STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

<u>ZC 43a</u>

Avondcursus wiskunde 1956/57.

Vraagstukken.

C.G.Lekkerkerker en W.Peremans en J.Verhoeff.

1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Avondcursus 1956-1957

Vraagstukken

door

Dr C.G. Lekkerkerker, Dr W. Peremans en J. Verhoeff.

etekent $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

m is $\lim_{x \to \infty} (3-x) = -\infty$.

s $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

limietteorema van de samengestelde functie toe; waarom mag

.

z.31 is bewezen:

$\lim_{\to a} g(x) = \infty$ volgt $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0$.

s nu: Is $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ en geldt:

$g(x) > 0$ in een omgeving van a $(x \neq a)$,

s $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \infty$.

dat hierbij a zowel eindig als oneindig mag zijn en dat

orwaarde (1) niet weggelaten mag worden.

s: $\lim_{x \to \infty} \left\{ \sqrt{x} - \sqrt{[x]} \right\} = 0$.

alt te zeggen over het gedrag van

$$x^2 - [x]^2 \text{ als } x \to \infty ?$$

s door differentiëren naar p dat

$x^p - [x]^p$ voor vaste x een monotoon stijgende

ie van p is $(x > 0,\ p > 0)$.

l α zó dat

$$x^\alpha (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})$$

indige, van nul verschillende limiet heeft voor $x \to \infty$ en

l die limiet.

s: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ $(k > 0)$,

$(2^{1/n}-1) = \log 2$, $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n = 1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = 1$.

5. Bewijs: $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{\log(x+1) - \log x\right\} = 0$

en laat zien dat de laatste limiet uit 4 hieruit volgt.

Bewijs algemener: is $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{f(x+1)-f(x)\right\} = 0$, dan is $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

Laat zien dat $(\log x)^2$, $(\log x)^p$ $(p > 0)$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, x^p $(0 < p < 1)$

aan deze voorwaarde voldoen.

6. Voor welke α heeft

$$x^{\alpha}(\log(x+1) - \log x)$$

voor $x \to \infty$ een eindige, van nul verschillende limiet? Bepaal die limiet.

7. Hoe luiden de beide regels van l'Hôpital?

Bepaal $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{x^{\alpha}}$ voor $0 < \alpha < 1$ en voor $\alpha \geq 1$.

Bepaal $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.

8. Bewijs: is $f'(x) \geq c > 0$ $(x > a)$, dan is $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

9. Bepaal

$$\lim_{x\to\infty} \left\{\sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n} - \sqrt[n]{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}\right\}$$

(n een vast natuurlijk getal; $a_1, a_2, \ldots, b_n$ constanten),

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ (n en m natuurlijke getallen).

10. Bepaal

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

11. Zij (x,y) een punt op de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $D(x)$ de afstand tot de dichtstbijzijnde asymptoot.

Bepaal $\lim\limits_{x\to\infty} x\,D(x)$.

12. Bewijs: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

13. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gegeven door $a_0=0$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. Bewijs, dat deze rij convergeert en bepaal de limiet. Onderzoek ook het geval dat het gegeven $a_0=0$ vervangen wordt door $a_0=\lambda$ (λ reëel $\geqslant -2$).

14. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gegeven door $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Verder zij $u_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Bewijs dat de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ convergeert en bepaal de limiet.

15. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gegeven door $a_0=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{1-a_n}$. Bewijs, dat deze rij convergeert en bepaal de limiet. Onderzoek ook het geval, dat het gegeven $a_0=\frac{1}{2}$ vervangen wordt door $a_0=\lambda$ (λ reëel, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$).

16. Als a een complex getal $\neq 0$ en α een reëel getal is, dan is de verzameling der complexe getallen z, die voldoen aan

$$az + \overline{a}\overline{z} + \alpha = 0$$

een rechte lijn in het complexe vlak. Bewijs dit.

17. Als a een complex getal en α een reëel getal is, dan is de verzameling der complexe getallen z, die voldoen aan

$$z\overline{z} + az + \overline{a}\,\overline{z} + \alpha = 0$$

een cirkel of een punt of de lege verzameling in het complexe vlak. Bewijs dit en stel een voorwaarde op, waaraan a en α moeten voldoen, opdat het een cirkel is.

18. Toon aan dat iedere rechte lijn (resp. cirkel) in de gedaante van opgave 16 (resp. 17) kan worden geschreven.

19. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

20. Onderzoek de convergentie van $\sum_n \frac{1}{\log n}$, $\sum_n \frac{1}{n \log n}$, $\sum_n \frac{1}{n^2 \log n}$.

21. Bereken $\limsup_{n \to \infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

22. Bewijs de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

23. Bewijs: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ uitgaande van het feit dat $\binom{n}{k}$ het aantal manieren is waarop men uit n dingesen een k-tal kan kiezen.

24. Bewijs: $\sum_{k=p}^{n+p} \binom{k}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$; $p \geqslant 0$

25. Bewijs: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$; $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

26. Bewijs: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

27. Bereken: $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Evenzo: $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & 11 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

28. Bewijs zonder de determinant te ontwikkelen en zonder de factoren rechts uit te schrijven dat

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z);$$

29. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} x & p & q & r & 1 \\ a & x & s & t & 1 \\ a & b & x & u & 1 \\ a & b & c & x & 1 \\ a & b & c & d & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

30. Los x op uit:

$$\begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

31. Onderzoek, of de navolgende puntendrietallen collineair zijn:
a. (3,1), (11,7) en (-1,-2); b. (0,0), (-3,4) en (6,-8);
c. (2,1), (31,15) en (4,7).

32. Op de zijden van $\triangle ABC$ (of hare verlengden) neemt men de punten D, E en F zodanig aan, dat $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = -1$. Bewijs dat de punten D, E en F collineair zijn. (Stelling van Menelaos).

33. Differentieer

$$\sqrt[3]{x},\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{(x+a)^p}{(x+b)^q},\ x \log x,\ 2 \log \sin \frac{x}{2} - x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

34. De vergelijking $x^3-3x + c = 0$ heeft voor geen enkele waarde van c een wortel tussen 0 en 1. De vergelijking $x^n+px+q=0$ heeft ten hoogste 3 reële wortels.

35. Zij f(x) differentieerbaar op een segment (a,b) en zij $f'(a)\ f'(b) < 0$. Bewijs dat er een punt ξ is met $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$.

36. Zij f(x) differentieerbaar op een segment (a,b) en zij $f'(x) > 0$ behalve in een eindig aantal punten. Bewijs dat f(x) monotoon stijgend is.

37. Bewijs:

$$-\log(1-x) < x + \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{voor } 0 < x < 1,$$

$$1 - x < e^{-x} < 1-x + \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{voor } x > 0.$$

38. Bewijs:

$$\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y} \quad (0 \leqq x \leqq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq \tfrac{\pi}{2}),$$

$$\frac{y-x}{1+y^2} \leqq \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x \leqq \frac{y-x}{1+x^2} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

39. Zij f(x) differentieerbaar in x_o. Zij $x_1 < x_o$ en $x_2 > x_o$. Bewijs dat $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ tot $f'(x_o)$ nadert als $x_1 \to x_o$, $x_2 \to x_o$ (wat betekent deze zinsnede?).

40. Differentieer

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1},\ \log \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1},\ e^{\sqrt[3]{(\log \sin^3 x)^2}},$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad x^x,\quad \left(\frac{1}{1-x^p}\right)^m,\quad \sin(\cos x^2).$$

41. Bereken

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\, x^{n-1},$$

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \ldots + n \sin nx.$$

42. Bewijs $x > \sin x > \frac{2}{\pi} x$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

43. Bepaal het maximum van $x^n e^{-x}$, $x^n e^{-x} \log x$ $(x > 0)$.

44. Zijn f(x) en g(x) beide n maal differentieerbaar, dan geldt

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\, g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x)\, g^{(n-\nu)}(x)$$

(formule van Leibniz). Bepaal $(x^4 e^x)^{(4)}$, $(x^4 \sin x)^{(4)}$.

45. Als a en b positieve reële getallen zijn, geldt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Verder is $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b)$ dan en slechts dan als $a=b$.

46. Laat a en b reële getallen zijn met $0 < a < b$. De rijen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, \ldots$ zijn gedefinieerd door $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Bewijs de volgende beweringen:

1^o $a_n < b_n$ voor alle n.

2^o De rij $a_0, a_1, \ldots$ is monotoon stijgend, de rij $b_0, b_1, \ldots$ is monotoon dalend.

3^o $\lim_{n\to\infty} a_n$ en $\lim_{n\to\infty} 1_n$ bestaan en er geldt $a < \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n < b$.

Opmerking. De limiet in 3^o heet het reken-meetkundige gemiddelde van a en b.

47. Laat δ een reëel getal zijn met $0 < \delta < \pi$. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ uniform convergeert voor $\delta < x < 2\pi - \delta$.

48. Bewijs, dat in een groep de orde van a^{-1} gelijk is aan de orde van a. Bewijs, dat in een groep van even orde het aantal elementen met even orde oneven is.

49. In een groep G noemt men elementen van de gedaante $a^{-1}b^{-1}ab$ commutatoren. De ondergroep C van G, die door de commutatoren wordt voortgebracht, heet de commutatorgroep van G. Bewijs, dat C een normale ondergroep van G is, en dat de factorgroep G/C commutatief is. Bewijs, dat als N een normale ondergroep van G is met commutatieve factorgroep, C een ondergroep van N is.

50. Bepaal de commutatorgroep van de symmetrische groep $\mathfrak{S}_3$.

51. Bewijs, dat in de alternerende groep $\mathfrak{A}_4$ de permutaties (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23) een normale ondergroep vormen.

52. Bereken de determinant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \beta & \gamma & \alpha \\ c & a & b & \gamma & \alpha & \beta \\ b & c & a & \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha & a & b & c \\ \gamma & \alpha & \beta & c & a & b \\ \alpha & \beta & \gamma & b & c & a \end{vmatrix}$$ door hem kolom bij kolom te vermenigvuldigen met $\Delta =$ $$\begin{vmatrix} a & b & c & \beta & \gamma & \alpha \\ c & a & b & \gamma & \alpha & \beta \\ b & c & a & \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta & -\gamma & -\alpha & -a & -b & -c \\ -\gamma & -\alpha & -\beta & -c & -a & -b \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & -b & -c & -a \end{vmatrix}$$

53. Bewijs bijv. met volledige inductie:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{k} \frac{h^2-3h+1}{h!} = -1-n+\frac{1}{n!}$$

54. Van een driehoek zijn twee hoekpunten A en B vast en C is variabel op een rechte l. Bewijs dat het hoogtepunt op een vaste kegelsnede ligt en bepaal deze.
Wat kunt U van de soort van deze snee zeggen, speciaal voor byzondere standen van l.
Het snijpunt van de hoogtelijn door A en de zwaartelijn door B zal als C op l varieert een kromme Γ doorlopen. Bepaal deze en kies daarna zo mogelijk l dusdanig dat Γ een gelijkzijdige hyperbool is.

55. Bepaal de vergelijking, het middelpunt en de straal van de cirkel (de cirkels): a. die door de snijpunten A en B van de cirkel C_1 en de rechte l gaat en door het punt $(-3,3)$; b. die door de snijpunten C en D van de cirkels C_1 en C_2 gaan en de X-as raken; c. die door C en D gaan en de rechte l raken; d. die de rechte l in $(3,2)$ raken en een straal 5 hebben; e. die door C en D gaat en welks middelpunt op $7x+4y=5$ ligt; f. die C_1 in het punt $(-2,-2)$ raakt en de cirkel $x^2+y^2+24x+4y-112=0$ $\perp$ snijdt; g. die C_1 in $(-2,-2)$ raakt en de cirkel $x^2+y^2=28$ halveert; h. die C_1 in $(-2,-2)$ raken en door de cirkel $x^2+y^2+10y-168=0$ gehalveerd worden.

C_1: $x^2+y^2-4x+6y-4=0$;
C_2: $x^2+y^2-2x+2y-2=0$;
l: $3x-4y=1$

56. De raaklijn en de normaal in een veranderlijk punt P van de ellips $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (hyperbool $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$) snijden de hoofdas respectievelijk in Q en in R en de nevenas in S en in T.
Bewijs: a. dat $OQ \times OR$ constant is; b. dat $OS \times OT$ constant is; c. dat $PR:PT$ constant is; d. dat $PR \times PT$ gelijk is aan het product der voerstralen van P; e. dat de omgeschreven cirkel van ΔPST door de brandpunten gaat.

57. Zij gegeven een rij getallen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ en zij $\lim_{n\to\infty} s_n = l$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n} = l$.

58. Zij gegeven een rij positieve getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Zij $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Dan is ook $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

59. Zij $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ een rij positieve getallen die monotoon toenemen tot oneindig. Laten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reële getallen zijn en zij $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = l$. Dan is ook $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = l$. Bewijs dat de beide vorige vraagstukken hier bijzondere gevallen van zijn.

60. Zij weer $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ een rij positieve getallen die monotoon toenemen tot oneindig en laat $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ een willekeurige rij reële getallen zijn. Bewijs dat

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{A_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} .$$

Generaliseer nu de opgaven 57 en 58.

61. Zij $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ een begrensde rij van reële getallen. Zij V de verzameling der verdichtingspunten van deze rij. Bewijs dat V niet-leeg en afgesloten is en dat het grootste getal uit V gegeven wordt door $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

62. Bewijs met behulp van opgave 60 dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{l}, \quad \lim_{n} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} n^k \sim \frac{1}{k+1} n^{k+1} \quad (k > -1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sim \log n.$$

63. Bepaal door middel van reeksontwikkelingen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{b}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,cos}(1-x^2) - x\sqrt{2}}{x^3}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arc\,sin}(1-x^2) - \frac{1}{1+x^2}}{(1-x)^3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sin} x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x - 1}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty} \left\{2 \log \frac{x}{x+1} - \log \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}}\right\},$$

$$\lim_{x\to 1}^{-} \left\{\frac{x \operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log(1-x^2) + \frac{1}{4} \log \frac{1+\sin \pi x/2}{1-\sin \pi x/2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}(1-x)}\right\}.$$

64. Bewijs dat de rij getallen $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ convergeert (constante van Euler) door de reeksontwikkeling van $\log(1+x)$ te gebruiken. Is deze bewering scherper of zwakker dan de laatste bewering in opg.62?

65. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2$, met behulp van het vorige vraagstuk, of door een tussensom van $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x}$ te beschouwen.

66. Bewijs dat $\lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+kx}\,dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}(\sin x)^n dx=0$.

67. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx}=\max_{a\leq x\leq b} f(x)$$

($f(x)$ continu en positief op (a,b); a en b eindig).

68. Bepaal de eerste en tweede partiële afgeleiden van de functie $f(x,y)$ bepaald door

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+2y)^4}{x^2+y^2},\quad f(0,0)=0.$$

Ga na of ze continu zijn in $(0,0)$.

69. Bewijs dat $\frac{1}{(n+1)\log^p(n+1)}:\frac{1}{n\log^p n}=1-\frac{1}{n}-\frac{p}{n\log n}+\frac{f(n)}{n^2}$, waarin $f(n)$ een begrensde functie is ($p>0$).

Leid hieruit een convergentiecriterium voor reeksen af.