STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 42

Algemene topologie.

Serie voordrachten voorjaar 1957.
incompl.

J.de Groot.

1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMSTERDAM-O.

Série voordrachten van

Prof.Dr J. de Groot

1957

Metriseringstheorie

Een <u>topologische</u> <u>ruimte</u> is een ruimte, die voldoet aan de axioma's van Kuratowski of aan de corresponderende axioma's voor het systeem der open verzamelingen.
Een systeem van open verzamelingen $\{B_\alpha\}_\alpha$ in de topologische ruimte T heet een <u>basis</u>, indien iedere open $O \subset T$ de som is van geschikt gekozen B_α.
Zie voor de begrippen <u>Hausdorff</u>-ruimte, <u>reguliere</u> resp. <u>normale</u> ruimte, <u>metrische</u> ruimte, b.v. Alexandroff-Hopf, Topologie I.
Een ruimte voldoet aan het <u>1e aftelbaarheidsaxioma</u> als "de omgevingen $O(p)$ van ieder punt p met behulp van aftelbaar vele $A_i(p)$ te beschrijven zijn": bij iedere $O(p)$ is een index i te vinden, zodat

$$p \in A_i(p) \subset O(p).$$

Iedere metrische ruimte M is <u>normaal</u>, zelfs volledig normaal en voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Een basis van de kleinst mogelijke machtigheid in M kan men b.v. als volgt verkrijgen: neem een in M dichte verzameling M^* van de kleinst mogelijke machtigheid en beschouw de $^1/n$ $(n=1,2,\ldots)$ omgevingen van alle punten van M^*. Deze vormen de verlangde basis. Is M i.h.b. separabel, d.w.z. is M^* aftelbaar, dan bezit M dus zelfs een <u>aftelbare</u> <u>basis</u>.
Men zegt wel, dat een ruimte met aftelbare basis aan het <u>tweede aftelbaarheidsaxioma</u> voldoet.
Een overdekking $\{O_\alpha\}_\alpha$ van T is een stelsel van i.h.a. open $O_\alpha \subset T$ met

$$\bigcup_\alpha O_\alpha = T.$$

Een systeem $\{V_\beta\}_\beta$ is een <u>verfijning</u> van $\{O_\alpha\}_\alpha$ als bij iedere β een α te vinden is met

$$V_\beta \subset O_\alpha .$$

Een familie van (open) verzamelingen heet <u>locaal eindig</u>, indien er een overdekking bestaat zodat ieder element hieruit slechts eindig vele elementen uit de familie ontmoet (= niet leeg doorsnijdt). Anders gezegd: bij ieder punt is een (voldoend kleine) omgeving te vinden, die slechts met eindig veel elementen uit de familie een niet lege doorsnede bezit.
Een ruimte waarin iedere overdekking een locaal eindige verfijning be-

AMSTERDAM-O.

Algemene Topologie

Série voordrachten van

Prof.Dr J. de Groot

1957

Metriseringstheorie

Een topologische ruimte is een ruimte, die voldoet aan de axioma's van Kuratowski of aan de corresponderende axioma's voor het systeem der open verzamelingen.

Een systeem van open verzamelingen $\{B_\alpha\}_\alpha$ in de topologische ruimte T heet een basis, indien iedere open $O \subset T$ de som is van geschikt gekozen B_α.

Zie voor de begrippen Hausdorff-ruimte, reguliere resp. normale ruimte, metrische ruimte, b.v. Alexandroff-Hopf, Topologie I.

Een ruimte voldoet aan het 1e aftelbaarheidsaxioma als "de omgevingen O(p) van ieder punt p met behulp van aftelbaar vele $A_i(p)$ te beschrijven zijn": bij iedere O(p) is een index i te vinden, zodat

$$p \in A_i(p) \subset O(p).$$

Iedere metrische ruimte M is normaal, zelfs volledig normaal en voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. Een basis van de kleinst mogelijke machtigheid in M kan men b.v. als volgt verkrijgen: neem een in M dichte verzameling M^* van de kleinst mogelijke machtigheid en beschouw de $^1/n$ (n=1,2,...) omgevingen van alle punten van M^*. Deze vormen de verlangde basis. Is M i.h.b. separabel, d.w.z. is M^* aftelbaar, dan bezit M dus zelfs een aftelbare basis.

Men zegt wel, dat een ruimte met aftelbare basis aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Een overdekking $\{O_\alpha\}_\alpha$ van T is een stelsel van i.h.a. open $O_\alpha \subset T$ met

$$\bigcup_\alpha O_\alpha = T.$$

Een systeem $\{V_\beta\}_\beta$ is een verfijning van $\{O_\alpha\}_\alpha$ als bij iedere β een α te vinden is met

$$V_\beta \subset O_\alpha .$$

Een familie van (open) verzamelingen heet locaal eindig, indien er een overdekking bestaat zodat ieder element hieruit slechts eindig vele elementen uit de familie ontmoet (= niet leeg doorsnijdt). Anders gezegd: bij ieder punt is een (voldoend kleine) omgeving te vinden, die slechts met eindig veel elementen uit de familie een niet lege doorsnede bezit.

Een ruimte waarin iedere overdekking een locaal eindige verfijning bezit heet paracompact (Dieudonné).

Een ruimte bezit een σ-locaal eindige basis, indien er een basis $\{U_{n\alpha}\}_{n\alpha}$ bestaat, die de som is van aftelbaar vele locaal eindige families

(1) $\{U_{1\alpha}\}_{\alpha}$, $\{U_{2\alpha}\}_{\alpha}$, ... , $\{U_{n\alpha}\}_{\alpha}$, ...

Vb.1. Er zijn paracompacte, separabele, volledig normale ruimten, die aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma voldoen en toch niet metriseerbaar zijn.

Vb.2. Er zijn compacte, (maar niet bicompacte) Hausdorffruimten, die niet paracompact, dus ook niet metriseerbaar zijn (st.II).

Vb.3. Er zijn paracompacte, volledig normale, aftelbare ruimten, die niet aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma voldoen, dus ook niet metriseerbaar zijn.

Stelling I (Nagata, Smirnov ± 1950). Een topologische ruimte R is dan en en slechts dan metriseerbaar, indien geldt:

1^o) R is regulier

2^o) R bezit een σ-locaal eindige basis.

Stelling II (A.H. Stone, 1948). Iedere metrische ruimte is (volledig normaal en) paracompact.

In stelling I zit als bizonder geval opgesloten de klassieke metriseringsstelling van Urysohn-Tychonov. Stelling II is door Dieudonné bewezen voor het bizondere geval, dat de metrische ruimte een aftelbare basis bezit.

Voorwaarde 2^o uit st.I kan vervangen worden door:

2') R heeft een σ-locaal eindige, verspreide basis.

Hierbij werd (bovendien) geeist, dat iedere familie optredend in (1) verspreid is, d.w.z. ieder paar $U_{n\alpha}$ en $U_{n\alpha'}$ (n vast), $\alpha \neq \alpha'$ bezit disjuncte afsluitingen.

Hulpstelling I (triviaal). Van een locaal eindige familie $\{F_\alpha\}_\alpha$ is de afsluiting van de som gelijk aan de som van de afsluitingen:

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\{\alpha\}} F_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\{\alpha\}} \overline{F_\alpha} .$$

Hulpstelling II (Urysohn). Zijn A en B disjuncte gesloten deelverzamelingen in een normale ruimte N dan is er een op N continue reële functie f(x) met

1^o) $a \leq f(x) \leq b$

2^o) $f(A) = a$, $f(B) = b$.

<u>Hulpstelling III.</u> Een reguliere R met σ-locaal eindige basis is normaal.

<u>Hulpstelling IV.</u> Iedere open verzameling O in een reguliere ruimte R met σ-locaal eindige basis is een F_σ (d.i. som van aftelbaar vele gesloten verzamelingen). Bovendien: er is een begrensde continue reële functie f(x) gedefinieerd op R met

$$f(O) > 0\,,$$
$$f(R \setminus O) = 0\,.$$

<u>Definitie van de gegeneraliseerde Hilbert ruimte H^τ.</u>

$T = \{\theta\}$ zij een verzameling indices van (oneindige) machtigheid τ. Beschouw de verzameling van alle reële functies $\xi(\theta)$ gedefinieerd op T met

$$\sum_{\theta\in T} \xi^2(\theta) < \infty.$$

N.B. Dit impliceert dat een functie $\xi(\theta)=0$ voor alle θ waarden, hoogstens aftelbaar vele uitgezonderd! Iedere $\xi(\theta)$ is een <u>punt</u> p van H^τ, dus

$$H^\tau = \{\,\xi(\theta)\,\}$$

(De getallen $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(\theta), \dots$ zijn de coördinaten van dit punt p, deze zijn nul op hoogstens aftelbaar vele uitzonderingen na).
Afstandsdefinitie $\rho(\xi,\eta)$ voor twee punten $\xi = \xi(\theta)$ en $\eta = \eta(\theta)$ uit H^τ:

$$\rho(\xi,\eta) = \sqrt{\sum_{\theta\in T} (\xi(\theta) - \eta(\theta))^2}\,.$$

Bewering: H^τ is een metrische ruimte. Voor $\tau = \aleph_0$ is dit de gewone Hilbert ruimte.

<u>Bewijsschets stelling I.</u> Voorwaarden zijn voldoende voor metriseerbaarheid van R: Zij

$$\{U_{n,\alpha}\}_{n,\alpha} \qquad (n=1,2,\dots;\ \alpha=1,2,\dots,\ \xi,\dots)$$

een σ-locaal eindige basis van R, zodat ieder systeem

$$\{U_{n,\alpha}\}_\alpha \qquad (\text{dus } n \text{ willekeurig, vast})$$

R overdekt en locaal eindig is.
Definieer volgens hulpstelling IV een begrensde reële continue $g_{n\alpha}(x)$ op R met

$$g_{n\alpha}(U_{n\alpha}) > 0, \quad g_{n\alpha}(R \setminus U_{n\alpha}) = 0.$$

Definieer

$$\xi_{n\alpha}(x) = \frac{g_{n\alpha}(x)}{\sqrt{2^n \sum_\alpha g^2_{n\alpha}(x)}}\,.$$

Beschouw de verzameling van paren indices (n, α)

$$\{(n,\alpha)\} = \{\tau\} = T.$$

De afbeelding

$$x \in R \longrightarrow f(x) = \{\xi_{n\alpha}(x)\} \in H^{\tau}$$

blijkt een eeneenduidige, bicontinue afbeelding in H^{τ} te zijn. R is dus topologisch in H^{τ} afgebeeld en dientengevolge metriseerbaar. Voorwaarden zijn noodzakelijk: dit volgt uit stelling II, maar kan ook direct op kortere wijze worden bewezen. In wezen heeft de metriseringsstelling daarom niets met paracompactheid te maken.

<u>Bewijs van stelling II.</u>

Stel $\{G_\zeta\}_\zeta$ een willekeurige overdekking van de ruimte M, waarbij ζ een welgeordende rij ordinaalgetallen doorloopt, $\zeta < \alpha$. Hiervan gaan we een locaal eindige verfijning construeren.

Zij $B_{\zeta k}$ de verzameling van alle punten $x \in M$ met

$$\rho(x, M \setminus G_\zeta) \geq \frac{1}{k}, \quad x \notin \bigcup_{\zeta' < \zeta} G_{\zeta'} .$$

Iedere $B_{\zeta k}$ is gesloten,

$$B_{\zeta k} \subset B_{\zeta, k+1}, \quad \bigcup_{\zeta, k} B_{\zeta k} = M.$$

Zij

$$B_k = \bigcup_{\zeta} B_{\zeta k} .$$

Dan is ook B_k gesloten (af te leiden uit: twee verschillende $B_{\zeta k}$ en $B_{\eta k}$ hebben een afstand $\geq \frac{1}{k}$).

Definieer $H_{\zeta k}$ als de verzameling der punten $x \in M$ met:

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho(x, B_{\zeta k}) < \frac{1}{3k} \\ \rho(x, B_j) > \frac{1}{4j} \quad (\text{alle } j = 1, \dots, k-1) . \end{cases}$$

De $H_{\zeta k}$ zijn open als doorsnede van een eindig aantal open verzamelingen; $H_{\zeta k} \subset G_\zeta$, dus $\{H_{\zeta k}\}_{\zeta, k}$ is een verfijning van $\{G_\zeta\}_\zeta$. We gaan bewijzen, dat $\{H_{\zeta k}\}_{\zeta, k}$ een locaal eindige overdekking is.

1°. $\{H_{\zeta k}\}_{\zeta, k}$ is een overdekking; neem $x \in M$. Zij m het kleinste natuurlijke getal met $\rho(x, B_m) < \frac{1}{3m}$. Dan is er een ζ met $\rho(x, B_{\zeta m}) < \frac{1}{3m}$. Daar m minimaal was, moet

$$\rho(x, B_j) \geq \frac{1}{3j} > \frac{1}{4j}, \text{ voor } j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Dus $x \in H_{\zeta m}$ volgens (2).

2°. $\{H_{\xi k}\}_{\xi,k}$ is locaal eindig: neem $x \in M$. Zij n de laagste index met $x \in B_n$, U de $\frac{1}{6n}$ - omgeving van x. Voor vaste $k \leqq n$ is er slechts hoogstens één $H_{\xi k}$, die punten met U gemeen heeft, daar twee punten uit $H_{\xi k}$ en $H_{\eta k}$ met $\xi \neq \eta$ een afstand $> \frac{1}{3k}$ hebben en iedere twee punten uit U een afstand $< \frac{1}{3n} \leqq \frac{1}{3k}$. U ontmoet dus hoogstens eindig vele $H_{\xi k}$ met $k \leqq n$. Alle $H_{\xi k}$ met $k > n$ hebben geen punten met U gemeen: neem $y \in H_{\xi k}$ $(k > n)$, dan $\rho(y,B_j) > \frac{1}{4j}$ $(j=1,\dots,k-1)$ volgens (1), dus ook $\rho(y,B_n) > \frac{1}{4n} > \frac{1}{6n}$, verder $x \in B_n \therefore y \notin U$. U heeft dus met eindig vele $H_{\xi k}$ punten gemeen, dus $\{H_{\xi k}\}$ is locaal eindig. q.e.d.

Een familie van deelverzamelingen van een topologische ruimte heet <u>punt-eindig</u>, indien ieder punt tot hoogstens eindig vele elementen der familie behoort.
In een normale ruimte N bezitten (per definitie) twee disjuncte gesloten, niet-lege verzamelingen disjuncte omgevingen. Duaal hiertegenover staat: Is $\{U,U'\}$ een openoverdekking van N door twee open verzamelingen U en U' dan bestaat er een <u>gesloten</u> overdekking $\{F,F'\}$ door gesloten F en F' met

$$F \subset U \quad , \quad F' \subset U'.$$

<u>Definitie</u>. Gegeven een overdekking U door open verzamelingen $\{U_\alpha\}$ met $U_\alpha \subset N$. Is er voor iedere α een open $V_\alpha \subset N$ te vinden met

$$(*) \qquad \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha \ ,$$

zodat $V=\{V_\alpha\}$ een overdekking van N is, dan heet V een <u>inkrimping</u> van $U=\{U_\alpha\}$, en U heet inkrimpbaar.

<u>Hulpstelling V</u>. Ieder <u>punt-eindige</u> open overdekking U (i.h.b. iedere eindige of locaal eindige open U) van open deelverzamelingen in een normale ruimte N is inkrimpbaar.
Door generalisatie en dualisering (overgaan op complementen) volgt gemakkelijk

<u>Hulpstelling VI</u>. Zij $\{F_i\}=F$ een eindige familie van gesloten deelverzamelingen van een normale ruimte N, dan is F <u>opblaasbaar</u>, d.w.z. er is een familie $U=\{U_i\}$ van <u>open</u> verzamelingen uit N te vinden met

$$F_i \subset U_i ,$$

terwijl de doorsnede van een stel F_{a_i} dan en slechts dan leeg is als dit het geval is voor de corresponderende U_{a_i}.

<u>Bewijs</u>. We dienen een open systeem $V=\{V_\alpha\}$ te vinden, dat -- evenals U -- N overdekt en aan $(*)$ voldoet. Veronderstel eerst, dat U eindig is:

$$U = \{U_1,U_2,\dots,U_n\} .$$

Daar U overdekt, is

$$F = U_1 \setminus \bigcup_{i \neq 1} U_i$$

een blijkbaar gesloten verzameling met

$$F \subset U_1.$$

Daar N normaal is, is er een open verzameling V_1 met

$$(**) \qquad F \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1.$$

Daar $\{F, U_2, \ldots, U_n\}$ een overdekking van N is, is

$$\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$$

een open overdekking van N waarbij V_1 wegens (* *) reeds ingekrompen is. We herhalen nu dit proces en krimpen $U_2, \ldots, U_n$ successievelijk in.

Is $U = \{U_\alpha\}$ een ∞ systeem, dan loopt het bewijs volkomen analoog via transfinite inductie naar de welgeordende rij der U_α.

Nu wordt evenwel het gegeven der punt-eindigheid van U essentieel gebruikt om te bewijzen dat bij overgang op een limietgetal het verkregen systeem N overdekt. Zij b.v. reeds geconstrueerd de rij

$$(5) \qquad V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, U_\omega, U_{\omega+1}, \ldots U_\alpha, \ldots .$$

Een punt p, dat niet tot U_α $(\alpha \geqslant \omega)$ zou behoren, komt slechts in eindige vele U_i $(i < \omega)$ dus ook in een U_k met maximale index k voor.

Daar het systeem

$$V_1, V_2, \ldots V_k, U_{k+1}, \ldots$$

N overdekt, geldt

$$p \in \bigcup_{j=1}^{k} V_j,$$

dus p wordt overdekt door het systeem (5), q.e.d.

Als een voorlopige toepassing van hulpstelling V noemen we:

Stelling III. Een topologische ruimte T is dan en slechts dan metriseerbaar indien de ruimte locaal metriseerbaar en paracompact is.

Bewijs. Locaal metriseerbaar betekent: ieder punt bezit een metriseerbare omgeving. Neem zo'n omgeving bij ieder punt en bepaal een locaal eindige verfijning. Ieder element U_α van de verfijning is dus zeker metriseerbaar en bezit een in U_α σ-locaal eindige basis. Het is evenwel onwaar, dat een in U_α locaal eindig systeem ook steeds locaal eindig in T is. Daarom krimpen we iedere U_α in tot een V_α volgens hulpstelling V: de doorsnede van een in U_α locaal eindig systeem met V_α is locaal eindig in T.

Nu volgt het gestelde gemakkelijk uit stelling I.

Als tegenhanger van Hulpstelling V noemen we nog
Hulpstelling VII. Iedere locaal eindige gesloten overdekking $\{F_\alpha\}$ van een paracompacte ruimte is opblaasbaar, d.w.z. er is een locaal eindige open overdekking $\{G_\alpha\}$ te vinden, zodat voor iedere α

$$F_\alpha \subset G_\alpha .$$

Duaal geldt:
Hulpstelling VIII. Ieder systeem $\{U_\alpha\}$ van open deelverzamelingen van een paracompacte ruimte, dat voldoet aan:

1^0 $\bigcap_\alpha U_\alpha = 0$

2^0 ieder punt heeft een omgeving die tot bijna alle U_α behoort

is in te krimpen in deze zin, dat er een systeem van gesloten $\{V_\alpha\}$ bestaat, zodat voor iedere α

$$V_\alpha \subset U_\alpha$$

terwijl het systeem $\{V_\alpha\}$ eveneens aan de eisen 1^0 en 2^0 voldoet (indien we daarin de U_α door de V_α vervangen).

Alle stellingen uit deze syllabus zijn generalisaties van stellingen die reeds bekend waren voor metriseerbare ruimten met aftelbare bases, maar waarbij men nu de eis van de aftelbare basis heeft laten vallen, zodat de stellingen nu uitgesproken worden voor metriseerbare ruimten in het algemeen.
Als entre-acte noemen we een eenvoudige generalisatie in deze geest van geheel andere aard. Er is een klassieke stelling van Sierpiński (1918), die zegt dat een continuum (d.i. een compacte, samenhangende, metriseerbare ruimte) nooit de som kan zijn van aftelbaar vele (> 1) disjuncte, niet-lege gesloten verzamelingen. Deze bewering is reeds foutief indien we een locaal compacte, samenhangende, metrische ruimte beschouwen i.p.v. een continuum.
Toch is direct in te zien, dat de volgende generalisatie geldt (bedenk zelf voorbeelden).
Stelling IV. Iedere topologische (i.h.b. iedere metrische) ruimte T waarin iedere twee punten door een deelcontinuum "verbonden" kunnen worden, is nooit de som van aftelbaar vele disjuncte, niet-lege gesloten verzamelingen.

We gaan nu over tot een summiere behandeling van de dimensietheorie in metrische ruimten. Grofweg gesteld blijkt, dat-bij adequate definities — de hoofdstellingen van de dimensietheorie, zoals deze bekend zijn voor separabele metrische ruimten, onveranderd geldig blijven voor metrische ruimten in het algemeen (Katetov $\pm$ 1952, Morita $\pm$ 1954).

Definitie dim. De Lebesgue dimensie -- dim T -- van een ruimte T is, hetzij het kleinste gehele getal n, waarvoor iedere eindige overdekking van T een verfijning bezit van de orde $\leqq n$, hetzij (indien er niet zo'n kleinste n bestaat) ∞.

De orde van een collectie van deelverzamelingen van T is òf het grootste gehele getal n waarvoor een zeker punt is bevat in n+1 elementen uit de collectie, òf ∞, indien er niet zo'n n bestaat.

Definitie ind.dimensie. De inductieve dimensie "ind T" van een ruimte T is gedefinieerd door:

$$\text{ind } T = -1, \text{ als } T \text{ leeg is.}$$

Voor n=0,1,2,... betekent

$$\text{ind } T \leqq n ,$$

dat er voor iedere gesloten verzameling F en iedere open O met

$$F \subset O \subset T,$$

een open U moet zijn te vinden met

$$F \subset U \subset O$$

terwijl

$$\text{ind } R(U) = \text{ind}(\overline{U} \setminus U) \leqq n-1.$$

Nu blijken onder meer de volgende eigenschappen te gelden:

Stelling V. In een metrische ruimte M geldt:

1° $\dim M = \text{ind } M$

2° $M' \subset M \Rightarrow \dim M' \leqq \dim M$

3° is M de som van aftelbaar vele gesloten deelverzamelingen M_i met $\dim M_i \leqq n$, dan geldt

$$\dim M \leqq n.$$

Meer algemeen kan het systeem $\{M_i\}$ vervangen worden door een locaal aftelbare gesloten overdekking $\{M_\alpha\}$

4° $\dim M \leqq n$ (n eindig) dan en slechts dan als het de som is van n+1 deelruimten van dimensie $\leqq 0$

5° Stel $M = M_1 \cup M_2$ en

$$\dim M_1 \leqq n_1, \ \dim M_2 \leqq n_2$$

Dan geldt

$$\dim M \leqq n_1 + n_2 + 1$$

6° voor een topologisch product geldt

$$\dim(M \times M') \leqq \dim M + \dim M'.$$

7° het topologisch product van een aftelbaar aantal ruimten van dimensie $\leqq 0$ heeft dimensie $\leqq 0$.

De definitie van de inductieve dimensie, zoals indertijd gedefinieerd door Urysohn en Menger voor separabele metrische ruimten, is afwijkend van (hoewel logisch equivalent met) de bovenstaande: men dient in de bovenstaande definitie van ind T de gesloten F door een éénpuntige F te vervangen.

Het is, voor zover mij bekend, een onopgelost probleem in hoeverre voor willekeurige d.w.z. niet-separabele metrische ruimten beide definities overeenstemmen. In dit verband schijnt de volgende bewering -- triviaal voor separabele metrische ruimten -- een "vergeten stelling" te zijn

Stelling V (vervolg)

8° geldt voor de open $O_\alpha \subset M$

$$\dim O_\alpha \leqq n,$$

dan volgt steeds voor ieder systeem $\{O_\alpha\}$

$$\dim \left(\bigcup_\alpha O_\alpha\right) \leqq n.$$

Bewijs: b.v. via de afsluitingen van een σ-locaal eindige basis van M en toepassing van stelling V, 3°.

Het is onmogelijk stelling V in dit kort bestek te bewijzen.
We zullen evenwel stelling V, 1° gedeeltelijk, doch algemener bewijzen.

Stelling VI (Čech (1933) - Vedenissoff (1951). In een normale ruimte N geldt

$$\dim N \leq \operatorname{ind} N.$$

Voor het bewijs dat in een metrische ruimte ook $\operatorname{ind} N \leq \dim N$ geldt, zie men b.v. Dowker-Hurewicz, Fund.Math. 43 (1956), 85.

Hulpstelling VI (Čech, zie Casopis Matematiky a Fysiky, 62 (1933), 287). Indien de normale ruimte B de som is van aftelbaar vele gesloten (dus normale) deelverzamelingen B_i met $\dim B_i \leq n$, dan geldt

$$\dim B \leq n \ .$$

Bewijs stelling VI. Stel $\operatorname{ind} N \leq n$. Te bewijzen $\dim N \leq n$. Bewijs via volledige inductie, waarbij het geval $n=-1$ triviaal is. Zij $\{U_i\}$ $(i=1,2,\ldots,K)$ een eindige overdekking van N. Krimp $\{U_i\}$ in tot een overdekking $\{V_i\}$ $(i=1,2,\ldots,K)$ met

$$\overline{V}_i \subset U_i$$

volgens hulpstelling V.
Uit $\operatorname{ind} N \leq n$ volgt de existentie van open W_i met

(1) $$B_i = \overline{W}_i \setminus W_i \ , \quad \operatorname{ind} B_i \leq n-1,$$

en

$$\overline{V}_i \subset W_i \subset U_i \ .$$

Stel

$$Y_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} \overline{W}_j \ .$$

De Y_i zijn dus open en paarsgewijs disjunct.
Stelt men

$$B = \bigcup_{i=1}^{K} B_i$$

en

$$Y = \bigcup_{i=1}^{K} Y_i$$

dan geldt blijkbaar

$$N = B \cup Y.$$

B is gesloten in N, dus normaal. Daar uit (1) en de inductie-veronderstelling $\dim B_i \leq n-1$ volgt, kunnen we hulpstelling VI toepassen, zodat

$$\dim B = \dim \bigcup_{i=1}^{K} B_i \leq n-1.$$

Dit betekent, dat de open overdekking

$$\{B \cap U_i\} \quad (i=1,2,\ldots,K)$$

van B een verfijning $\{G_j\}$ van orde $\leq n-1$ bezit, waarbij de G_j open in B zijn. Voeg aan iedere G_j een U_i toe, die de desbetreffende G_j bevat. En laat H_i de som van al die G_j zijn, welke toegevoegd zijn aan U_i. Dan is $\{H_i\}$ uiteraard een open overdekking van B van orde $\leqq n-1$, terwijl

(2) $$H_i \subset U_i .$$

Krimp de open overdekking $\{H_i\}$ van de normale B in volgens hulpstelling V tot een overdekking $\{K_i\}$ met

(3) $$\overline{K}_i \subset H_i .$$

De orde van de gesloten overdekking $\{\overline{K}_i\}$ is blijkbaar $\leqq n-1$. Blaas deze overdekking op via hulpstelling VI tot een in N open systeem $\{L_i\}$, blijkbaar eveneens van orde $\leqq n-1$ met

(4) $$\overline{K}_i \subset L_i .$$

Stellen we nu
$$M_i = L_i \cap U_i \quad (i=1,2,\ldots,K)$$
dan zijn de M_i open in N en $\{M_i\}$ heeft orde $\leqq n-1$.
Verder volgt uit $M_i \subset U_i$ en $\overline{K}_i \subset M_i$ (zie (2),(3) en (4)), dat het systeem $\{M_i\}$ de rand B overdekt.
Nu is het systeem
$$\{M_i, Y_j\}$$
blijkbaar een verfijning van $\{U_i\}$ en heeft een orde $\leqq n$. Hieruit volgt dim $N \leqq n$, q.e.d.

<u>Stelling VII</u>. Iedere metriseerbare ruimte ligt (topologisch) dicht in een volledige metrische ruimte van dezelfde dimensie.
<u>Stelling VIII</u> (Dowker, Hurewicz (1956)). Een metrische ruimte M heeft een dimensie $\leqq n$, dan en slechts dan als er een rij van locaal eindige open overdekkingen $r_i (i=1,2,\ldots)$ bestaat, ieder van orde $\leqq n$ en met een maas $m_i \to 0$ (de maas van een overdekking is het sup. van de diameters van de elementen uit de overdekking), zodat het gesloten omhulsel van ieder element uit r_{i+1} is bevat in een zeker element van r_i.
Interessanter lijkt de volgende karakterisering.
<u>Stelling IX</u> (Nagata (1956)). dim $M \leqq n$, dan en slechts dan als er een topologisch aequivalente metriek $\rho(x,y)$ in M is in te voeren, zodat voor iedere $\varepsilon > 0$ en iedere $x \in M$ een relatie
$$\rho(U_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon \qquad (i=1,2,\ldots,n+2)$$
voor $n+2$ punten $y_i \in M$, noodzakelijk een relatie
$$\rho(y_i, y_j) < \varepsilon \quad \text{voor geschikte } i,j \text{ met } i \neq j$$
impliceert.

Opmerking $U_\delta(x)$ is een δ-omgeving van x. In de stelling kan de $\varepsilon/2$ vervangen worden door een andere functie $\varphi(\varepsilon)$ van ε.

Jammer is het, dat in dit soort stellingen steeds - zij het min of meer verkapt - uniformiteitsvoorwaarden optreden. Slechts voor $n=0$ bezit stelling IV een volkomen bevredigende aequivalente formulering.

Definitie. M heet niet-archimedisch gemetriseerd, indien er een afstandsfunctie $\rho(x,y)$ bestaat, die reflexief en symmetrisch is en voldoet aan

$$\rho(x,z) \leqq \max \left[\rho(x,y), \rho(y,z)\right]$$

voor ieder drietal punten $x,y,z \in M$.

Stelling X Een metrische ruimte M is dan en slechts dan nuldimensionaal, als er een topologisch aequivalente niet-archimedische metriek is in te voeren.
Het is echter zeer de vraag of het volgende geldt (het "dan" is overigens juist): $\dim M \leqq n$ dan en slechts dan als er een topologisch aequivalente metriek ρ bestaat, zodat voor ieder $n+3$-tal punten

$$x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$$

een stel indices i,j met $i \neq j$ is aan te geven, zodat

$$\rho(y_i, y_j) \leqq \max_K \left[\rho(x, y_K)\right] .$$

Ook bij metriseringsproblemen speelt het uniforme karakter van de gegevens een belangrijke rol. B.v. geldt de volgende stelling.

Stelling XI (Dekker (1956)). Een normale ruimte N is dan en slechts dan metriseerbaar, indien er een reële functie $\mu(x,y) \geqslant 0$ (gedefinieerd op de puntenparen $x,y \in N$) is in te voeren, die reflexief, symmetrisch en uniform continu is en die de topologie van N beschrijft.

Definities: reflexief: $\mu(x,y)=0$ dan en slechts dan, indien $x=y$.
symmetrisch: $\mu(x,y) = \mu(y,x)$.
uniform continu: bij ieder puntenpaar $x,y \in N$ en iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden, zodat, voor ieder tweetal punten x' en y' met

$$\mu(x,x') < \delta \text{ en } \mu(y,y') < \delta$$

geldt

$$|\mu(x',y') - \mu(x,y)| < \varepsilon .$$

"beschrijft de topologie van N": de " ε-omgevingen" van $y \in N$

$$\{x \mid \mu(x,y) < \varepsilon\}$$

vormen, gesommeerd over alle $y \in N$ en alle $\varepsilon > 0$ een basis van N.
Het is evenwel een beslist onopgelost probleem of in deze stelling de eis van de uniforme continuiteit kan worden vervangen door continuiteit:

Uit $\mu(x_i,x) \to 0$ en $\mu(y_i,y) \to 0$ volgt

$$\mu(x_i,y_i) \to \mu(x,y).$$

Laren, april 1957