimensionale representatie van een topologische groep in irreducibele onderdelen worden gesplitst? Bestaan er van een topologische groep altijd niet-triviale eindigdimensionale representaties? Kan de reguliere representatie uitgereduceerd worden in eindigdimensionale irreducibele representaties?

Voor de categorie van compacte topologische groepen kunnen de drie vragen bevestigend worden beantwoord.

II.3. In compacte groepen is het mogelijk een maat te definiëren die invariant is bij rechtsvermenigvuldigingen, zodanig dat bovendien de totale groep de maat 1 heeft. Met betrekking tot deze maat kan men continue functies integreren, en voor de integraal gelden de volgende eigenschappen:

$$\int f(x)\,dx = \int f(xa)\,dx,$$
$$\int (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx,$$
$$f > 0 \Rightarrow \int f(x)\,dx > 0,$$
$$\int 1\,dx = 1.$$

Men kan het ook zo formuleren, dat de integraal van een continue functie met betrekking tot deze maat een niet-negatief lineair functioneel $\mathfrak{J}$ is met de eigenschap dat $\mathfrak{J}({}_a f) = \mathfrak{J} f$, $\mathfrak{J}(1) = 1$.

Het bewijs van de existentie van een dergelijke maat door directe constructie zullen we hier niet geven. De theorie van de bijna-periodieke functies zal echter de existentie aan het licht brengen van een niet-negatief lineair functioneel op de ruimte der continue functies met genoemde eigenschappen. Een bekende stelling van F. Riesz verzekert dan op grond hiervan automatisch de existentie van een invariante maat.

Voor zover men te maken heeft met een compacte Lie groep G (voor toepassingen is dit verreweg het belangrijkste geval) is het bestaan van een invariante maat ook als volgt aan te tonen.

G is met eindig veel coordinatenomgevingen $U_1,\dots,U_k$ te bedekken. Laten dan $\xi_i^{(k)}$ $(i=1,\dots,n)$ de coordinaten in U_k zijn. Veronderstel $1\in U_1$. Laat p een willekeurig punt $\in U_i$ zijn. De rechtsvermenigvuldiging met p^{-1} voert het punt p over in 1 en beeldt een zekere omgeving V van p in U_i af op een omgeving van 1 in U_1. De functionaaldeterminant van de afbeelding $(\dots p^{-1}):V\to U_1$ genomen in het punt p geven we aan met $J(p,i)$. Voor een op G gedefinieerde continue functie f die buiten U_i nul is definiëre men

$$\int f(x)\,dx = \int_{p\in U_i} f(p)\,|J(p,i)|\,d\xi_1^{(i)}\dots d\xi_n^{(i)} .$$

Men dient dan nog het volgende aan te tonen (hetgeen echter vrijwel rechtstreeks door uitschrijven te verifiëren is).

(a) Wanneer de continue functie f slechts van nul verschilt binnen $U_i\cap U_r$ dan is

$$\int_{p\in U_i} f(p)\,|J(p,i)|\,d\xi_1^{(i)}\dots d\xi_n^{(i)} = $$
$$= \int_{p\in U_r} f(p)\,|J(p,r)|\,d\xi_1^{(r)}\dots d\xi_n^{(r)}$$

(b) Iedere continue functie f is voor te stellen als $f=f_1+\dots+f_k$, waarbij de f_i continue functies zijn op G die slechts binnen U_i eventueel van nul verschillen en $\int f(x)dx = \sum\int f_i(x)dx$ is onafhankelijk van de gekozen splitsing van f in functies f_i.

(c) Wanneer men het coordinatensysteem in U_1 geschikt kiest kan men bereiken dat $\int 1\,dx = 1$ wordt. (Door een ander coordinatensysteem in U_1 in te voeren bereikt men dat de integraal met een factor wordt vermenigvuldigd. Door geschikte keuze dus van dit coordinatensysteem, bijv. door $\xi_1^{(1)}$ met een geschikte factor te vermenigvuldigen, bereikt men dus het gewenste).

II.4. De integratie stelt ons in staat de bewijzen uit Hfst I waar sommaties over de groep worden voltrokken voor de categorie van de compacte groepen te herhalen met integratie i.p.v. sommatie. We kunnen dan bewijzen

Stelling II.4.1. Iedere (lineaire) matrixrepresentatie ρ van een compacte groep is equivalent met een unitaire representatie, dus som van irreducibele representaties.

Bewijs: Stel $H = \int \rho^*(a)\,\rho(a)da$. H is hermitisch positief definiet en $\rho^*(b)\,H\,\rho(b) = \int \rho^*(b)\,\rho^*(a)\,\rho(a)\,\rho(b)da = \int \rho^*(ab)\,\rho(ab)\,da =$

$= \int \rho^*(a)\, \rho(a)\, da = H$. Etc. (zie §I.3.).

<u>Stelling II.4.2.</u> Laten ρ en σ irreducibele representaties zijn van de compacte groep G met graden m en n. Laat C een willekeurige m x n matrix zijn en $S = \int \rho(b^{-1})\, C\, \sigma(b)\, d\, b$. Dan is S = 0 als $\rho \neq \sigma$, en $= \lambda I$ als $\rho = \sigma$.

<u>Stelling II.4.3.</u> Voor de karakters χ en χ' van twee inequivalente irreducibele representaties geldt $\int \chi(a)\ \chi'(a^{-1})\, da = 0$, $\int \chi(a)\, \chi(a^{-1})\, da = 1$.

<u>II.5.</u> We geven in grote lijnen aan hoe voor compacte groepen de existentie van niet-triviale eindig dimensionale representaties, alsmede de reducibiliteit van de reguliere representatie in eindig dimensionale, aangetoond kan worden. Een met <u>elementaire</u> bewijzen gedocumenteerde bondige expositie van het één en ander vindt men o.a. in Chevalley: Theorie of Lie groups pp.204 - 210.

We beschouwen daartoe eerst de groepsring van een eindige groep nader. Deze bestond uit formele sommen $\sum \xi(a).a$, waarbij de coefficient $\xi(a)$ waarmee het element $a \in G$ voorzien was, een complex getal was. Deze eindige formele som is volkomen gekenmerkt door de coefficienten $\xi(a)$ m.a.w. door de functie ξ op de groep G. Twee formele sommen $\sum \xi(a)\ .a$ en $\sum \eta(b)\ .b$ hebben als product $\sum \xi(a)\, \eta(b)\ .\ ab =$ $= \sum \zeta(c)\ .c$, waarbij $\zeta(c) = \sum \xi(a)\, \eta(a^{-1}c) = \sum \xi(cb^{-1})\, \eta(b)$. Dit geeft dus aan hoe de representerende functies vermenigvuldigd moeten worden.

Dit patroon volgend kunnen we bij compacte G voor de elementen van F(G), gebruikmakend van de integratie, een productoperatie $*$, de zgn. convolutie, gedefinieerd als volgt:

$$f * g\ (x) = \int f(x\ b^{-1})\ g(b)\ d\ b =$$
$$= \int f(a)\ g(a^{-1}\ x)\ da\ .$$

$f * g$ is dan inderdaad weer continu, en verder is zoals men gemakkelijk verifieert $f * P(a)\, g = P(a)(f * g)$. F(G) is met deze productoperatie naast de additieve structuur een algebra geworden (i.h.a. zonder eenheidselement!).

Voorzien we F(G) van de gewone absolute-waarde-metrie, dan is in de zin van deze metriek de lineaire operator $T_f : g \longrightarrow f * g$ (vaste f) volcontinu. (Dit berust op het feit dat de verzameling functies $f * g$, waarbij g alle functies doorloopt met $|g| < 1$ een equicontinu stelsel vormen).

In F(G) definieren we bovendien nog een unitair inproduct door $(f,g) = \int f(x)\ \overline{g(x)}\ dx$.

Wanneer $f(x) = f(x^{-1})$ voor alle x, dan is T_f een hermitische operator in de zin van dit inproduct. De Hilbert-Schmidt theorie leert dan dat

(i) de eigenwaarden $\lambda \neq 0$ van T_f een eindige multipliciteit hebben,

(ii) de bij twee verschillende λ's behorende eigenruimten orthogonaal zijn,

(iii) iedere functie van de gedaante $T_f\, g$ ontwikkeld kan worden in een uniform convergente reeks van eigenfuncties van T_f behorende bij eigenwaarden $\neq 0$.

De eigenruimten van T_f zijn invariant t.a.v. de reguliere representatie P, want zij $f \ast g = \lambda g$, dan is $f \ast P(a)\, g = P(a)(f \ast g) = \lambda P(a)\, g$.

Dus iedere functie $T_f\, g$ kan ontwikkeld worden in een uniform convergente reeks van functies die tot eindig dimensionale irreducibele deelruimten uit F(G) behoren. Zoals we vroeger reeds zagen is iedere functie uit een irreducibele deelruimte van F(G), waarin de voorstelling P equivalent is met de matrixrepresentatie (u_{ij}), zelf een lineaire combinatie van deze u_{ij}. We vinden dus

Selecteren we uit iedere klasse van equivalente matrixrepresentaties van G er één $(u_{ij}^{(k)})$, dan kan iedere functie $f \ast g$, waarbij f voldoet aan $\overline{f(x)} = f(x^{-1})$, worden ontwikkeld in een uniform convergente reeks van de $u_{ij}^{(k)}$, voorzien van zekere coefficienten.

Bij gegeven functie g en gegeven $\varepsilon > 0$ kan men altijd een omgeving U van de identiteit vinden, zodat voor iedere niet-negatieve continue f die buiten U nul wordt, met $\overline{f(x)} = f(x^{-1})$ en $\int f(x)dx = 1$, geldt $|g - T_f g| < \varepsilon$.

We vinden dus: Een willekeurige continue functie g op G kan willekeurig goed benaderd worden door eindige lineaire combinaties van de $(u_{ij}^{(k)})$.

Door gebruik van analoge argumenten op de ruimte van de continue functies die constant zijn op de klassen geconjugeerde elementen vinden we: Iedere continue functie die constant is op de klassen geconjugeerde elementen kan willekeurig goed benaderd worden door eindige lineaire combinaties van irreducibele karakters.

<u>II.6.</u> <u>Voorbeeld.</u> Als groep nemen we de unitaire groep SU(2), d.i. de groep van de complexe matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ met $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Stel $a = \alpha_1 + i\alpha_2$, $b = \beta_1 + i\beta_2$. De verzameling van alle matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ vormt een reële lineaire ruimte van dimensie 4, waarin $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de coordinaten zijn. SU(2) is in deze ruimte juist de eenheidssfeer. Links- en rechtsvermenigvuldigingen met een element van SU(2) induceert in deze 4 dimensionale matrixruimte een lineaire transformatie die $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2+\beta_2^2 = \det\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$ invariant laat.

M.a.w. links (rechts) vermenigvuldigingen met elementen van SU(2) induceren draaiingen in deze ruimte. Het invariante volumeelement in SU(2) is het "gewone" driedimensionaal sferische volumeelement, dat zodanig genormeerd is dat het totaal volume van de 3-sfeer 1 wordt. Ieder element van SU(2) is binnen SU(2) geconjugeerd met precies één diagonaalmatrix van de gedaante

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix} \qquad \text{waarbij } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi .$$

De klassen geconjugeerde elementen in SU(2) kunnen gerepresenteerd worden door de parameter φ, met $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. De inwendige automorfismen van SU(2) laten de punten 1 en -1 vast. Deze zijn op SU(2) opgevat als 3-sfeer juist diametraal gelegen. En aangezien verder, naar het bovenstaande, inwendige automorfismen draaiingen zijn, moet een klasse geconjugeerde elementen dus gelegen zijn op een parallelsfeer (1 en -1 als N resp Z-pool van de 3-sfeer opgevat). Op iedere dergelijke parallelsfeer ligt slechts één diagonaal matrix $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$ (zoals men gemakkelijk nagaat), dus is een parallelsfeer een volledige klasse geconjugeerde elementen. Verder rekent men gemakkelijk na dat het volume ingenomen door de parallelsferen liggende tussen φ en $\varphi + d\,\varphi$ gelijk is aan $\frac{2}{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi$.

Ieder karakter χ van SU(2) is op te vatten als functie van φ, en de voorwaarde $\frac{2}{\pi}\int \chi(\varphi)\,\bar{\chi}(\varphi)\,\sin^2\varphi\; d\varphi = 1$ is nodig en voldoende voor de irreducibiliteit van het karakter. Verder kan het karakter van een representatie eenvoudig worden berekend door na te gaan wat het spoor in deze representatie is van de diagonaalmatrices.

Laat V_n de vectorruimte zijn van de homogene polynomen van de graad n in twee variabelen x_1, x_2. Laat P_n de representatie van SU(2) in deze ruimte zijn die geinduceerd wordt door de matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$ als volgt op de variabelen x_1, x_2 te laten werken:

$$x_1 \longrightarrow a\,x_1 + b\,x_2$$
$$x_2 \longrightarrow -b\,x_1 + \bar{a}\,x_2 \qquad .$$

De polynomia $x_1^n,\ x_1^{n-1}x_2, \ldots, x_1x_2^{n-1},\ x_2^n$ als basisvectoren in V_n nemende, en vervolgens het karakter χ_n volgens de boven aangegeven methoden berekenende vindt men

$$\chi_n(\varphi) = e^{in\varphi} + e^{i(n-2)\varphi} + \ldots + e^{-i(n-2)\varphi} + e^{-in\varphi} .$$

Men kan nu inderdaad verifiëren dat $\frac{2}{\pi}\int \chi^2(\varphi)\,\sin^2\varphi\;d\varphi=1$ voor iedere n. We hebben dus hiermede een klasse van irreducibele representaties van SU(2) gevonden. Maar dit zijn ook <u>alle</u> irreducibele representaties!

III. Bijna-periodieke functies

door

Prof.Dr F.van der Blij

III. 0. Litteratuur

W. Maak: Fast periodische Funktionen (Berlin 1950)
W. Maak: Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen. Enzykl.I 1, 7,I (16) (Leipzig 1953)
J.v. Neumann: Almost periodic functions in a group I (T.A.M.S. 36 445-492) 1934
L.H. Loomis: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Ch.VIII, (New York 1953)

III.1 Definitie en voorbeelden

Als belangrijkste opgave van dit deel zien we de probleemstelling in II.3, het bewijs van de existentie en de constructie van een niet negatief lineair functionaal voor de functiesop G. Duidelijk is dat we in II konden volstaan met die functies op G te beschouwen, die in de representatie voorkomen.

We beperken ons nu tot begrensde representaties, dat zijn representaties, waarvoor alle matrixelementen begrensde functies zijn. We voeren voor de matrices in $\varphi^2(A) = sp(A\,A^*)$, $\varphi(A) \geqslant 0$. Dan geldt $|a_{\lambda\mu}| \leqslant \varphi(A)$ en $\varphi(AB) \leqslant \varphi(A).\varphi(B)$ en $\varphi^2(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

We definieren nu bijna-periodieke functies.

Definitie 1. Een complexe functie f op een willekeurige groep G heet bijna-periodiek (bp) als bij iedere $\varepsilon > 0$ een overdekking $\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu$ van G bestaat, zodat voor ieder tweetal elementen x,y uit een zelfde A_ν geldt $|f(cxd)-f(cyd)| < \varepsilon$, uniform in c en d.

Stelling III.1.1. De matrixelementen van een begrensde representatie zijn bp.

Bewijs. Bij ieder element a_{ij} van A is er een overdekking van G door eindig vele stukken, zó dat op elk stuk de functie $a_{ij}(x)$ minder dan ε varieert. We construeren een gemeenschappelijke verfijning voor i, j=1,...n. Voor x,y uit een zelfde deel van de verfijnde overdekking geldt $|a_{ij}(cxd)-a_{ij}(cyd)| \leqslant \varphi\{A(cxd)-A(cyd)\} \leqslant \varphi\{A(c)\} \,.\, \varphi\{A(x)-A(y)\}. \,.\, \varphi\{A(d)\} \leqslant M^2.n.\sqrt{\varepsilon}$. Dus is a_{ij} een bp functie.

Stelling III.1.2. Een bp functie is begrensd.

Bewijs. Laat $\{a_\nu\}$ een representanten systeem van een ε-overdekking van G zijn. Voor alle $x \in G$ geldt dan $|f(x)| \leqslant \max_\nu |f(a_\nu)| + \varepsilon$.

Voorbeelden 1. G is de additieve groep van de reële getallen modulo 1. Iedere continue, periodieke functie op de reële getallen is bp. Zo'n functie is immers uniform continu op $[0,1]$. Laat in dit (en in volgende) bewijzen $\delta(\varepsilon)$ zo'n functie zijn dat voor $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ geldt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. De gevraagde ε-overdekking van G ontstaat uit een overdekking van $[0,1]$ met intervallen $<\delta$.

2. G is de additieve groep van de gehele rationale getallen. Nu is e^{ix} bp. Bij e^{ix} bepalen we op $[0,2\pi]$ de $\delta(\varepsilon)$, en we overdekken $[0,2\pi]$ met intervallen met lengte $<\delta$. Onder A_ν rekenen we alle gehele getallen, die mod 2π in het v-de interval liggen.

3. G is de additieve groep van de reële getallen. Dit is de groep waarvoor de klassieke bp functies zijn gedefinieerd. En wel door de

Definitie 2. Een continue functie op de reële getallen heet bp als bij iedere $\varepsilon>0$ een $l(\varepsilon)>0$ gegeven is, zodat op ieder segment met lengte $\geq l(\varepsilon)$ een τ te vinden is met $|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$, uniform in x.

Stelling III. 1.3. Een continue, en volgens def.1 bp functie voldoet aan de voorwaarden genoemd in def.2.

Bewijs. Laten $\{a_\nu\}$ representanten zijn van een ε-overdekking. Verder zij $l(\varepsilon)=2\max|a_\nu|$. Op ieder segment $[x-\frac{1}{2}l,x+\frac{1}{2}l]$ is het getal $x-a_k$ (k gedefinieerd door $x\in A_k$) een getal τ. Immers

$$|f\{t+(x-a_k)\}-f(t)| = |f\{x+(t-a_k)\}-f\{a_k+(t-a_k)\}|<\varepsilon .$$

Stelling III. 1.4. Een volgens def.2 bp functie is uniform continue.

Bewijs. Op $[-1,l+1]$ is f uniform continu, laat $\delta(\varepsilon)$ weer gegeven zijn. Neem ε zó dat $\delta(\varepsilon)<1$. Kies nu x en y met $|x-y|<\delta<1$. Dan is er een $\tau\in[x-l,x]$ zodat $|f(x)-f(x-\tau)|<\varepsilon$, maar ook $|f(y)-f(y-\tau)|<\varepsilon$ en $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(x-\tau)|+|f(x-\tau)-f(y-\tau)|+|f(y-\tau)-f(y)|<3\varepsilon$.

Stelling III. 1.5. Een volgens def.2 bp functie voldoet aan de voorwaarden van def.1:

Bewijs. We bepalen bij ε en bij de uniform continue f weer $\delta=\delta(\varepsilon)$ en overdekken $[0,l]$ met intervallen met lengte δ. Alle x, die door vermindering met een τ in het ν-de interval terecht komen vormen A_ν. Deze A_ν-s vormen een ε-overdekking. Als $x,y\in A_\nu$ zoeken we τ, τ' zodat $|(x-\tau)-(y-\tau')|<\delta$. Dan zal $|f(x+c)-f(y+c)|\leq|f(x+c)-f(x-\tau+c)|+|f(x-\tau+c)-f(y-\tau'+c)|+|f(y-\tau'+c)-f(y)|<3\varepsilon$.

III.2. Eigenschappen van bp functies.

We beschouwen de ruimte b(G) van de begrensde functies op G. In deze ruimte introduceren we de z.g. uniforme topologie door $|f|=\sup_x|f(x)|$. De bp vormen een deelruimte. Deze is lineair, zoals volgt uit

Stelling III.2.1. Als φ een continue functie van 2 variabelen is, en f en g zijn bp dan is $\varphi(f,g)$ ook bp.

Bewijs. Omdat f en g begrensd zijn behoeven we φ slechts te beschouwen op een begrensde afgesloten verzameling, waarop φ uniform continu is. We bepalen voor φ weer de functie $\delta(\varepsilon)$ en construeren δ-overdekkingen van G voor f en g. Een gemeenschappelijke verfijning van deze twee overdekkingen is een ε-overdekking van G voor $\varphi(f,g)$.

Voorbeelden. Met f en g zijn ook $\lambda f+\mu g$, fg, $\overline{f}$ en sup(f,-f) alle bp.

Enkele functies hebben een bijzonder belang, n.l. de translaties $t_a:(x\to xa)$; ${}_bt:(x\to bx)$, ${}_at_b:(x\to axb)$ en de inversie $j:(x\to x^{-1})$.

Stelling III.2.2. Als f bp is, dan zijn ook $f\,{}_at_b$ en fj bp.

Bewijs. De eerste bewering volgt direct uit de definitie. Omdat $(pxq)^{-1}=q^{-1}x^{-1}p^{-1}$ volgt dat uit een ε-overdekking $\bigcup A_\nu$ voor f een ε-overdekking $\bigcup A_\nu^{-1}$ voor fj is af te leiden.

Stelling III.2.3. De deelruimte bp(G) van de bp functies is afgesloten in de ruimte b(G) van de begrensde functies op G.

Bewijs. Zij f een verdichtingspunt van bp's $f_1, f_2, \dots$. Bij $\varepsilon>0$ bepalen we een n met $|f-f_n|<\varepsilon$. Een ε-overdekking voor f_n is een 3ε-overdekking voor f omdat daarin geldt

$$|f(u)-f(v)|\leqslant|f(u)-f_n(u)|+|f_n(u)-f_n(v)|+|f_n(v)-f(v)|<3\varepsilon .$$

Stelling III.2.4. Als G een compacte groep is zijn alle continue functies bp.

Dit kan b.v. worden bewezen met behulp van het feit dat f(cxd) een continue functie van de 3 variabelen c,x,d is.

Opmerking. Iedere Lebesgue meetbare bp functie op de (locaal compacte) additieve groep van de reële getallen is continu.

III.3. Het gemiddelde van een bp functie.

We bespreken twee constructies van een niet negatief invariant lineair functionaal op bp(G). Eerst een elementaire methode.

We beschouwen een ε-overdekking (zie def.1) en vormen met een stel representanten $\{a_\nu\}$ een "tussensom" $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu)$. We moeten opdat dit een zinvol begrip kan worden de eis opleggen dat de ε-overdekking minimaal is, d.w.z. niet met minder delen geconstrueerd kan worden. Nauwkeuriger: een overdekking van G met delen $A_1,\dots,A_n$ heet minimaal als er geen elementen $x_1,\dots,x_n$ te vinden zijn, zodat het mogelijk is met minder dan n verzamelingen uit de collectie der verzamelingen A_ix_j de gehele G te overdekken. We zoeken nu een getal M(f) te definieren zodat er voor iedere $\eta > 0$ een $E > 0$ is met voor alle $\varepsilon < E$ en iedere tussensom bij iedere minimale ε-overdekking

$$\left| M(f) - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu) \right| < \eta .$$

Stelling III.3.1. Als $\{a_\nu\}$ en $\{b_\mu\}$ representanten zijn van een minimale ε_1 - resp. een minimale ε_2-overdekking, dan geldt

$$\left| \frac{1}{n} \sum f(a_\nu) - \frac{1}{m} \sum f(b_\mu) \right| < 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Bewijs. We gebruiken de volgende combinatorische hulpstelling:
Als $\cup A_\nu$ een minimale overdekking is bestaat er een gemeenschappelijk representanten systeem voor $\cup A_\nu$ en $\cup A_\nu x$.
We beginnen met een minimale ε_1-overdekking, b.v. $\cup A_\nu$, dan zijn er getallen c_ν, zodat

$$\left| \frac{1}{n} \sum f(a_\nu) - \frac{1}{n} \sum f(a_\nu x) \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum f(a_\nu) - \frac{1}{n} \sum f(c_\nu) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum f(c_\nu) - \frac{1}{n} \sum f(a_\nu x) \right| < 2\varepsilon_1$$

We substitueren nu $x=b_\mu$ en sommeren over μ.

$$\left| \frac{1}{n} \sum f(a_\nu) - \frac{1}{nm} \sum_{\nu,\mu} f(a_\nu b_\mu) < 2\varepsilon_1 . \right.$$

Geheel analoog

$$\left| \frac{1}{m} \sum f(b_\mu) - \frac{1}{nm} \sum_{\nu,\mu} f(a_\nu b_\mu) < 2\varepsilon_2 \right.$$

dus

$$\left| \frac{1}{n} \sum f(a_\nu) - \frac{1}{m} \sum f(b_\mu) \right| < 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat voor een "convergente rij verdelingen" de volgende stelling geldt:

Stelling III.3.2.

$$\text{De } \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu)$$

bestaat onafhankelijk van de gekozen minimale ε -overdekkingen en onafhankelijk van de gekozen representanten a_ν bij deze overdekkingen.

We noemen deze limiet nu M(f). Uit st.III.3.1 blijkt nu dat bij een minimale ε-overdekking geldt $\left|\frac{1}{n}\sum f(a_\nu)-M(f)\right|\leqslant 2\varepsilon$.
We komen terug op de combinatoriek. Omdat de overdekkingen minimaal zijn zullen k delen van $\cup A'_\nu$ steeds ten hoogste k delen van $\cup A'_\nu$ overdekken. Een stel A_λ , B_μ heet geassocieerd als ze een gemeenschappelijk element bezitten. We formuleren het probleem nu (geassocieerd= bevriend).

<u>Stelling III.3.3</u>. Laat van n ♂ en n ♀ gegeven zijn dat, voor **elke** $k(1\leqslant k\leqslant n)$ **ieder** k-tal ♂ tezamen bevriend is met tenminste k ♀, dan kunnen n huwelijken gesloten worden tussen bevriende paren.

<u>Bewijs</u>. Inductie naar n. Is voor iedere k<n ieder k-tal ♂ bevriend met k+1 ♀ dan één huwelijk sluiten en de inductie toepassen. Is er één k-tal ♂ (k<n), dat precies bevriend is met k ♀ , dan deze volgens inductie laten huwen en voor de rest weer de inductie gebruiken (zouden een aantal van deze resterende ♂ vriendinnen te kort komen, dan zouden zij ook na versterking met de eerstgenoemde k nog vriendinnen te kort komen).

We bewijzen nu enkele eigenschappen van het functionaal M.

<u>Stelling III.3.4</u>. M is lineair, invariant onder t en j, niet negatief en genormeerd. M is continu (t.o.v. de uniforme topologie).

<u>Bewijs</u>. Duidelijk is $M(\alpha f) = \alpha M(f)$.

Bij $\varepsilon > 0$ construeren we een minimale overdekking van G, die zowel voor f, als voor g als voor f+g een ε-overdekking is. Laat $\{a_\nu\}$ een stelsel representanten zijn dan geldt

$$\left|M(f) - \frac{1}{n} \sum f(a_\nu)\right| \leqslant 2\varepsilon$$
$$\left|M(g) - \frac{1}{n} \sum g(a_\nu)\right| \leqslant 2\varepsilon$$
$$\left|M(f+g) - \frac{1}{n} \sum \{f(a_\nu)+g(a_\nu)\}\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Dus $|M(f+g)-M(f)-M(g)| \leqslant 6\varepsilon$. $M(f+g)=M(f)+M(g)$. Dat $M(ft)=M(f)$ volgt uit het feit dat een minimale overdekking door t in een minimale wordt overgevoerd; $M(fj)=M(f)$ analoog. Het niet negatief zijn van M is triviaal, even zo dat $M(1)=1$.
De continuiteit volgt uit de lineariteit, de genormeerdheid en het niet-negatief zijn, immers voor $n>N_0$ zij $|f-f_n|<\varepsilon$ dan

$$|M(f) - M(f_n)| = |M(f-f_n)| \leqslant M(|f-f_n|) \leqslant M(\varepsilon) = \varepsilon$$

<u>Stelling III.3.5</u>. Als $f\geqslant 0$ en $f(a)>0$ dan $M(f)>0$.

<u>Bewijs</u>. Beschouw een $\frac{1}{2}f(a)$-overdekking van G. Laat $\{a_\nu\}$ een representantensysteem zijn. Dan zal $g(x)= \sum f(a_\nu x)-\frac{1}{2}f(a)\geqslant 0$, dus $M(g)\geqslant 0$, dus $M(f)-\frac{1}{2}f(a)\geqslant 0$, dus $M(f)>0$.

III.4. Tweede definitie van bp functies.

We beschouwen bp(G) als een metrische ruimte met $|f-g|$ als afstand.

Definitie 3. Een begrensde functie f heet bp als de verzameling V_f van alle functies $f_\lambda t$ ($\lambda \in G$) totaal begrensd is (een metrische ruimte heet totaal begrensd als er bij elke ε een eindige overdekking is met delen, elk met doorsnee $< \varepsilon$).

Stelling III.4.1. De definities 1 en 3 zijn gelijkwaardig.

Bewijs. Laat f aan de voorwaarde van definitie 1 voldoen, en laat $\{a_\nu\}$ een stelsel representanten van een ε-overdekking zijn. Voor iedere $b \in G$ is er een a_ν met $|f(bx)-f(a_\nu x)| < \varepsilon$, uniform in x, dus $|f_b t - f_{a_\nu} t| \leq \varepsilon$. De verzameling $f_b t$ is dus totaal begrensd. We gaan uit van definitie 3. Bij $\varepsilon > 0$ zijn er getallen c_k (k=1,...n) zodat voor alle $c \in G$ een c_k bestaat met $|f(cxd)-f(c_k xd)| < \varepsilon$. Het stelsel $f_{c_k x} t$ is totaal begrensd t.o.v. de parameter x, we vinden dus een overdekking van G zodat voor x,y uit eenzelfde deel $|f_{c_k x} t - f_{c_k y} t| < \varepsilon$. We voeren dit uit voor alle k en zoeken een gemeenschappelijke verfijning. Dan geldt voor x,y uit eenzelfde deel van deze verfijning

$$|f(cxd)-f(cyd)| \leq |f(cxd)-f(c_k xd)| + |f(c_k xd)-f(c_k yd)| +$$
$$+ |f(c_k yd) - f(cyd)| < 3\varepsilon \text{ , uniform in } c,d.$$

We voeren nu voor reële functies f een functionaal M^* in. We definieren eerst $\sigma(f) = \sup f - \inf f$.

Stelling III.4.2. $\sigma(f) \geq 0$, $\sigma(f)=0 \leftrightarrow f$ is constant

$\sigma(f_\lambda t) = \sigma(f)$ $\qquad \sigma(\lambda f) = |\lambda| \sigma(f)$

$\sigma(f_1+f_2) \leq \sigma(f_1) + \sigma(f_2)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f_n) = \sigma(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$.

Van V_f construeren we het convexe omhulsel $C(V_f)$, d.i. de verzameling van alle functies

$$\sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu f_{a_\nu} t \text{ met } \rho_\nu \geq 0 \text{ , } \sum_\nu \rho_\nu = 1.$$

Van $C(V_f)$ beschouwen we de afsluiting $\overline{C(V_f)}$.

Stelling III.4.3. $\overline{C(V_f)}$ is een compacte deelverzameling van bp(G).

Bewijs. V_f is totaal begrensd, laat W een eindige verzameling zijn zodat de ε-omgeving van W de verzameling V_f overdekt. De totaal begrensde verzameling C(W) heeft een ε-omgeving, die $C(V_f)$ omvat. Omdat dit voor alle $\varepsilon > 0$ geldt is $C(V_f)$ totaal begrensd. Omdat bp(G) afgesloten is in b(G) en $C(V_f) \subset bp(G)$ geldt ook $\overline{C(V_f)} \subset bp(G)$. De ruimte b(G) is volledig, en de afsluiting van een totaal begrensde deelverzameling ervan is daardoor compact.

Stelling III.4.4. $\overline{C(V_f)}$ bevat een constante functie.

Bewijs. Het continue functionaal σ neemt op de compacte $\overline{C(V_f)}$ een minimum, b.v. voor φ, aan. Stel sup $\varphi = \alpha$ en inf $\varphi = \beta$; $\alpha - \beta = 4\delta > 0$. We zoeken nu $a_\nu \in G$, zodat de δ-omgevingen van $\varphi\, a_\nu^t$ de verzameling V_φ overdekken. Laat $g = \frac{1}{k} \sum_\nu \varphi\, a_\nu^t$, dan $g \in \overline{C(V_f)}$. Zij nu $x \in G$. Kies $y \in G$ met $\varphi(y) < \beta + \delta$. Er is dan een a_ν met

$$\left|\varphi\, a_\nu^t - \varphi_{yx^{-1}}^{t}\right| < \delta \text{ , dus } \left|\varphi(a_\nu x) - \varphi(y)\right| < \delta \text{ en}$$

$$\varphi(a_\nu x) < \beta + 2\delta = \alpha - 2\delta \text{ . Dus sup } g(x) < \alpha - \frac{2}{k}\delta \text{ . Analoog}$$

inf $g(x) > \beta + \frac{2}{k}\delta$ en $\sigma(g) = (1 - \frac{1}{k})\,\sigma(\varphi) < \sigma(\varphi)$. Dus $\alpha = \beta$.

We zouden kunnen bewijzen dat er maar één constante functie in $\overline{C(V_f)}$ is, en dat deze de gewenste eigenschappen van het functionaal heeft. We volstaan met terug te grijpen op III.3.

Stelling III.4.5. Laat $M^*(f)$ een constante functie uit $\overline{C(V_f)}$ zijn. Dan geldt $M^*(f) = M(f)$ (voor $M(f)$ vid III.3).

Bewijs. Als $g \in V_f$ dan $M(g) = M(f)$ (invariantie van M)
Als $g \in C(V_f)$ dan $M(g) = M(f)$ (lineariteit van M)
Als $g \in \overline{C(V_f)}$ dan $M(g) = M(f)$ (continuiteit van M)

Dus $M(M^*(f)) = M(f)$. Maar ook $M(M^*(f)) = M^*(f)$.

Opmerking. Men kan ook uitgaan van $V_f^1 = \{f\ t_\lambda\}$.

III.5. Unitaire metriek in bp(G).

Voor $f, g \in bp(G)$ definieren we $(f,g) = M(f.\bar{g})$. Deze definitie maakt (f,g) tot een bilineaire, invariante, continue functie van f en g. We definieren met dit inproduct een nieuwe topologie in bp(G), die zwakker is dan de uniforme topologie, door $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Verder voeren we voor bijna periodieke functies een vouwing in (vergelijk II.5) door de definitie

$f \times g\ (x) = M\{f.gt_x j\}$ of als we i.p.v. $M(h)$ schrijven $M_t(h(t))$ door

$$f \times g\ (x) = M_y\{f(y).g(y^{-1}x)\} = M_y\{f(xy^{-1}).g(y)\}$$

De operatie $\times$ is associatief en distributief t.o.v. de optelling. De belangrijkste stellingen zijn

Stelling III.5.1. Als $\underset{\nu,\mu}{\text{L.I.M.}}\ (f_\nu - f_\mu) = \underset{\nu,\mu}{\text{L.I.M.}}(g_\nu - g_\mu) = 0$ dan $\lim_{\nu,\mu} (f_\nu \times g_\nu - f_\mu \times g_\mu) = 0$. (L.I.M. is de limiet in de topologie $\|\cdot\|$, lim in de uniforme topologie).

Bewijs. Het bewijs volgt uit de volgende vorm van een klassieke ongelijkheid:

$$|f \times g| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

(Dit blijkt op de bekende manier uit $M_y\ \{\ |\lambda f(y) + \mu g(y^{-1}x)|^2\} \geqslant 0$).

We vinden nu

$$\left|f_\nu \times g_\nu - f_\mu \times g_\mu\right| \leq \left|(f_\nu - f_\mu)\times g_\nu\right| + \left|f_\mu \times (g_\nu - g_\mu)\right| \leq$$
$$\leq \|f_\nu - f_\mu\| \cdot \|g_\nu\| + \|f_\mu\| \cdot \|g_\nu - g_\mu\| ,$$

waaruit de stelling direct volgt.

Stelling III.5.2. Bij iedere bp functie f en iedere $\varepsilon > 0$ is er een bp functie g met $|f - f\times g| < \varepsilon$.

Bewijs. We definieren eerst een soort invariante afstand op G door $\Delta(a,b) = \sup_{s,t} |f(sat) - f(sbt)|$. Verder kiezen we nu

$$g(y) = \gamma \cdot \max\left(0, 1 - \frac{\Delta(1,y)}{\varepsilon}\right).$$

Dan is g een bp functie, we kiezen γ zo dat $M(g)=1$.
Nu geldt

$$\left|f(x) - M_y\left[f(xy^{-1})g(y)\right]\right| = \left|M_y\left\{(f(x) - f(xy^{-1}))g(y)\right\}\right| \leq \varepsilon$$

want voor $|f(x) - f(xy^{-1})| > \varepsilon$ geldt $\Delta(1,y) > \varepsilon$, dus $g(y)=0$.
We vinden hieruit dat $|f - f\times g| < \varepsilon$.

We sturen nu aan op de volgende stelling:

Stelling III.5.3. Ieder invariant en (in de uniforme topologie) afgesloten moduul van bp functies is de afsluiting van de directe som van eindige invariante irreducibele modulen van bp functies.

Voor het bewijs enkele hulpstellingen.

Stelling III.5.4. Laat H een rechtsinvariant afgesloten deelmoduul van een r-invariant afgesloten moduul R zijn. De verzameling van alle $h' \in R$ die loodrecht op alle $h \in H$ staan vormen een rechts invariant afgesloten deelmoduul H' van R; $H \cap H' = 0$ en $R = \overline{H + H'}$.

Bewijs. Alleen het laatste is niet triviaal. Bij $f \in R$ zoeken we een rij $h_n \in H$ met $\lim_{n\to\infty} \|f - h_n\| = \inf_{h \in H} \|f - h\|$.

Dit is een Cauchy-rij in de zwakke topologie, want $\|h_n - h_m\| \leq \|f - h_n\| + \|f - h_m\|$. Het is nu voldoende om aan te tonen dat bij iedere bp g twee functies $h \in H$ en $h' \in H'$ zijn met $f \times g = h + h'$. Nu zal $h_n \times g \to h$ (uniform met $h \in H$. Laat $U \in H$ dan zal $(U, f\times g - h) = \lim_{n\to\infty}(U, (f-h_n)\times g)$ en

$$|(U, (f-h_n)\times g)| \leq |U| \cdot |(f-h_n)\times g| \leq |U| \cdot \|f - h_n\| \cdot \|g\| .$$

Stelling III.5.5. In ieder afgesloten r-invariant moduul R is een eindig (irreducibel) deelmoduul.

Bewijs. We gaan uit van een $g \neq 0$ uit R. Dan is $f = g \times \overline{gJ}$ zelf geadjungeerd: $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$ (vid II.5). Voor een zelf geadjungeerde functie geldt $\|f\|^2 = f \times f(1)$. We construeren nu $f'' = f \times f \times \ldots \times f$. Dan zal

$$|f^{n+1} - f^{m+1}|^2 = |(f^n - f^n) \times f|^2 \leq \|f\|^2 . \|f^n - f^m\|^2 =$$
$$\|f\|^2 . \left[(f^n - f^m) \times (f^n - f^m)\ (1)\right] = \|f\|^2 \left[(f^{2n} - 2f^{n+m} + f^{2m})\ (1)\right]$$

We merken op dat de rij $\dfrac{\|f^{n+1}\|}{\|f^n\|}$ monotoon niet daalt

$(\|f^n\|^2 = (f^n x f^n)(1) \leq |f^{n-1} x f^{n+1}| \leq \|f^{n-1}\| . \|f^{n+1}\|)$ en door $\|f\|$ naar boven begrensd is.

Dus bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|f^{n+1}\|}{\|f^n\|} = \alpha$.

Dan bestaat ook $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|f^n\|^2}{\alpha^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^n x f^n(1)}{\alpha^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{2n}(1)}{\alpha^{2n}}$.

We definieren nu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{2n}}{\alpha^{2n}} = \Phi$, uit de convergentie van $\dfrac{f^{2n}(1)}{\alpha^{2n}}$ volgt dat $\dfrac{f^{2n}}{\alpha^{2n}}$ in de uniforme topologie een Cauchyrij is en dus convergent.

We zijn nu in staat een eindig deelmoduul te definieren, n.l. de verzameling van alle $\varphi \in R$ met $\Phi x \varphi = \varphi$. Dat deze een r-invariant moduul vormen is duidelijk. Φ zelf is oplossing. Laten we nu uitgaan van k lineair onafhankelijke oplossingen $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$, die we als een orthonormaalstelsel mogen aannemen.

We definieren $\Psi(x,y) = \Phi(y\,x^{-1}) - \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_i(y)$, dan als bp functie op $G \times G$

$$\|\Psi\|^2 = \|\Phi\|^2 + \|\Sigma\overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_i(y)\|^2 - (\Phi(yx^{-1}),\ \Sigma\overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_i(y))$$
$$- (\Sigma\overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_i(y),\ \Phi(yx^{-1}))$$

$$\|\Psi\| = \|\Phi\|^2 + k - 2k = \|\Phi\|^2 - k$$

dus $\quad k \leq \|\Phi\|^2$.

Nu zijn de voorbereidingen voor het bewijs van III.5.3 voltooid. We zoeken n.l. alle irreducibele eindige invariante deelmodulen en construeren het moduul $\mathfrak{M}$ dat de afsluiting van de som van deze modulen is. Als $\mathfrak{M} \neq R$ is er in het moduul $\mathfrak{M}' \perp \mathfrak{M}$ een irreducibel r-invariant moduul, dat dus loodrecht op zichzelf staat. Dus moet $\mathfrak{M} = R$.

IV. Geïnduceerde karakters

door

Dr T.A. Springer

Literatuur: [1] R. Brauer, On Artin's L-series with general group characters, Ann.of Math.48 (1947), 502-514.

[2] R. Brauer, Applications of induced characters, Am.J.Math., 69(1947), 709-716.

[3] P. Roquette, Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe, Crelle 190 (1952), 148-168.

[4] R. Brauer, A characterization of the characters of groups of finite order, Ann.of Math.57 (1953), 357-377.

[5] R. Brauer-J.Tate, On the characters of finite groups, Ann.of Math.62 (1955), 1-7.

IV.1. De karakteralgebra van een eindige groep.

Stel dat $A=(a_{ij})$ en $B=(b_{ij})$ twee vierkante matrices zijn met graad m resp. n en met elementen in een lichaam K. We voegen aan A en B een matrix $A\otimes B$ toe, het Kroneckerproduct of tensorproduct, op de volgende manier. De graad van $A\otimes B$ zal mn zijn, de rijen en kolommen ervan zullen worden genummerd door paren (i,j) met $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$. We definieren dan het element $p_{(ij),(kl)}$ van $A\otimes B$ door

(4.1.1) $$p_{(ij),(kl)} = a_{ik}\, b_{jl}\,.$$

Opm.: Wanneer A en B afkomstig zijn van lineaire transformaties u en v vа vectorruimten E resp. F over K, dan is $A\otimes B$ afkomstig van de transformatie $u\otimes v$ van het tensorproduct $E\otimes F$.

We hebben twee eigenschappen van het Kroneckerproduct nodig nl.

(4.1.2) $(A\otimes B).(C\otimes D) = AC\otimes BD$, als A,C resp. B,D dezelfde graad hebben

(4.1.3) sp $(A\otimes B)$ = sp A.sp B, hierin is sp A het spoor van A.

(4.1.2) en (4.1.3) kunnen door narekenen worden geverifieerd.

Stel nu dat G een groep is; ρ en σ twee representaties van G door matrices met graden m resp. n en elementen in het lichaam K. We definieren een productrepresentatie $\rho\otimes\sigma$ (ook wel ρ^{σ}) door

(4.1.4) $$(\rho\otimes\sigma)(a) = \rho(a)\otimes\sigma(a) \qquad (a\in G).$$

Dat dit een representatie is volgt uit (4.1.2). Verder vindt men met (4.1.2), dat de equivalentieklasse van $\rho\otimes\sigma$ alléén afhankelijk is van die van ρ en σ.

Stel nu dat G een eindige groep is. G heeft dan maar eindig veel klassen van irreducibele representaties in het lichaam der complexe getallen. We zullen hier het woord karakter ook gebruiken voor het spoor van een niet noodzakelijk irreducibele representatie. Bij irreducibele representaties spreken we dan van irreducibele karakters.

Stel dat R een ring van complexe getallen is, die 1 bevat, met $\bar{R}=R$. We vormen formele sommen van de irreducibele karakters met coëfficiënten in R, we noemen X= X(G,R) de verzameling van deze sommen. Ieder element is dus te schrijven als $\xi = \sum_{\chi} \xi_\chi \chi$, met $\xi_\chi \in R$, terwijl χ de irreducibele karakters doorloopt. X is een R-modulus.

We definiëren voor $\xi, \eta \in X$ een inwendig product (ξ, η) aldus: als $\xi = \sum \xi_\chi \chi$, $\eta = \sum \eta_\chi \chi$, dan is $(\xi,\eta) = \sum_\chi \xi_\chi \bar{\eta}_\chi$. Dit heeft de gebruikelijke eigenschappen. Verder kunnen we aan iedere $\xi \in X$ een functie op G toevoegen door te definiëren $\xi(a) = \sum_\chi \xi_\chi \chi(a)$. $(a \in G)$. Dan is dus $\xi(t^{-1}at) = \xi(a)$ voor alle $t \in G$. Op grond van de orthogonaliteitsrelaties kunnen we dan voor (ξ, η) ook schrijven $(\xi,\eta) = \frac{1}{g}\sum_{a \in G} \xi(a)\, \bar{\eta}(a)$ (g = orde van G).
Hieruit volgt dat we X kunnen identificeren met de verzameling functies $a \to \xi(a)$; want als $\xi(a)=0$ voor alle $a \in G$, dan is $\xi_\chi = (\xi, \chi) = \frac{1}{g}\sum \xi(a)\, \bar{\chi}(a) = 0$, dus is dan $\xi = 0$. Wanneer nu χ en ψ twee irreducibele karakters van G zijn, dan is volgens (4.1.3) $\chi\psi$ ook een karakter van G, zodat men heeft $\chi\psi(a) = \sum_\varphi c_{\chi\psi\varphi}\, \varphi(a)$ met gehele $c_{\chi\psi\varphi} \geqslant 0$. We zien dus dat het product van de functies χ en ψ weer een functie is die afkomstig is van een element van X. Voor de elementen van X corresponderend met de irreducibele karakters van G kunnen we zo een vermenigvuldiging invoeren, die dan lineair kan worden omgezet tot een vermenigvuldiging in X.
Men kan dan laten zien, dat er op deze manier een algebra over R ontstaat, we zullen daarom X(G,R) met de boveningevoerde vermenigvuldiging noemen de karakteralgebra van G over R.

Opm. Bij het bewijs dat X een algebra is moet men een aantal rekenregels verifiëren, deze blijken te gelden op grond van formele eigenschappen van het Kroneckerproduct van twee matrices, die we hier niet hebben opgeschreven. Zie van der Waerden, Mod.Algebra Bd.2, § 128.

IV.2. Verband tussen de karakteralgebra's van een groep en een ondergroep.

Stel dat G een eindige groep is en H een ondergroep van G. We noemen X de karakteralgebra van G over R, en Y die van H over R.

Het is duidelijk, dat iedere representatie ρ van G door complexe matrices door restrictie tot H een representatie $r\rho$ van H door matrices bepaalt.

Noemt men χ het karakter van ρ, $r\chi$ dat van $r\rho$, dan is dus

(4.2.1) $$(r\chi)(b) = \chi(b) \quad (b \in H).$$

Deze toevoeging r voldoet wegens (4.2.1) aan $r(\chi+\psi)=r\chi+r\psi$, $z(\chi\psi)=r\chi.r\psi$. r kan daarom worden voortgezet tot een <u>homomorfisme</u> $r=r_{G\to H}$ van X in Y.

Er is ook een afbeelding die de andere kant opgaat, dus van Y naar X. Daar zijn echter enige voorbereidingen voor nodig.

We vormen de verzameling G/H der nevenklassen $H(a \in G)$. Voor $a \in G$ zullen we met $\kappa(a)$ de nevenklasse van a aanduiden. Verder kiezen we bij iedere $k \in G/H$ een representant $\alpha(k)$ van k in G. Bij overgang op een ander representantenstelsel gaat $\alpha(k)$ over in $\alpha(k)b_k$, met $b_k \in H$.

Een element $a \in G$ bepaalt een permutatie π_a van G/H door

(4.2.2) $$\pi_a \kappa(b) = \kappa(ab). \qquad (b \in G).$$

Uit (4.2.2) volgt direct, dat $a \to \pi_a$ een <u>representatie</u> van G is door permutaties. Verder heeft men

(4.2.3) $$a.\alpha(k) = \alpha(\pi_a k).b_{a,k} \qquad (a \in G,\ k \in G/H),$$

met $b_{a,k} \in H$.

Uit (4.2.3) volgt de relatie

(4.2.4) $$b_{a_1 a_2, k} = b_{a_1, \pi_{a_2}(k)}\, b_{a_2,k}\,.$$

Vervangt men de $\alpha(k)$ door $\alpha(k)b_k$ $(b_k \in H)$ dan gaat $b_{a,k}$ over in $b^{-1}_{\pi_a(k)}\, b_{a,k}\, b_k$.

Stel nu dat ρ een representatie van H is door complexe matrices, met graad n. We hebben gezien dat aan iedere $a \in G$ is toegevoegd een permutatie π_a van G/H. Daarbij hoort een permutatiematrix Π_a met elementen $(\Pi_a)_{kl}=(\delta_{k,\pi_a(l)})$ $(k,l \in G/H)$.

We schrijven nu op de plaats (k,l) van Π_a in plaats van het getal $\delta_{k,\pi_a(l)}$ de matrix $\delta_{k,\pi_a(l)}\,\rho(b_{a,l})$, en krijgen zo een matrix die we door $(i\rho)(a)$ zullen aanduiden:

(4.2.5) $$(i\rho)(a) = (\delta_{k,\pi_a(l)}\,\rho(b_{a,l})). \qquad (a \in G;\ k,l \in G/H)$$

Of, wat verder uitgeschreven:

$$(i\rho)(a) = \begin{pmatrix} \rho(\alpha_1^{-1} a \alpha_1) & \cdots & \rho(\alpha_1^{-1} a \alpha_q) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho(\alpha_q^{-1} a \alpha_1) & \cdots & \rho(\alpha_q^{-1} a \alpha_q) \end{pmatrix};$$

hierin is $q=G:H$, $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ is het representantensysteem, en $\rho(c)$ betekent 0 als c niet in H ligt.

De graad van deze matrix is $n(G:H)$. We zullen laten zien dat $a \rightarrow (i\rho)(a)$ een representatie van G is. Want

$$(i\rho)(a_1).(i\rho)(a_2) = (\delta_{k,\pi_{a_1}(1)}\, \rho(b_{a_1,1}))\, (\delta_{k,\pi_{a_2}(1)}\, \rho(b_{a_2,1})) =$$

$$= (\sum_{m \in G/H} \delta_{k,\pi_{a_1}(m)}\, \rho(b_{a_1,m}).\, \delta_{m,\pi_{a_2}(1)}\, \rho(b_{a_2,1}))=$$

$$= (\delta_{k,\pi_{a_1a_2}(1)}\, \rho(b_{a_1,\pi_{a_2}(1)})\, \rho(b_{a_2,1})) =$$

(wegens (4.2.4)) $(\delta_{k,\pi_{a_1a_2}(1)}\, \rho(b_{a_1a_2,1})) = (i\rho)(a_1a_2)$.

Verder is $(i\rho)(e)$ = eenheidsmatrix. Dus is $i\rho$ een representatie van G. De representatie $i\rho$ hangt nog af van de representatie $\alpha(k)$ in G/H. Vervangt men $\alpha(k)$ door $\alpha(k)b_k$ $(b_k \in H)$, dan gaat $(i\rho)(a)$ over in $t.i\rho(a).t^{-1}$, met $t=(\delta_{k,1}\,\rho(b_k))$. Verder ziet men gemakkelijk in, dat bij vervanging van ρ door een equivalente representatie, $i\rho$ ook in een equivalente overgaat. De equivalentieklasse van $i\rho$ is dus eenduidig bepaald door G,H en de equivalentieklasse van ρ. We noemen hem de door de klasse van ρ geïnduceerde klasse van representaties van G.

Stel dat χ het karakter is van ρ. Het karakter $i\chi$ van $i\rho$ is, volgens (4.2.5),

$$(i\chi)(a) = \sum_{\pi_a(k)=k} \chi(b_{a,k}).$$

Wanneer nu $\pi_a(k)=k$, dan is volgens (4.2.3) $b_{a,k} = \alpha(k)^{-1} a\, \alpha(k)$. Daarom kan men het karakter $i\chi$ ook geven door $(i\chi)(a)=\sum_k^* \chi(\alpha(k)^{-1} a\, \alpha(k))$, of ook door

(4.2.6) $$(i\chi)(a) = \frac{1}{h} \sum_{t \in G}^* \chi(t^{-1}at).$$

Hierin betekent de ster dat in de som de termen waarvoor het argument van χ niet in H ligt, weggelaten moeten worden. Verder is h het aantal elementen van H.

Daar uit (4.2.6) volgt dat $i(\chi+\psi)=i\chi+i\psi$, bepaalt i een lineaire afbeelding $i=i_{H\rightarrow G}$ van Y in X. Als $\eta \in Y$, wordt dus $i\eta \in X$ bepaald door (4.2.6), met η in plaats van χ.

We hebben nu dus een lineaire afbeelding i van Y in X en een homomorfisme r van X in Y. We zullen enkele eigenschappen afleiden.
Wanneer $\xi \in X, \eta \in Y$ dan is $(\xi.i(\eta))(a)= \xi(a).\, \frac{1}{h}\sum^* \eta(t^{-1}at)=$
$= \frac{1}{h}\sum^* \xi(t^{-1}at)\,\eta(t^{-1}at) = i(r(\xi).\eta)(a)$. Dus

(4.2.7) $$\xi.i(\eta) = i(r(\xi).\eta).$$

Daaruit volgt, dat het beeld $i(Y)$ van Y in X een ideaal is in X.

Verder is, met dezelfde notaties,

$$(\xi, i(\eta)) = \frac{1}{g}\sum_{a\in G}\xi(a)\,\overline{i\,\eta(a)} = \frac{1}{gh}\sum_{a\in G}\ \sum_{t\in G}^{*}\xi(a)\,\overline{\eta(t^{-1}at)} =$$

$$= \frac{1}{gh}\sum_{b\in H}\ \sum_{t\in G}\xi(tbt^{-1})\,\overline{\eta(b)} = \frac{1}{gh}\sum_{\substack{b\in H\\ t\in G}}\xi(b)\,\overline{\eta(b)} =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{b\in H}\xi(b)\,\overline{\eta(b)} = (r\,\xi, \eta).$$

We hebben hiermee bewezen

(4.2.8) $\quad (\xi, i(\eta)) = (r(\xi), \eta)$ (relatie van Frobenius).

We vatten het gevondene samen in de volgende stelling.

Stelling 4.2.1. Als G een eindige groep is en H een ondergroep van G, dan is er een homomorfisme $r_{G\to H}$ van X(G,R) in X(H,R) en een lineaire afbeelding $i_{H\to G}$ van X(H,R) in X(G,R). Het beeld i(X(H,R)) is een ideaal in X(G,R); verder is $(\xi, i(\eta)) = (r(\xi), \eta)$ ($\xi \in X(G,R)$, $\eta \in X(H,R)$).

We vermelden nog het volgende resultaat, dat direct volgt uit (4.2.6).

Lemma 4.2.1. Als H en K twee ondergroepen van een eindige groep G zijn met $K \subset H$, dan is $i_{K\to G} = i_{H\to G}\, i_{K\to H}$.

IV.3. De stelling van Brauer.

Stel weer dat G een eindige groep is met orde g. Wanneer p een priemgetal is, noemen we een element $a \in G$ een p-element als zijn orde een macht van p is, en een p-regulier element als zijn orde met p ondeelbaar is.

Wanneer $a \in G$, ziet men gemakkelijk in, dat men kan schrijven a=bc, waarin b een p-element is, en c p-regulier, en bc=cb, en dat zulke b en c eenduidig bepaald zijn (het zijn machten van a). b en c heten resp. de p-factor en de p-reguliere factor van a. Als p niet deelbaar is op g, is b=e, het eenheidselement van G.

We zullen een ondergroep E van G een elementaire ondergroep van G noemen, als E het direct product is van de cyclische groep [a] , voortgebracht door een p-regulier element a, en een p-Sylowgroep van de normalizator N_a van a in G (verzameling der elementen $n \in G$ met na=an). p is hierin een of ander priemgetal. Voorbeelden van elementaire ondergroepen zijn de cyclische ondergroepen [a] , daar is p een priemgetal dat niet op G deelbaar is.

We noemen k het k.g.v. van de ordes van de elementen van G. Stel dat ζ een primitieve k^e eenheidswortel is. We stellen hier R=Z $[\zeta]$, (Z= ring der gehele getallen). Het is bekend, dat R een vrije groep is, die een basis heeft bestaande uit machten van ζ (nl. $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{\varphi(g)-1}$). We bekijken nu de X(G,R).

Lemma 4.3.1. Stel $\xi \in X(G,R)$, $\xi(a) \in Z$ voor alle $a \in G$. Wanneer dan b en c de p-factor en p-reguliere factor van a zijn, geldt $\xi(a) \equiv \xi(c) \pmod p$.
Bewijs: Daar $\xi(a) = r_{G \to [a]}\xi(a)$, is het voldoende dit lemma voor cyclische G te bewijzen.
In dat geval is $\xi = \sum_\chi \xi_\chi \chi$, $\xi_\chi \in R$, terwijl χ de karakters van G doorloopt. Nu is $\xi(a) = \sum_\chi \xi_\chi \chi(b)\chi(c)$. Als $q=p^r$ de orde van b is, volgt hieruit $\xi^q(a) \equiv \sum_\chi \xi_\chi^q \chi(c^q) \equiv \xi^q(c) \pmod{pR}$. Daar $pR \cap Z = pZ$ (omdat R een basis over Z heeft), volgt hieruit $\xi(a) \equiv \xi^q(a) \equiv \xi^q(c) \equiv \xi(c) \pmod p$.

Stel dat E een elementaire ondergroep is, $E = [a] \times S$. Hierin is dus a een p-regulier element, S een p-Sylowgroep van de normalizator N_a van a in G.

Lemma 4.3.2. Er is een $\eta \in X(E,R)$ met de volgende eigenschappen: $i_{E\to G}\eta(b)=0$ als de p-reguliere factor van b niet met a geconjugeerd is; $i_{E\to G}\eta(a) = (N_a:S)$ en $i_{E\to G}\eta(as)$ is een geheel rationaal getal dat met p ondeelbaar is. Is de p-reguliere factor van b geconjugeerd met a, dan is b geconjugeerd met een $as (s \in S)$.

Bewijs: Het is direct in te zien, als ρ een representatie van $[a]$ is en σ een van S, dat $\rho.\sigma$ gedefinieerd door $\rho.\sigma(a^i \times s) = \rho(a^i) \otimes \sigma(s) (s \in S)$ een representatie van E is. We passen dit toe voor ρ = karakter χ van $[a]$ (representatie van de 1^e graad), σ = eenheidsrepresentatie van S (graad 1). Het karakter van de verkregen representatie noemen we $\chi\varepsilon$, dus $\chi\varepsilon(a^i \times s) = \chi(a^i)$. We vormen nu $\eta = \sum_\zeta \bar{\zeta}(a)\,\zeta\varepsilon. \in X(E,R)$.
De som loopt over alle ζ van $[a]$. Noem de orde van $[a]$, N_a en S resp. α, ν, π. Dan is $\eta(a^i \times s) = 0$ $(i \neq 1)$ of α $(i=1)$. We vormen nu $i_{E\to G}\eta = i\eta$. Volgens (4.2.6) is

$$(i\eta)(b) = \frac{1}{\alpha\pi}\sum_{t \in G}{}^{*}\, \eta(t^{-1}bt).$$

Daar η slechts de waarden 0 en α aanneemt, is $(i\eta)(b)$ rationaal, dus geheel.
Stel $b=cd$, c de p-factor, d de p-reguliere factor van b. Dan is $t^{-1}dt$ de p-reguliere factor van $t^{-1}bt$. Opdat dus $t^{-1}bt \in E$, $\eta(t^{-1}bt) \neq 0$, moet $t^{-1}dt = a$ zijn, moet dus de p-reguliere factor van b met a geconjugeerd zijn. Is dit omgekeerd zo, is dus $t^{-1}dt=a$, dan is $t^{-1}bt = t^{-1}ct.a$. Nu is $t^{-1}ct$ de p-factor van $t^{-1}bt$, zodat $t^{-1}ct \in N_a$. Daar verder ieder p-element van N_a in een Sylowgroep van N_a ligt, en daar twee Sylowgroepen van N_a geconjugeerd zijn in N_a, is $n^{-1}t^{-1}ctn = s \in S$ met $n \in N_a$. Dan is $n^{-1}t^{-1}btn = n^{-1}t^{-1}ctn\, n^{-1}t^{-1}dtn = sa$.
We zien dus, dat de elementen b van G waarvoor niet $(i\eta)(b)=0$, geconjugeerd zijn met elementen as van E. Nu is $(i\eta)(a) = \frac{1}{\alpha\pi}\sum_{t\in G}{}^{*}\eta(t^{-1}at)$.
Het is duidelijk dat alleen de t met $t \in N_a$ een bijdrage tot de som leveren. (Is $t^{-1}at = as$, dan zijn $a.s = t^{-1}at.e$ twee splitsingen in p-regulier element maal p-element, dus $a = t^{-1}at$, dus $t \in N_a$). Daar $\eta(a) = \alpha$,

vinden we $(i\eta)(a)=\frac{\nu}{\pi}=(N_a:S)$. Uit lemma 4.3.1 volgt dan, dat $(i\eta)(as)\equiv(N_a:S)$ (mod p) voor $s\neq e$. Daar $(N_a:S)\not\equiv 0$ (mod p), is lemma 4.3.2 hiermee bewezen.
We noemen $I=I(G,R)$ het ideaal in $X(G,R)$ van de idealen $i_{E\to G}(X(E,R))$, waarbij E de elementaire ondergroepen van G doorloopt.

Lemma 4.3.3. Als ε het eenheidselement is van $X(G,R)$, en g de orde van G, dan is $g\varepsilon\in I$. Bij iedere priemdeler p van g is te vinden een $\eta_p\in I$ zodat $\eta_p(a)$ een met p ondeelbaar geheel rationaal getal is voor alle $a\in G$.
Bewijs: Uit lemma 4.3.2, toegepast op de cyclische E, met een $p\nmid g$, volgt dat er bij iedere $a\in G$ te vinden is een $\xi_a\in I(G,R)$ met $\xi(b)=0$ als b niet met a geconjugeerd is, $\xi(b)=\nu_a$ als b met a geconjugeerd is (hierin is $\nu_a=$ orde van N_a). Dan is $\xi=\frac{g}{\nu_a}\xi_a(b)=0$ of g, al naar gelang b niet of wel met a geconjugeerd is. Noem nu $\{a_i\}$ een stelsel representanten van de klassen van G. Bij iedere i is een $\xi'_{a_i}=\xi'_i$ te vinden. De som $\sum_i\xi'_i$ ligt in I, en is gelijk aan $g\varepsilon$.

We nemen nu een $p|g$. Neem een stelsel representanten (a_j) van de uit p-reguliere elementen bestaande klassen van G. Bij iedere j kunnen wij een elementaire ondergroep $E_j=[a_j]\times S_j$ vinden, we nemen een $\eta_j\in X(E_j,R)$ met de eigenschappen van lemma 4.3.2. Het element $\eta_p=\sum_j i_{E_j\to G}\,\eta_j\in I$ heeft dan de verlangde eigenschap.

Lemma 4.3.4. Als voor een $\xi\in X(G,R)$ geldt dat $\xi(a)\in Z$, $\xi(a)\equiv 0(g^2)$ voor alle $a\in G$, dan is $\xi\in I$.
Bewijs: Stel $\xi=\sum\xi_\chi\chi$, waarin χ de irreducibele karakters doorloopt. Dan is $\xi_\chi=\frac{1}{g}\sum_{a\in G}\xi(a)\,\overline{\chi}(a)$. Daar $\xi(a)\equiv 0(g^2)$, is $\xi_\chi\in gR$. Dus is $\xi=g\,\xi'$, met $\xi'\in X$. Daar $g\varepsilon\in I$, is $g\xi'=g\varepsilon\,.\,\xi'\in I$.
Lemma 4.3.5. $I(G,R)=X(G,R)$.
Bewijs: We nemen een $p|g$. Stel dat p^α de hoogste macht van p is die op g deelbaar is. Voor geschikte N geldt dan voor de η_p uit lemma 4.3.4

$$\eta_p^N(a)\equiv 1 \pmod{p^{2\alpha}},$$

voor alle $a\in G$. Dus is $(\frac{g}{p^\alpha})^2\eta_p^N-(\frac{g}{p^\alpha})^2\varepsilon$ een element $\xi\in X(G,R)$ met de eigenschap van lemma 4.3.4, zodat, daar $\eta_p\in I$, $(\frac{g}{p^\alpha})^2\varepsilon\in I$.
Wanneer p de priemdelers van g doorloopt, is de g.g.d. der getallen $(\frac{g}{p^\alpha})^2$ gelijk aan 1, waaruit volgt dat $\varepsilon\in I$.

We vormen nu de ring $X(G,Z)$. Daarin ligt een ideaal $I(G,Z)$ dat op dezelfde manier als $I(G,R)$ wordt gedefiniëerd. Noem (ρ_i) een basis van R over Z met $\rho_1=1$. Ieder element van $I(G,R)$ is dan kennelijk eenduidig te schrijven als $\sum_i\eta_i\rho_i$ met $\eta_i\in I(G,Z)$. Daar $\varepsilon\in I(G,R)$, is $\varepsilon=\sum_i\eta_i\rho_i$ met zekere $\eta_i\in I(G,Z)$. Dat impliceert echter $\eta_1=\varepsilon$,

$\eta_i=0$ $(i>1)$. (Zij nl. $\sum_j \xi_j \rho_j=0$, $\xi_j \in X(G,Z)$. Dan is $\xi_j=\sum_\chi a_{j\chi}\chi$ ($a_{j\chi}\in Z$, $\chi=$ irreducibel karakter van G). Dan blijkt dat voor elke χ geldt $\sum_j a_{j\chi}\rho_j=0$. Daar de ρ_j een Z-basis vormen, blijkt dat alle $a_{j\chi}$, en dus alle ξ_j, nul zijn).

Dus is $\varepsilon\in I(G,Z)$, $I(G,Z)=X(G,Z)$. Hiermee is bewezen de volgende stelling van Brauer ([1] . Het hier gegeven bewijs is ongeveer dat uit [5] , andere bewijzen in [3] , [5]).

Stelling 4.3.1. Ieder karakter van een eindige groep G is te schrijven als lineaire combinatie met gehele coëfficiënten van karakters, geïnduceerd door karakters van elementaire ondergroepen van G.

Een direct gevolg is de volgende stelling ([4]). We noemen daarin gegeneralizeerd karakter van G: een element van X(G,Z).

Stelling 4.3.2. Een stelsel nodig voldoende voorwaarden opdat een functie ξ van de elementen van een eindige groep G een gegeneralizeerd karakter is, is:
(a) $\xi(a)$ hangt alleen van de klasse van a af;
(b) voor elke elementaire ondergroep E van G geldt dat de restrictie van ξ tot E een gegeneralizeerd karakter van E is.

Bewijs: Nodig is triviaal. Stel dat ξ de eigenschappen (a) en (b) heeft. Uit (a) volgt dat $\xi=\sum_\chi \xi_\chi\chi$, met complexe ξ_χ (χ doorloopt de irreducibele karakters). Hierin is $\xi_\chi=(\xi,\chi)$. Uit (b) en (4.2.8) volgt, dat $(\xi, i_{E\to G}\eta)$ een geheel rationaal getal is voor ieder karakter η van een elementaire ondergroep E. Daar iedere χ een lineaire combinatie is (met gehele coefficienten) van zekere $i\eta$ (volgens de vorige stelling), is $\xi_\chi=(\xi,\chi)$ geheel rationaal.

In het geval dat G zelf een elementaire groep is, dus dat G direct product is van een p-groep S en een cyclische groep [a] waarvan de orde met p ondeelbaar is, geeft St.1.3.1 geen informatie. De volgende stelling geeft een aanvulling voor dit geval.

Stelling 4.3.3. Ieder irreducibel karakter van een elementaire ondergroep E wordt geïnduceerd door een karakter met graad 1 van een ondergroep van E.
We zullen het bewijs hier niet geven, een eenvoudig bewijs is te vinden in [1] . Het bewijs kan onmiddellijk worden gereduceerd tot het geval dat E een p-groep is. Voor dat geval is het een oud resultaat ("iedere irreducibele representatie van een p-groep kan in monomiale vormen worden gebracht").
Door toepassing van Lemma 4.2.1. vindt men uit St.4.3.3:
Stelling 4.3.4. Ieder karakter van een eindige groep G is te schrijven als lineaire combinatie met gehele coëfficiënten van karakters, geïnduceerd door karakters met graad 1 van ondergroepen van G.

IV.4. Toepassingen van geïnduceerde karakters.

A. Als eerste toepassing onderzoeken we de vraag: in wat voor lichaam kan men de coëfficiënten van de matrixrepresentaties van een gegeven eindige groep nemen?
Stel dat G een eindige groep is met orde g. Stel dat ρ een representatie is in het lichaam C der complexe getallen. We noemen Q het lichaam der rationale getallen, en verstaan onder algebraïsch getallenlichaam een algebraïsche uitbreiding van Q, die in C bevat is.

Stelling 4.4.1. ρ is equivalent met een representatie, waarvan alle matrixelementen in een algebraïsch getallenlichaam liggen.

Bewijs: Stel $\rho(a) = (\rho_{ij}(a))$ $(1 \leq i, j \leq n)$, waarin dus $\rho_{ij}(a) \in C$.
De waarden van de karakters $\chi(a) = sp(\rho(a))$ zijn sommen van eenheidswortels. Noem K het lichaam voortgebracht over Q door alle $\chi(a)$. Het is een algebraïsch getallenlichaam. We bekijken nu de relaties tussen de complexe getallen $\rho_{ij}(a)$ met coëfficiënten in K, dat zijn de veeltermen in g_n^2 variabelen $X_{ij,a}$ met coëfficiënten in K, die nul worden bij de substituties $X_{ij,a} \longrightarrow \rho_{ij}(a)$. Speciale relaties zijn
$\sum_k X_{ik,a} X_{kj,b} - X_{ij,ab}$ $\sum_i X_{ii,a} - \chi(a)$ en $X_{ij,e} - \delta_{ij}$.

De relaties vormen een ideaal A in de veeltermring K[X], dat niet de hele ring is. Volgens de Nullstellensatz van Hilbert kan men dan getallen $\sigma_{ij}(a)$ in een algebraïsche uitbreiding L van K vinden, zo dat bij de substituties $X_{ij,a} \longrightarrow \sigma_{ij}(a)$ alle veeltermen van A in 0 overgaan. Dan geldt dus

$$\sum_k \sigma_{ik}(a)\sigma_{kj}(b) = \sigma_{ij}(ab), \quad \sum_i \sigma_{ii}(a) = \chi(a), \quad \sigma_{ij}(e) = \delta_{ij}.$$

Dan is $a \longrightarrow \sigma(a) = (\sigma_{ij}(a))$ een representatie van G met hetzelfde spoor als ρ, die dus met ρ equivalent is. Daar L een algebraïsch getallenlichaam is, is hiermee de bewering bewezen.
Een ander bewijs van st.4.4.1 kan worden gegeven met behulp van §1.8 (blz.15).

De vraag is nu welke algebraïsche getallenlichamen in aanmerking kunnen komen. Hierover geldt de volgende stelling:

Stelling 4.4.2 ([2]). Stel dat k het k.g.v. is van de orden der elementen van G. Iedere representatie van G met complexe coëfficiënten is dan equivalent met een representatie, waarvan alle matrixelementen in het lichaam der k^e eenheidswortels liggen. Voor het bewijs hebben we een aantal hulpresultaten nodig.

Lemma 4.4.1. Stel dat ρ een absoluut irreducibele representatie is van G. Wanneer σ een matrixrepresentatie is van G in een lichaam K, dat de karakterwaarden van ρ bevat, en σ bevat ρ precies h keer, dan is $h.\rho$ equivalent met een representatie in K. Dit is bewezen in I,8,p.15.

Lemma 4.4.2. Twee K-irreducibele representaties van G door matrices met elementen in K, die eenzelfde absoluut irreducibele representatie bevatten, zijn K equivalent.

Bewijs: Stel dat ρ_1 en ρ_2 de representaties zijn, stel dat ze beiden σ bevatten. Dan is dus met matrices t_1 en t_2, waarvan de elementen in een uitbreiding van K liggen,

$$t_1\,\rho_1(a)t_1^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(a) & \\ & *\end{pmatrix},\quad t_2\,\rho_2(a)t_2^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(a) & \\ & *\end{pmatrix}.$$

Stel $\varepsilon = \begin{pmatrix} I & \\ & 0\end{pmatrix}$, waarin I de eenheidsmatrix is met dezelfde afmetingen als de $\sigma(a)$.
Met $u=t_2^{-1}\varepsilon t_1$, is dan $u\rho_1(a)=\rho_2(a)u$ $(a\in G)$.
Men kan schrijven $u=\sum_j u_j\lambda_j$, waarin de λ_j lineair onafhankelijk zijn over K, en waarin de u_j matrices zijn met elementen in K.
Dan is $\sum_j \lambda_j(u_j\,\rho_1(a)-\rho_2(a)u_j)=0$, waaruit volgt $u_j\rho_1(a)=\rho_2(a)u_j$.
Volgens het lemma van Schur is dan hetzij $u_j=0$, hetzij u_j vierkant en inverteerbaar. Daar $u\neq 0$, moet dit laatste zeker één keer voorkomen, zodat ρ_1 en ρ_2 equivalent zijn.

Stel nu, dat ρ een absoluut irreducibele representatie is van G met karakter χ. Stel dat K een lichaam is, dat de karakterwaarden $\chi(a)$ $(a\in G)$ bevat. Uit lemma 4.4.1 en lemma 4.4.2 volgt, dat er een natuurlijk getal $h(\chi,K)$ is met de volgende eigenschappen: $h\rho$ is equivalent met een representatie in K, en als $n\rho$ equivalent is met een representatie in K, dan is k deelbaar door h. Want de reguliere representatie van G bevat ρ precies $\chi(e)$ maal, volgens lemma 4.4.1 is dus $\chi(e).\rho$ equivalent met een representatie in K. Splitst men deze in K-irreducibele, dan moeten die volgens lemma 4.4.2 alle equivalent zijn met een $h\rho$. Het getal h is hierbij eenduidig bepaald als het kleinste natuurlijke getal waarvoor $h\rho$ equivalent is met een representatie in K.
Het getal h heet hierin de index van Schur van ρ of χ t.o.v. K.

We kunnen nu st.4.4.2 bewijzen. We nemen een absoluut irreducibele ρ representatie van G met karakter χ. Volgens st.4.4.1 mogen we aannemen, dat de matrixelementen van de $\rho(a)$ in een algebraïsch getallenlichaam L liggen. We kunnen daarbij wel aannemen, dat L het lichaam K der k^e eenheidswortels bevat. We dienen te bewijzen dat de index h van ρ t.o.v. K gelijk is aan 1.
We merken nu op, dat iedere representatie van G, geïnduceerd door een representatie van graad 1 van een ondergroep van G, elementen in K heeft. Stel dat η_σ de karakters van deze representatie van G doorloopt.

Uit lemma 4.4.1 volgt dan, dat h deelbaar is op de (χ,η_σ), daar de bij η_σ behorende representatie ρ precies (χ,η_σ) keer bevat.
Volgens st.4.3.3 kan men echter schrijven $\chi=\sum_\sigma c_\sigma\eta_\sigma$, met gehele c_ρ .
Daaruit volgt, dat $1=(\chi,\chi)=\sum_\sigma c_\sigma(\;,\eta_\sigma)$. Daar rechts elke term deelbaar is door h, blijkt dat h=1.

B. Als tweede toepassing bewijzen we de volgende stelling van Frobenius.

<u>Stelling 4.4.3</u>. Stel dat G een eindige groep is met orde g. Voor ieder karakter χ van G en voor ieder geheel getal n is dan $\sum_{x^n=e}\chi(x)$ een geheel rationaal veelvoud van (n,g).
<u>Gevolg</u>: het aantal $x\in G$ met $x^n=e$ is een veelvoud van (n,g).
Bewijs: We zullen achtereenvolgens bewijzen (a) de eigenschap van de stelling geldt voor karakters van de 1^e graad van elementaire ondergroepen, (b) als een karakter ψ van een ondergroep H van G de eigenschap van de stelling heeft, dan heeft het karakter $i_{H\to G}\psi$ van G deze eigenschap ook. Uit st.4.3.3 volgt dan de juistheid van de bewering.

(a). Een elementaire ondergroep van G is een direct product $[a]\times P$ van de cyclische groep en een p-groep, waarvan de orden ondeelbaar zijn. Men ziet direct in, dat uit de juistheid van (a) voor $[a]$ en P de juistheid voor E volgt. Voor een cyclische groep is de bewering van (a) welbekend.
Voor een p-groep P bewijzen we hem door inductie. Stel dat χ een karakter van de eerste graad is van P. Noem p^k de orde van P. Stel $\sum_{x^{p^i}=e}\chi(x)=s_i$. Dan is $s_k=\sum_{x\in P}\chi(x)=0$ of p^k. Stel dat al bewezen is dat s_{i+1} een geheel veelvoud van p^{i+1} is $(0\leq i\leq k-1)$. Dan is $s_{i+1}=s_i+s$ waarin $s=\sum\chi(x)$, gesommeerd over de x met orde p^{i+1}.
Nu hebben met x ook alle machten x^α, $(\alpha,p)=1$ de orde p^{i+1}. Men kan de som dus splitsen in stukken van de vorm $\sum_{(\alpha,p)=1}\chi(x^\alpha)=\sum_{\beta=1}^{p^{i+1}}\chi(x^\beta)-\sum_{\beta=1}^{p^i}\chi(x^{p\beta})$. Beide stukken zijn door p^i deelbare gehele getallen (eigenschappen van karakters van cyclische groepen), dus is s door p^i deelbaar, en $s_i=s_{i+1}-s$ is het dan ook. Daaruit volgt de juistheid van (a) voor P.

(b) We hebben $\sum_{x^n=e}(i_{H\to G}\psi)(x)=\sum_{x^n=e}\frac{1}{h}\sum^*_{y\in G}\psi(yxy^{-1})=\sum_{\substack{t\in H\\ t^n=e\\ y\in G}}\frac{1}{h}\psi(t)=\frac{g}{h}\sum_{\substack{t^n=e\\ t\in H}}\psi(t)$

(h = orde van H).

Als de laatste som deelbaar is door (n,h), dan is de eerste deelbaar door $\frac{g}{h}(n,h)$, en dat is deelbaar door (n,g).

IV.5. Nog een toepassing van geïnduceerde karakters

door

Dr W. Peremans

Laat een eindige groep gegeven zijn als permutatiegroep van de objecten 1,...,n. Zoals op blz. 2 is aangegeven behoort bij een dergelijke permutatiegroep een matrixrepresentatie van de graad n, die ontstaat door aan een permutatie π de matrix $(\delta_{i,\pi(j)})_{i,j}$ toe te voegen. We bespreken enkele eigenschappen van deze representatie met behulp van de theorie der geïnduceerde representaties.

Als de permutatiegroep niet transitief is, reduceert de representatie zich klaarblijkelijk overeenkomstig de splitsing in transitiviteitsgebieden van de gepermuteerde objecten. Het is dus geen beperking van de algemeenheid als we de permutatiegroep transitief veronderstellen.

Het blijkt praktisch te zijn, de permutatiegroep op te vatten als een "representatie" van een abstracte groep.

Laat dus een eindige groep G gegeven zijn en een homomorfe afbeelding $a \longrightarrow \pi_a$ van G in de symmetrische groep S_n van de permutaties van de objecten 1,...,n, dusdanig dat het beeld van G een transitieve permutatiegroep is. De representatie $\rho(a)$ van G van de graad n zij gegeven door

$$\rho(a) = (\delta_{i,\pi_a(j)})_{i,j}.$$

Noem G_1 de ondergroep van G, bestaande uit die $x \in G$, waarvoor $\pi_x(1)=1$; de linker nevenklassen van G_1 bestaan dan uit die $x \in G$, waarvoor $\pi_x(1)=j$ $(j=1,\dots,n)$, zodat de index van G_1 in G gelijk aan n is. We beweren nu, dat ρ geïnduceerd wordt door de eenheidsrepresentatie van G_1. Om deze geïnduceerde representatie te krijgen moeten representanten uit de linker nevenklassen worden gekozen, dat zijn elementen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ van G zodat $\pi_{\alpha_j}(1)=j$. De geïnduceerde representatie wordt dan gegeven door de matrix onderaan blz.37, waarbij voor ρ de eenheidsrepresentatie moet worden gelezen en waarbij alleen dan op de $(i,j)^{\underline{e}}$ plaats iets komt te staan dat $\neq 0$ is (en dat is in ons geval een 1) als $\alpha_i^{-1} a\, \alpha_j \in G_1$, d.w.z. als

$$\pi_{\alpha_i^{-1} a \alpha_j}(1) = 1.$$

Dit geeft:

$$\pi_{\alpha_i}^{-1}\, \pi_a\, \pi_{\alpha_j}(1) = 1,$$

of

$$\pi_a(j) = i.$$

Dus

$$(i1)(a) = (\delta_1, \pi_a(j)) = \rho(a).$$

Stel nu dat ρ gereduceerd is in irreducibele bestanddelen:

$$\rho \sim \sum_j m_j \Gamma^{(j)} ,$$

waarin $\Gamma^{(j)}$ alle inequivalente, irreducibele representaties van G doorloopt. Volgens de relatie van Frobenius (4.2.8) geldt nu

$$m_j = (\chi^{(j)}, \rho) = (\chi^{(j)}, i(1)) = (r(\chi^{(j)}), 1),$$

dus m_j is het aantal malen, dat de eenheidsrepresentatie in de restrictie van $\Gamma^{(j)}$ tot G_1 voorkomt. Nummeren we de $\Gamma^{(j)}$ dusdanig, dat $\Gamma^{(1)}$ de eenheidsrepresentatie is, dan is $r(\Gamma^{(1)})$ uiteraard ook de eenheidsrepresentatie, dus $m_1=1$. Dus ρ bevat de eenheidsrepresentatie precies één keer.

We beschouwen nu de restrictie $r(\rho)$ nader. Deze onstaat weer uit een representatie door permutaties van G_1, die echter voor $n > 1$ niet transitief is (het object 1 blijft op zijn plaats!) Laat het aantal bij G_1 behorende transitiviteitsgebieden k zijn. Bij elk van deze k gebieden behoort een representatie van G_1, waarop het bovenstaande kan worden toegepast. Zo vinden we dat de eenheidsrepresentatie k keer in $r(\rho)$ voorkomt. Aan de andere kant geldt

$$r(\rho) \sim \sum_j m_j \ r(\Gamma^{(j)});$$

in $r(\Gamma^{(j)})$ komt de eenheidsrepresentatie m_j keer voor, dus

$$k = \sum_j m^2{}_j .$$

Samenvattend krijgen we de volgende stelling (zie W. Burnside, Theory of groups of finite order, 2nd ed., p.275 of A.Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3.Aufl.,Satz 165).

Stelling 4.5.1. Laat G een transitieve permutatiegroep van de graad n zijn en G_1 een ondergroep van G bestaande uit die permutaties, die één bepaald object invariant laten. Laat ρ de bijbehorende representatie van de graad n zijn. Dan is ρ geïnduceerd door de eenheidsrepresentatie van G_1 en het aantal malen m_j, dat een irreducibele representatie $\Gamma^{(j)}$ van G in ρ voorkomt is gelijk aan het aantal malen dat de eenheidsrepresentatie in de restrictie van $\Gamma^{(j)}$ tot G_1 voorkomt; in het bijzonder komt de eenheidsrepresentatie precies één maal in ρ voor. Als k het aantal transitiviteitsgebieden van G_1 is, geldt $k = \sum m_j^2$.

Als we voor de permutaties de Cayley-representatie van een groep G nemen, dan is ρ de reguliere representatie. We vinden dan oude resultaten terug. Immers nu bestaat G_1 alleen uit het eenheidselement, zodat $r(\Gamma^{(j)})$ de eenheidsrepresentatie even vaak bevat als zijn graad bedraagt. Verder is $k=n=g$ (orde van G). Dus in de reguliere representatie komt iedere irreducibele representatie even vaak voor als zijn graad bedraagt en $g=\sum m_j^2$.

Nemen we $G=S_n$, dan is G_1 isomorf met S_{n-1} en $k=2$. De representatie van graad n van S_n behorende bij zijn permutatierepresentatie valt dus uiteen in de eenheidsrepresentatie en een irreducibele representatie van de graad n-1. Hetzelfde geldt voor de alternerende groep A_n.

V. Representatie van ringen met minimum voorwaarde

door

J. Verhoeff

V.1 Representaties als dubbelmoduli.

Uit een representatie ρ van een eindige groep G volgt direct een representatie van de groepsring door de toevoeging $x = \sum_{g_i \in G} \xi_i g_i \to \rho(x) = \sum_{g_i \in G} \xi_i \rho(g_i)$ en omgekeerd volgt door restrictie uit een representatie van de groepsring er een voor de groep (zie I,6). Wij kunnen een representatie opvatten als een dubbelmodulus. Hieronder verstaan we een rechtsmodulus $\mathfrak{M}$ over een lichaam K die tevens een ring R van lineaire links-operatoren heeft en bovendien voldoet aan: a) $\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} u_i K$ (eindige K-basis) b) $(ru)\lambda = r(u\lambda)$ voor alle $r \in R$, $u \in \mathfrak{M}$ en $\lambda \in K$. Dat betekent dat de operatoren uit R K-lineaire operatoren zijn van de rechts -K-modulus $\mathfrak{M}$.
Na keuze van een K-basis $u_1, \dots, u_n$ in $\mathfrak{M}$ kan zo'n lineaire operator worden voorgesteld door een matrix uit K_n. Stel $a \in R$ en stel $au_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \alpha_{ji}$ dan correspondeert de operator a met de matrix (α_{ij}).
Omgekeerd kan uit de matrix representatie ρ van R in K_n een dubbelmodulus geconstrueerd worden. Stel n.l. $\mathfrak{M} = u_1K + u_2K + \dots + u_nK$ en maak deze tot dubbelmodulus door links vermenigvuldiging met een element a uit R te definiëren als

$$a\,u = a \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i = \sum_{i,j=1}^{n} u_j \alpha_{ji} \xi_i \text{ als } \rho(a) = (\alpha_{ij}).$$

Men verifieert gemakkelijk dat dan aan alle eisen is voldaan.

Opm.1.1. Bij keuze van een andere basis in $\mathfrak{M}$ verkrijgt men een equivalente representatie.
Opm.1.2. Men kan een representatie ook opvatten als een homomorfe afbeelding in de endomorfismen ring van een Abelse groep.
Door nu de structuur van de groepsring als ring te bestuderen valt langs deze weg de volledige reducibiliteit van de representaties van een eindige groep te bewijzen, alsmede het feit dat elke irreducibele representatie in de reguliere voorkomt.
De reguliere representatie verkrijgt men door de groepsring zelf op te vatten als (dubbel) modulus. Links vermenigvuldiging is n.l. een lineaire operator voor de (Abelse) additieve groep van de groepsring. a wordt dan toegevoegd aan $(\delta_{i,aj})$.
Men noemt een representatie reducibel als de bijbehorende dubbelmodulus een deelmodulus heeft welke toegelaten is t.o.v. de operatoren uit R en uit K. In het geval van de reguliere representatie zijn dit de

toegelaten linksidealen van de groepsring.
Een representatie heet irreducibel als de dubbelmodulus geen echte toegelaten deelmoduli heeft (minimale linksideale in de groepsring).

Opm.1.3. Dit begrip reducibel komt overeen met het begrip halfreducibel van pag. .

V.2. Ringen met minimum voorwaarde.

Het lukt niet de theorie van dubbelmoduli met operatoren ring R voor algemene R geheel te ontwikkelen zonder een of andere eis welke aan de eindig dimensionaliteit van R verwant is. Men neemt hier meestal de minimumvoorwaarde voor. Deze zegt, dat elke collectie van deelsystemen van een bepaalde soort, een minimaal systeem bevat. Die deelsystemen zijn bijvoorbeeld links(rechts)-idealen, toegelaten deelmoduli enz. Equivalent is de dalende-ketting-voorwaarde, die zegt, dat elke rij $l_1 \supseteq l_2 \supseteq \ldots$ ergens afbreekt, d.i. er is een index n zodat $l_{n-1} \supsetneq l_n = l_{n+1} = \cdots$.
Vroeger gebruikte men ook de maximum voorwaarde, maar deze bleek overbodig toen Hopkins in 1937 de nilpotentie van het radicaal aantoonde zonder de maximum voorwaarde te gebruiken. In 1942 bewees Brauer:
In een ring R met minimum voorwaarde voor de links-idealen bevat elk links-ideaal l dat niet nilpotent is een idempotent element.
Een verzameling $\mathfrak{a}$ heet nilpotent als voor zekere n $\mathfrak{a}^n=0$, zij heet idempotent als $\mathfrak{a} \neq 0$ en $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$. In het bijzonder heet een element e dus idempotent als $e^2=e$ en $e \neq 0$. (De letter e zullen we niet uitsluitend voor een eventueel eenheidselement of voor het grondtal van de natuurlijke logarithmen reserveren, zie bijv. Coll. Matrixfuncties, pag.30, formule 10). Een idempotent element heet primitief als het niet de som is van twee elkaar annulerende idempotenten, dus als niet $e=e'+e''$ met $e'^2=e' \neq 0$, $e''^2 = e'' \neq 0$ en $e'e''=e''e'=0$. Wij veronderstellen allerlei algemeen gangbare begrippen, zoals lichaam, ideaal, product van twee verzamelingen bekend. Dit geldt ook voor verschillende stellingen over moduli wele direct volgen uit overeenkomstige stellingen voor groepen. Ook begrippen als restklassenring e.d. N.B. Men dient goed het verschil in het oog te houden tussen een ringhomomorfie van een ring en een operator-homomorfie van een ring als additieve (Abelse) groep met de links(rechts) vermenigvuldiging als operatoren. In het eerste geval geldt dat uit $a \to \bar{a}$ volgt $ar \to \overline{ar} = \bar{a}\,\bar{r}$ en in het tweede geval $ar \to \overline{ar} = a\,\bar{r}$. Het eerste geval hangt samen met restklassevorming t.o.v. een tweezijdig ideaal en het tweede geval t.o.v. een links(rechts)-ideaal. Voor al deze begrippen verwijzen we naar pag.34 van deze syllabus alwaar ze uitvoerig behandeld zijn. (Zie bijv. ook v.d. Waerden, Algebra).

Bewijs van de stelling van Brauer:

Stelling V.2.1. Een niet-nilpotent l-ideaal in een ring met minimum voorwaarde voor de l-idealen, bevat een idempotent element. Zij l een niet-nilpotent l-ideaal in de ring R (met minimum voorwaarde voor de l-idealen).

1^o. De verzameling $\mathcal{L}$ van de niet-nilpotente l-idealen $\subseteq l$ en $\neq 0$ is niet leeg daar l er toe behoort. Zij bevat dus een minimaal l-ideaal l_1. Dit is idempotent want l_1^2 is niet-nilpotent en $l_1^2 \subseteq l_1 \subseteq l$ dus $l_1^2 \in \mathcal{L}$ en $l_1^2 \subseteq l_1$ dus wegens de minimaliteit van l_1 inderdaad $l_1^2 = l_1$. Wegens $l_1 \subseteq l$ kunnen we dus volstaan met in l_1 een idempotent element aan te geven.

2^o. Beschouw de verzameling $\mathfrak{M}$ van de l-idealen m met de eigenschappen $l_1 m \neq 0$ en $m \subseteq l_1$. $\mathfrak{M}$ is niet leeg daar $l_1 \in \mathfrak{M}$. Er is dus een minimale $m_1 \in \mathfrak{M}$ en er is een element $\alpha \in m_1$ met $l_1\alpha \neq 0$. We zullen nu laten zien dat $l_1\alpha = m_1$. Immers $\alpha \in m_1$, dus $l_1\alpha \subseteq m_1 \subseteq l_1$ en $l_1 l_1 \alpha = l_1\alpha \neq 0$ geeft dat $l_1\alpha \in \mathfrak{M}$. Gecombineerd met $l_1\alpha \subseteq m_1$ en de minimaliteit van m_1 geeft dit $l_1\alpha = m_1$. Omdat $\alpha \in m_1$ is er een $\lambda \in l_1$ met $\lambda\alpha = \alpha$ en dus ook $\lambda^n \alpha = \alpha \neq 0$. Hieruit volgt dat λ niet nilpotent kan zijn.

3^o. Het element $(\lambda^2 - \lambda) \in l_1$ is wel nilpotent. Om dit in te zien merken we op dat uit $\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$ volgt dat $\lambda^2 - \lambda$ links-annulator is van α. Alle linksannulatoren uit l_1 van α vormen een l-ideaal $\subsetneq l_1$ dat wegens $\lambda\alpha = \alpha \neq 0$ niet met l_1 samenvalt. Dit ideaal moet nilpotent zijn daar l_1 minimaal niet-nilpotent is. Dus $(\lambda^2 - \lambda)^n = 0$ voor zekere n.

4^o. We construeren nu uit λ een idempotent element uit l_1. Zij in de ring der polynomen met gehele coefficienten $f(x)$ dusdanig gekozen dat

$$\begin{cases} f(x) - 1 \equiv 0 \pmod{(x-1)^n} \\ f(x) \equiv 0 \pmod{x^n} \end{cases}$$

dan is $f(x)^2 - f(x) \equiv 0 \pmod{(x^2-x)^n}$ en tevens is $x^n f(x) - x^n \equiv 0 \pmod{(x^2-x)^n}$. Dus dan is $f(\lambda)^2 = f(\lambda)$ en wegens $\lambda^n f(\lambda) = \lambda^n \neq 0$ ook $f(\lambda) \neq 0$. Voor $f(x)$ kan men nemen $1-(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^n(1-x)^n = 1-(1-x^n)^n = x^n - \binom{n}{2}x^{2n} + \ldots \pm x^{n^2}$. Hieruit ziet men dat $f(\lambda)$ in l_1 ligt. (De "1" had slechts een formele rol).

Opm.2.1. Uit deze stelling volgt direct dat in een ring met minimum voorwaarde voor de l-idealen elk l-ideaal, waarvan alle elementen nilpotent zijn, zelf ook nilpotent moet zijn.

Met behulp van deze stelling laat zich gemakkelijk bewijzen, dat de som van alle nilpotente links-idealen een nilpotent (tweezijdig) ideaal is, dat ook alle nilpotente rechtsidealen bevat. Men noemt dit het radicaal van de ring. Eerst een paar eenvoudige lemma's.

<u>Lemma 2.1.</u> De som van twee nilpotente linksidealen is een nilpotent linksideaal.

Stel l_1 en l_2 zijn linksidealen en $l_1^n = l_2^m = 0$. Beschouw een element van $(l_1+l_2)^{m+n}$. Dit is een som van producten van m+n factoren gekozen uit

l_1 of l_2, hieronder zijn er minstens m uit l_1 of n uit l_2. Stel minstens m uit l_1 dus $(\ldots a_1)(\ldots a_2)\ldots(\ldots a_m)\ldots$ met $a_i \in l_1$ daar l_1 een linksideaal is $(\ldots a_i) \in l_1$ de term is dus nul daar het een product is van m elementen uit l_1.

Lemma 2.2. Als l een nilpotent linksideaal is dan is lR een nilpotent tweezijdig ideaal.

Bewijs. Dat het een tweezijdig ideaal is spreekt vanzelf. Het is nilpotent daar, als $l^n=0$, ook $(lR)^n=$

$$l(Rl)^{n-1}R \subseteq l.l^{n-1}.R \subseteq l^nR = 0.$$

Het radicaal N is nilpotent daar elk element dat is. Immers elk element is bevat in een eindige som van nilpotente linksidealen, en dus volgens lemma 2.1 in een nilpotent linksideaal. N kan dus geen idempotent bevatten. Als r een nilpotent rechtsideaal is, dan is r+Rr een linksideaal dat volgens de lemma's 2.1 en 2.2 nilpotent is en dus $r+Rr \subseteq N$ en $r \subseteq N$.

Volgens lemma 2 is NR een nilpotent linksideaal dus $NR \subseteq N$, dus is N een tweezijdig ideaal.

Vervolgens bewijzen we de stelling:

Stelling 2.2. Elk niet nilpotent l-ideaal l in een ring R met minimum voorwaarde voor de l-idealen is de directe som le+m, waarin e idempotent met le=Re en m een nilpotent ideaal.

Bewijs: Beschouw bij elke idempotent e_i het l-ideaal m_i van alle linksannulatoren uit l van e_i (i doorloopt een of andere index verzameling). De verzameling is niet leeg en bevat dus een minimaal l-ideaal m behorend bij zekere e (m kan het nulideaal zijn). Nu is m nilpotent. Stel n.l. van niet, dan bevat m een idempotent e'. met e'e=0. Beschouw nu $e_1=e+e'-ee'$. We hebben $e_1^2=e_1$ en $e_1e=e$ en $e'e_1=e'$. Alle linksannulatoren uit l van e_1 vormen nu een linksideaal m_1, daar uit $0=x\, e_1$ volgt $x\, e = x\, e_1e = 0$ geldt m_1 m. Maar $m_1 \neq m$, daar $e'e_1=e' \neq 0$ en e'e=0. Dus wegens de minimaliteit van m een contradictie. De rest is gemakkelijk. Zij $x \in l$, dan is x= xe+(x-xe), en $xe \in le$ en $(x-xe) \in m$ daar (x-xe)e=0. Omgekeerd geldt voor $x \in m$ dat x=x-xe, dus m bestaat juist uit alle elementen van de vorm x-xe. Daar $le \cap m=0$ ($x \in le$, en $x \in m$ impliceert $x=ye=ye^2=xe=0$), is de som direct. Verder geldt nog Re=Ree le daar $e \in l$ en $le \subseteq Re$ daar $l \subseteq R$ dus Re=le.

Wanneer het radicaal van een ring met minimum voorwaarde voor de l-idealen nul is, heet de ring halfenkelvoudig.

Opm.2.2. De groepsring over de complexe getallen van een eindige groep is halfenkelvoudig (zie I,6). Dit geldt niet meer als men de groepsring vormt over een lichaam met eindige karakteristiek, en dat is de kern van de moeilijkheden die ontstaan wanneer men de representaties wil geven met matrices over een lichaam van eindige karakteristiek (modulaire representaties).

V.3. Halfenkelvoudige ringen.

Daar het radicaal van een halfenkelvoudige ring R nul is, bevat R geen nilpotente l-idealen $\neq 0$ (resp. r-idealen $\neq 0$). Dus volgens stelling 22 is dan elk l-ideaal l in R gelijk aan Re=le met idempotente e, m.a.w. elk l-ideaal is dan hoofdideaal met rechtseenheid. Is nu l een tweezijdig ideaal dan geldt zelfs l=Re=eRe=eR. Om dit in te zien beschouwen we alle elementen $\lambda \in l$ met $e\lambda = 0$, deze vormen een rechtsideaal k. Daar $k \subseteq l$ is ke=k en dus $k^2=(ke)k=k(ek)=0$. Wegens de halfenkelvoudigheid van R is dus k=0. Maar $e(\alpha - e\alpha)=0$, dus (als $\alpha \in l$) $\alpha - e\alpha \in k$ en $\alpha = e\alpha$. Derhalve is e tweezijdig eenheidselement van l. De eenduidigheid van deze eenheid volgt op de gebruikelijke wijze door middel van een tweekamp tussen e en de eventuele candidaat e', immers e'=ee'=e. Op dezelfde wijze bewijst men dat elk links of rechtseenheidselement gelijk aan e is.

Neemt men in het bijzonder voor l de gehele ring R dan vindt men:

Stelling 3.1. Een halfenkelvoudige ring heeft een eenheidselement. (Dit wordt wel met 1 aangeduid).

Een ring R met minimum voorwaarde voor de l-idealen heet enkelvoudig als zij geen echte (tweezijdige) deelidealen bevat. (Een triviaal geval sluiten wij uit, zie opm.3.3). Een (tweezijdig) ideaal heet enkelvoudig als er geen enkel (tweezijdig) ideaal in bevat is.

Wij zullen nu de belangrijke stelling bewijzen, dat een halfenkelvoudige ring de directe som is van eindig veel enkelvoudige idealen. Eerst echter een paar opmerkingen.

Opm.3.1. Een l-ideaal l van een tweezijdig ideaal v van een halfenkelvoudige ring R is zelf een l-ideaal van R. Immers v=eR=Re en dus l=el (e is eenheid in v). Dus $Rl=R(el)=(Re)l=vl \subseteq l$. Evenzo met r-idealen en tweezijdige idealen.

Hieruit volgt o.a. dat een tweezijdig ideaal in een halfenkelvoudige ring zelf een halfenkelvoudige ring is, resp. dat een enkelvoudig ideaal in een (half)enkelvoudige ring een enkelvoudige ring is.

Opm.3.2. De eenheden van de tweezijdige idealen in R (halfenkelvoudig) zijn idempotenten, gelegen in het centrum C van R en omgekeerd, een idempotent uit C brengt een tweezijdig ideaal voort. Stel v is een tweezijdig ideaal v=Re=eR (met idempotente e) en $\alpha \in R$ dan $e\alpha \in v$ en $\alpha e \in v$ daar $e \in v$ en dus $\alpha e = e\alpha e = e\alpha$ en dus $e \in C$. Is omgekeerd $e \in C$ dan is eR=Re, en v=eR is dus een tweezijdig ideaal met e als eenheidselement. Dit geeft dus een 1-1 correspondentie tussen de tweezijdige idealen uit R en de idempotenten uit C.

Opm.3.3. In een enkelvoudige ring R bestaat het radicaal N daar de minimumvoorwaarde geldt. N is een tweezijdig nilpotent ideaal. Daar R enkelvoudig is zijn er twee mogelijkheden: 1° N=0, dus R halfenkelvou-

dig, of 2° $R=N\neq 0$, maar daar N nilpotent is kan niet $N^2=R=N$ gelden, dus $N^2=R^2=0$. (N^2 is weer een tweezijdig ideaal). De additieve groep voortgebracht door een $\alpha\in R$ ($\alpha\neq 0$) is dan echter een ideaal in R en dus gelijk aan R, maar elke ondergroep is dan ook een ideaal in R. Dus is R dan een cyclische groep van priemorde met $R^2=0$. Dit triviale geval sluit men meestal uit als enkelvoudige ring, en dan is elke enkelvoudige ring halfenkelvoudig.
Opm.3.1.sub. Wij sluiten ons hierbij aan.

Wij bewijzen nu de beloofde
Stelling 3.2. Een halfenkelvoudige ring R heeft slechts eindig veel enkelvoudige (tweezijdige) idealen en is de directe som ervan.
Bewijs. De som van verschillende enkelvoudige tweezijdige idealen v_1 en v_2 is direct daar de doorsnede van v_1 en v_2 een tweezijdig deelideaal is dat dus nul moet zijn. In het bijzonder annuleren dus de voortbrengende eenheden van v_1 en v_2 elkaar. Derhalve is $(1-\sum e_i)$, waarbij de e_i's eenheden van verschillende enkelvoudige idealen zijn, een idempotent uit het centrum en dus $R(1-\sum e_i)$ een tweezijdig ideaal.
Wegens de minimum voorwaarde is er dus een stelsel $e_1,\ldots,e_n$ dusdanig dat $R(1-\sum_{i=1}^{n} e_i)$ minimaal is. Daar $e_1,\ldots,e_n$ en $1-\sum_1^n e_i$ elkaar annuleren, is de som $R=Re_1+\ldots+Re_n+R(1-\sum_{i=1}^{n} e_i)$ direct. Is nu de laatste term $\neq 0$ dan moet er een enkelvoudig ideaal Re_{n+1} in bevat zijn (minimum voorwaarde) maar dan is $R(1-\sum_{i=1}^{n+1} e_i)$ echt bevat in $R(1-\sum_{i=1}^{n} e_i)$ in strijd met de minimaliteit van de laatste, dus $R=\sum_{i=1}^{n} Re_i$. Dus R is de som van eindig veel enkelvoudige idealen en, wegens de directheid van de som, van verschillende enkelvoudige idealen. Men ziet gemakkelijk in dat $1=e_1+\ldots+e_n$, waarbij de e_i's elkaar annuleren. Elk enkelvoudig ideaal komt dus in bovengenoemde som voor.
Uit opmerking 3.1 volgt nu bovendien dat elk tweezijdig ideaal de directe som is van de enkelvoudige idealen die het bevat.
Beschouwt men in plaats van enkelvoudige idealen minimale l-idealen dan heeft men de
Stelling 3.3. Een halfenkelvoudige ring R is de directe som van eindig veel minimale l-idealen.
Het bewijs is iets eenvoudiger maar men krijgt hier ook niet de eenduidigheid. Ook treedt niet elk minimaal l-ideaal op als directe sommand.
Bewijs. Als l_1 een l-ideaal is in R, dan is er een l-ideaal $l_2\subseteq R$ zodat $R=l_1+l_2$ (direct). Stel nl. $l_1=Re_1$ (met idempotente e_1), dan is $x-xe_1$ een linksannulator van e_1 voor alle $x\in R$ en elke linksannulator y van e_1 is van de vorm $y-ye_1$ (daar $ye_1=0$). De links-

annulatoren van e_1 vormen (uiteraard) een l-ideaal l_2, en $R=l_1+l_2$ daar $x=xe_1+(x-xe_1)$. De doorsnede van l_1 en l_2 is weer nul daar zij door e_1 van rechts gereproduceerd en geannuleerd wordt. Bij elke voortbrengende idempotent vindt men een ideaal l_2, er is dus van eenduidigheid der splitsing a priori geen sprake.
Beschouw nu alle eindige directe sommen van minimale l-idealen. Volgens het bovenstaande vinden wij bij elk van deze sommen een complementair l-ideaal. Er is dus een som $\sum_{i=1}^{n} l_i$ zodat het complement l' minimaal is in de verzameling van de complementen. Was $l' \neq 0$ dan bevatte l' een minimaal l-ideaal l_{n+1} (minimum voorwaarde) en dan zou het complement van $\sum_{i=1}^{n+1} l_i$ echt bevat zijn in l' in strijd met de minimaliteit van l'.

Opm.3.4. Neemt men de rechtsvermenigvuldigingen (met elementen uit R) bij de operatoren van R en past men stelling 3.3 (uitgebreid tot ringen met operatoren) toe, dan vindt men de stelling, dat een halfenkelvoudige ring R de directe som is van eindig veel enkelvoudige idealen. Immers een minimaal l-ideaal is, als men de rechtsvermenigvuldigingen bij de operatoren heeft, een enkelvoudig tweezijdig ideaal.
Opm.3.5. Men kan het bewijs ook zo inrichten dat een bepaald (minimaal) l-ideaal l in de directe som voorkomt, door alleen die eindige sommen te beschouwen die l als sommand hebben.

V.4. Enkelvoudige ringen.

Opm. 4.1: zie opmerking 3.3.
Eerst twee behulpzame stellingen over willekeurige ringen.
Stelling 4.1. De som van alle l-idealen uit een ring R die R-homomorf zijn met een bepaald l-ideaal l is een tweezijdig ideaal.
Opm.4.2. Onder R-homomorf wordt verstaan homomorfie als additieve groep, waarbij de linksvermenigvuldiging met elementen van R invariant is onder die homomorfie ($a \to a'$ dan $ra \to ra'$).
Bewijs. Daar de som van willekeurig veel l-idealen weer een l-ideaal is, behoeven we alleen te bewijzen dat ze afgesloten is t.o.v. rechtsvermenigvuldiging met elementen van R.
Hiertoe tonen we aan dat de verzameling L van de met l R-homorfe l-idealen afgesloten is t.o.v. rechtsvermenigvuldiging. Zij $l' \in L$ en $\alpha \in R$ dan is $l'\alpha$ een l-ideaal ($Rl' \subseteq l'$ dus $Rl'\alpha \subseteq l'\alpha$). De afbeelding $x \to x\alpha$ van l' op $l'\alpha$ is een homorfie daar $(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha$. Het is zelfs een R-homomorfie daar $(\beta x)\alpha = \beta(x\alpha)$ voor alle $\beta \in R$. Dus daar l' R-homomorf is met l geldt dit ook voor $l'\alpha$ en dus is L afgesloten t.o.v. rechtsvermenigvuldiging, en stelling 4.1 bewezen.

Stelling 4.2. Zij R de directe som van minimale l-idealen $l_1,\dots,l_n$ en zij $k\neq 0$ een minimaal l-ideaal in R, dan is k bevat in de directe som van die l-idealen l_i die R-isomorf met k zijn.

Bewijs. Stel $x\in k$ en $x=\sum_{i=1}^{n} x_i$ met $x_i\in l_i$ (eenduidig). De afbeelding $x\longrightarrow x_i$ is een R-homomorfie van k in l_i, immers als $y=\sum_{i=1}^{n} y_i$ ($y\in R$, en $y_i\in l_i$) dan is

$$(x+y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) \text{ met } x_i+y_i\in l_i \text{ en } \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i \text{ met}$$

$\alpha x_i\in l_i$. Aangezien k minimaal is, is de kern van deze homomorfie 0 of k (en daar l_i minimaal is is het in het eerste geval een isomorfie op). Dus alleen de "componenten" van x die liggen in idealen l_i die met k R-isomorf zijn zijn $\neq 0$ en k is dus bevat in de directe som van de met k R-isomorfe l_i's.

Deze beide stellingen helpen ons nu de volgende belangrijke stelling te bewijzen.

Stelling 4.3. In een enkelvoudige ring R zijn alle minimale l-idealen R-isomorf.

Bewijs. Volgens stelling 3.2 is R de som van eindig veel minimale l-idealen. Stel dus $R=\sum_{i=1}^{n} l_i$, met minimale l-idealen l_i. Zij $k\neq 0$ een minimaal l-ideaal in R. Volgens stelling 4.2 is k bevat in de directe som van die l_i's die met k R-isomorf zijn. Stel $k\subseteq\sum_{i=1}^{r} l_i$. Dit zelfde geldt voor alle l-idealen k' die R-isomorf zijn met k. De som van alle l-idealen R-isomorf met k vormen volgens stelling 4.1 een tweezijdig ideaal, dat dus $\sum_{i=1}^{r} l_i$ is. (Wij gebruiken hier weer dat homomorfie tussen minimale l-idealen op hetzelfde neerkomt als R-isomorfie). Daar R enkelvoudig is moet dit ideaal de hele ring zijn.

Samenvatting:

Wij weten nu dus dat elke halfenkelvoudige ring R de directe som is van enkelvoudige tweezijdige idealen en dat deze weer, als enkelvoudige ringen, de directe som zijn van onderling R-isomorfe minimale l-idealen.

De splitsing van R in enkelvoudige ringen V_i is éénduidig. (Immers elk enkelvoudig ideaal van R komt in die som voor). De voortbrengende idempotenten van deze idealen V_i zijn eenduidig bepaald door V_i en liggen in het centrum, annuleren elkaar en hun som is (de) 1 (van R). De splitsing van deze enkelvoudige ringen V_i in R isomorfe minimale l-idealen is niet eenduidig, evenmin zijn de voortbrengende idempotenten van deze l-idealen dat. Men kan ze zo kiezen, dat ze elkaar annuleren. Zij n.l. e de eenheid van de enkelvoudige ring $v=\sum_{i=1}^{n} l_i$ (l_i minimaal l-ideaal) en zij $e=\sum_{j=1}^{n} e_j$ met $e_i\in l_i$ dan is $e_i e=e_i=$ $=\sum_{j=1}^{n} e_i e_j$ dus $e_i e_j=0$ als $i\neq j$ en $e_i e_i=e_i$, dus ve_i is een l-ideaal bevat in l_i en dus $ve_i=l_i$ (l_i minimaal). Dat het aantal sommanden n alleen afhankelijk is van de ring v volgt door eenvoudige groepentheoretische overwegingen.

Ons volgende doel is te laten zien dat een enkelvoudige ring v isomorf is met een (volle) matrixring over een scheef lichaam.

V.5. Stelling van Wedderburn.

Stelling 5.1. (Stelling van Wedderburn). Een halfenkelvoudige ring is (isomorf met) de directe som van volle matrixringen over scheve lichamen.

In verband met de resultaten van de vorige paragrafen zal deze stelling bewezen zijn zodra we bewezen hebben dat de volgende stelling juist is.

Stelling 5.2. Een enkelvoudige ring is (isomorf met) een volle matrixring over een slichaam.

We zullen nu 5.2. bewijzen. Zij R een enkelvoudige ring met eenheidselement 1 (zie stelling 3.1). Volgens stelling 3.3 is R directe som van eindig veel minimale l-idealen. Stel $K=\sum_{i=1}^{n} l_i$. Stel verder $1=\sum_{i=1}^{n} e_i$ met $e_i \in l_i$. Volgens het slot van de vorige § zijn de e_i's, elkaar annulerende, idempotente generatoren van de l-idealen $l_i=Re_i$. Laat nu x een willekeurig element van R zijn, dan is $x=1.x.1=\sum_{i=1}^{n} e_i \; x \sum_{j=1}^{n} e_j = \sum_{i,j=1}^{n} e_i x e_j$. Stel $e_i x e_j = x_{ij}$. Aan x is eenduidig een matrix (x_{ij}) toegevoegd (met elementen uit R), waarbij $e_k x_{ij} e_l = \delta_{ki} x_{ij} \delta_{jl}$.

Is omgekeerd $x=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}$ de som van elementen x_{ij} met de bovengenoemde eigenschap dan is $x_{ij}=e_i x e_j$, zoals men direct verifieert. De matrices opgebouwd uit elementen van deze soort vormen een ring isoform met R. Immers als $x=\sum e_i x e_j$ en $y=\sum e_i y e_j$ dan is $x+y=\sum e_i x e_j + \sum e_i y e_j = \sum e_i(x+y)e_j$ dus $(x_{ij})+(y_{ij})=((x+y)_{ij})$

$$x.y = \sum_{ij=1}^{n} e_i x e_j \,.\, \sum_{kl=1}^{n} e_k y e_l = \sum_{i,j,kl=1}^{n} e_i x e_j e_k y e_l$$

$$\sum_{i,l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} e_i x e_k e_k y e_l\right) = \sum_{i,l=1}^{n} e_i x y e_l \text{ en dus}$$

$(x_{ij})(y_{kl}) = (\sum_k x_{ik} y_{kl}) = ((xy)_{il})$. Er blijft dus nog te bewijzen, dat deze matrixring isomorf is met een volle matrixring over een slichaam.

In het bewijs van stelling 4.1 hebben we gezien, dat rechtsvermenigvuldiging van alle elementen van een (bepaald) l-ideaal l met een vast element α van de ring dit l-ideaal R-homomorf afbeeldt op het l-ideaal $l\alpha$. Is l minimaal dan is het een R-isomorfie op of een nulafbeelding.

Past men dit toe op de l-idealen l_k en de elementen x_{ij}, dan ziet men $l_k x_{ij} = \delta_{ik} l_j$ mits $x_{ij} \neq 0$. Immers $l_k x_{ij} = Re_k . e_i x e_j = \delta_{ik} Rxe_j \subseteq \delta_{ik} Rl_j$ en uit $0 \neq e_i x e_j \in Rxe_j \subseteq Re_j = l_j$ volgt, in verband met de minimaliteit van l_j, dat $Rxe_j = l_j$. Ook het omgekeerde geldt:

<u>Stelling 5.3</u>. Laat σ_{ij} een R-isomorfe afbeelding zijn van l_i op l_j, dan is er een element $x_{ij}=e_i x_{ij} e_j$ dusdanig dat $\sigma_{ij}(a)=a\ x_{ij}$ voor alle $a\in l_i$.
Bewijs. Stel $\sigma_{ij}(e_i)=x_{ij}$, dus $x_{ij}\in l_j$. Dan geldt, daar σ_{ij} een R-isomorfie is, dat $\sigma_{ij}(a)=\sigma_{ij}(a\ e_i)=a\ \sigma_{ij}(e_i)=a\ x_{ij}$ mits $a\in l_i=R e_i$. Dit toegepast op e_i geeft $x_{ij}=\sigma(e_i)=e_i x_{ij}$.
Daar $x_{ij}\in l_j=Re_j$ hebben we direct $x_{ij}=x_{ij}e_j$. Dat $x_{ij}\neq 0$ volgt direct uit het feit dat σ_{ij} niet de nulafbeelding is.
Opmerking 5.1. Dit geldt natuurlijk ook voor R-homomorfe afbeeldingen van l-idealen.
Opmerking 5.2. Het is mogelijk dat een $x=xe_j$ het l-ideaal l_i R isomorf afbeeldt op l_j, terwijl $e_i x\neq x$ geldt. In dit geval echter doet $e_i x=e_i x e_j$ hetzelfde als x (nu echter wel $e_i(e_i x)e_j=e_i x$).
Opmerking 5.3. Daar de l_i minimaal zijn is elke R-homomorfie $\neq 0$ van l_i in l_j een R-isomorfie op, en dus omkeerbaar, d.w.z. bij elke $x_{ij}=e_i x_{ij} e_j$ bestaat er een x_{ji} met de eigenschap dat $x_{ij}x_{ji}$ (door middel van rechtsvermenigvuldiging) l_i identiek op zichzelf afbeeldt, dus $x_{ij}\ x_{ji}=e_i$. Immers $x_{ij}x_{ji}=(e_i x_{ij})x_{ji}=e_i(x_{ij}x_{ji})=e_i$. Hieruit volgt in het geval dat i=j

<u>Stelling 5.4.</u> De ring $e_i Re_i$ is een slichaam.
Opmerking 5.4. Stel σ en σ' zijn twee R-endomorfieën van l_i op zichzelf. Dan is

$$\begin{cases}\sigma(a)=a\ s\ ; & a\in l_i\\ \sigma'(a)=a\ s'; & \end{cases} \text{ en } \begin{cases} s\in e_i Re_i\\ s'\in e_i Re_i\end{cases}$$

en dus $\sigma'(\sigma(a))=\sigma'(as)=ass'$ en $(\sigma+\sigma')(a)=\sigma(a)+\sigma'(a)= as+as'=a(s+s')$.
Derhalve is $e_i Re_i$ anti-isomorf met de endomorfieënring van de Abelse groep (met R-operatoren) l_i. Dit geldt algemeen voor minimale l-idealen Re.

<u>Stelling 5.5</u>. De slichamen $e_i Re_i$ in $(i=1,\dots,n)$ zijn isomorf.
Bewijs. Kies n vaste R-isomorfieën die l_1 afbeelden op l_i $(i=2,\dots,n)$. Hiermede corresponderen elementen $\bar{x}_{1i}\in e_1 Re_i$ zodat $l_1\bar{x}_{1i}=l_i$ en met de inverse R-isomorfieën corresponderen elementen $\bar{x}_{i1}\in e_i Re_1$; $l_i\bar{x}_{i1}=l_1$ en $\bar{x}_{1i}\bar{x}_{i1}=e_1$ en $\bar{x}_{i1}\bar{x}_{1i}=e_i$.
Zij $\xi_i\in e_i Re_i$ dan is $\bar{x}_{1i}\xi_i\bar{x}_{i1}\in e_1 Re_1$. Deze afbeelding is een isomorfie. Immers $\bar{x}_{1i}(\xi_i+\eta_i)\bar{x}_{i1}=\bar{x}_{1i}\xi_i\bar{x}_{i1}+\bar{x}_{1i}\eta_i\bar{x}_{i1}$ en $\bar{x}_{1i}\xi_i\eta_i\bar{x}_{i1}=$
$\bar{x}_{1i}\xi_i e_i\eta_i\bar{x}_{i1}=\bar{x}_{1i}\xi_i\bar{x}_{i1}\bar{x}_{1i}\eta_i\bar{x}_{i1}$. Het is niet de nulafbeelding daar $\bar{x}_{1i}e_i\bar{x}_{i1}=\bar{x}_{1i}\bar{x}_{i1}=e_1\neq 0$. Dus alle $e_i Re_i$ zijn isomorf met $e_1 Re_1$ en dus onderling isomorf.
De achtergrond van het bewijs is duidelijk. Een R-endomorfie ξ_i van l_i correspondeert met een R-endomorfie van l_1 door eerst l_1 (met de vast gekozen R-isomorfie $\bar{x}_{1i}$) op l_i af te beelden, dan ξ_i toe te passen en daarna met de inverse (van de vast gekozen) R-isomorfie e_i terug af te beelden op l_1. Op dezelfde wijze kan men met een R-isomorfie

$x_{ij}\in e_iRe_j$ van l_i op l_j ($l_ix_{ij}=e_j$) een R-endomorfie van l_1 laten corresponderen, n.l. als $x_{ij}=e_ix_{ij}e_j$ dan is $\overline{x}_{1i}x_{ij}\overline{x}_{j1}\in e_1Re_1$. Kiest men bovendien nog $\overline{x}_{11}=e_1$ dan geldt het bovenstaande voor $i=1,\ldots,n$. Wij laten nu met de matrices uit het bewijs van stelling 5.2 de matrices (ξ_{ij}) corresponderen uit de matrixring over e_1Re_1 door de definitie $\xi_{ij} \overset{\text{def}}{=} \overline{x}_{1i}x_{ij}\overline{x}_{j1}$. Deze correspondentie is een homomorfie daar

$\overline{x}_{1i}(x_{ij}+y_{ij})\overline{x}_{j1} = \overline{x}_{1i}x_{ij}\overline{x}_{j1} + \overline{x}_{1i}y_{ij}\overline{x}_{j1}$ en

$$\overline{x}_{1i}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{kj}\Big)\overline{x}_{j1} = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_{1i}x_{ik}e_ky_{kj}\overline{x}_{j1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}_{1i}x_{ik}\overline{x}_{k1})(\overline{x}_{1k}y_{kj}\overline{x}_{j1}).$$

Daar uit $\xi_{ij}=\overline{x}_{1i}x_{ij}\overline{x}_{j1}$ volgt

$\overline{x}_{i1}\xi_{ij}x_{1j} = \overline{x}_{i1}\overline{x}_{1i}x_{ij}\overline{x}_{j1}\overline{x}_{1j}=e_ix_{ij}e_j=x_{ij}$ is de homomorfie een isomorfie van de volle matrixring $(e_1Re_1)_n$ zodat nu stelling 5.2. volledig is bewezen.

V.6. Het voorbeeld.

Als voorbeeld beschouwen we de volle matrixring K_n van alle $n\times n$ matrices met elementen uit een slichaam K. De additieve groep van de ring is een vectorruimte over K. Als basis kan men kiezen matrices e_{ik} die overal nullen hebben behalve op de i,k-de plaats, waar een 1 staat.

Immers $(\alpha_{ij})= \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\alpha_{ij}$. Dus $K_n= \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}K$. Deze vectorruimte voldoet uiteraard aan de minimum-voorwaarde voor K-deelruimten. K_n heeft een eenheidselement $e= \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$, zodat een met K isomorf lichaam in K_n is bevat (n.l. $K'=eK$). Men kan de isomorfie zo kiezen, dat als $\alpha\in K$ wordt toegevoegd aan $a \in K'$ er geldt $u\alpha=ua$ en $\alpha u=au$ voor alle $u\in K_n$ ($a=e\alpha$ is zo'n keuze). Hieruit volgt, dat een l-ideaal uit K_n als ring a fortiori een K-deelruimte is van K_n als K-vectorruimte, en dus is de minimum voorwaarde voor de l-idealen vervuld.

Stelling 6.1. K_n is een enkelvoudige ring.

Bewijs. Stel $v\subseteq K_n$ is een tweezijdig ideaal $\neq 0$. Dan bevat v een element $(a_{ij})\neq 0$. Er is dus een i en een j zodat $a_{ij}\neq 0$. Daar v een tweezijdig ideaal is ligt ook het element $e_{ki}(a_{ij})a_{ij}^{-1}e_{jl}=e_{kl}$ in v (daar $e_{ki}e_{jl}=e_{kl}\delta_{ij}$ is $e_{ki}(a_{ij})a_{ij}^{-1}e_{jl}=e_{ki}\sum_{pq} a_{pq}e_{pq}a_{ij}^{-1}e_{jl}= \sum_{pq} e_{ki}e_{pq}e_{jl}a_{pq}a_{ij}^{-1}= =e_{kl} \sum_{pq}\delta_{ip}\delta_{qj}a_{pq}a_{ij}^{-1}=e_{kl}$). Daar dit geldt voor alle k en l hebben we $v=K_n$. Dit in verband met het voorafgaande bewijst het gestelde.

De matrices die overal nullen hebben behalve in een bepaalde (stel de k-de) kolom vormen een linksideaal l_k, zoals men direct ziet door zo'n matrix van links te vermenigvuldigen.

Meer formeel $l_k = \sum_{i=1}^{n} e_{ik}K$ en $= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} e_{ik}\xi_i\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_{ik} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \in l_k \ .$$

Kennelijk geldt $K_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$. Dat de l_k's minimaal zijn ziet men als volgt in. Stel $\sum_{i=1}^{n} e_{ik}\xi_i \neq 0$ dus bijv. $\xi_i \neq 0$ voor geschikte i, dan volgt uit $e_{ji}\xi_i^{-1} \sum_{l=1}^{n} e_{lk}\xi_l = e_{jk}$ voor alle j dat elk element $\neq 0$ van l_k het gehele ideaal genereert. Als $\xi_k = 1$ dan is $\sum_{i=1} e_{ik}\xi_i$ idempotent. Hieruit ziet men dat de voortbrengende idempotenten van l_k niet éénduidig bepaald zijn. De elkaar annulerende voortbrengende idempotent van de l_k's zijn de elementen e_{kk}. Inderdaad is $e = \sum_{k=1}^{n} e_{kk}$.
Het slichaam $e_{kk}K_n e_{kk} = e_{kk}K$ is isomorf met K, zodat de notatie in overeenstemming is met de vorige §.
Opmerking 6.1. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat een directe som van volle matrixringen halfenkelvoudig is, zodat ook het omgekeerde van stelling 5.1 geldt.

V.7. Representaties van halfenkelvoudige ringen.

In § 1 hebben we laten zien, dat een representatie van een eindige groep op hetzelfde neerkomt als een representatie van de groepsring (en omgekeerd). De groepsring R is halfenkelvoudig (zie hoofdstuk I) en heeft als operatoren gebied het slichaam K waarover hij gevormd is. Als ρ een representatie is van R in K_n, dan geldt $\rho(\alpha a) = \alpha\rho(a)$ voor $\alpha \in K$ en $a \in R$. Voor de dubbelmodulus van deze representatie betekent dit dat aan $a\alpha m = a(m\alpha)$ is voldaan. Bovendien zullen we aannemen dat het eenheidselement van R door de eenheidsmatrix wordt gerepresenteerd. Wij veronderstellen dus nu dat $\mathfrak{M}$ en R-links- en K-rechts-modulus is, waarbij R een halfenkelvoudige ring is, zodanig dat de 1 van R eenheidsoperator is en K een lichaam dat voor R een operatoren gebied is en dat deze operatoren aan bovengenoemde voorwaarde voldoen. Onder deze voorwaarden geldt de volgende

Stelling 7.1. De modulus $\mathfrak{M}$ is volledig reducibel en de irreducibele deel-(dubbel-) moduli zijn K-isomorf met minimale l-idealen van R.
Bewijs: Stel $R = \sum_{i=1}^{n} l_i$ waarbij de l_j minimale l-idealen zijn (toegelaten t.o.v. K) en stel $\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{r} m_i K$. ($m_1,\dots,m_r$ is dus een K-basis voor $\mathfrak{M}$). Dan is $R\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ daar $1.\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, dus

$$\mathfrak{M} = \sum_{i,j} l_i m_j K = \sum_{i,j} (l_i K)\, m_j = \sum_{i,j} l_i m_j \ .$$

De $l_i m_j$ zijn deel-dubbel-moduli die mits $\neq 0$ isomorf zijn met l_i en dus irreducibel. Wij kunnen dus de som uitdunnen tot dat $\mathfrak{M} = \sum l_i m_j$ voor zekere i en j.

Wanneer we de reguliere representatie beschouwen, dan is $\mathfrak{M}$ de additieve groep van R en de splitsing $R = \sum_{i=1}^{n} l_i$ geeft een volledige reductie van die representatie.
In verband met de vorige stelling hebben we dus
Stelling 7.2. In de reguliere representatie komt elke irreducibele representatie voor en
Stelling 7.3. Er zijn slechts eindig veel verschillende irreducibele representaties.
Ook is uit het bovenstaande duidelijk, dat als we voor $\mathfrak{M}$ de additieve groep nemen van een minimaal l-ideaal, we dan een irreducibele representatie krijgen.
Splitst men de groepsring R van een eindige groep over het (commutatieve) K lichaam volgens het procédé van V.5 in een directe som van volle matrixringen over scheve lichamen en voegt men aan een element $a \in R$ toe de component uit zo'n ring, dan geeft dit een matrixrepresentatie van R. Dit behoeft echter geen representatie in K_n te zijn. Het is een representatie met matrices waarvan de elementen in het slichaam liggen, dat we met e_iRe_i hebben aangeduid. Dit slichaam bevat uiteraard een met K isomorf lichaam Ke_i. Daar R eindige rang over K heeft, is e_iRe_i een eindige uitbreiding van K. Veronderstellen we K algebraïsch afgesloten, dan is e_iRe_i isomorf met K. Uit de stelling van Wedderburn volgt dan
Stelling 7.4. Elke irreducibele representatie komt even vaak in de reguliere representatie voor als zijn graad bedraagt. Het aantal inequivalente irreducibele representaties is gelijk aan het aantal verschillende tweezijdige idealen van R.

Het centrum van zo'n tweezijdig ideaal bestaat als centrum van een volle matrixring over een (commutatief) lichaam uit de "scalaire veelvouden" van het eenheidselement. Het centrum van R is de directe som van de centra der verschillende tweezijdige idealen, en dus hebben we de
Stelling 7.5. Het aantal verschillende irreducibele representaties is gelijk aan de rang van het centrum van de groepsring over een algebraïsch afgesloten lichaam.

VI. Representatie van de symmetrische groep

VI.1 Inleiding.

De traditie van dit colloquium volgend veronderstellen wij alles van de groepentheorie bekend, voor zover dit geen representatie-theorie is.

Een matrixrepresentatie van de symmetrische groep $\mathcal{S}_n$ is een toe-voeging van matrices $\rho(s)$ aan de elementen $s \in \mathcal{S}_n$, dusdanig dat $\rho(st)=\rho(s)\rho(t)$ geldt. Wij geven direct een voorbeeld: Laat de permutatie p van de symbolen $1,2,\dots,n$ het symbool i overvoeren in $p(i)$. Neem voor $\rho(p)$ een matrix met op de (i,j)de plaats $\delta_{i,p(j)}$. Dan is ρ een representatie, daar het element op de (i,k)de plaats van $\rho(p)\rho(q)$ gelijk is aan

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,p(j)} \cdot \delta_{j,q(k)} = \delta_{i,pq(k)} ,$$ daar in de som alleen die term 1 is waarvoor zowel $i=p(j)$ als $j=q(k)$ geldt, dus waarvoor $i=pq(k)$ geldt.

N.B. Dit is niet de reguliere representatie (MR 2) daar deze de graad n! heeft in plaats van n.

De bovengegeven representatie is niet irreducibel (zie MR 3). Men kan haar reduceren met de matrix $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & -1 & & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}$

De matrices $P\rho P^{-1}$ blijken van de vorm

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & \rho' & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$ te zijn waarbij ρ' een (irreducibele) representatie van de graad n-1 is $\rho'(p)_{ij} = (\delta_{i,p(j)} - \delta_{1,p(j)})$.

Voor n=3 geeft dit:

$\rho((1)(2)(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho((12)(3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho((1)(23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho((2)(31)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

en $\rho'((1)(2)(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho'((12)(3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho'((1)(23)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho'((2)(31)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho'((123)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho'((132)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ons doel wordt alle irreducibele representaties van $\mathfrak{S}_n$ te bepalen. Hiertoe zullen we in grote lijnen de opbouw volgen die gewoonlijk aan Young wordt toegeschreven, hoewel Frobenius er ook meer van af wist. Young ziet de elementen van $\mathfrak{S}_n$ meer als operaties op functies van n veranderlijken (meestal polynomen).

Definitie: $p\, f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_{p(1)},x_{p(2)},\ldots,x_{p(n)})$.

Opmerking. Onder pq verstaan we eerst q dan p toepassen, zodat $(pq)f = p(qf)$ met $p,q \in \mathfrak{S}_n$.

Men kan nu ook zinvol een som definiëren als operatie op functies $(p+q)f=pf+qf$ en wat algemener nog $(\lambda p+\mu q)f = \lambda pf + \mu qf$, waarbij λ en μ complexe getallen zijn. Met deze definities is nu een algebra S_n ontstaan over de complexe getallen met als basis de elementen van $\mathfrak{S}_n$. Merk op dat $\mathfrak{S}_n$ isomorf in S_n bevat is. (Groepsalgebra, zie MR 10). Young nu geeft in deze algebra een nieuwe basis aan met elementen

$e^{\lambda}_{i,j}$ $\quad \lambda = 1,2,\ldots,k$(=aantal klassen van $\mathfrak{S}_n$) en

$\quad i,j = 1,2,\ldots,f_\lambda$ (met $\sum_{\lambda=1}^{k} f_\lambda^2 = n!$). Deze elementen voldoen aan

$$e^{\lambda}_{i,j}\, e^{\mu}_{kl} = \delta^{\lambda}_{\mu} \cdot \delta^{k}_{j}\, e^{\lambda}_{i,l} .$$

Opmerking. Dit is de stelling van Wedderburn expliciet voor S_n (zie MR V). Dat dit representaties geeft is als volgt in te zien: Voor elk element a van S_n (dus a fortiori voor elk element van $\mathfrak{S}_n$) bestaan er complexe getallen $\alpha^{\lambda}_{i,j}$ dusdanig dat $a= \sum_{i,j,\lambda} \alpha^{\lambda}_{i,j}\, e^{\lambda}_{i,j}$ en nu is bij elke λ de toevoeging $a \to (a^{\lambda}_{ij})$ een (irreducibele) representatie. Immers als $b=\sum \beta^{\lambda}_{ij}\, e^{\lambda}_{ij}$ dan is

$$ab= \sum_{ijkl\lambda\mu} \alpha^{\lambda}_{ij}\, \beta^{\mu}_{kl}\, e^{\lambda}_{ij}\, e^{\mu}_{kl} = \sum_{i,l,\lambda} \Big(\sum_j \alpha^{\lambda}_{ij}\, \beta^{\lambda}_{jl}\Big)\, e^{\lambda}_{il} \text{ en}$$

$a+b= \sum_{ij\lambda} (\alpha^{\lambda}_{ij}+\beta^{\lambda}_{ij})\, e^{\lambda}_{ij}$, derhalve is het (zelfs) een representatie van S_n.

In 1935 heeft Specht de zaak enigszins anders benaderd door meer te letten op functies f waar de elementen van $\mathfrak{S}_n$ (en S_n) op werken. De n! getransformeerden pf met $p \in \mathfrak{S}_n$ van een bepaalde functie f kunnen lineair onafhankelijk zijn, in welk geval f totaal onsymmetrisch heet. In ieder geval kan men /een basis kiezen $f_1,\ldots,f_m$ dusdanig dat elk der getransformeerden een lineair compositum van deze functies is. Zij nu $p \in \mathfrak{S}_n$ dan is dus

/ uit de getransformeerden van f

$p\ f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j$ en $p \to (\alpha_{ij})$ is een matrixrepresentatie. Immers

$$p\ q\ f_i = p(q\ f_i) = p(\sum_j \beta_{ij} f_j) = \sum_j \beta_{ij}\ pf_j =$$

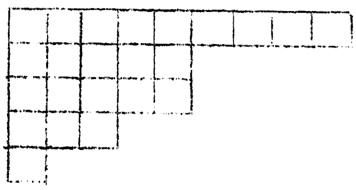
$\sum_j \beta_{ij} \sum_k \alpha_{jk}\ f_k = \sum_k \sum_j \alpha_{ij} \beta_{jk}\ f_k$. Een totaal onsymmetrische functie geeft de reguliere representatie. Het is nu de kunst, en deze heeft Specht verstaan, om functies f en f_i zo te kiezen, dat alle irreducibele representaties verkregen worden.

VI.2 Tableaux.

Een begrip dat in het volgende een belangrijke rol zal spelen is dat van een schema en de daarbij behorende tableaux.

Bij elke partitie m van n: $n = \sum_{i=1}^{r} m_i \quad (m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 0)$ behoort een schema bestaande uit r rijen hokjes, waarvan de beginhokjes onder elkaar staan. De i-de rij bevat m_i hokjes.

Voorbeeld: $n=20$, $r=5$, $m_1=8$, $m_2=4$, $m_3=4$, $m_4=3$ en $m_5=1$.



Bij elk schema gaat straks een irreducibele representatie behoren. Er zijn evenveel verschillende schema's als verschillende partities van n. Dit is ook juist gelijk aan het aantal equivalentieklassen van $\mathfrak{S}_n$. Eén en ander is in overeenstemming met stelling 1.6.2 van deze syllabus.

Wanneer in de hokjes de getallen 1,2,...,n zijn ingevuld (één per hokje) spreekt men van een tableau. Er zijn dus n! tableaux bij elk schema.

De permutaties van $\mathfrak{S}_n$ kunnen we op een tableau laten werken door de getallen van dat tableau volgens die permutaties te verwisselen. Een permutatie die de rijen invariant laat (dus nooit een getal naar een andere rij verhuist) noemen we horizontaal. Om voor de hand liggende reden noemen we een permutatie vertikaal als deze geen enkel getal naar een andere kolom overbrengt. De horizontale permutaties vormen een ondergroep ("horizontale groep") van $\mathfrak{S}_n$ evenals de vertikale permutaties ("vertikale groep"). Deze ondergroepen hangen af van het tableau.

Opmerking VI. 2.1. Als $\mathcal{P}$ de horizontale groep van het tableau T is en als het tableau T' uit T ontstaat door de permutatie s toe te passen, dan is $s\mathcal{P}s^{-1}$ de horizontale groep van T'.

De operator $S = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} s$ heeft een symmetriserende werking, daar de functie F=Sf symmetrisch is. Immers $tF=(t\sum_{s \in \mathcal{S}_n} s)f=(\sum_{s \in \mathcal{S}_n} ts)f=Sf=F$. Met de operator $A= \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_s s$ (met $\varepsilon_s=1$ als s een even permutatie is en $\varepsilon_s=-1$ als s oneven is), maakt men alternerende functies, daar $tA= t \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_s s= \varepsilon_t \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_t \varepsilon_s ts=\varepsilon_t A$. Een en ander berust dus op het bekende principe dat bij vaste t de producten ts de hele groep doorlopen.

Opmerking VI.2.2. Dit levert ons voor de horizontale groep $\mathcal{P}$ (van een tableau T) als $\sum_{p \in \mathcal{P}} p=P$ (horizontale operator), dat tP=Pt=P voor elke $t \in \mathcal{P}$.

Bij de vertikale groep $\mathcal{N}$ definiëren we de vertikale operator $N= \sum_{n \in \mathcal{N}} \varepsilon_n n$. Daar de horizontale en de vertikale alleen het eenheidselement gemeen hebben, geldt $E=PN\neq 0$.

Stelling VI.2.1. Als er twee getallen zijn die in een tableau T in dezelfde rij voorkomen en in een tableau T' in eenzelfde kolom, dan is het product PN' van de horizontale operator P van T en de vertikale operator N' van T' gelijk nul.

Bewijs. Laten de bewuste getallen i en j zijn, dan bevat de horizontale groep $\mathcal{P}$ van T het element (ij) (transpositie), dat met het eenheidselement I een ondergroep van $\mathcal{P}$ vormt. Laten nu $p_1 \ldots p_m$ een representantensysteem van de linkernevenklassen van $\{I, (ij)\}$ vormen, dus

$$P = p_1+p_1(ij) + p_2+p_2(ij)+\ldots+p_m+p_m(ij) = (\sum p_i)(I+(ij))$$

Evenzo is (ij) element van de vertikale groep $\mathcal{N}'$ van T' dus met behulp van een representantensysteem $q'_1 \ldots q'_r$ van de rechternevenklassen $\{I, (ij)\}$ uit $\mathcal{N}'$ vinden we $N'=(I-(ij))(\sum q'_i \varepsilon_{q'_i})$. Daar nu $(I+(ij))(I-(ij))=(I-(ij)^2)=0$ volgt het gestelde.

Opmerking: Dit is analoog met de stelling dat een functie die in twee variabelen zowel symmetrisch als alternerend is, nul moet zijn.

Het omgekeerde van stelling VI.2.1 geldt voor tableaux met hetzelfde schema ook. We zullen nl. aantonen:

<u>Stelling VI.2.2.</u> Als T en T' twee tableaux zijn (met hetzelfde schema) dusdanig dat geen twee getallen uit eenzelfde rij van T in eenzelfde kolom van T' staan, dan bestaat er een tableau T'' dat met T de horizontale en met T' de vertikale groep gemeen heeft. Dus (met voor de hand liggende notatie) $\mathcal{P}=\mathcal{P}''$ en $\mathcal{N}'=\mathcal{N}''$ derhalve $PN \doteq P''N'' \neq 0$. Bovendien is dan $T'=pnT$ met $p\in\mathcal{P}$ en $n\in\mathcal{N}$.

<u>Bewijs</u>. Permuteer de getallen van T horizontaal dusdanig dat ze in dezelfde kolom komen als waarin ze bij T' staan. Dit kan, daar getallen uit dezelfde rij (van T) zeker in verschillende kolommen van T' staan. Noem het zo ontstane tableau T'' en het is duidelijk dat $\mathcal{P}=\mathcal{P}''$ en $\mathcal{N}'=\mathcal{N}''$ en $pT=T''$ voor passende $p\in\mathcal{P}$ en $n''T''=T'$ voor geschikte $n''\in\mathcal{N}''$. Uit opmerking VI.2.1 volgt $p\mathcal{N}p^{-1}=\mathcal{N}''$ dus $n''=pnp^{-1}$ met $n\in\mathcal{N}$. Dus $T'=n''T''=n''pT=(pnp^{-1})pT=pnT$.

Nu zijn wij in staat te bewijzen dat $E=PN$ (op een factor na) idempotent is. Hiertoe de volgende hulp-

<u>Stelling VI.2.3.</u> Zij gegeven een tableau T met horizontale groep $\mathcal{P}$ en vertikale groep $\mathcal{N}$ en een operator $X\in S_n$ met de eigenschap dat $pXn=\varepsilon_n X$ voor elke $p\in\mathcal{P}$ en $n\in\mathcal{N}$. Dan geldt $X=\lambda PN$ en omgekeerd.

<u>Bewijs</u>. Uit opmerking VI.2.2. volgt direct de genoemde omkering. Stel nu $X=\sum_{s\in\mathcal{S}_n}\lambda_s s$. In PN komen alleen termen voor van de vorm pn ($p\in\mathcal{P}$ en $n\in\mathcal{N}$) met coëfficiënt ε_n. We moeten dus bewijzen dat $\lambda_{pn}=\varepsilon_n\lambda$ en dat de overige $\lambda_s=0$ zijn. Vergelijking van de coëfficiënt van pn in $pXn=\varepsilon_n X$ levert $\lambda_1=\varepsilon_n\lambda_{pn}$. Dus $X=\lambda_1 PN+R$ waarbij R alleen termen r bevat die niet in de vorm pn te brengen zijn. Dit betekent krachtens stelling VI.2.2 dat er twee getallen zijn die in het tableau T in dezelfde rij en in het tableau $T'=rT$ in eenzelfde kolom voorkomen. De transpositie t van deze getallen behoort dus tot $\mathcal{P}$ en tot $\mathcal{N}'=r\mathcal{N}r^{-1}$ dus $t\in\mathcal{P}$ en $r^{-1}tr\in\mathcal{N}$. Volgens het gegeven is dus $tXr^{-1}tr=\varepsilon_t X=-X$. Vergelijking van de coëfficiënt van r geeft nu $\lambda_r=-\lambda_r$, dus $\lambda_r=0$.

Uit opmerking VI.2.2. volgt weer direct dat $pPNPNn=\varepsilon_n PNPN$ dus volgens bovenstaande stelling $PNPN=\lambda PN$. Dat hier $\lambda\neq 0$ is kan men als volgt inzien. De coëfficiënt van het eenheidselement is dezelfde in $(PN)P$ en in $P(PN)=PN.g_p$ (waarbij g_p de orde van $\mathcal{P}$ is) en dus gelijk aan g_p. In $(PNP)(PNP)$ is de coëfficiënt van het eenheidselement $\neq 0$, als een som van kwadraten. Immers daar $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ hebben $p_1 n p_2$ en $p_2^{-1} n^{-1} p_1^{-1}$ dezelfde coëfficiënt in PNP, dus hebben s en s^{-1} dezelfde coëfficiënt ($\neq 0$ als s het eenheidselement is) in PNP.

Maar daar $(PNP)(PNP) = g_p(PNPN)P$ is, kan dus onmogelijk $PNPN = 0$ zijn.

Wij hebben nu dus dat $\frac{1}{\lambda}E = \frac{1}{\lambda}PN$ idempotent is. In de volgende § zullen we bewijzen dat de E's behorende tot tableaux met verschillend schema elkaar annuleren.

VI.3. Idempotenten.

Men kan de schema's (partities) ordenen door te stellen $(m_i) > (m_i')$ als het eerste verschil $m_k - m_k' \neq 0$ positief is.

<u>Stelling VI.3.1.</u> Laat het tableau T behoren tot de partitie (m) en T' tot (m') met $(m) > (m')$ dan zijn er twee getallen die bij T in eenzelfde rij en bij T' in eenzelfde kolom staan en dus $PN' = N'P = 0$.

<u>Bewijs</u>: Als $m_1 > m_1'$ dan moeten de m_1 getallen uit de eerste rij van T verdeeld zijn over minder kolommen in T' en er komen dus zeker twee in dezelfde kolom. Stel dus $m_1 = m_1'$. Door een vertikale permutatie op T' toe te passen, kan men bereiken dat T en T' niet in de eerste rij verschillen. Na onthoofding van beide tableaux herhaalt men bovenstaande redenering met m_2 en m_2' enz.. Men vindt dan de beide getallen daar $(m) \neq (m')$.

Daar nu $PN' = N'P = 0$ is, hebben we $E'E = P'(N'P)N = 0$. Een kleine truc zal ons nu leren, dat ook $EE' = 0$. Beschouw nl. PsN' met s willekeurig in $\mathfrak{S}_n$. $PsN' = P(sN's^{-1})s = PN_s's$, waarbij N_s' de vertikale operator is behorend bij het tableau sT' dat dus hetzelfde schema heeft als T'. Dus volgens stelling VI.3.1 $PN_s' = 0$. Hieruit volgt dus algemener dat $PXN' = 0$ voor alle $X \in S_n$. Substitutie van $X = NP'$ levert $P(NP')N' = EE' = 0$. Dus hebben wij nu bewezen:

<u>Stelling VI.3.2.</u> De operatoren PN behorend bij tableaux met verschillend schema annuleren elkaar.

<u>Stelling VI.3.3.</u> De idempotente operatoren $e = \frac{1}{\lambda}PN$ zijn primitief d.w.z. niet splitsbaar als som van elkaar annulerende idempotenten.

<u>Bewijs</u>: Stel $e = e_1 + e_2$ met $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ en $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. Dan geldt $e_1 e = e_1 = e e_1$ dus $e e_1 e = e_1$. Wegens stelling VI.2.2 is dus $e_1 = \lambda e$, $\lambda^2 = \lambda$ dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

In verband met de in de vorige hoofdstukken behandelde theorie volgt hieruit dus dat de representaties geïnduceerd door de linksidealen

irreducibel zijn.
De representaties door S_ne en S_ne' zijn equivalent of niet al naar gelang er wel of niet een element $s\neq 0$ bestaat, dusdanig dat $S_n e\, s = S_n e'$. Laat nu e tot T en e' tot T' behoren. Stel 1°. de tableaux hebben eenzelfde schema. Er is dan dus een $t\in\mathcal{T}_n$ dusdanig dat $T'=tT$ en in verband met opm. VI.2.1 $P'N'=t\,Pt^{-1}tNt^{-1}=tPNt^{-1}$ of wel $\lambda' e'=\lambda tet^{-1}$, (dat $\lambda=\lambda'$ is hebben we hier niet nodig, doch is gemakkelijk in te zien) en $e\ t^{-1}e'=(\lambda/\lambda')e^2t^{-1}=(\lambda/\lambda')et^{-1}\neq 0$, zodat men $s=et^{-1}e'$ kan nemen. In dit geval treedt dus equivalentie van de bijbehorende representaties op.
2°. T en T' behoren bij verschillende partities (m) en (m'). Stel o.B.d.A. $(m)>(m')$. Daar nu $PXN'=0$ voor alle $X\in S_n$ (zie bewijs stelling VI.3.1) is zeker ook $e\,S\,e'=0$ voor alle $s\in\mathcal{T}_n$. We zullen nu nog even laten zien, dat dit een tegenspraak geeft met de veronderstelling dat de representaties behorend tot S_ne en S_ne' equivalent zijn. Immers er zou dan een $s\neq 0$ moeten zijn, zodat $S_nes= S_ne'$. Beschouw nu es, uiteraard $\neq 0$, $es\in S_ne'$ dus $es=ye'$ en $ese'=ye'^2=ye'=$ $=es\neq 0$.
Stel nu er zijn k schema's. Bij elk van deze schema's hoorden $n!$ tableaux en dus $n!$ l-idealen S_ne. Daar de l-idealen behorende bij eenzelfde schema) isomorf zijn, hebben zij als vectorruimte dezelfde dimensie.
Stel f_i voor het i^{de} schema. Deze $n!\sum_{i=1} f_i$ basiselementen kunnen voor $n>1$ niet lineair onafhankelijk zijn, daar de dimensie van S_n slechts $n!$ is. Evenmin behoeven ze samen S_n op te spannen. In de volgende § zullen we de tableaux uitdunnen en wel dusdanig, dat er bij het i^{de} schema nog slechts g_i tableaux overblijven. Aangetoond zal worden, dat de overgebleven $\sum_{i=1} g_if_i$ basiselementen lineair onafhankelijk zijn en dat zij S_n opspannen.

VI.4. Standaard tableaux.

Een tableau wordt een standaard tableau genoemd als de getallen van links naar rechts en van boven naar beneden in stijgende volgorde staan. Als voorbeeld geven we

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

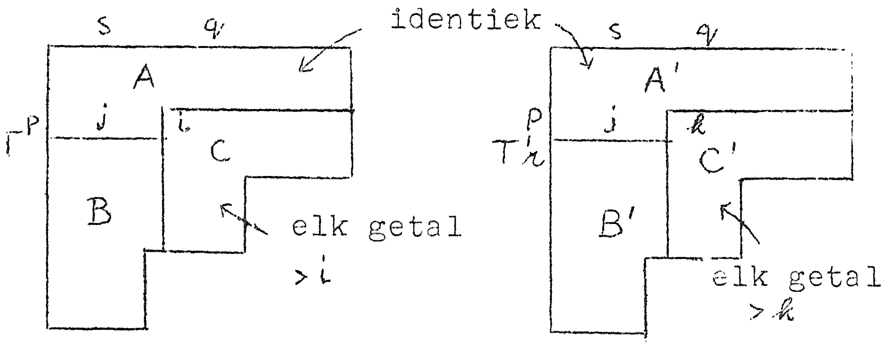
de 5 standaard tableaux behorend bij het schema (3.2) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &\ &\ \\\hline \ &\ \\\cline{1-2}\end{array}$

Men kan om typografische redenen de tableaux ook als volgt aangeven 123,45; 124,35; 125,34; 134,25 en 135,24. Deze schrijfwijze suggereert een ordening van de tableaux, door nl. deze reeksen van n getallen op te vatten als getallen met n cijfers in het n-tallig stelsel en deze naar grootte te rangschikken.[opm. VI.4.1. Van alle getallen die in een standaard tableau op of onder de p-de rij en tevens op of rechts van de q-de kolom staan, bevindt zich dus de kleinste in de linker boven hoek (dus op de (p,q)de plaats. In het bijzonder staat de 1 dus altijd links boven.

Stelling VI.4.1. Laten T en T' twee standaard tableaux zijn met gemeenschappelijk schema en laat $T < T'$ zijn. Er zijn dan twee getallen i en j die in T in dezelfde rij en in T' in dezelfde kolom staan.

Bewijs: Stel, dat het eerste hokje, waarin bij T en T' verschillende getallen staan, in de p-de rij en de q-de kolom ligt. Stel dat dit hokje in T het getal i en in T' het getal k bevat. Dus daar $T < T'$ ook $i < k$.

Laat nu het getal i in T' op de (r,s)-de plaats staan. Uit de tekening met de toelichting (i.v.m. opm.1) volgt direct dat $r > p$ en $s < q$. Op de (p,s)-de plaats staat in T en T' hetzelfde getal j q.e.d. (Het gebied B kan niet leeg zijn daar q=1 onmogelijk is, wegens opm.1 is dan n.l. i=k).



Een direct gevolg van deze stelling is dat de horizontale operator P van T en de verticale operator N' van T' elkaar annuleren, en dus E'E=0 is.

Notatie: Stel er zijn k verschillende schema's, genummerd van 1,...,k. Bij het i-de schema horen f_i standaard tableaux $T^i_1,\dots,T^i_{f_i}$ dusdanig genummerd dat $T^i_h < T^i_j$ als $h < j$.

Bij T^i_j hoort de idempotente operator e^i_j.

Uit de vorige § weten we al dat $e^s_j\, e^t_l = 0$ als $s \neq t$. Nu hebben we dus voor standaard tableaux bewezen, dat $\underline{e^s_i e^s_j = 0}$ als $j < i$. (Inderdaad behoeft hier niet $e^s_j e^s_i = 0$ te gelden).

Stelling VI.4.2. De som van de l'idealen $S_n e_i^s$ voor $i=1,\dots,f_s$ is direct, m.a.w. uit $\sum_{i=1}^{f_s} x_i e_i^s=0$ met $x_i \in S_n$ volgt $x_i^s e_i^s=0$.

Bewijs. Stel $\sum_{i=1}^{f_s} x_i e_i^s=0$. Vermenigvuldig van rechts met e_1^s, dus $0=\sum_{i=1}^{f_s} x_i e_i^s e_1^s=x_1 e_1^s e_1^s=x_1 e_1^s$ etc. Deze (directe) som is bevat in een enkelvoudig tweezijdig ideaal, n.l. het ideaal dat alle met $S_n e^s$ isomorfe l-idealen bevat, zie stelling V.4.1.

Dit zelfde geldt voor de niet meer directe som van de $S_n e$, waarbij we in de som alle tableaux (van het s-de schema) betrekken. Van dit laatste l-ideaal is echter gemakkelijk aan te tonen dat het tevens een r-ideaal is. Zij n.l. $x=\sum x_e e$ een willekeurig element (e doorloopt alle idempotenten behorend bij het schema en $x_e \in S_n$), dan geldt $x\sigma=\sum x_e e\sigma=\sum(x_e\sigma)\sigma^{-1}e\sigma$ voor $\sigma \in \mathcal{S}_n$; hierbij doorloopt $\sigma^{-1}e\sigma$ met e alle tableaux en $x_e\sigma \in S_n$ en dit is kennelijk voldoende. Als tweezijdig deelideaal van een enkelvoudig ideaal kan het geen echt deelideaal zijn. Deze argumentatie gaat niet op bij de uitgedunde som daar $\sigma^{-1}e_i^s\sigma$ niet tot een standaard tableau behoeft te behoren. In de volgende § zullen we echter zien dat $\sum_{s=1}^{k} f_s^2=n!$ terwijl we nu reeds $\sum_{s=1}^{k} f_s^2$ lineair onafhankelijke elementen uit de l-idealen $S_n e_i^s$ zullen aangeven. Hieruit volgt dan weer dat

$$\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{f_s} S_n e_i^s = S_n.$$

Stelling VI.4.3. De $\sum_{s=1}^{k} f_s^2$ elementen $e_i^s \sigma_{ij}^s e_j^s$ zijn lineair onafhankelijk en $\neq 0$ voor geschikte σ_{ij}^s.

Bewijs: Voor σ_{ij}^s nemen we de permutatie die T_j^s in T_i^s overvoert. Dus $e_j^s=(\sigma_{ij}^s)^{-1}e_i^s\sigma_{ij}^s$ en $e_i^s\sigma_{ij}^s e_j^s=e_i^s e_i^s\sigma_{ij}^s=e_i^s\sigma_{ij}^s\neq 0$.

Stel dat er een relatie is $\sum_{i,j,s}\lambda_{ij}^s e_i^s\sigma_{ij}^s e_j^s=0$. Door nu van rechts met e_1^s en van links met $e_{f_s}^s$ te vermenigvuldigen, vindt men, i.v.m. $e_i^s e_j^s=0$ als $j<i$, dat $\lambda_{f_s}^s e_{f_s}^s\sigma_{f_s 1}^s e_1^s=0$, dus $\lambda_{f_s}^s=0$. Laat dus deze term uit de som weg.

Door nu van links met e_{f_s-1} en van rechts weer met e_1^s te vermenigvuldigen, vindt men $\lambda_{(f_s-1)}^s=0$. Zo voortgaande verkrijgt men $\lambda_{i1}^s=0$, $i=1,\dots,f_s$. Door nu van rechts met e_2^s te vermenigvuldigen i.p.v. met e_1^s kan men λ_{i2}^s voor alle i nul krijgen. Zo voortgaande vindt men $\lambda_{ij}^s=0$ $i,j=1,\dots,f_s$.

De elementen $e_i\sigma_{ij}e_j = S_{ij}$ hebben al aangename eigenschappen te weten $S_{ij}S_{jk}=S_{ik}$. Het bewijs hiervan is eenvoudig
$e_i\sigma_{ij}e_je_j\sigma_{jk}e_k = e_i\sigma_{ij}e_j\sigma_{jk}e_k=e_ie_i\sigma_{ij}\sigma_{jk}e_k=e_i\sigma_{ik}e_k$. Dat echter $S_{ij}S_{kl}=0$ voor $k\neq j$ kunnen we niet beweren. Wel is het waar als $k<j$. Door geschikte basistransformatie is dit echter, zoals we later zullen aangeven, te verhelpen.

VI.5. $\sum_{i=1}^{k} f_i^{\,2} = n!$

In een standaardtableau staat de n als grootst voorkomend getal aan het eind van een rij en tevens aan het eind van een kolom. Door zo'n hokje weg te laten houden we weer een tableau over (en wel met n-1 hokjes), dat uiteraard ook een standaardtableau is. Hieruit kan men het hokje dat door n-1 wordt ingenomen weglaten. Zo voortgaand kan men dus het gehele tableau afbreken en met het omgekeerde proces weer opbouwen. Hierbij geeft de nummering van de hokjes uit een standaardtableau dus een mogelijke volgorde van opbouw van het tableau en wel een opbouw zodanig dat in elk stadium een correct tableau ontstaat. Bijvoorbeeld voor het tableau

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$ geeft dit $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$.

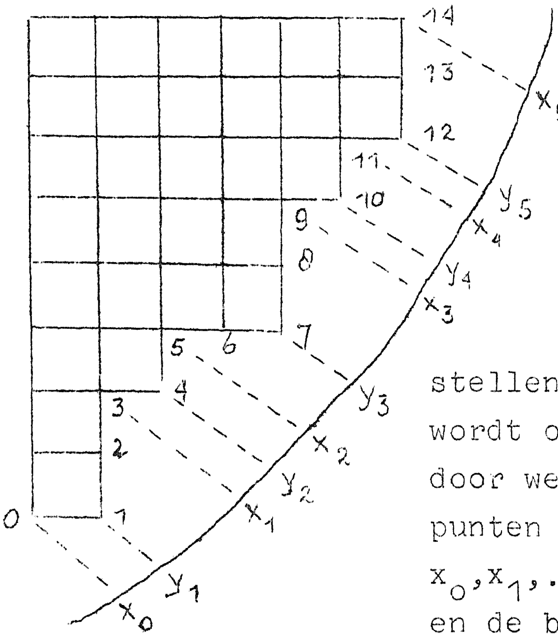
Bij een niet-standaardtableau zou dit niet goed gaan. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&5&4\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}$
zou geven $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&&4\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}$ en $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&5&4\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}$

waarbij 2x iets dat geen tableau is wordt gepasseerd.

Het aantal standaardtableaux is dus gelijk aan het aantal manieren waarop men het schema netjes kan opbouwen.
De figuur bestaande uit een hokje en alle hokjes rechts ervan in dezelfde rij en eronder in dezelfde kolom noemt men een hoek (behorende bij dat hokje). Het aantal hokjes van een hoek heet het hoekgetal van dat hokje. Het product van alle hoekgetallen van een schema S heet het hoekproduct $\sigma(S)$. We zullen nu bewijzen, dat het aantal standaardtableaux behorend bij S gelijk is aan $n! : \sigma(S)$.
In de hokjes van het schema . . . zetten we hoekgetallen

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&3&1\\\hline 2&1\\\cline{1-2}\end{array}$, $f = \frac{5!}{4.3.2} = 5$.

De gebroken lijn die een tableau aan de rechterkant en aan de onderkant begrenst noemen we de zoom van het tableau. Deze gebroken lijn wordt in (gelijke) stukken verdeeld door de hoekpunten van de hokjes die aan de zoomgrenzen. Deze nummeren we van links onder naar rechts boven bijvoorbeeld van $0,\dots,r$. Als nu de onderkant van de



i-de rij op de zoom eindigt bij het u_i-de punt van de zoom en als de voorkant van de j-de kolom eindigt bij het v_j-de punt van de zoom, dan is het hoekgetal van het (i,j)-de hokje gelijk aan u_i-v_j, zoals gemakkelijk is na te gaan.

We zullen nu een formule opstellen voor $\sum \frac{\sigma(S)}{\sigma(S^*)}$, waarbij gesommeerd wordt over alle schema's S^* die uit S ontstaan door weglating van een hokje. Noem de beginpunten van horizontale stukken van de zoom $x_0, x_1, \dots, x_s$ (inclusief eindpunt van de zoom) en de beginpunten van vertikale stukken $y_1, \dots, y_s$ (zie figuur), dan geldt

$$\sum \frac{\sigma(S)}{\sigma(S^*)} = (y_1-x_0)(x_1-y_1) \cdot \frac{(x_2-y_1)}{(y_2-y_1)} \frac{(x_3-y_1)}{(y_3-y_1)} \cdots \frac{(x_s-y_1)}{(y_s-y_1)} +$$

$$\frac{y_2-x_0}{y_2-y_1} \quad (y_2-x_1)(x_2-y_2) \frac{x_3-y_2}{y_3-y_2} \cdots \frac{x_s-y_2}{y_s-y_2} + \dots \quad ,$$

of als men stelt $f(x) = (x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_s)$ en $g(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s)$ $\quad \sum \frac{\sigma(S)}{\sigma(S^*)} = - \sum_{i=1}^{s} \frac{g(y_i)}{f'(y_i)}$. Evenzo wordt $\sum \frac{\sigma(S)}{\sigma(\tilde{S})}$, waarbij de som wordt uitgestrekt over alle schema's $\tilde{S}$ die uit S kunnen ontstaan door toevoeging van een hokje, gelijk aan

$$\frac{(y_1-x_0)}{(x_1-x_0)} \frac{y_2-x_0}{x_2-x_0} \cdots \frac{y_s-x_0}{x_s-x_0} + \frac{x_1-y_1}{x_1-x_0} \cdot \frac{y_2-x_1}{x_2-x_1} \cdots \frac{y_s-x_1}{x_s-x_1} + \dots = \sum_{i=0}^{s} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} .$$

Stelling VI.5.1. $a = \sum \frac{\sigma(s)}{\sigma(s^*)} = n$ en $b = \sum \frac{\sigma(s)}{\sigma(\tilde{s})} = 1$.

Bewijs: Beschouw het polynoom

$$h_1(x) = \sum_{k=1}^{s} \frac{g(y_k)}{f'(y_k)} \cdot (x-y_1) \dots (x-y_{k-1})(x-y_{k+1}) \dots (x-y_s).$$

De graad hiervan is $s-1$ en de hoogste coëfficiënt is $-a$.

Voor $k=1,\ldots,-s$ geldt $g(y_k)=h_1(y_k)$ dus, daar $g(x)$ de graad $s+1$ en hoogste coëfficiënt 1 heeft, $g(x)-h_1(x)=(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_s)(x-t)$ voor zekere t. Stel $\sum x_0=\alpha_1$, $\sum x_0x_1=\alpha_2$, $\sum y_1=\beta_1$ en $\sum y_1y_2=\beta_2$ dus $g(x)-h(x)= x^{s+1}-(\beta_1+t)x^s+(\beta_2+t\beta_1)x^{s-1}+\ldots=$ $x^{s+1}-\alpha_1 x^s+(\alpha_2+a)x^{s-1}+\ldots$

derhalve $t=\alpha_1-\beta_1$ en $-\underline{a}=\alpha_2-\beta_2-\beta_1 t=\underline{\underline{\alpha_2-\beta_2-\beta_1(\alpha_1-\beta_1)}}$.

Anderzijds is de "oppervlakte" van het schema gelijk aan

$$n=\sum_{0\leq i<j\leq s}(y_{i+1}-x_i)(x_j-y_j)=\sum_{0\leq i<j\leq s}(y_{i+1}x_j-y_{i+1}y_j-x_ix_j+x_iy_j)=$$

$$-\sum y_1^2-\sum y_1y_2-\sum x_0x_1+\sum_{i,j}x_iy_j=-(\beta_1^2-2\beta_2)-\beta_2-\alpha_2+\alpha_1\beta_1.$$

Dus $$\sum\frac{\sigma(s)}{\sigma(s^*)}=-\sum_{i=1}^{s}\frac{g(y_i)}{f'(y_i)}=-(\alpha_2-\beta_2+\beta_1^2-\beta_1\alpha_1)=n.$$

Voor de tweede gelijkheid beschouwen we

$$h_2(x)=\sum_{h=0}^{s}\frac{f(x_i)}{g'(x_i)}\cdot(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_s).$$

Dit is een polynoom van de graad s met als hoogste coëfficiënt b en waarvoor geldt $h_2(x_i)=f(x_i)$ $i=0,1,\ldots,s$, dus $h_2(x)=f(x)$ en de hoogste coëfficiënt van $f(x)$ is 1, derhalve $\sum\frac{\sigma(S)^2}{\sigma(\tilde{S})}=1$.

Uit deze gelijkheden volgt direct, dat voor de $\tau(s)=\frac{n!}{\sigma(s)}$ de volgende gelijkheden gelden

$1^o.\ \sum\tau(S^*)=\tau(S)$ en $2^o.\ \sum\tau(\tilde{S})=(n+1)\,\tau(S)$.

Door 1^o. n x toe te passen hebben we $\tau(S)=\sum\tau(1)=f_s$ daar $\tau(1)=1$ en daar deze term even vaak voorkomt als er manieren zijn om S af te breken en dat is weer gelijk aan het aantal standaardtableaux behorend bij S. Door nu n x formule 2^o. toe te passen op $\tau(1)$ krijgen we de clue

$$n!=n!\,\tau(1)=\frac{n!}{1!}\sum\tau(\tilde{1})\ \ldots=\sum f_s\,\tau(S)=\sum f_s^{\,2}.$$

Uit deze betrekking volgt dus direct dat de elementen S_{ij}^{s} de gehele algebra S_n opspannen en dat bij vaste j en s S_{ij}^{s} het l-ideaal $S_ne_j^s$ op moeten spannen.

VI.6. De natuurlijke representatie.

In VI.4 is reeds opgemerkt dat:

$$S_{ij}^{s}\,S_{kl}^{t}=0 \text{ als } s\neq t \text{ en } S_{ij}^{s}\,S_{jk}^{s}=S_{ik}^{s}.$$

Bovendien hadden we $S_{ij}^{s} S_{kl}^{s} = 0$ als $k < j$ maar voor $n > 4$ geldt dit niet noodzakelijk voor $k > j$.

Wel geldt:

Stelling VI.6.1. $S_{ij}^{s} \; S_{kl}^{s} = \xi_{kj}^{s} \; S_{il}^{s}$.

Bewijs: Uit stelling VI.2.3 (MR 66) en opmerking VI.2.1 (MR 64) volgt direct dat als $X \in S_n$ voldoet aan:

$p_i X n_l = \varepsilon_{n_l} X$ voor alle $p_i \in P_i$ en alle $n_l \in \mathcal{N}_l$ dat dan $X = \lambda P_i \sigma_{il} N_l$. Dit toegepast op $S_{ij}^{s} S_{kl}^{s}$ geeft $S_{ij}^{s} S_{kl}^{s} = \lambda P_i \sigma_{il} N_l$ en daarna op S_{il}^{s} geeft $S_{il}^{s} = \mu P_i \sigma_{il} N_l$. Daar $S_{il}^{s} \neq 0$, is ook $\mu \neq 0$ dus volgt

$$S_{ij}^{s} \; S_{kl}^{s} = \xi S_{il}^{s} \; .$$

Het is nu makkelijk in te zien, dat ξ niet van i en l (en dus alleen van j,k en s) afhangt (gebruik de betrekking $S_{ij}^{s} S_{jk}^{s} = S_{ik}^{s}$).
Door deze gehele bewijsgang wat explicieter te volgen kan men zelfs bewijzen, dat $\xi_{kj}^{s} = 0$, als $N_j P_k = 0$, dat $\xi_{kj}^{s} = +1$ (resp. -1), als $0 \neq N_j P_k = N'' P''$ (zie stelling VI.2.2) en als de permutatie die T_j in T" overvoert even (resp. oneven) is. Wij hebben dit echter niet nodig bij de volgende

Stelling VI.6.2. De matrix (ξ_{kj}^{s}) is niet singulier.
Uit de opmerking aan het begin van deze § volgt direct dat de matrix de driehoeksvorm heeft met louter enen in de hoofddiagonaal, dus $\det(\xi_{kj}^{s}) = 1$. Stel de inverse $(\xi_{kj}^{s})^{-1} = (\eta_{kj}^{s})$.

De elementen $Y_{ij}^{s} = \sum_k S_{ik}^{s} \eta_{kj}^{s}$ bezitten nu wel de begeerde eigenschap $Y_{ij}^{s} \; Y_{kl}^{t} = \delta^{st} \delta^{jk} \; Y_{il}^{s}$.

$$Y_{ij}^{s} \; Y_{kl}^{t} = \sum_{p,q} S_{ip}^{s} \eta_{pj}^{s} \; S_{kq}^{t} \eta_{ql}^{t} = \delta^{st} \sum_{p,q} S_{ip}^{s} \; S_{kq}^{s} \eta_{pj}^{s} \eta_{ql}^{s} =$$

$$\delta^{st} \sum_{p,q} S_{iq}^{s} \xi_{kp}^{s} \eta_{pj}^{s} \eta_{ql}^{s} = \delta^{st} \delta^{kj} \sum_{q} S_{iq}^{s} \eta_{ql}^{s} = \delta^{st} \delta^{kj} \; Y_{il}^{s} \; .$$

Hiermee hebben we dus de algebra S_n gesplitst in een directe som van k matrix algebra's in overeenstemming met het vorige hoofdstuk. Deze beschouwingen gaan door wanneer men de coëfficiënten die bij de opbouw van de operatoren uit S_n gebruikt worden neemt uit een willekeurig lichaam van de karakteristiek nul. Alle bewerkingen zijn nl. rationaal.

VII. De representaties van de volledige lineaire groep

door

A.H.M. Levelt

VII 1. Inleiding.

Onder de volledige lineaire groep $GL(n,K)$ verstaat men de groep der automorfismen van een n-dimensionale vectorruimte U_n over een commutatief lichaam K. Kiest men in U_n een basis $u_1,\dots,u_n$, dan vindt men de met $GL(n,K)$ isomorfe groep van alle niet-singuliere $n \times n$ matrices over K. Zoals steeds verstaan we onder een representatie van $GL(n,K)$ een homomorfe toevoeging van lineaire transformaties van een K-vectorruimte aan de elementen van $GL(n,K)$, waarbij aan het eenheidselement van $GL(n,K)$ de identieke transformatie is toegevoegd. In het bizonder is $GL(n,K)$ zelf een (irreducibele) representatie van $GL(n,K)$.

Zij G een K^*-groep (K^* is de multiplicatieve groep van K) van lineaire transformaties van een K-vectorruimte U en laat een representatie

$$g \longrightarrow \rho(g) \qquad\qquad (g \in G)$$

gegeven zijn. Hierin is $\rho(g)$ een lineaire transformatie van een K-vectorruimte V. Wanneer na keuze van bases in U en V de elementen van de aan $\rho(g)$ toegevoegde matrix polynomen blijken te zijn in de elementen van de aan g toegevoegde matrix (deze eigenschap is, zoals men gemakkelijk inziet, onafhankelijk van de speciale keuze der bases), dan noemt men deze representatie van G geheel-rationaal. Zijn deze polynomen homogeen van dezelfde graad ν, dan noemt men de representatie homogeen van polynoomgraad ν (niet te verwarren met de graad der representatie !).

Stelling VII.1.1. Is K een lichaam van karakteristiek O, dan is iedere geheel-rationale representatie $\rho(g)$ van een K^*- groep G van lineaire transformaties directe som van homogene representaties van verschillende polynoomgraad.

Bewijs. De elementen van G zijn lineaire transformaties van een K-vectorruimte U. De $\rho(g)$'s zijn lineaire transformatie van een K-vectorruimte V. Kies in deze vectorruimten bases $(u_1,\dots,u_n)$ resp. $(v_1,\dots,v_m)$. De aan g toegevoegde matrix zullen we bij deze basis door g^* voorstellen. Zo stellen we ook de aan $\rho(g)$ toegevoegde matrix bij deze speciale basis voor V door $\rho^*(g)$ voor. Laat e het eenheidselement van G zijn, dan is $e^*=I$ ($n\times n$ eenheidsmatrix). Daar de representatie geheel-rationaal is kunnen we $\rho^*(\lambda e)$ op de volgende wijze schrijven:

(1) $$\rho^*(\lambda e) = \rho_0^* + \lambda\rho_1^* + \ldots + \lambda^\nu \rho_\nu^* \qquad (\lambda \in K^*).$$

Hierin hangen de elementen van de $m\times m$ matrices $\rho_0^*, \ldots, \rho_\nu^*$ niet meer van λ af. Uit de representatieeigenschap $\rho^*(\lambda e)\rho^*(\mu e) = \rho^*(\lambda\mu e)$ volgt:

(2) $$\rho_i^* \rho_k^* = \delta_{ik}\rho_k^* \quad (i,k=0,\ldots,\nu).$$

Nemen we $\lambda=1$, dan vinden we

(3) $$\rho_0^* + \rho_1^* + \ldots + \rho_\nu^* = I \quad (m\times m \text{ eenheidsmatrix}).$$

We definiëren voor $\rho_i^* \neq$ nulmatrix V_i door

$$V_i = \rho_i^* V.$$

Uit de eigenschappen (2) en (3) volgt dan onmiddellijk dat deze V_i een directe splitsing van V leveren. Bovendien volgt uit de representatieeigenschap, dat voor $g\in G$ en willekeurige $\lambda\in K$ geldt

$$(\rho_0^* + \lambda\rho_1^* + \ldots + \lambda^\nu\rho_\nu^*)\,\rho^*(g) = \rho^*(g)(\rho_0^* + \lambda\rho_1^* + \ldots + \lambda^\nu\rho_\nu^*),$$

en dus

(4) $$\rho_i^*\rho^*(g) = \rho^*(g)\,\rho_i^* ,$$

waaruit volgt dat $\rho^*(g)$ de ruimte V_i in zichzelf afbeeldt. Laat $\rho_i^*(g)$ gedefiniëerd zijn door

(5) $$\rho_i^*(g) = \rho_i^*\rho^*(g),$$

dan is op grond van (3) en (5)

$$\rho^*(g) = \rho_0^*(g) + \ldots + \rho_\nu^*(g),$$

terwijl vanwege de representatieeigenschap en (2) en (4) geldt

$$\rho_i^*(g)\,\rho_j^*(h) = \rho_i^*\rho^*(g)\,\rho_j^*\rho^*(h) = \rho^*(g)\,\rho^*(h)\,\rho_i^*\,\rho_j^*$$
$$= \rho^*(gh)\;\delta_{ij}\,\rho_j^* = \delta_{ij}\;\rho_j^*(gh).$$

Tenslotte volgt uit

$$\rho_i^*(\lambda e) = \rho_i^*\rho^*(\lambda e) = \rho_i^*(\rho_0^* + \lambda\rho^*_1 + \ldots + \lambda^\nu\rho_\nu^*) = \lambda^i\,\rho_i^*,$$

dat

$$\rho_i^*(\lambda g) = \rho_i^*(\lambda e)\,\rho_i^*(g) = \lambda^i \rho_i^*\,\rho_i^*(g) = \lambda^i \rho_i^*(g),$$

zodat $\rho_i^*(g)$ een representatie van G levert, homogeen van polynoomgraad ν.

VII 2. Tensorproducten van vectorruimten.
Literatuur: N. Bourbaki. VII, livre II, chapitre III.

In deze paragraaf wordt gesproken over moduli over commutatieve ringen met eenheidselement. Is U zo'n modulus over een commutatieve ring K, dan noemt men U een unitaire modulus als voor alle $u \in U$ geldt

$$1.u = u,$$

waarin 1 het eenheidselement van K is. Alle beschouwde moduli worden unitair verondersteld. Onder het cartesisch product van moduli U en V over commutatieve ring K verstaan we de verzameling

$$U \times V = \{(u,v) \mid u \in U \text{ en } v \in V\}.$$

Onder een bilineaire afbeelding van $U \times V$ in een K-modulus W verstaan we een afbeelding f van $U \times V$ in W met de eigenschap dat voor iedere $u \in U$ de afbeelding $v \longrightarrow f(u,v)$ van V in W lineair is en eveneens voor iedere $v \in V$ de afbeelding $u \longrightarrow f(u,v)$ van U in W lineair is.

Een bilineaire vorm is een bilineaire afbeelding van $U \times V$ in K (opgevat als modulus over K).

Stelling VII.2.1. Zijn U en V twee moduli over K, dan bestaat er een modulus W (over K) en een bilineaire afbeelding φ van $U \times V$ in W met de volgende eigenschap:

Is f een bilineaire afbeelding van $U \times V$ in een modulus Z (over K), dan bestaat er een lineaire afbeelding g van W in Z zodat $f = g \cdot \varphi$ op $U \times V$.

Bovendien kan men de eis stellen dat W door $\varphi(U \times V)$ $(= \{\varphi(u,v) \mid u \in U \text{ en } v \in V\})$ wordt voortgebracht. W is dan op isomorfie na eenduidig bepaald.

Bewijs. We beschouwen de verzameling T der formele eindige sommen

$$\sum_i \lambda_i(u_i,v_i) \qquad (\lambda_i \in K,\ u_i \in U,\ v_i \in V),$$

waarin we $\sum_i \lambda_i(u_i,v_i)$ en $\sum_j \lambda_j'(u_j',v_j')$ gelijk noemen dan en slechts dan als voor alle $(u,v) \in U \times V$ geldt

$$\sum_{(u_i,v_i)=(u,v)} \lambda_i = \sum_{(u_j',v_j')=(u,v)} \lambda_j' .$$

In T definiëren we een optelling door de termen van $\sum_i \lambda_i(u_i,v_i)$ en $\sum_j \lambda_j'(u_j',v_j')$ tot een formele som te verenigen, en een vermenigvuldiging met elementen van K door

$$\mu \sum_i \lambda_i(u_i,v_i) = \sum_i (\mu\lambda_i)(u_i,v_i).$$

Men gaat gemakkelijk na dat T een K-modulus is. De formele som $1(u,v)$ wordt met (u,v) geïdentificeerd. Hierdoor is $U \times V$ in T ingebed. T is isomorf met de K-modulus van de afbeeldingen van $U \times V$ in K, die de eigenschap hebben dat slechts eindig veel beelden $\neq 0$ zijn.

Zij f een afbeelding van $U \times V$ in Z, dan kan deze worden voortgezet tot een lineaire afbeelding f^* van T in Z door:

$$f^*(\sum_i \lambda_i(u_i,v_i)) = \sum_i \lambda_i f((u_i,v_i)) .$$

Omgekeerd levert elke lineaire afbeelding g^* van T in Z door restrictie een afbeelding van $U \times V$ in Z. Gemakkelijk ziet men in, dat $Z^{U \times V}$ isomorf is met $\mathcal{L}(T,Z)$ (d.i. de modulus van alle lineaire afbeeldingen van T in Z).

Is f een bilineaire afbeelding van $U \times V$ in Z, dan is $f^*=0$ op elementen van T van de volgende gedaante

$$(u_1+u_2,v) - (u_1,v) - (u_2,v), \quad (u,v_1+v_2)-(u,v_1)-(u,v_2),$$
$$(\lambda u,v)-\lambda(u,v) \quad , \quad (u,\lambda v)-\lambda(u,v),$$

en, daar f^* lineair is, dus ook op de modulus T' die door deze elementen wordt voortgebracht. Omgekeerd: bij iedere f^* die nul is op T' behoort één f, die bilineair is op $U \times V$. Zij nu $W={}^T/T'$, dan is W ook een modulus over K. Laat φ^* de afbeelding zijn van T op W die aan een element van T de restklasse mod T' toevoegt. Aan iedere lineaire afbeelding f^* van T in Z die nul is op T' is een lineaire afbeelding f^{**} van W in Z toegevoegd met $f^*= f^{**} \cdot \varphi^*$.
Is f^{**} een lineaire afbeelding van W in Z, dan is er een lineaire afbeelding f^* van T in Z, die nul is op T' met

$$f^* = f^{**} \cdot \varphi^* .$$

Deze toevoeging $f^* \leftrightarrow f^{**}$ is eeneenduidig. Is φ de restrictie van φ^* tot $U \times V$, dan geldt dus voor bilineaire f:

$$f = f^{**} \cdot \varphi .$$

En dit is een eeneenduidige afbeelding van $\mathcal{L}(U,V;Z)$ (d.i. de modulus der bilineaire afbeeldingen van $U \times V$ in Z) op $\mathcal{L}(W;Z)$.

W wordt door $\varphi(U \times V)$ voortgebracht.
We noemen W het tensorproduct $U \otimes V$ van U en V. In het vervolg zullen we $\varphi((u,v))$ door $u \otimes v$ voorstellen.

Nu de eenduidigheid. Laten W_1, φ_1 en W_2, φ_2 K-moduli resp. afbeeldingen zijn met de eigenschappen uit de stelling, en laten $\varphi_1(U \times V)$ en $\varphi_2(U \times V)$ respectievelijk W_1 en W_2 voortbrengen. Er bestaat dan dus een lineaire afbeelding g_1 van W_1 in W_2 met de eigenschap $\varphi_2 = g_1 \cdot \varphi_1$. Ook bestaat er een lineaire afbeelding g_2 van W_2 in W_1 zodat $\varphi_1 = g_2 \cdot \varphi_2$. Hieruit vinden we $\varphi_1 = g_2 \cdot g_1 \cdot \varphi_1$ en, daar W_1 door $\varphi_1(U \times V)$ wordt voortgebracht, besluiten we dat $g_2 \cdot g_1$ de identieke afbeelding van W_1 op zichzelf is. Evenzo is $g_1 \cdot g_2$ de identieke afbeelding van W_2 op zichzelf. g_1 is een afbeelding van W_1 op W_2, want uit $g_2(W_2) \subset W_1$ volgt door toepassing van g_1

$$W_2 = g_1 \cdot g_2(W_2) \subset g_1(W_1).$$

Verder is g_1 eeneenduidig, want uit

$$g_1(w) = g_1(w'),$$

volgt door toepassing van g_2

$$w = g_2 \cdot g_1(w) = g_2 \cdot g_1(w') = w'.$$

<u>Samenvatting</u>: Zijn U,V en Z K-moduli, dan zijn de bilineaire afbeeldingen van $U \times V$ in Z en de lineaire afbeeldingen van $U \otimes V$ in Z eeneenduidig aan elkaar toegevoegd. Iedere lineaire afbeelding f van $U \otimes V$ in Z is bepaald wanneer alle $f(u \otimes v)$ gegeven zijn, en de toevoeging $(u,v) \longrightarrow f(u \otimes v)$ is een bilineaire afbeelding van $U \times V$ in Z. Omgekeerd, om een lineaire afbeelding van $U \otimes V$ in Z te definiëren is het voldoende om een afbeelding $(u,v) \longrightarrow g(u,v)$ van $U \times V$ in Z te geven en na te gaan of deze bilineair is. Er bestaat dan een eenduidig bepaalde lineaire afbeelding f van $U \otimes V$ in Z met $f(u \otimes v) = g(u,v)$.

Stelling VII.2.2. $U \otimes V$ en $V \otimes U$ zijn isomorf.

Bewijs. $V \otimes U$ is een K-modulus met de eigenschap dat, als een willekeurige bilineaire afbeelding f van $U \times V$ in een modulus Z gegeven is, er een lineaire afbeelding g van $V \otimes U$ in Z bestaat met

$$f((u,v)) = g(v \otimes u) \qquad (u \in U,\ v \in V).$$

Bovendien wordt $V \otimes U$ voortgebracht door $U \times V$ bij de bilineaire afbeelding $(u,v) \longrightarrow v \otimes u$. Dan is $V \otimes U$ dus op grond van stelling VII.2.1 isomorf met $U \otimes V$.

Opmerking VII.2.1. In het volgende is met "basis" steeds "lineair onafhankelijke basis" bedoeld.

Stelling VII.2.3. Zijn $U=(u_1,\ldots,u_n)$ en $V=(v_1,\ldots,v_m)$ vectorruimten over een commutatief lichaam K, dan is $U \otimes V$ een vectorruimte over K met basis $\{ u_i \otimes v_j : i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m \}$.

Bewijs. $U \otimes V$ wordt voortgebracht door de elementen van de gedaante $u \otimes v$ $(u \in U,\ v \in V)$. Ieder van deze is te schrijven als lineaire combinatie van $u_i \otimes v_j$, want op grond van de bilineariteit geldt:

$$u \otimes v = (\sum_i \lambda_i u_i) \otimes (\sum_j \mu_j v_j) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \ u_i \otimes v_j .$$

Nu bewijzen we dat de $u_i \otimes v_j$ lineair onafhankelijk zijn. Laat $\{z_{ij}\}$ $(i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m)$ een basis zijn voor een vectorruimte Z over K. Een bilineaire afbeelding f van $U \times V$ in Z zij gedefinieerd door

$$f(\sum_i \lambda_i u_i, \sum \mu_j v_j) = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j z_{ij}.$$

Er is nu een lineaire afbeelding g van $U \otimes V$ in Z met $f(u,v)=g(u \otimes v)$.
Zij $\sum \lambda_{ij}\ u_i \otimes v_j = 0$, dan is

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} z_{ij} = \sum_{i,j} \lambda_{ij} f(u_i,v_j) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} g(u_i \otimes v_j) =$$

$$= g(\sum_{i,j} \lambda_{ij} u_i \otimes v_j) = g(0)=0, \text{ en}$$

dus $\lambda_{ij}=0$ voor alle i en j.

Zijn U_1, U_2, V_1 en V_2 K-moduli, S_1 een lineaire afbeelding van U_1 in V_1 en S_2 een lineaire afbeelding van U_2 in V_2, dan is

$$(u_1,u_2) \mapsto (S_1 u_1) \otimes (S_2 u_2)$$

een bilineaire afbeelding van $U_1 \times U_2$ in $V_1 \otimes V_2$. Volgens stelling

VII.2.1 is er dus een lineaire afbeelding $g(S_1,S_2)$ van $U_1 \otimes U_2$ in $V_1 \otimes V_2$ met

(1) $$g(S_1,S_2)(u_1 \otimes u_2) = (S_1u_1) \otimes (S_2u_2) \ .$$

De verzameling $\mathcal{L}(U,V)$ der lineaire afbeeldingen van een K-modulus U in een K-modulus V is zelf een K-modulus, wanneer men voor S en T $\in \mathcal{L}(U,V)$ de som definieert door

$$(S+T)u = Su + Tu \text{ voor alle } u \in U,$$

en de vermenigvuldiging met $\lambda \in K$ door

$$(\lambda S)u = \lambda(Su) \text{ voor alle } u \in U.$$

Nu is $(S_1,S_2) \to g(S_1,S_2)$ een bilineaire afbeelding van $\mathcal{L}(U_1,V_1) \times \mathcal{L}(U_2,V_2)$ in $\mathcal{L}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ zoals men uit (1) gemakkelijk afleidt. Er is dus een lineaire afbeelding f van $\mathcal{L}(U_1,V_1) \otimes \mathcal{L}(U_2,V_2)$ in $\mathcal{L}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ met de eigenschap

$$g(S_1,S_2) = f\cdot(S_1 \otimes S_2).$$

In het algemeen is f geen isomorfe afbeelding van $\mathcal{L}(U_1,V_1) \otimes \mathcal{L}(U_2,V_2)$ op $\mathcal{L}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$. Wel geldt

Stelling VII.2.4. Zijn U_1, U_2, V_1 en V_2 vectorruimten over een commutatief lichaam K, dan zijn $\mathcal{L}(U_1,V_1) \otimes \mathcal{L}(U_2,V_2)$ en $\mathcal{L}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ isomorf.

Bewijs. Laten $u_1^{(i)},\ldots,u_{n_i}^{(i)}$ en $v_1^{(i)},\ldots,v_{m_i}^{(i)}$ bases zijn voor U_i en V_i $(i=1,2)$.

In het volgende doorlopen de indices h,h',j,j' de waarden $1,\ldots,n_i$ en k,l de waarden $1,\ldots,m_i$. Voor $i=1,2$ is nu ook $\mathcal{L}(U_i,V_i)$ een K-vectorruimte, waarin we als basis kiezen de lineaire afbeeldingen $S_{kh}^{(i)}$ $(k=1,\ldots,m_i;\ h=1,\ldots,n_i)$ gedefiniëerd door

$$S_{kh}^{(i)}\, u_j^{(i)} = \delta_{hj} v_k^{(i)} \ .$$

Stelling VII.2.3 leert ons dat $S_{kh}^{(1)} \otimes S_{lj}^{(2)}$ een basis vormen voor $\mathcal{L}(U_1,V_1) \otimes \mathcal{L}(U_2,V_2)$. Anderzijds vormen $u_h^{(1)} \otimes u_j^{(2)}$ en $v_k^{(1)} \otimes v_l^{(2)}$ bases voor $U_1 \otimes U_2$ resp. $V_1 \otimes V_2$. Een basis voor $\mathcal{L}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ vormen de T_{khlj} gedefiniëerd door

$$T_{khlj}\, u_{h'}^{(1)} \otimes u_{j'}^{(2)} = \delta_{hh'}\, \delta_{jj'} v_k^{(1)} \otimes v_l^{(2)}.$$

Beschouwen we nu de boven ingevoerde lineaire afbeelding f van $\mathcal{L}(U_1,V_1)\otimes\mathcal{L}(U_2,V_2)$ in $\mathcal{L}(U_1\otimes U_2,V_1\otimes V_2)$, dan is

$$\begin{aligned} f(S_{kh}^{(1)}\otimes S_{lj}^{(2)})(u_{h'}^{(1)}\otimes u_{j'}^{(2)}) &= g(S_{kh}^{(1)},S_{lj}^{(2)})u_{h'}^{(1)}\otimes u_{j'}^{(2)} \\ &= S_{kh}^{(1)}u_{h'}^{(1)}\otimes S_{lj}^{(2)}u_{j'}^{(2)}=(\delta_{hh'}v_k^{(1)})\otimes(\delta_{jj'}v_l^{(2)}) \\ &= T_{khlj}\, u_{h'}^{(1)}\otimes u_{j'}^{(2)} \end{aligned}$$

voor alle h' en j'. Door f wordt dus een basis van $\mathcal{L}(U_1,V_1)\otimes\mathcal{L}(U_2,V_2)$ op een basis van $\mathcal{L}(U_1\otimes U_2,V_1\otimes V_2)$ afgebeeld. Hiermee is de isomorfie bewezen.

Opmerking VII.2.2. Waar in het vervolg sprake is van vectorruimten kunnen we zonder bezwaar $g(S_1,S_2)$ door $S_1\otimes S_2$ vervangen. We noemen $S_1\otimes S_2$ het tensorproduct van S_1 en S_2.

In het volgende wordt het begrip tensorproduct uitgebreid tot producten van meer dan twee moduli. Van de stellingen, die generalisaties zijn van de voorafgaande, zullen geen bewijzen worden gegeven, indien deze geheel analoog zijn met de geleverde bewijzen.

Een multilineaire afbeelding f van $U_1\times\ldots\times U_\nu$ (cartesisch product van $n\geq 1$ moduli) in een modulus V is een afbeelding van $U_1\times\ldots\times U_\nu$ in V met de eigenschap, dat voor iedere $i(i=1,\ldots,\nu)$ en iedere vaste keuze van $u_j\in U_j(j=1,\ldots,\nu\,,j\neq i)$ f een lineaire afbeelding van U_i in V is.

Stelling VII.2.5. Zijn U_i $(i=1,\ldots,\nu)$ K-moduli, dan bestaat er een K-modulus W en een multilineaire afbeelding φ van $U_1\times\ldots\times U_\nu$ in W met de volgende eigenschap:

Is f een multilineaire afbeelding van $U_1\times\ldots\times U_\nu$ in een K-modulus Z, dan bestaat er een lineaire afbeelding g van W in Z zodanig, dat $f=g\cdot\varphi$ op $U_1\times\ldots\times U_\nu$.

Bovendien kan men eisen dat W door $\varphi(U_1\times\ldots\times U_\nu)$ wordt voortgebracht. W is dan op isomorfie na eenduidig bepaald.

Het tensorproduct W van $U_1,\ldots,U_\nu$ wordt op volkomen analoge wijze gedefiniëerd als in het bewijs van stelling VII.2.1, dus als factormodulus $^T/_{T'}$, waarin T de verzameling (modulus) is van de eindige formele lineaire combinaties $\sum_i\lambda_i(u_{1i},\ldots,u_{ni})$ der elementen van $U_1\times\ldots\times U_n$, en T' de deelmodulus van T, waarop "de multilineaire afbeeldingen nul zijn". φ is de restrictie van de canonieke afbeelding van T in $^T/_{T'}$ tot $U_1\times\ldots\times U_\nu$. We schrijven in het vervolg

$u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu$ i.p.v. $\varphi(u_1,\ldots,u_\nu)$. En voor W schrijven we $U_1 \otimes \ldots \otimes U_\nu$.

Stelling VII.2.6. Zijn U_i voor $i=1,\ldots,\nu$ K-moduli en is $j_1,\ldots,j_\nu$ een permutatie van $1,\ldots,\nu$, dan zijn $U_1 \otimes \ldots \otimes U_\nu$ en $U_{j_1} \otimes \ldots \otimes U_{j_\nu}$ isomorf.

Stelling VII.2.7. Zijn $U_i = (u_1^{(i)},\ldots,u_{n_i}^{(i)})$ voor $i=1,\ldots,\nu$ vectorruimten over een commutatief lichaam K, dan is $U_1 \otimes \ldots \otimes U_n$ een vectorruimte over K, die wordt voortgebracht door de elementen

$$u_{i_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes u_{i_\nu}^{(\nu)} \qquad (i_1=1,\ldots,n_1,\ i_2=1,\ldots,n_2,\ldots,i_\nu=1,\ldots,n_\nu).$$

Stelling VII.2.8. Zijn U_i en V_i voor $i=1,\ldots,\nu$ vectorruimten over K (commutatief lichaam), dan zijn $\mathcal{L}(U_1,V_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}(U_\nu,V_\nu)$ en $\mathcal{L}(U_1 \otimes \ldots \otimes U_\nu, V_1 \otimes \ldots \otimes V_\nu)$ isomorf.

Het slot van deze paragraaf is gewijd aan tensormachten van een modulus U. De ν-de tensormacht van U is de tensorruimte $U^{[\nu]} = U \otimes \ldots \otimes U$ (in het laatste product staan ν factoren). In deze tensormachten, waarvan we de elementen tensoren noemen, beschouwen we speciale lineaire transformaties. Laat σ een permutatie zijn der getallen $1,\ldots,\nu$. De afbeelding $(u_1,\ldots,u_\nu) \longrightarrow u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)}$ van $U \times \ldots \times U$ in $U^{[\nu]}$ is multilineair, dus is er een eenduidig bepaalde lineaire afbeelding σ^* van $U^{[\nu]}$ in zich met

$$\sigma^*(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)} .$$

Men kan de transformatie zó beschrijven: "In $u \otimes v \otimes \ldots \otimes z$ $(u,v,\ldots,z \in U)$ gaat het element op de i-de plaats naar de $\sigma(i)$-de plaats". Hieruit volgt onmiddellijk de associatieve wet.

$$(\tau\sigma)^*(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu) = \tau^*\sigma^*(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu).$$

Een tensor $t \in U^{[\nu]}$ heet symmetrisch, als $\sigma^* t = t$ voor alle $\sigma \in \mathfrak{S}_\nu$.

Stelling VII.2.9. De symmetrische tensoren vormen een deelmodulus van $U^{[\nu]}$, die, als U een vectorruimte over K is, wordt voortgebracht door de tensoren $x^{[\nu]} = x \otimes \ldots \otimes x$.

Bewijs. Uit de definitie van symmetrie en de lineariteit van σ^* volgt onmiddellijk dat de symmetrische tensoren een deelmodulus vormen. Verder zijn de tensoren $x^{[\nu]}$ symmetrisch. Zij $u_1,\ldots,u_n$ een basis voor U en $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_\nu \le n$. Dan is

$u(i_1,\dots,i_\nu) = (u_{i_1}+\dots+u_{i_\nu})^{[\nu]}$ een tensor van de vorm $x^{[\nu]}$ en een lineaire combinatie van basiselementen $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ van $U_n^{[\nu]}$. Aangezien $u_{i_1}\otimes\dots\otimes u_{i_\nu}$ slechts voorkomt in $u(i_1,\dots,i_\nu)$, zijn de $u(i_1,\dots,i_\nu)$ lineair onafhankelijk. Hun aantal is $\binom{n+\nu-1}{\nu}$, en dit is juist de dimensie van de deelruimte der symmetrische tensoren. Immers is $t=\sum t_{i_1\dots i_\nu} u_{i_1}\otimes\dots\otimes u_{i_\nu}$ symmetrisch, dan is $t_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(\nu)}} = t_{i_1\dots i_\nu}$ voor alle $\sigma\in\mathcal{S}_\nu$ en omgekeerd. Men kan dus de $t_{i_1\dots i_\nu}$ met $1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_\nu\le n$ willekeurig kiezen, de overige componenten zijn dan bepaald.

Wanneer geen mogelijkheid tot verwarring bestaat, wordt in het vervolg σ geschreven i.p.v. σ^*.

VII 3. De commutatorring van een representatie.

In deze paragraaf is K een commutatief lichaam met karakteristiek 0.

Definitie VII.3.1. Is A een K-ring (resp. K^*-groep), U een K-vectorruimte en $a\longrightarrow\rho(a)$ een (ring-)representatie van A in U, dan verstaat men onder de commutatorring B van de representatie ρ van A de verzameling der lineaire transformaties van U, die met alle $\rho(a)$ verwisselbaar zijn. (Dat B een K-ring is verifiëert men gemakkelijk).

In deze paragraaf zal de structuur van B onderzocht worden voor het geval A isomorf is met een directe som van volle matrixringen over K (dit is bijvoorbeeld het geval, wanneer K het lichaam der complexe getallen is, en A de groepsring van een eindige groep (stelling I.6.1)). Bovendien worden van zulke ringen A de representaties onderzocht.

Stelling VII.3.1. Zij A een directe som van ringen $A_1,\dots,A_k$, die ieder isomorf zijn met een volle matrixring over K. Zij U een K-vectorruimte en $a\longrightarrow\rho(a)$ een (ring-)representatie van A in U. Laat B de commutatorring van de representatie ρ van A zijn. Het eenheidselement e van A is te schrijven in de vorm $e=e_1+\dots+e_k$ met $e_i\in A_i$ $(i=1,\dots,k)$. Laat U_i gedefiniëerd zijn door $U_i=\rho(e_i)U$, dan gelden:
a. $U_1,\dots,U_k$ geven een directe splitsing van U. Iedere U_i is bij ρ invariant. Is $\rho_i(a)$ de restrictie van $\rho(a)$ tot U_i, dan is $a_i\longrightarrow\rho_i(a_i)$ een representatie van A_i in U_i en geldt voor alle $a\in A$

en $u \in U$

(VII.3.1) $\quad \rho(a)u = \rho_1(a_1)u_1 + \rho_2(a_2)u_2 + \ldots + \rho_k(a_k)u_k$,

waarin $a=a_1+\ldots+a_k$ met $a_j \in A_j$ en $u=u_1+\ldots+u_k$ met $u_j \in U_j$ $(j=1,\ldots,k)$.

b. Is $b \in B$, dan transformeert b iedere U_i in zich en is

$$b = b_1 + \ldots + b_k ,$$

waarin $b_i = \rho(e_i)b = b\,\rho(e_i)$ de ruimte U_i invariant laat en iedere U_j $(j\neq i)$ annuleert. Is $B_i = \{ b_i \mid b \in B \}$, dan zijn $B_1,\ldots,B_k$ elkaar annulerende tweezijdige idealen in B. B is directe som van $B_1,\ldots,B_k$. Laat b_i^* de restrictie zijn van b_i tot U_i en $B_i^* = \{ b_i^* \mid b_i \in B_i \}$, dan is B_i^* de commutatorring van de representatie ρ_i van A_i in U_i en geldt

(VII.3.2) $\quad bu = b_1^* u_1 + \ldots + b_k^* u_k$,

waarin $u_i = \rho(e_i)u \qquad (i=1,\ldots,k)$.

<u>Bewijs</u>. a. Daar $e_i e_j = \delta_{ij} e_j$ en $\rho(e) = \rho(e_1)+\ldots+\rho(e_k)$ is, is iedere $u \in U$ te schrijven in de vorm

$$u = \rho(e)u = \rho(e_1)u + \ldots + \rho(e_k)u,$$

terwijl uit

$$\rho(e_1)u_1 + \ldots + \rho(e_k)u_k = 0 \qquad (u_i \in U)$$

door linksvermenigvuldiging met $\rho(e_i)$ volgt dat $\rho(e_i)u_i=0$. Dus de splitsing in de U_i is direct. Is $v= \rho(e_i)u$ een element van U_i, dan is

$$\rho(a)v = \rho(a)\,\rho(e_i)u = \rho(e_i)\,\rho(a)u \in U_i,$$

dus iedere U_i is bij ρ invariant.

De toevoeging $a \to \rho_i(a)$ is een representatie van A_i in U_i want (K-)lineair, terwijl voor $u \in U_i$ en $a,b \in A_i$ geldt

$$\rho_i(ab)u = \rho(ab)u = \rho(a)\,\rho(b)u = \rho(a)\,\rho_i(b)u = \rho_i(a)\,\rho_i(b)u$$

(omdat $\rho_i(b)u \in U_i$), en

$$\rho_i(e_i)u = \rho_i(e)u = \rho(e)u = u.$$

Tenslotte geldt voor alle $a \in A$ en $u \in U$

$$\rho(a)u = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \rho(a_i)\,\rho(e_j)u$$

$$= \sum_{i=j}^{k} \sum_{j=1}^{k} \rho(a_i e_j)\,\rho(e_j)u = \sum_{i=1}^{k} \rho(a_i)\,\rho(e_i)u = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(a_i)u_i,$$

waarin $u_i = \rho(e_i)u \in U_i$.

b. Zij $v = \rho(e_i)u \in U_i$, dan is

$$bv = b\,\rho(e_i)u = \rho(e_i)bu \in U_i \;.$$

Verder is

$$b = b\,\rho(e) = b\,\rho(e_i) + \ldots + b\,\rho(e_k) = b_1 + \ldots + b_k \;.$$

Is $v = \rho(e_j)u \in U_j$, dan is voor $i \neq j$

$$b_i\ v = b\,\rho(e_i)\,\rho(e_j)u = 0,$$

terwijl voor $i=j$ geldt

$$b_i v = b\,\rho(e_i)\,\rho(e_i)u = b\,\rho(e_i)u = \rho(e_i)bu \in U_i \;.$$

B_i is een modulus met de eigenschap dat voor alle $c \in B$ en $b_i \in B$ geldt

$$c\ b_i = c\,\rho(e_i)b = \rho(e_i)c\ b \quad \in B_i \;,$$

analoog $b_i\ c \in B_i$, en bovendien voor $i \neq j$

$$b_i\ c_j = b\,\rho(e_i)\,\rho(e_j)c_j = 0.$$

Is $b_i^* \in B_i^*$, dan is voor alle $a_i \in A_i$ en $u_i \in U_i$

$$b_i^* \rho_i(a_i)u_i = b_i^* \rho(a_i)u_i = b_i\,\rho(a_i)u_i = \rho(a_i)b_i u_i =$$

$$= \rho(a_i)b_i^* u_i = \rho_i(a_i)b_i^* u_i \;.$$

Laat c een lineaire transformatie van U_i zijn, die verwisselbaar is met alle $\rho_i(a_i)$, dan is $b = c\,\rho(e_i) \in B_i$, want voor alle $a \in A$ en $u \in U$ is

$$b\,\rho(a)u = c\,\rho(e_i)\,\rho(a)u = c\,\rho(a_i)\,\rho(e_i)u$$

$$= c\,\rho_i(a_i)\,\rho(e_i)u = \rho_i(a_i)\,c\,\rho(e_i)u = \rho(a)c\,\rho(e_i)u$$

$$= \rho(a)b\,u\ ,$$

$$b = c\,\rho(e_i) = c\,\rho(e_i)\,\rho(e_i) = b\,\rho(e_i)\ .$$

Hieruit volgt dat $c=b^*$, dus $c \in B_i^*$.

Tenslotte is voor alle $b \in B$ en $u \in U$

$$bu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b\,\rho(e_i)\,\rho(e_j)u = \sum_{i=1}^{k} b_i u_i = \sum_{i=1}^{k} b_i^* u_i\ .$$

Op grond van de voorafgaande stelling, en in het bizonder de formules (VII.3.1) en (VII.3.2) kunnen we ons bij het onderzoek van de representaties van A en bijbehorende commutatorringen beperken tot het geval dat A zelf isoform is met een volle matrixring. Hierover spreekt de volgende stelling zich uit.

<u>Stelling VII.3.2.</u> Zij A isomorf met een volle matrixring over K, U een K-vectorruimte en $a \to \rho(a)$ een representatie van A in U, dan is deze representatie volledig reducibel, en alle irreducibele representaties zijn aequivalent. Is B de commutatorring van de representatie ρ van A in U, dan is B isomorf met een volle matrixring over K. Omgekeerd geldt, dat de $\rho(a)$ juist de lineaire transformaties zijn, die met alle transformaties B verwisselbaar zijn.

<u>Bewijs.</u> Daar A isomorf is met een volle $f \times f$ matrixring over K, zijn er in A elementen e_{ij} $(i,j=1,\ldots,f)$ met de eigenschap

(VII.3.3) $$e_{ij}\,e_{kl} = \delta_{jk}\,e_{il} \qquad (i,j,k,l=1,\ldots,f),$$

terwijl voor het eenheidselement e van A geldt

(VII.3.4) $$e = \sum_{i=1}^{f} e_{ii}\ .$$

Definiëer nu deelruimten V_i van U door

(VII.3.5) $$V_i = \rho(e_{ii})U \qquad (i=1,\ldots,f).$$

Men kan voor $i,j=1,\ldots,f$ de ruimte V_i in V_j afbeelden door

(VII.3.6) $$x \to \rho(e_{ji})x \qquad (x \in V_i)\ ,$$

en daar de afbeelding $x \to \rho(e_{ij})\,\rho(e_{ji})x$ identiek is op V_i volgt dat de afbeeldingen (VII.3.6) eeneenduidig zijn òp (zie eenduidig-

heidsbewijs in stelling VII.2.1).
Uit (VII.3.3), (VII.3.4) en (VII.3.5) volgt nu onmiddellijk, dat $V_1,\dots,V_f$ een directe splitsing van U leveren. We kiezen in V_1 een basis $v_1^{(1)},\dots,v_g^{(1)}$. Met behulp van de afbeeldingen (VII.3.6) definiëren we voor i=2,...,f een basis $v_1^{(i)},\dots,v_j^{(i)}$ in V_i, namelijk

$$v_j^{(i)} = \rho(e_{i1})\, v_j^{(1)} \qquad (j=1,\dots,g) . \tag{VII.3.7}$$

(Deze formule is geldig voor i=1).

Hoe ziet de matrix eruit, die bij deze basiskeuze in U aan $\rho(a)$ is toegevoegd? Zij $a \in A$ het element

$$a = \sum_{k=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} \alpha_{hk}\, e_{hk} , \tag{VII.3.8}$$

dan is

$$\rho(a)v_j^{(i)} = \sum_{h=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} \alpha_{hk}\rho(e_{hk})\, v_j^{(i)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} \alpha_{hk}\, \rho(e_{hk})\, \rho(e_{i1}) v_j^{(1)} = \sum_{h=1}^{f} \alpha_{hi}\rho(e_{h1}) v_j^{(1)},$$

zodat we vinden

$$\rho(a)v_j^{(i)} = \sum_{h=1}^{f} \alpha_{hi}\, v_j^{(h)} \qquad (i=1,\dots,f;\ j=1,\dots,g). \tag{VII.3.10}$$

Laat U_j de ruimte $(v_j^{(1)},\dots,v_j^{(f)})$ zijn (j=1,...,g), dan volgt uit (VII.3.10), dat iedere U_j in zichzelf wordt afgebeeld bij de transformatie $\rho(a)$, dat U_j irreducibel is (alle α_{hi} in (VII.3.10) komen voor, daar A isomorf is met een volle matrixring over K), en dat bij deze speciale baseskeuze de $\rho(a)$ in iedere U_j een transformatie induceert met dezelfde matrix (α_{hi}), zodat ρ uiteenvalt in irreducibele representaties, aequivalent met de representatie Γ van A in U_1 gegeven door (VII.3.10) met j=1.
Zij nu b een lineaire transformatie van U, die verwisselbaar is met alle $\rho(a)$, en laat de $v_j^{(i)}$-basis door b getransformeerd worden volgens

$$b\, v_j^{(i)} = \sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{f} \beta_{l\ j}^{k\ i}\, v_l^{(k)} \qquad (i=1,\dots,f;\ j=1,\dots,g), \tag{VII.3.11}$$

dan volgt uit $\rho(a)\, b\, v_j^{(i)} = b\, \rho(a)\, v_j^{(i)}$ dat

$$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{f} \sum_{h=1}^{f} \beta_{l\ j}^{k\ i}\, \alpha_{hk} v_l^{(h)} = \sum_{h=1}^{f} \sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{f} \beta_{l\ j}^{k\ h}\, \alpha_{hi} v_l^{(k)} . \tag{VII.3.12}$$

Kiezen we nu $\alpha_{hk} = \delta_{hh'}\,\delta_{kk'}$, dan volgt uit (VII.3.12)

$$\beta_{l\,j}^{k'i}\,\delta_{hh'} = \beta_{l\,j}^{h\,h'}\,\delta_{ik'}\ ,$$

zodat

$$\beta_{l\,j}^{h\,h'} = \delta_{hh'}\,\beta_{lj} \qquad (h,h'=1,\dots,f;\ l,j=1,\dots,g). \tag{VII.3.13}$$

Men toont gemakkelijk aan, dat b met alle $\rho(a)$ verwisselbaar is, wanneer de matrix de eigenschap (VII.3.13) heeft (β_{lj} willekeurig in K gekozen).
Uit (VII.3.11) en (VII.3.13) volgt voor vaste i

$$b\,v_j^{(i)} = \sum_{l=1}^{g} \beta_{lj}\,v_l^{(i)}, \tag{VII.3.14}$$

waaruit blijkt dat de ruimten V_i bij B invariant zijn. Daar de β_{lj} willekeurig in K genomen kunnen worden, komen alle lineaire afbeeldingen van V_i in zich voor en is V dus irreducibel.
De restricties van $b \in B$ tot $V_1,\dots,V_f$ vormen irreducibele aequivalente(getrouwe) matrixrepresentaties van B, zoals uit (VII.3.14) onmiddellijk volgt. Laat $b \to \Lambda(b)$ een met deze representaties aequivalente representatie van B zijn. B zelf is isomorf met een volle matrixring, omdat Λ dit is.
De laatste uitspraak der stelling verifiëert men gemakkelijk door rollen van $\rho(a)$ en b te verwisselen.

<u>Stelling VII.3.3.</u> Zij A isomorf met een volle matrixring over K, U een K-vectorruimte en $a \to \rho(a)$ een representatie van A in U. Is B de commutatorring van de representatie ρ, dan zijn de bij B invariante deelruimten V en de rechtsidealen r van A eeneenduidig aan elkaar toegevoegd door de afbeeldingen $r \to \varphi(r)$ en $V \to \psi(V)$ gedefinieerd door

$$\varphi(r) = \{\rho(x)u \mid x \in r,\ u \in U\}, \tag{VII.3.15}$$

$$\psi(V) = \{x \mid x \in A \text{ en } \rho(x)u \in V \text{ voor alle } u \in U\}. \tag{VII.3.16}$$

<u>Bewijs.</u> Dat $\varphi(r)$ een bij B invariante deelruimte is, en $\psi(V)$ een rechtsideaal in A verifiëert men onmiddellijk. Verder volgt ook onmiddellijk uit de definities van φ en ψ

$$r_1 \subset r_2 \Longrightarrow \varphi(r_1) \subset \varphi(r_2), \tag{VII.3.17}$$

(VII.3.18) $\quad V_1 \subset V_2 \Rightarrow \psi(V_1) \subset \psi(V_2)$.

Nu bewijzen we

(VII.3.19) $\quad r \subset \psi(\varphi(r))$.

Stel $x \in r$, dan is $\rho(x)u \in \varphi(r)$ voor alle $u \in U$, dus $x \in \psi(\varphi(r))$. Ook geldt

(VII.3.20) $\quad \varphi(\psi(V)) \subset V$,

want stel $v \in \varphi(\psi(V))$, dan is er een $y \in \psi(V)$ en een $u' \in U$ zó, dat $v = \rho(y)u'$. Omdat $y \in \psi(V)$ geldt $\rho(y)u \in V$ voor alle $u \in U$, dus $v = \rho(y)u' \in V$. Uit (VII.3.18) en (VII.3.20) volgt $\psi(\varphi(\psi(V))) \subset \psi(V)$. Substitutie van $r = \psi(V)$ in (VII.3.19) levert $\psi(V) \subset \psi(\varphi(\psi(V)))$, zodat dus geldt

(VII.3.21) $\quad \psi(V) = \psi(\varphi(\psi(V)))$.

Analoog bewijst men

(VII.3.22) $\quad \varphi(r) = \varphi(\psi(\varphi(r)))$.

De stelling is bewezen, wanneer is aangetoond dat voor alle r en V gelden

(VII.3.23) $\quad r = \psi(\varphi(r))$,

(VII.3.24) $\quad V = \varphi(\psi(V))$.

Op grond van (VII.3.21) en (VII.3.22) is het voldoende te bewijzen, dat bij iedere r een V bestaat met $r = \psi(V)$, en dat er bij iedere V een r bestaat met $V = \varphi(r)$. Laat r gegeven zijn. Dan is er een idempotent e_1, zodat $r = e_1A$. Laat $V = \rho(e_1)U$ zijn, dan is V een B-invariante deelruimte. We tonen aan, $r = \psi(V)$. Als $x \in r$, dan is er een $a \in A$ met $x = e_1a$; dus is $\rho(x)u = \rho(e_1a)u = \rho(e_1)\rho(a)u \in V$ voor alle $u \in U$. Bijgevolg is $x \in \psi(V)$. Als $x \in \psi(V)$, dan is $\rho(x)u = \rho(e_1)\rho(x)u = \rho(e_1x)u$ voor alle $u \in U$, dus $\rho(x) = \rho(e_1x)$, en daar ρ getrouw is, geldt $x = e_1x$. Dus $x \in r$.

Laat nu V gegeven zijn. Vanwege de volle reducibiliteit van B is er een B-invariante deelruimte V' te vinden met $U = V + V'$. De projectie P langs V' op V is een lineaire transformatie, die met alle transformaties van B verwisselbaar is. Er is dus een $d \in A$ zodat $P = \rho(d)$ (stelling VII.3.2). Stel nu $r = \{da \mid a \in A\}$. We tonen aan dat $V = \varphi(r)$ is. Als $v \in V$, dan is $v = Pv = \rho(d)v \in \varphi(r)$. Als $v \in \varphi(r)$, dan is er een $a \in A$ en een $u \in U$ zodat $v = \rho(da)u = \rho(d)\rho(a)u = P\rho(a)u \in V$.

In het voorafgaande is gebleken, dat de rechtsidealen in A belangrijk zijn in verband met de commutatorring. Voor het geval A groepsring is van een eindige groep wordt nu een eenvoudig procédé gegeven om de rechtsidealen in A te vinden uit de linksidealen.

Stelling VII.3.6. Zij K een deellichaam van het lichaam der complexe getallen, dat met ieder getal de complex geconjugeerde bevat, G een eindige groep en O_G de groepsring van G over K. Dan is de afbeelding

$$\text{(VII.3.26)} \qquad x = \sum_{g \in G} \xi_g\, g \longrightarrow \hat{x} = \sum_{g \in G} \overline{\xi}_g\, g^{-1}$$

een anti-automorfie van O_G, waarbij tweezijdige idealen invariant zijn. Brengt a een minimaal linksideaal l voort, dan brengt $\hat{a}$ een minimaal rechtsideaal $r = \hat{l} = \{\hat{x} \mid x \in l\}$ voort (en omgekeerd). r en l worden ook voortgebracht door $\hat{a}a$.

Bewijs. De afbeelding (VII.3.26) is een afbeelding òp, immers $x \in O_G$ is beeld van $\hat{x}$. De lineariteit der afbeelding is triviaal. Verder geldt, als

$$x = \sum_{g \in G} \xi_g\, g \,, \qquad y = \sum_{g \in G} \eta_g\, g \,,$$

$$xy = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{h \in G} \xi_h\, \eta_{h^{-1}g} \Big)\, g \,,$$

zodat dus

$$\widehat{xy} = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{h \in G} \overline{\xi}_h\, \overline{\eta}_{h^{-1}g} \Big)\, g^{-1} = \hat{y}\, \hat{x} \,.$$

Dat (minimale) linksidealen in (minimale) rechtsidealen overgaan en omgekeerd volgt direkt uit de anti-automorfie. Laat het minimale linksideaal l nu door a worden voortgebracht, dan volgt uit

$$a = \sum_{g \in G} \alpha_g\, g \,,$$

dat

$$\hat{a}\, a = \sum_{g \in G} \overline{\alpha}_g\, g^{-1} \sum_{h \in G} \alpha_h\, h = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{h \in G} \overline{\alpha}_h \alpha_{hg} \Big)\, g.$$

De coëfficient van het eenheidselement van G in deze laatste uitdrukking is

$$\sum_{h \in G} |\alpha_h|^2 \neq 0 \,,$$

dus $\hat{a}$ a brengt een linksideaal voort $\neq 0$. Dit linksideaal is bevat in l. Daar l minimaal is, moet het door $\hat{a}$ a voortgebrachte linksideaal $=$l zijn. Analoog bewijst men dat $\hat{a}$ a ook r voortbrengt.
Is $\mathfrak{a}$ een minimaal tweezijdig ideaal in O_G, dan is $\hat{\mathfrak{a}}$ ook een minimaal tweezijdig ideaal. Brengt a een minimaal linksideaal l voort, dat tot $\mathfrak{a}$ behoort, dan behoort $\hat{a}$ a tot l dus tot $\mathfrak{a}$ en ook tot $\hat{l}$ dus tot $\hat{\mathfrak{a}}$. $\mathfrak{a}$ en $\hat{\mathfrak{a}}$ hebben een element $\neq 0$ gemeen en vallen dus samen.

<u>Stelling VII.3.4.</u> Gegevens als in stelling VII.3.3.
Bij de door (VII.3.15) en (VII.3.16) gedefinieerde toevoeging corresponderen de minimale rechtsidealen in A eeneenduidig met de bij B irreducibele invariante deelruimten.

<u>Bewijs.</u> Dit volgt onmiddellijk uit stelling VII.3.3 en een precisering van (VII.3.17) en (VII.3.18)

$$r_1 \subset\subset r_2 \Rightarrow \varphi(r_1) \subset\subset \varphi(r_2),$$
$$V_1 \subset\subset V_2 \Rightarrow \psi(V_1) \subset\subset \psi(V_2).$$

Uit $r_1 \subset\subset r_2$ kan namelijk niet volgen $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, daar toepassing van ψ geeft $r_1 = r_2$. Analoog bewijst men de tweede relatie.

<u>Stelling VII.3.5.</u> Gegevens als in stelling VII.3.1. Is $b \in B$ en $a \in A$, dan geldt

(VII.3.25) $$Sp(b\,\rho(a)) = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(a)\,\varphi_i(b),$$

waarin χ_i het spoor is van de irreducibele representatie Γ_i van A en φ_i het spoor van de irreducibele representatie Δ_i van B (definities zie bewijs stelling VII.3.2).

<u>Bewijs.</u> Uit de formules (VII.3.1) en (VII.3.2) volgt

$$b\,\rho(a) = b_1^* \ \rho_1(a)\,\rho(e_1) + \ldots \quad + b_k^* \ \rho_k(a)\,\rho(e_k),$$

dus

$$Sp\ b\,\rho(a) = \sum_{i=1}^{k} S_p^{(i)}\ b_i^*\ \rho_i(a)\ .$$

In het rechterlid worden de sporen gevormd in de deelruimten $U_1, \ldots, U_k$, waarin U uiteenvalt (stelling VII.3.1). Uit de formules (VII.3.10) en (VII.3.14) volgt met de daar gebruikte notatie

$$b\,\rho(a) v_j^{(i)} = \sum_{h=1}^{f} \sum_{l=1}^{g} \alpha_{hi}\,\beta_{lj}\ v_l^{(h)},$$

zodat $Sp(b\,\rho(a)) = Sp\,\Gamma(a) \cdot Sp\,\Delta(b)$. Passen we dit toe met $b = b_i^*$ en $\rho = \rho_i$ $(i=1,\ldots,k)$ dan volgt (VII.3.25).

Stelling VII.3.7. Zij A een K-ring met de eigenschap dat

$$A = A_1 + \ldots + A_k,$$

waarin A_i isomorf is met een volle matrixring $f_i \times f_i$ over K en laat voor $i=1,\ldots,k$

$$A_i = r_1^{(i)} + \ldots + r_{f_i}^{(i)}$$

een direkte splitsing zijn van A_i in minimale rechtsidealen. Zij $a \longrightarrow \rho(a)$ een representatie van A in een K-vectorruimte U en B de commutatorring van ρ. Is verder $U_j^{(i)}$ gedefiniëerd door

(VII.3.26) $\quad U_j^{(i)} = \left\{ \rho(x)u \mid x \in r_j^{(i)},\ u \in U \right\} \quad (i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,f_i)$.

dan is U direkte som der $U_j^{(i)}$. $U_j^{(i)}$ zijn bij B irreducibele invariante deelruimten van U met de eigenschap dat $U_j^{(i)}$'s met dezelfde bovenindex aequivalent zijn en met verschillende bovenindex inaequivalent (tenzij ze beide =0 zijn).

Bewijs: Laat $U^{(i)} = \left\{ \rho(x)u \mid x \in A_i, u \in U \right\}$ zijn, dan is de splitsing van U in $U^{(1)},\ldots,U^{(k)}$ direkt (stelling VII.3.1). De som $U_1^{(i)} + \ldots + U_{f_i}^{(i)}$ is eveneens direkt, want als we ons tot A_i en $U^{(i)}$ beperken, is (VII.3.26) niets anders dan de afbeelding φ gedefiniëerd door (VII.3.15). Zou b.v. $U_1^{(i)} \cap (U_2^{(i)} + \ldots + U_{f_i}^{(i)}) \neq 0$ zijn, dan blijkt door toepassing van ψ (VII.3.16) dat ook $r_1^{(i)} \cap (r_2^{(i)} + \ldots + r_{f_i}^{(i)}) \neq 0$ is. Is $e^{(i)}$ het eenheidselement van A_i en $e^{(i)} = e_1^{(i)} + \ldots + e_{f_i}^{(i)}$ met $e_j^{(i)} \in r_j^{(i)}$, dan is $u = \rho(e^{(i)})u = \rho(e_1^{(i)})u + \ldots + \rho(e_{f_i}^{(i)})u$ voor iedere $u \in U^{(i)}$. $U_1^{(i)} + \ldots + U_{f_i}^{(i)}$ is dus een splitsing van $U^{(i)}$. Uit stelling VII.3.2 volgt onmiddellijk, dat $U_1^{(i)},\ldots,U_{f_i}^{(i)}$ aequivalent zijn. Is $i \neq j$ en zijn $U_1^{(i)}$ en $U_1^{(j)} \neq 0$, dan kunnen ze niet aequivalent zijn, daar $e^{(i)} \in B$, $\rho(e^{(i)})u^{(i)} \neq 0$ als $u^{(i)} \neq 0$ in $U_1^{(i)}$ zit, terwijl $\rho(e^{(i)})u^{(j)} = 0$ is als $u^{(j)} \in U_1^{(j)}$.

VII.4. De geheel-rationale representaties van GL(n,K).

Het in VII.2 gedefiniëerde tensorproduct van lineaire afbeeldingen biedt ons een mogelijkheid geheel-rationale representaties der volledige lineaire groep te verkrijgen. GL(n,K) is in VII.1 gedefinieerd als groep van lineaire afbeeldingen van een n-dimensionale K-vectorruimte U_n op zichzelf. K is in het volgende steeds een commutatief lichaam met karakteristiek O. We schrijven verder

GL(n) in plaats van GL(n,K). Aan iedere lineaire transformatie $g \in GL(n)$ van U_n is een lineaire transformatie $g^{[\nu]}$ van $U_n^{[\nu]}$ toegevoegd door

$$g^{[\nu]}\, u \otimes v \otimes \ldots \otimes z = gu \otimes gv \otimes \ldots \otimes gz \qquad (u,v,\ldots,z \in U_n).$$

Dat deze toevoeging een representatie van GL(n) is (het product van twee lineaire transformaties $h^{[\nu]}$ en $g^{[\nu]}$ is op de gebruikelijke wijze gedefiniëerd, zodat $h^{[\nu]} g^{[\nu]} = (hg)^{[\nu]}$) verifiëert men gemakkelijk, evenals het feit dat deze representatie homogeen is van polynoomgraad ν. In deze paragraaf zal bewezen worden, dat de representatie $g \longrightarrow g^{[\nu]}$ (over K) uiteenvalt in absoluut irreducibele representaties (die natuurlijk homogeen zijn van polynoomgraad ν). Verder wordt bewezen dat iedere homogene representatie van polynoomgraad ν van GL(n) uiteenvalt in irreducibele representaties aequivalent met de bovengenoemde. Deze resultaten leveren met stelling VII.1.1 dus de volledige oplossing van het probleem der geheelrationale representaties van GL(n). Tenslotte worden in deze paragraaf met het oog op de afleiding van de formule van Frobenius de bij de transformaties $g^{[\nu]}$ irreducibele invariante deelruimten nog expliciet aangegeven.

<u>Stelling VII.4.1.</u> Zij B de verzameling der lineaire transformaties van $U_n^{[\nu]}$, voortgebracht door

$$b \otimes \ldots \otimes b \qquad\qquad b \in \mathcal{L}(U_n, U_n).$$

Dan is B de commutatorring van de representatie $\sigma \longrightarrow \sigma^*$ van $\mathcal{S}_\nu$ in $U_n^{[\nu]}$ (gedefiniëerd in VII.2.p.83. Deze representatie is onmiddellijk uit te breiden tot een representatie van de groepsring A van $\mathcal{S}_\nu$ over K (zie I.6)).

<u>Bewijs.</u> Daar $\mathcal{L}(U_n,U_n)$ een vectorruimte is kunnen we stelling VII.2.9 toepassen en blijkt dus, dat B de deelruimte is der symmetrische tensoren van $\mathcal{L}(U_n,U_n) \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}(U_n,U_n)$. We noemen de elementen van B bisymmetrische transformaties. Dat ieder element van B verwisselbaar is met alle σ^* volgt uit het feit dat de elementen $b \otimes \ldots \otimes b \in B$ met alle σ^* verwisselbaar zijn, immers

$$\sigma^*(b \otimes \ldots \otimes b)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu) = \sigma^*(bu_1 \otimes \ldots \otimes bu_\nu)$$

$$= bu_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes bu_{\sigma^{-1}(\nu)} = (b \otimes \ldots \otimes b)(u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)});$$

$$= (b \otimes \ldots \otimes b)\sigma^* u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu$$

voor alle $u_1,\ldots,u_\nu \in U_n$. Omgekeerd, iedere lineaire transformatie van $U_n^{[\nu]}$ is volgens stelling VII.2.8 te schrijven in de vorm $\sum_i \lambda_i b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu}$ $(b_{i1},\ldots,b_{i1} \in \mathcal{L}(U_n,U_n),\ \lambda_i \in K)$. Is deze lineaire transformatie verwisselbaar met alle σ^*, dan is

$$\text{(VII.4.1)}\qquad \sigma^*(\sum_i \lambda_i\, b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu})(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu)$$

$$= (\sum_i \lambda_i\, b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu})\sigma^*(u_1 \otimes \ldots \otimes u_\nu)$$

voor alle $u_1,\ldots,u_\nu \in U_n$. Voor het linkerlid van (VII.4.1) kunnen we schrijven

$$\sigma^* \sum_i \lambda_i b_{i1}u_1 \otimes \ldots \otimes b_{i\nu}\, u_\nu = \sum_i \lambda_i b_{i\sigma^{-1}(1)} u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes b_{i\sigma^{-1}(\nu)} u_{\sigma^{-1}(\nu)}$$

$$= (\sum_i \lambda_i b_{i\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes b_{i\sigma^{-1}(\nu)})(u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)}),$$

terwijl het rechterlid gelijk is aan

$$(\sum_i \lambda_i b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu})(u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)}),$$

zodat voor alle $\sigma \in \mathcal{S}_\nu$ en $u_1,\ldots,u_\nu \in U_n$ geldt

$$(\sum_i \lambda_i b_{i\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes b_{i\sigma^{-1}(\nu)})(u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)}) =$$

$$= (\sum_i \lambda_i b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu})(u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(\nu)}).$$

Hieruit volgt dat voor alle $\sigma \in \mathcal{S}_\nu$

$$\sum_i \lambda_i\, b_{i\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes b_{i\sigma^{-1}(\nu)} = \sum_i \lambda_i b_{i1} \otimes \ldots \otimes b_{i\nu},$$

zodat het rechterlid een symmetrische tensor is uit $\mathcal{L}(U_n,U_n) \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}(U_n,U_n)$, en dus een element van B is.

<u>Stelling VII.4.2.</u> De ring B der bisymmetrische transformatie van $U_n^{[\nu]}$ wordt opgespannen door de elementen

$$g^{[\nu]} = g \otimes \ldots \otimes g \qquad (g \in GL(n)).$$

Bewijs: De tensoren $g^{[\nu]}=g\otimes\ldots\otimes g$ $(g\in GL(n))$ brengen een lineaire deelruimte B_1 van B voort. Stel dat B_1 een echte deelruimte van B is. Er is dan een $b\otimes\ldots\otimes b\in B$ $(b\in\mathcal{L}(U_n,U_n))$, die niet tot B_1 behoort. Met uitzondering van eindige vele λ's geldt $b+\lambda e\in GL(n)$. Nu is

$$(b+\lambda e)^{[\nu]}=(b+\lambda e)\otimes(b+\lambda e)\otimes\ldots\otimes(b+\lambda e)=t_0+\lambda t_1+\ldots+\lambda^\nu t_\nu,$$

waarin $t_0,t_1,\ldots,t_\nu$ elementen van B zijn die niet van λ afhangen $(t_0=b\otimes\ldots\otimes b)$. Uit het voorgaande volgt, dat $t_0+\lambda t_1+\ldots+\lambda^\nu t_\nu\in B_1$ voor oneindig veel waarden van λ, waaruit men gemakkelijk besluit dat $t_0,\ldots,t_\nu\in B_1$ geldt, in strijd met $t_0\notin B_1$.

Stelling VII.4.3. De ring B der bisymmetrische transformaties van $U_n^{[\nu]}$ is isomorf met een direkte som van volle matrixringen (over K). Iedere representatie van B valt uiteen in irreducibele, die ieder aequivalent zijn met één der representaties Δ, geleverd door de bij B irreducibele invariante deelruimten waarin $U_n^{[\nu]}$ uiteenvalt.

Bewijs. Daar B commutatorring is van de representatie $\sigma\to\sigma^*$ van de groepsring A van $\mathcal{S}_\nu$, en A isomorf is met een direkte som van volle matrixringen over K (zie VI.5), geldt dit laatste ook voor B op grond van de stellingen VII.3.1 en VII.3.2.

Door toepassing van dezelfde stellingen op B i.p.v. A blijkt dat iedere representatie $b\to\rho(b)$ van B uiteenvalt in irreducibele representaties. Is $B=B_1+\ldots+B_l$ een direkte splitsing van B in ringen isomorf met volle matrixringen, dan zijn er slechts l inaequivalente irreducibele representaties van B (stellingen VII.3.1 en VII.3.2); met iedere B_i correspondeert één irreducibele representatie van B. Deze komen alle voor in de identieke representatie van B in $U_n^{[\nu]}$ op grond van dezelfde stellingen.

Stelling VII.4.4. Zij $g\longrightarrow\rho(g)$ een homogene representatie van $GL(n)$ van polynoomgraad ν, dan valt ρ uiteen in absoluut irreducibele representaties, die ieder aequivalent zijn met één der representaties $g\longrightarrow\Delta(g^{[\nu]})$ van $GL(n)$ (zie stelling VII.4.3).

Bewijs. We kiezen een basis in U_n, waardoor aan g (lineaire afbeelding van U_n op zichzelf) een matrix g^* is toegevoegd. Hierdoor is aan $g^{[\nu]}$ ook een matrix $g^{[\nu]*}$ toegevoegd, waarvan de elementen juist alle producten zijn van ν elementen van g^*. We kiezen ook

een basis in de ruimte waarop ρ werkt. Hierdoor is aan $\rho(g)$ een matrix $\rho^*(g)$ toegevoegd. De elementen $\rho_{ij}(g)$ van $\rho^*(g)$ zijn homogene polynomen van de graad ν in de elementen van $g^{[\nu]*}$, en bijgevolg lineaire vormen $\varphi_{ij}(g^{[\nu]*})$ in de elementen van $g^{[\nu]*}$.
Voegen we aan $b = \sum_i \lambda_i g_i^{[\nu]}$ nu de matrix $\varphi(b)$ toe, gedefiniëerd door

$$(\varphi(b))_{ij} = \varphi_{ij}(\sum_k \lambda_k g_k^{[\nu]*}),$$

dan is deze toevoeging een representatie van B, want uit de lineariteit van φ_{ij} volgt dat $b \rightarrow \varphi(b)$ lineair is, terwijl

$$\begin{aligned}
&\varphi (\sum_k \lambda_k g_k^{[\nu]}) \ \varphi (\sum_l \mu_l h_l^{[\nu]}) \\
&= \sum_k \sum_l \lambda_k \mu_l \ \varphi(g_k^{[\nu]}) \ \varphi(h_l^{[\nu]}) \\
&= \sum_k \sum_l \lambda_k \mu_l \ \rho^*(g_k) \rho^*(h_l) \\
&= \sum_k \sum_l \lambda_k \mu_l \rho^*(g_k h_l) \\
&= \sum_k \sum_l \lambda_k \mu_l \ \varphi(g_k^{[\nu]} h_l^{[\nu]}) \\
&= \varphi (\sum_k \lambda_k g_k^{[\nu]} \cdot \sum_l \mu_l h_l^{[\nu]}).
\end{aligned}$$

Stelling VII.4.3. zegt nu dat φ uiteenvalt in irreducibele representaties, die aequivalent zijn met de daar genoemde representaties Δ. Hieruit volgt onmiddellijk de juistheid van de in de stelling uitgesproken bewering.

<u>Definitie VII.4.1.</u> Een symmetrieklasse van $U_n^{[\nu]}$ is een deelruimte van $U_n^{[\nu]}$ die invariant is en irreducibel bij de bisymmetrische transformaties.

In het volgende zal een direkte splitsing van $U_n^{[\nu]}$ in symmetrieklassen worden aangegeven. Stelling VII.3.7 leert ons hoe we een dergelijke splitsing kunnen vinden. We dienen daartoe uit te gaan van een splitsing van A in minimale rechtsidealen. In hoofdstuk VI zijn met behulp van de zgn. standaardtableaux een stel (met betrekking tot de groepsring) onafhankelijke primitieve idempotenten geconstrueerd met de eigenschap, dat de door hen voortgebrachte linksidealen de groepsring van de symmetrische groep opspannen. Omdat de rechtsidealen die door deze idempotenten worden voortgebracht ook onafhankelijk zijn (dit analogon van stelling VI.4.2 bewijst men gemakkelijk) leveren ze een direkte splitsing van de groepsring A in minimale rechtsidealen. Idempotenten die aequivalente linksidealen voortbrengen, brengen ook aequivalente rechtsidealen voort die tot hetzelfde minimale tweezijdige van A behoren als de linksidealen. Zijn $S_1,\dots,S_k$ de verschillende schema's met ν hokjes, en zijn $P_1^{(i)}Q_1^{(i)},\dots,P_{f_i}^{(i)}Q_{f_i}^{(i)}$ de primitieve idempotenten (voor het gemak spreken we maar over "primitieve idempotenten", ofschoon de PQ's slechts idempotent zijn op een factor na) behorende bij de standaardtableaux van het schema S_i, dan leveren de

$$U_j^{(i)} = \left\{ P_j^{(i)}Q_j^{(i)}u \mid u \in U_n^{[\nu]} \right\} \quad (i=1,\dots,k; j=1,\dots,f_i)$$

een direkte splitsing van $U_n^{[\nu]}$ in symmetrieklassen. (Stelling VII.3.7; is a een voortbrengend element voor $r_j^{(i)}$, dan is $U_j^{(i)} = \{\rho(a)u \mid u \in U\}$). We zullen nu nog laten zien hoe men in iedere symmetrieklasse een basis kan vinden uitgaande van een basis $u_1,\dots,u_n$ in U_n. We kunnen ons beperken tot een symmetrieklasse U, voortgebracht door de primitieve idempotent PQ die bij het standaardtableau $T=T_1$ van schema S behoort (de standaardtableaux in de gebruikelijke rangschikking heten $T_1,T_2,\dots,T_f$. Het geval $T=T_i$ gaat volkomen analoog). Een stel voortbrengende elementen voor U is te vinden onder de elementen $PQ\ u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ $(j_1,\dots,j_\nu=1,\dots,n)$. Om het effect van PQ op $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ gemakkelijk te kunnen overzien definiëren we bij T en $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ een indextableau J. J ontstaat door j_i te plaatsen in het hokje van S waarin een i staat bij T. Men kan omgekeerd ieder indextableau (waarin dus de getallen $1,\dots,n$ eventueel met herhalingen kunnen voorkomen) "teruglezen" door voor j_i in $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ het getal uit dat hokje van J te nemen, waarin i staat bij T. We schrijven ook u_J i.p.v. $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$. Hoe kunnen we het effect van een permutatie σ op $u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$ nu beschrijven? Volgens afspraak is $\sigma\, u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu} = u_{j_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\dots\otimes u_{j_{\sigma^{-1}(\nu)}}$. Bij het rechterlid behoort het indextableau σJ, dat uit J ontstaat door j_i te vervangen door $j_{\sigma^{-1}(i)}$. Dit indextableau verkrijgt men door in $\sigma^{-1}T$ het getal i door j_i te vervangen. Is σ een p(horizontale permutatie) voor T dan ook voor J. Is σ een q (verticale permutatie) voor T dan ook voor J. Het is niet moeilijk om in te zien dat men de termen van PQ u_J krijgt door op J eerst alle mogelijke verticale permutaties toe te passen, en daarna op ieder aldus ontstaan indextableau alle verschillende horizontale permutaties. Tenslotte kan men dan op de boven aangegeven wijze de resultaten in de vorm $u_{j_1} \otimes \ldots \otimes u_{j_\nu}$ schrijven door de indextableaux terug te lezen.

<u>Stelling VII.4.5.</u> De elementen PQu_J, waarin J een indextableau is (bij het tableau $T=T_1$ van schema S) zó, dat de getallen in geen rij afnemen en in elke kolom toenemen (standaardindextableaux) vormen een basis voor de symmetrieklasse U.

<u>Bewijs.</u> Laat J een willekeurig indextableau zijn, waarin de getallen $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_\nu$ voorkomen, dan ontstaat J uit een tableau T^* (T^* is niet steeds ondubbelzinnig bepaald) door hierin i door j_i te vervangen. De standaardtableaux bij het schema S waren $T_1, \ldots, T_f$ genoemd. Laten verder $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_f, \sigma^*$ gedefinieerd zijn door

$$T_2 = \sigma_2 T_1, \ldots, T_f = \sigma_f T_1, \quad T^* = \sigma^* T_1.$$

Daar $P_1Q_1\sigma^{*-1}, P_1Q_1\sigma_2^{-1}, \ldots, P_1Q_1\sigma_f^{-1}$ f+1 elementen zijn uit het f-dimensionale rechtsideaal dat door $P_1Q_1=PQ$ wordt voortgebracht, bestaat er een lineaire relatie tussen deze elementen. Nu is $P_1Q_1=P_1Q_1$, $P_1Q_1\sigma_2^{-1}=\sigma_2^{-1}P_2Q_2$, $P_1Q_1\sigma_3^{-1}=\sigma_3^{-1}P_3Q_3, \ldots, P_1Q_1\sigma_f^{-1}=$ $=\sigma_f^{-1}P_fQ_f$ en daar $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_fQ_f$ onafhankelijk zijn over de groepsring (d.w.z. de som der linksidealen door hen voortgebracht is direkt), zijn $P_1Q_1, P_1Q_1\sigma_2^{-1}, \ldots, P_1Q_1\sigma_f^{-1}$ lineair onafhankelijk. Er bestaan dus getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ ($\in K$) met

$$P_1Q_1\sigma^{*-1} = \lambda_1 P_1Q_1 + \lambda_2 P_1Q_1\sigma_2^{-1} + \ldots + \lambda_f P_1Q_1\sigma_f^{-1}.$$

Passen we beide leden toe op u_{J_1}, waarin J_1 het indextableau is dat uit T_1 ontstaat door hierin i te vervangen door j_i, dan vinden we

(VII.4.2) $$PQu_J = \lambda_1 PQu_{J_1} + \lambda_2 PQu_{J_2} + \ldots + \lambda_f PQu_{J_f}.$$

Het indextableau J_k $(k=1,2,\dots,f)$ ontstaat uit T_k door i te vervangen door j_i. Deze indextableaux hebben alle de eigenschap dat de indices in geen enkele rij of kolom dalen. Staan er in een kolom van J_k twee gelijke getallen, dan is $PQu_{J_k}=0$. Aan de rechterkant van (VII.4.2) zijn dus slechts die $PQu_{J_k}\neq 0$ waarin J_k een standaardindextableau is.
Laten van nu af $J_1,\dots,J_g$ de standaardindextableaux voorstellen der getallen $j_1,\dots,j_\nu$ waarbij de nummering zo gekozen is, dat $i<k \Rightarrow J_i<J_k$. (Men ordent op de gebruikelijke wijze door $J_i<J_k$ te stellen wanneer in het eerste hokje waarin J_i en J_k verschillen bij J_i een kleiner getal staat dan bij J_k). We bewijzen nu de lineaire onafhankelijkheid van $PQu_{J_1},\dots,PQu_{J_g}$. Daartoe laten we eerst zien, dat uit $pqu_{J_i}=u_{J_k}$ volgt dat $i<k$ (nl. als $q\neq$ identiteit) of dat $i=k$ (als $q=$identiteit). Stel eerst $q\neq$ identiteit en beschouw de hoogste rij van J_i die bij q niet invariant blijft. Ieder element in deze rij dat niet invariant blijft wordt door een groter vervangen, zodat de J_k die hierna door ordening der rijen ontstaat niet vóór J_i kan komen. Er is in bedoelde rij een element door een groter vervangen, dus $J_k\neq J_i$. Is q de identiteit, dan zijn de enige p's die J_i weer in een standaardindextableau overvoeren, die welke gelijke elementen verwisselen. Hierbij blijft J_i invariant. We concluderen nu dat u_{J_i} voorkomt in PQu_{J_i} maar niet in $PQu_{J_{i+1}},\dots,PQu_{J_g}$, zodat $PQu_{J_1},\dots,PQu_{J_g}$ lineair onafhankelijk zijn.

In het voorafgaande is een splitsing gegeven van $U_n^{[\nu]}$ in symmetrieklassen, waarbij aan ieder schema S een aantal aequivalente symmetrieklassen is toegevoegd. Dit aantal kan 0 zijn. Er geldt namelijk de volgende stelling

Stelling VII.4.6. Een symmetrieklasse bij het schema S in de direkte splitsing van $U_n^{[\nu]}$ is de nulruimte als het schema S meer dan n rijen heeft, en is niet de nulruimte als S hoogstens n rijen heeft.

Bewijs. Is S een schema met meer dan n rijen, dan is het aantal standaardindextableaux gelijk aan nul, en dus de bijbehorende symmetrieklasse de nulruimte (stelling VII.4.5). Is het aantal rijen van S gelijk $r \leq n$, dan verkrijgt men een standaardindextableau door in ieder hokje van de k-de rij van S het getal k te plaatsen. Stelling VII.4.5 levert dan weer het gewenste resultaat.

We mogen ons dus verder beperken tot schema's met hoogstens n rijen. Zo'n schema wordt gekarakteriseerd door n niet-negatieve getallen $m_1,\dots,m_n$, die de lengte van de 1-ste, 2-de,...,n-de rij aangeven en dus voldoen aan $m_1+m_2+\dots+m_n=\nu$. De aequivalente representaties, die de symmetrieklassen bij dit schema leveren, zullen we door het symbool $\Delta_{m_1m_2\dots m_n}$ voorstellen.

In de volgende paragraaf zullen de karakters van de volledige lineaire groep worden aangegeven. Daartoe moeten we nagaan hoe de irreducibele representatie $\Delta_{m_1m_2\dots m_n}$ uiteenvalt, indien men zich in GL(n) tot de met GL(n-1) isomorfe ondergroep GL'(n-1) beperkt, die bestaat uit de elementen van GL(n) welke de deelruimte $(u_1,\dots,u_{n-1})$ en de vector u_n van U_n invariant laten.

Stelling VII.4.7. Wanneer men zich beperkt tot GL'(n-1) valt de irreducibele representatie $\Delta_{m_1m_2\dots m_n}$ van GL(n) uiteen in de irreducibele representaties $\Delta_{m_1'm_2'\dots m_{n-1}'}$, waarin

$$(\text{VII.4.3}) \qquad m_1 \geq m_1' \geq m_2 \geq m_2' \geq \dots \geq m_{n-1} \geq m_{n-1}' \geq m_n$$

is, en ieder van deze representaties éénmaal voorkomt.

Bewijs. Laten we uitgaan van de symmetrieklasse U behorend bij het schema S, die een representatie $\Delta_{m_1m_2\dots m_n}$ van GL(n) oplevert, en op de wijze van stelling VII.4.5 een basis in U kiezen. Laat V_k de deelruimte van U zijn, die wordt opgespannen door de basiselementen welke behoren bij de standaardindextableaux, waarin k maal het getal n voorkomt. Uit de definitie van GL'(n-1) blijkt onmiddellijk, dat iedere V_k bij GL'(n-1) invariant is, en dat de V_k's een direkte splitsing van U geven.

In het volgende beschouwen we één V_k en kunnen dus V schrijven i.p.v. V_k. Een basis voor V bestaat, zoals boven al is opgemerkt, uit die PQu_J, waarbij de J de standaardindextableaux doorloopt welke op k plaatsen een n hebben. Deze indextableaux verdelen we in t groepjes $J_{11},\ldots,J_{1s_1}$; $J_{21},\ldots,J_{2s_2}$;......; $J_{t1},\ldots,J_{ts_t}$ zó, dat in elk groepje alle indextableaux voorkomen waarin dezelfde hokjes door n-en bezet zijn. We veronderstellen dat de nummering der groepjes zó gekozen is, dat $l<m$ wanneer in het eerste hokje, dat slechts bij één der beide indextableaux J_{li}, J_{mj} een n bevat, deze n bij J_{mj} staat. Hieruit volgt dat $l<m$ wanneer J_{li} door een pq in J_{mj} overgaat. Bij het l-de groepje beschouwen we de operator $P_lQ_l=\sum \varepsilon_{q_l} p_lq_l$, waarin p_l en q_l ieder hokje dat een n bevat invariant laten. We kunnen nu bewijzen, dat $W_l=(P_lQ_lu_{J_{l1}},\ldots,P_lQ_lu_{J_{ls_l}})$ een bij GL'(n-1) invariante irreducibele deelruimte (symmetrieklasse) is. Immers in de indextableaux van het l-de groepje kunnen slechts die (aaneengesloten) laatste hokjes van iedere rij door n-en bezet zijn, welke over de volgende rij uitsteken. Knipt men de hokjes die een n bevatten af, dan ontstaat een standaardindextableau der getallen 1,...,n-1 bij een schema S' met n-k hokjes. Zo'n schema S' is bepaald door n-1 niet-negatieve getallen $m_1',m_2',\ldots,m_{n-1}'$ die voldoen aan (VII.4.3) en $m_1'+m_2'+\ldots+m_{n-1}'=\nu-k$. Ook ziet men gemakkelijk dat bij toevoegen van k hokjes (aan het schema S' zodat het schema S ontstaat) die een n bevatten een willekeurig standaardindextableau der getallen 1,...,n-1 bij het schema S' een der indextableaux $J_{l1},\ldots,J_{ls_l}$ oplevert. We kunnen nu de voorafgaande theorie toepassen, waarbij we het basiselement u_n buiten beschouwing laten. I.h.b. levert stelling VII.4.5 dat W_l een symmetrieklasse is bij GL'(n-1). De bijbehorende representatie van GL'(n-1) is $\Delta_{m_1'm_2'\ldots m_{n-1}'}$. Daar GL'(n-1) volledig reducibel is, bestaat er een

bij GL'(n-1) invariante deelruimte W van U zó, dat

(VII.4.4) $\quad U_n^{[\nu]} = W_1 + W_2 + \dots + W_t + W'.$

Beschouw nu de basisvector $PQu_{J_{li}}$ van V. De direkte splitsing (VII.4.4) van $U_n^{[\nu]}$ levert de volgende splitsing van $PQu_{J_{li}}$:

$$PQu_{J_{li}} = v_{li}^{(1)} + v_{li}^{(2)} + \dots + v_{li}^{(t)} + v'_{li} \ ,$$

waarin $v_{li}^{(j)} \in W_j$ en $v'_{li} \in W'$. We bewijzen dat $v_{li}^{(1)}=v_{li}^{(2)}=\dots=v_{li}^{(l-1)}=0$ is. Stel n.l. dat $v_{li}^{(j)} \neq 0$ is, dan is $v_{li}^{(j)} = \sum_J \lambda_J u_J$, waarin $\lambda_J \neq 0$ is voor minstens één der $J_{j1}, \dots, J_{js_j}$. Stel $\lambda J_{ji} \neq 0$. $u_{J_{ji}}$ ontstaat uit $u_{J_{li}}$ door toepassen van pq, dus $j \geq l$. Laat E de projectie zijn langs W' op $W_1 + \dots + W_t$. We bewijzen dat W' en V disjunkt zijn. Zij $x = \sum_{l,i} \xi_{li} PQu_{J_{li}} \in W' \cap V$, dan is

$$x = \sum_{l,i} \xi_{li} (v_{li}^{(l)} + v_{li}^{(l+1)} + \dots + v_{li}^{(t)} + v'_{li})$$

$$= \sum_i \xi_{1i} v_{1i}^{(1)} + \Big\{ \sum_i \xi_{1i} (v_{1i}^{(2)} + \dots + v_{1i}^{(t)} + v'_{1i})$$

$$+ \sum_{l \geq 2, i} \xi_{li} (v_{li}^{(l)} + v_{li}^{(l+1)} + \dots + v_{li}^{(t)} + v'_{li}) \Big\},$$

en daar de uitdrukking tussen accoladen een vector uit $W_2 + \dots + W_t + W'$ voorstelt moet $\sum_i \xi_{1i} v_{1i}^{(1)} = 0$ zijn. Nu zijn $v_{11}^{(1)}, v_{12}^{(1)}, \dots, v_{1s_1}^{(1)}$ lineair onafhankelijk (men kan bewijzen dat $v_{li}^{(l)}$ op een factor $\neq 0$ na gelijk is aan $P_l Q_l u_{J_{li}}$) en dus is $\xi_{11} = \xi_{12} = \dots = \xi_{1s_1} = 0$. Op analoge wijze kunnen we aantonen dat $\xi_{21} = \xi_{22} = \dots = \xi_{2s_2} = 0$ etc., zodat x=0 is. Daar W' en V disjunkt zijn geldt dim EV=dim V. We weten al dat dim V = $\dim(W_1 + \dots + W_t)$, zodat E een isomorfisme is van V op $W_1 + \dots + W_t$, waarvan de inverse een direkte splitsing van V in symmetrieklassen bij GL'(n-1) oplevert, die dus aequivalent zijn met $W_1, \dots, W_t$.

VII.5. De karakters van de volledige lineaire groep.

In deze paragraaf zullen de karakters der geheelrationale representaties van GL(n) (de zgn. karakteristieken van GL(n)) worden uitgedrukt als symmetrische polynomen (met coëfficiënten in K) in de eigenwaarden der elementen van GL(n). Deze eigenwaarden zijn i.h.a. geen elementen van K, maar van een algebraïsch afgesloten uitbreidingslichaam K^* van K. Symmetrische polynomen in de eigenwaarden zijn echter wel elementen van K.

Tenslotte zal de formule van Frobenius worden afgeleid, die de karakters van de volledige lineaire groep en die der symmetrische groep met elkaar in verband brengt.

Daar iedere irreducibele (geheelrationale) representatie van $GL(n,K^*)$ irreducibel blijft wanneer men zich tot GL(n,K) beperkt, en men aldus ook alle irreducibele representaties van GL(n,K) verkrijgt, kunnen we volstaan met de karakters van $GL(n,K^*)$ te bepalen. Karakters zijn klassefuncties op een groep, d.w.z. zijn g,h en $k \in GL(n,K^*)$ met $g=k^{-1}hk$, en is φ een karakter, dan is $\varphi(g)=\varphi(h)$. Ook geldt dat g en h dezelfde eigenwaarden hebben. Omgekeerd: zijn $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ n verschillende elementen uit K^*, dan behoren alle elementen van $GL(n,K^*)$ die $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ tot eigenwaarden hebben tot dezelfde klasse. De waarde van φ op deze klasse stellen we voor door $\varphi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. φ is een polynoom in $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$. Dit kan men inzien door op matrices over te gaan. Beschouw een diagonaalmatrix met eigenwaarden $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$. Bij de betreffende geheelrationale representatie is hieraan een matrix toegevoegd, waarvan de elementen en dus ook het spoor φ polynomen in $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ zijn. φ is symmetrisch in $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$, daar alle diagonaalmatrices met eigenwaarden $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ tot dezelfde klasse behoren. Uit deze beschouwing volgt nog dat φ homogeen is van graad ν in $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$. Het is niet moeilijk om in te zien dat het karakter door hetzelfde polynoom gegeven wordt, wanneer sommige ε_i's gelijk zijn.

Stelling VII.5.1. Het karakter $\varphi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ van de irreducibele representatie $\Delta_{m_1m_2\dots m_n}$ van GL(n,K) is

$$(\text{VII.5.1}) \qquad \varphi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \frac{\det\left(\varepsilon^{m_1+n-1}\ \varepsilon^{m_2+n-2} \dots \varepsilon^{m_n}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-1}\ \varepsilon^{n-2} \dots\dots\dots 1\right)} .$$

(Opm.: met $\det(\varepsilon^{l_1}\ldots\varepsilon^{l_n})$ is bedoeld de determinant van de nxn-matrix waarvan de i-de rij is $\varepsilon_i^{l_1}\ldots\varepsilon_i^{l_n}$).

<u>Bewijs</u>: Het rechterlid van VII.5.1 is inderdaad gelijk aan een symmetrisch polynoom in $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$. Immers, de noemer is het differentieproduct $\prod_{i<j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)$, terwijl iedere factor $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ $(i\neq j)$ op de teller deelbaar is. Bovendien zijn teller en noemer alternerend in $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$. De graad van het polynoom is $m_1+m_2+\ldots+m_n=\nu$.

We zullen de stelling nu bewijzen door volledige inductie naar n, hierbij gebruik makend van stelling VII.4.7. De juistheid van de stelling voor n=1 leidt men af uit het feit dat $\varepsilon\to\varepsilon^\nu$ de enige geheelrationale representatie van GL(1) van polynoomgraad ν is. Laat nu de stelling voor n-1 (n > 1) juist zijn. Beschouw de representatie $\Delta_{m_1m_2\ldots m_n}$ van GL(n,K). Zij GL'(n-1) de ondergroep van GL(n,K) gedefiniëerd op blz.101. GL'(n-1) bestaat uit alle elementen van GL(n,K) met de eigenwaarden $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1},1$. Volgens stelling VII.4.7 valt $\Delta_{m_1m_2\ldots m_n}$ uiteen in de representaties $\Delta_{m_1'm_2'\ldots m_{n-1}'}$, waarbij $m_1',m_2',\ldots,m_{n-1}'$ voldoen aan (VII.4.3). De karakters zijn, volgens de inductieveronderstelling,

$$\text{(VII.5.2)}\qquad \frac{\det\left(\varepsilon^{m_1'+n-2}\,\varepsilon^{m_2'+n-3}\ldots\varepsilon^{m_{n-1}'}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-2}\,\varepsilon^{n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots 1\right)}$$

(men vindt hier de rijen der determinanten door achtereenvolgens $\varepsilon=\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ te nemen). Een element van GL(n,K) met eigenwaarden $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1},1$ heeft dus bij $\Delta_{m_1\ldots m_n}$ het spoor

$$\text{(VII.5.3)}\qquad \sum_{m_1\geq m_1'\geq m_2\geq\ldots\geq m_{n-1}'\geq m_n}\frac{\det\left(\varepsilon^{m_1'+n-2}\,\varepsilon^{m_2'+n-3}\ldots\varepsilon^{m_{n-1}'}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-2}\,\varepsilon^{n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots 1\right)}=$$

$$=\frac{\det\left(\varepsilon^{m_1+n-2}+\varepsilon^{m_1+n-3}+\ldots+\varepsilon^{m_2+n-2}\quad\varepsilon^{m_2+n-3}+\varepsilon^{m_2+n-4}+\ldots+\varepsilon^{m_3+n-3}\ldots\ldots\varepsilon^{m_{n-1}}+\varepsilon^{m_{n-1}-1}+\ldots+\varepsilon^{m_n}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-2}\,\varepsilon^{n-3}\ldots\ldots 1\right)}$$

Men verifiëert gemakkelijk dat dit juist het rechterlid van (VII.5.1) is, wanneer $\varepsilon_n=1$ gesteld is. Daar een homogeen polynoom in $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ van de graad ν eenduidig bepaald is door zijn waarde voor $\varepsilon_n=1$, en we reeds weten dat het karakter van $\Delta_{m_1\ldots m_n}$ homogeen is van de graad ν in $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ is hiermee de stelling bewezen.

De toevoeging $\sigma \to \sigma^*$(zie blz.83) is een representatie van de symmetrische groep $\mathcal{S}_\nu$ in $U_n^{[\nu]}$ die, zoals al eerder is opgemerkt, kan worden voortgezet tot een (ring)representatie van de groepsring A van $\mathcal{S}_\nu$. De commutatorring van deze representatie is, zoals we gezien hebben, de ring B der bisymmetrische transformaties. We willen nu in deze situatie stelling VII.3.5 toepassen. Laten we nagaan wat in dit geval de daar genoemde representaties Γ_i van A en Δ_i van B zijn. Γ_i is de irreducibele representatie van A (we vatten A weer op als directe som van de volle matrixringen $A_1,\ldots,A_k$), die aan het element $a=a_1+\ldots+a_k$ de matrix a_i toevoegt (stellingen VII.3.1 en VII.3.2). Uit de algemene theorie van de representaties van halfenkelvoudige ringen is ons al bekend, dat genoemde representatie aequivalent is met de representatie van A door een minimaal linksideaal in A_i. (V.7). Deze linksidealen behoren alle bij het zelfde schema $(m)=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ met ν hokjes. Het bijbehorend karakter zullen we door $\chi^{(m)}$ voorstellen; de waarde van het karakter op de klasse α van $\mathcal{S}_\nu$, bestaande uit de permutaties die α_1 cykels van de lengte 1, α_2 cykels van de lengte 2,..., $\alpha_\nu$cykels van de lengte ν, bevatten, stellen we voor door $\chi_\alpha^{(m)}$. De representatie Δ_i van B wordt op de wijze van stelling VII.3.7 verkregen met behulp van de minimale rechtsidealen uit A_i die, zoals we gezien hebben, ook bij het schema (m) behoren. Δ_i is dus niets anders dan de representatie $\Delta_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ gedefinieerd op blz.101. Het karakter van deze representatie wordt door (VII.5.1) gegeven en zullen we voorstellen door $\varphi_{(m)}$, en de waarde van het karakter voor het element $g \in GL(n,K)$ door $\varphi_{(m)}(g)$.

<u>Stelling VII.5.2.</u> Is σ_i het spoor van g^i $(i=1,2,\ldots,\nu)$, dan geldt:

$$\text{(VII.5.4)} \qquad \sigma_1^{\alpha_1}\ldots\sigma_\nu^{\alpha_\nu} = \sum_{(m)} \varphi_{(m)}(g)\,\chi_\alpha^{(m)} ,$$

waarin gesommeerd wordt over alle systemen $(m)=(m_1,\ldots,m_n)$ die voldoen aan:

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n \;,\; m_1+m_2+\ldots+m_n = \nu .$$

Bewijs: We zullen (VII.5.4) afleiden uit stelling VII.3.5. Blijkens het voorafgaande stemt het rechterlid van (VII.5.4) overeen met het rechterlid van (VII.3.25), wanneer we daarin $b=g^{[\nu]}$ kiezen en voor a een permutatie die uit α_1 cykels ter lengte 1,... ..,α_ν cykels ter lengte ν bestaat. Het linkerlid is het spoor van de transformatie $a^*g^{[\nu]}$ van $U_n^{[\nu]}$. Laat (g_{ij}) de matrix zijn die bij de basis $u_1,\dots,u_n$ in U_n aan g is toegevoegd. Dan is

$$a^*g^{[\nu]}u_{i_1}\otimes\dots\otimes u_{i_\nu} = a^*\sum_{j_1,\dots,j_\nu} g_{j_1i_1}\dots g_{j_\nu i_\nu}u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_\nu} g_{j_1i_1}\dots g_{j_\nu i_\nu}u_{j_{a^{-1}(1)}}\otimes\dots\otimes u_{j_{a^{-1}(\nu)}}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_\nu} g_{j_{a(1)}i_1}\dots g_{j_{a(\nu)}i_\nu}\, u_{j_1}\otimes\dots\otimes u_{j_\nu} ,$$

en dus is

$$\mathrm{Sp}\ a^*g^{[\nu]} = \sum_{i_1\dots i_\nu} g_{i_{a(1)}i_1}\, g_{i_{a(2)}i_2}\dots g_{i_{a(\nu)}i_\nu} .$$

Bevat a nu b.v. de cykel (pqr), dan kunnen we eerst de sommatie over i_p,i_q,i_r uitvoeren, welke oplevert

$$\sum_{i_p,i_q,i_r} g_{i_qi_p}\, g_{i_ri_q}\, g_{i_pi_r} = \sigma_3 .$$

Komen α_3 cykels ter lengte 3 voor, dan levert de sommatie over de betreffende indices $\sigma_3^{\alpha_3}$ op. Het resultaat is $\mathrm{Sp}\ a^*g^{[\nu]} = \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\dots\sigma_\nu^{\alpha_\nu}$, waarmede de stelling bewezen is. De volgende stelling is een onmiddellijk gevolg van de twee voorafgaande stellingen.

Stelling VII.5.3. Zijn $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ complexe getallen en is σ_i gedefiniëerd door

$$\sigma_i = \varepsilon_1^{\,i} + \varepsilon_2^{\,i} + \dots + \varepsilon_n^{\,i} ,$$

dan geldt

$$\text{(VII.5.5)}\quad \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\dots\sigma_\nu^{\alpha_\nu}\det(\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{n-2}\dots 1) = \sum_{(m)}\chi_\alpha^{(m)}\det(\varepsilon^{m_1+n-1}\varepsilon^{m_2+n-2}\dots\varepsilon^{m_n}) .$$

Tenslotte leiden we nog een andere voortbrengende functie voor de karakters der symmetrische groep af.

Stelling VII.5.4 (Formule van Frobenius). Is σ_i gedefiniëerd als in stelling VII.5.3 dan geldt

$$(\text{VII.5.6}) \qquad \frac{\det\left(\varepsilon^{m_1+n-1}\,\varepsilon^{m_2+n-2}\ldots\varepsilon^{m_n}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{n-2}\ldots\ldots\ldots 1\right)} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \frac{\chi_\alpha^{(m)}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!}\left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu},$$

waarin gesommeerd wordt over alle klassen (α) van de symmetrische groep $\mathcal{S}_\nu$.

Bewijs: Laat $(m')=(m_1',m_2',\ldots,m_n')$ een partitie van ν zijn, die voldoet aan $m_1' \geq m_2' \geq \ldots \geq m_n'$. Vermenigvuldig beide leden van (VII.5.4) met $h_\alpha\,\chi_\alpha^{(m')}$, waarin $h_\alpha = \dfrac{\nu!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!\,1^{\alpha_1}\,2^{\alpha_2}\ldots\nu^{\alpha_\nu}}$ het aantal elementen in de klasse (α) van de symmetrische groep voorstelt. Sommeer nu over alle klassen (α) van de symmetrische groep. Op grond van de orthogonaliteitseigenschap (1.7.1) der karakters komt in het rechterlid te staan $\nu!\ \varphi_{(m')}(g)$. Het linkerlid wordt

$$\sum_{(\alpha)} h_\alpha \chi_\alpha^{(m')}\ \sigma_1^{\alpha_1}\ldots\sigma_\nu^{\alpha_\nu}.$$

Daar bovendien geldt (VII.5.1)

$$\varphi_{(m')}(g) = \varphi_{m'}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = \frac{\det\left(\varepsilon^{m_1'+n-1}\ \varepsilon^{m_2'+n-2}\ldots\ \varepsilon^{m_n'}\right)}{\det\left(\varepsilon^{n-1}\ \varepsilon^{n-2}\ldots\ldots\ldots 1\right)},$$

is (VII.5.6) bewezen.