STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 45

Cursus Lebesque-integratie.

N.G.de Bruijn.

1958

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

Cursus Lebesgue-integratie

door

Prof.Dr N.G. de Bruijn

1957-1958

Litteratuur. P.R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York 1950
M.E. Munroe, Introduction to Measure and Integration, Cambridge (Mass) 1953
A.C. Zaanen, Linear Analysis (Part I), Amsterdam-Groningen 1953
J.C. Burkill, The Lebesgue Integral, Cambridge Tracts Nr 40, 1951

0. Inleiding.

0.1 Waarom Lebesgue-integralen? Om de gedachten te bepalen beperken we ons even tot begrensde reële functies op het eindige interval $0 \leq x \leq 1$. Practisch gesproken vallen al deze functies onder het integraalbegrip van Riemann, en zelfs onder een nog eenvoudiger integraalbegrip (bijv. dat van Cauchy), daar zulke functies "doorgaans" stuksgewijs continu zijn. Het integraalbegrip van Riemann is enerzijds te ruim en te geleerd voor de eenvoudige functies waar we in de practijk mee te maken hebben, anderzijds is het voor theoretische doeleinden onhandelbaar wegens zijn relatieve beperktheid. Het algemenere integraalbegrip van Lebesgue is voor theoretische doeleinden bijzonder geschikt, en ontleent daaraan ook zijn practische betekenis.

Voor L-integralen geldt bijv. de volgende stelling: Zijn $f_1(x), f_2(x), \ldots$ alle L-integreerbaar op $0 \leq x \leq 1$, is $|f_n(x)| \leq 1$ $(0 \leq x \leq 1,\ n=1,2,3,\ldots)$, en bestaat $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ voor elke x $(0 \leq x \leq 1)$, dan is ook $f(x)$ L-integreerbaar, en $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$

Voor R-integralen geldt deze stelling niet. Om een tegenvoorbeeld te maken construeren we op het interval (0,1) verzamelingen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ als volgt. S_1 is een gesloten interval, ter lengte $\frac{1}{4}$, middelpunt $\frac{1}{2}$. Laat men uit (0,1) de verzameling S_1 weg, dan blijven 2 intervallen J_1 en J_2 over. In elk dezer brengt men om het middelpunt een gesloten interval aan waarvan de lengte het achtste deel is van de lengte van J_1 resp. J_2. Deze twee intervallen samen noemen we S_2. Laten we uit (0,1) zowel S_1 als S_2 weg, dan blijven 4 intervallen over. In elk dezer brengen we weer (symmetrisch t.o.v. het midden) een interval aan dat 16 keer zo klein is, en samen vormen deze S_3. Enz. Laten we de som van de lengten van de (disjuncte) intervallen waaruit een eindige intervallenverzameling bestaat, de <u>maat</u> van die verzameling noemen. De maten van $S_1, S_2, S_3, \ldots$ zijn nu resp.

$$\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\,,\ \frac{1}{32}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{15}{16}\,,\ \ldots$$

De som van deze getallen is

$$p = 1 - (1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{8})(1-\tfrac{1}{16})\ldots\,,$$

zodat $0 < p < 1$ is.
Laat nu $f_n(x)$ gedefinieerd zijn door

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \in S_1+\ldots+S_n \\ 0 \text{ als } x \notin S_1+\ldots+S_n \end{cases}\,.$$

Kennelijk zijn alle $f_n(x)$ R-integreerbaar, en gemakkelijk is in te zien dat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = p$. Voor elke x bestaat de limiet f(x), en deze limiet is steeds 0 of 1. Deze f(x) is echter <u>niet</u> R-integreerbaar. We zullen dit niet in detail nagaan. Wel is direct in te zien dat de bovenintegraal van f gelijk is aan 1, dus niet aan p (het is dus niet waar dat " $\int_0^1 f(x)dx$ bestaat en $=p$ "). Want elk interval op (0,1) heeft iets met één der S_n's gemeen. Het maximum van f is op elk deelinterval dus =1, dus de bovenintegraal is =1. (Met iets meer moeite kan men laten zien dat de onderintegraal =p is).

Uit het gegeven voorbeeld blijkt dat we met R-integralen niet zo zorgeloos kunnen omspringen als met L-integralen. De limietfunctie f van een rij "fatsoenlijke" functies is in de practijk weer een "fatsoenlijke" functie. Wanneer we met L-integralen werken zijn we ontslagen van de plicht om de fatsoenlijkheid van deze limiet aan te tonen en te laten zien dat op grond daarvan de limietovergang geoorloofd is.

Zonder toelichting noemen we nog (in enigszins ruwe vorm) een tweede voorbeeld waarbij het voordeel van L-integralen blijkt. Is f(x) een complexe functie waarvoor $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ bestaat (in de zin van Lebesgue), en zijn $c_n (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ de Fourier-coëfficiënten ($c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi nix} dx$), dan convergeert $\Sigma_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$. Zijn omgekeerd de c_n's gegeven, zó dat $\Sigma_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ convergeert, dan is er een functie f (van het genoemde type) waarvan de c_n's de Fourier-coëfficiënten zijn.

Voor R-integralen is het eerste deel van de stelling juist, doch het tweede deel geenszins.

0.2. Lebesgue-maat op de rechte lijn. Een integraal kan worden opgevat als een oppervlak, d.i. een maat voor een tweedimensionale verzameling. Om een indruk te geven van wat de L-maat betekent, zullen we ons even beperken tot het maatbegrip voor eendimensionale verzamelingen. Wat daar met het R-integraalbegrip correspondeert, wordt gewoonlijk de Jordan-maat genoemd. Onze beschouwingen zullen slechts oriënterend zijn en verschillende hiaten vertonen.

We beschouwen eerst intervallenverzamelingen, en we beperken ons tot intervallen die in (0,1) gelegen zijn. Is V de vereniging van eindig vele of aftelbaar vele intervallen (laten we ons maar tot open intervallen beperken, ofschoon het er niet veel toe doet), die twee aan twee disjunct zijn, dan wordt de som der lengten de maat $\mu(V)$ van V genoemd. Op deze manier is aan elke vereniging van open intervallen een maat toegekend. Want zo'n vereniging is een open verzameling, en we hebben

Stelling 1. Elke open deelverzameling van $(-\infty, \infty)$ is de vereniging van hoogstens aftelbaar vele disjuncte intervallen.

Bewijs: Zij V open. Bij elke $a \in V$ construeren we het grootste open interval J_a dat a bevat en nog geheel in V ligt. Is $a \in V$, $b \in V$ dan zijn J_a en J_b òf disjunct, òf identiek. V is dus de vereniging van een stel disjuncte open intervallen. Dit stel is aftelbaar, want er zijn hoogstens aftelbaar vele intervallen bij met lengte > 1, hoogstens aftelbaar vele met lengte $> \frac{1}{2}$, etc.

Het is niet moeilijk aan te tonen dat in (0,1) gelegen open verzamelingen een maat ≤ 1 hebben.

Zij nu Ω de klasse van alle open deelverzamelingen van (0,1), en zij Λ de (kleinere) klasse van alle open verzamelingen op (0,1) die slechts uit een eindig aantal intervallen bestaan.

Zij nu S een willekeurige verzameling op (0,1). De uitwendige L-maat van S en de <u>uitwendige</u> J-maat van S zijn nu resp.

$$\mu_L^*(S) = \inf \{ \mu(V) \mid S \subset V \subset (0,1),\ V \in \Omega \} ,$$
$$\mu_J^*(S) = \inf \{ \mu(V) \mid S \subset V \subset (0,1),\ V \in \Lambda \} .$$

De notatie betekent het volgende. In beide gevallen is de uitdrukking tussen accoladen een verzameling, nl. de verzameling van de getallen $\mu(V)$, waarin V de verzamelingen met de achter de streep genoemde eigenschappen doorloopt. Verder betekent inf W de grootste ondergrens (het infimum) van de getallenverzameling W. Voor verzamelingstheoretische notaties verwijzen we naar 0.5.

Daar de bij de definitie van $\mu_J^*(S)$ gebruikte getallenverzameling een deel is van de bij $\mu_L^*(S)$ gebruikte, is het duidelijk dat

$$\mu_J^*(S) \geq \mu_L^*(S).$$

Als inwendige maat van S zullen we definiëren

$$\mu_{*L}(S) = 1 - \mu_L^*(S') , \qquad \mu_{*J}(S) = 1 - \mu_J^*(S'),$$

waarin S' het complement van S t.o.v. (0,1) voorstelt. Men kan nu bewijzen dat

$$0 \leq \mu_{*J}(S) \leq \mu_{*L}(S) \leq \mu_L^*(S) \leq \mu_J^*(S).$$

S heet J-meetbaar als de beide uiterste leden (dus alle leden) gelijk zijn, en L-meetbaar als de twee binnenste leden gelijk zijn. Een J-meetbare verzameling is dus steeds L-meetbaar, maar het omgekeerde is niet algemeen waar.

<u>Voorbeeld</u>. Zij S de (aftelbare) verzameling van alle rationale getallen op (0,1). Dan is $\mu_J^*(S)=1$, $\mu_{*J}(S)=0$. Want als een eindige intervallenverzameling S bedekt, dan bedekt hij het hele interval (0,1) op een eindig aantal punten na. Hetzelfde geldt voor S'. Voor de uitwendige L-maat vinden we $\mu_L^*(S)=0$. Zij nl. $\varepsilon > 0$, en $r_1, r_2, r_3, \ldots$ een aftelling van S. Het getal r_n bedekken we door een interval J_n met lengte $2^{-n}\varepsilon$. De vereniging V van $J_1, J_2, J_3, \ldots$ heeft nu als maat hoogstens $2^{-1}\varepsilon + 2^{-2}\varepsilon + \ldots = \varepsilon$. De verzameling waarvan $\mu_L^*(S)$ het infimum is, bevat dus een getal $< \varepsilon$. Daar alle getallen van die

verzameling ≥ 0 zijn, is het infimum nul.

Daar $0 \leq \mu_{*L} \leq \mu^*_L$, is nu ook $\mu_{*L}(S)=0$. Derhalve is S L-meetbaar, met maat 0. (Als $\mu_{*L}(S)=\mu^*_L(S)$, dan heet dit bedrag de maat van S; notatie $\mu_L(S)$. Idem voor J-maat). Doch S is niet J-meetbaar.

0.3. Abstracte maattheorie. We zullen op axiomatische basis een maattheorie ontwikkelen. Deze theorie bevat de ééndimensionale en ook de meerdimensionale L-maat als bijzondere gevallen, maar ook bijv. de voor de opbouw van Stieltjes-integralen nodige Lebesgue-Stieltjesmaat, en maten op gekromde oppervlakken. Ook kunnen we meer triviale zaken onder deze maattheorie rangschikken. We kunnen bijvoorbeeld een aftelbare verzameling nemen, en als maat van een deelverzameling eenvoudig het aantal elementen. De bij deze maat behorende integraal wordt dan eenvoudig een oneindige reeks, zodat allerlei integraalstellingen tot stellingen over reeksen worden gespecializeerd. Een stelling over verwisseling van een sommatie en een integratie verschijnt dan als een bijzonder geval van een stelling over verwisseling van twee integraties.

Een ander voordeel van de abstracte behandelingswijze boven de klassieke is dat topologie en maattheorie van elkaar worden gescheiden. Topologische middelen zijn nog slechts nodig om in een bijzonder geval te verfiëren dat de te beschouwen maatruimte aan de maattheoretische axioma's voldoet.

Tenslotte wijzen we nog op het feit dat de waarschijnlijkheidsrekening als algemene maattheorie kan worden gezien (Kolmogorov, Ergebn.d.Math.2 no 3 (1933)).

0.4. Gegeneraliseerde reële getallen. We zullen aan de verzameling R der reële getallen twee nieuwe elementen toevoegen, nl. de symbolen ∞ en $-\infty$. Dit uitgebreide systeem heet de verzameling R_g der gegeneraliseerde reële getallen. De oude getallen zullen we eindig noemen.

De in R bestaande ordening wordt tot R_g uitgebreid door de afspraak dat $-\infty$ kleiner is dan alle andere elementen van R_g, en ∞ groter dan alle andere.

R_g blijft een lineair geordend systeem; wat ordening betreft is R_g isomorph met een eindig gesloten interval. We merken nog op dat

$x \in R$ resp. $x \in R_g$ geschreven kunnen worden als $-\infty < x < \infty$ resp. $-\infty \leq x \leq \infty$.

In sommige (doch niet in alle) gevallen zullen we som, product, verschil en quotiënt, van elementen van R_g definiëren, doch er zal niet steeds aan de rekenregels voldaan zijn. Natuurlijk nemen we som, product etc. uit R direct in R_g over. Voorts zal $a+b$ steeds hetzelfde betekenen als $b+a$, evenzo is ab hetzelfde als ba.

We definiëren

$$\infty + \infty = \infty \quad , \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$a + \infty = \infty \quad a + (-\infty) = -\infty \quad , \quad a - \infty = -\infty \quad , \quad a-(-\infty) = \infty \ ,$$

als a eindig is. Verder

$$a . \infty = \begin{cases} \infty & \text{als } 0 < a \leq \infty \\ 0 & \text{als } a = 0 \\ -\infty & \text{als } -\infty \leq a < 0 \end{cases} ,$$

en $a.(-\infty) = -(a.\infty)$ ($-(-\infty)$ betekent ∞).

Vervolgens is per definitie

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \qquad \text{als a eindig is.}$$

Niet gedefinieerd worden $\infty + (-\infty)$, $\infty - \infty$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\frac{a}{0}$.

Een herhaalde som kan worden gedefinieerd zolang niet ∞ en $-\infty$ beide als term voorkomen. De waarde van de som is onafhankelijk van de volgorde der termen, en we mogen haakjes plaatsen op dezelfde willekeurige manier als dat in R kan.

Een herhaald product is steeds gedefinieerd, en de uitkomst is onafhankelijk van haakjes of volgorde.

De distributieve wet geldt niet steeds. Want $0.\infty + 0.(-\infty) = 0+0=0$, doch $0(\infty + (-\infty))$ is niet gedefinieerd.

Bij een oneindige reeks met niet-negatieve termen schrijven we $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ als minstens één der termen ∞ is, en ook als alle termen eindig zijn doch de reeks divergeert. Daarmee is dus voor elke reeks met niet-negatieve termen een som gedefinieerd. Men gaat gemakkelijk na dat uit $0 \leq a \leq \infty$, $0 \leq a_1 \leq \infty, \ldots$ steeds volgt $a \, \Sigma_1^{\infty} a_n = \Sigma_1^{\infty} a \, a_n$.

Voorts geldt voor reeksen met niet-negatieve termen de stelling dat de som niet verandert bij verandering van de volgorde der termen. Ook geldt de hieraan verwante stelling dat in een dubbel-reeks de sommatie-volgorde mag worden verwisseld. (In het geval dat alle termen eindig zijn, zijn deze resultaten bekend. Komen er oneindige termen voor, dan is de som natuurlijk oneindig, bij elke sommatievolgorde).

Voor reeksen met zowel positieve als negatieve termen zullen we geen uitbreiding aan de gewone somdefinitie geven.

0.5. Verzamelingstheoretische notaties. We beschouwen een vaste verzameling X. Deelverzamelingen daarvan worden aangeduid met A,B,V,...

$a \in V$	bet.:	a is element van V
$\{x \mid P(x)\}$	bet.:	de verzameling van alle $x \in X$ waarvoor de bewering P(x) juist is.
0	bet.:	de lege verzameling.
$A \subset V$	bet.:	A is deel van V
$V \supset A$	bet.:	A is deel van V
$A \cap B$ of AB	bet.:	de doorsnede van A en B
$A \cup B$ of A+B	bet.:	de vereniging van A en B

A en B heten disjunst als AB leeg is.

A-B is het verschil van A en B: alles wat in A doch niet in B ligt. Dus A-B=A-AB.

$A \Delta B$ is het symmetrische verschil van A en B: alles wat in één van de twee doch niet in beide ligt. Het is dus A+B-AB.

A', het complement van A, is gedefinieerd als X-A.

Enkele regenregels: $A+B = B+A$ $\qquad AB=BA$

$(A+B)+C = A+(B+C) \qquad (AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB+AC$

$A+BC = (A+B)(A+C)$

$(A')' = A$

$(A+B)' = A'B' , \qquad (AB)' = A'+B'$

$(A-B) = AB' , \qquad (A-B)' = A'+B.$

Pas op: niet steeds is $(A+B)-C = A+(B-C)$.

We beschouwen ook bewerkingen met oneindig vele verzamelingen.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1+A_2+\ldots = \Sigma_{i=1}^{\infty} A_i = \text{vereniging van } A_1,A_2,\ldots$$

Het heet een <u>disjuncte</u> som als de A_i's twee aan twee disjunct zijn.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1A_2A_3\ldots = \Pi_{i=1}^{\infty} A_i = \text{doorsnede van } A_1, A_2, \ldots .$$

Is $A_1, A_2, A_3, \ldots$ een rij verzamelingen, dan zijn lim sup A_n en lim inf A_n steeds gedefinieerd:

$$\limsup A_n = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{n+1} + \ldots).$$

Gemakkelijk blijkt dat

$$\limsup A_n = \{ x \mid x \text{ in } \infty \text{ vele } A_n\text{'s} \} .$$

Evenzo is

$$\liminf A_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_nA_{n+1}A_{n+2}\ldots) = \{ x \mid x \text{ op denduur in alle } A_n\text{'s} \} .$$

Voorbeeld: Is $a_1, a_2, \ldots$ een rij eindige getallen $(0 \leq a_n \leq \infty)$, dan is

$\limsup (-\infty, a_n) = (-\infty, \limsup a_n \}$,

$\liminf (-\infty, a_n) = (-\infty, \liminf a_n \}$.

Hier betekent de accolade] of). Zoals gewoonlijk betekent het ronde haakje dat het eindpunt niet wordt meegeteld en het rechte dat het wèl wordt meegeteld.

Steeds is $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Zijn beide leden gelijk aan eenzelfde verzameling A, dan zeggen we dat $A_n \to A$ of $\lim A_n = A$.

Dat de rij $\{A_n\}$ een limiet heeft betekent ook dat elke $x \in X$ een duidelijke houding t.o.v. de rij aanneemt: òf op denduur steeds $x \in A_n$, òf op den duur steeds $x \notin A_n$.

Als $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, dan is de rij convergent, en

$$A_n \to A_1 + A_2 + \ldots .$$

Als $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, dan is de rij eveneens convergent, en

$$A_n \to A_1A_2A_3\ldots .$$

<u>Klassen</u>: Een collectie van deelverzamelingen van X heet een klasse. Klassen zullen met griekse hoofdletters worden aangeduid.

Hoofdstuk 1. Maat.

Evenals in 0.5. beschouwen we een vaste verzameling X, die we oc wel "de ruimte" zullen noemen. Elementen van X heten punten. Deel verzamelingen van X heten puntverzamelingen of kortweg verzamelin gen. In X wordt geen topologie aanwezig verondersteld.

1.1. Ringen, sigmaringen, semiringen.

Definitie 1.1.1. Een klasse Θ heet een ring als Θ niet leeg is, en als de implicatie

$$(A \in \Theta) \,\&\, (B \in \Theta) \Rightarrow (A+B \in \Theta) \,\&\, (A-B \in \Theta)$$

geldt.

Voorbeelden:

$\Theta = \{V \mid V \subset X\}$

$\Theta = \{V \mid V \subset X, \text{ V eindig}\}$

$\Theta = \{V \mid \text{V leeg}\}$ (d.i. Θ bevat precies één eleme n.l. de lege verzameling).

$\Theta = \{V \mid V \subset X, \text{ V of V' eindig}\}$.

Stelling 1.1.1. Is Θ een ring, dan geldt

1^o $0 \in \Theta$

2^o $A_i \in \Theta \; (i=1,\ldots,n) \Rightarrow A_1+\ldots+A_n \in \Theta$

3^o $A_i \in \Theta \; (i=1,\ldots,n) \Rightarrow A_1A_2\ldots A_n \in \Theta$.

Bewijs: 1^o Θ niet leeg, dus er is een $A \in \Theta$. Dus $A-A \in \Theta$.

2^o Door inductie.

3^o Zij $A=A_1+\ldots+A_n$, dan is $A_1\ldots A_n=A-\sum_{i=1}^{n}(A-A_i)$, hetgeen is in te zien door van het linkerlid het complement t.o.v. A te vormen. Verder uit def.1.1.1. en 2^o.

Definitie 1.1.2. Een ring Θ heet een Boole-algebra als

$$A \in \Theta \Longrightarrow A' \in \Theta.$$

We zullen dit begrip niet gebruiken; we merken slechts op dat in zo'n Boole-algebra een dualiteitsprincipe geldt. Hebben we een juiste uitspraak over een aantal elementen A,B,..., en vervangen we overal $\cap$ door $\cup$ en omgekeerd, $\subset$ door $\supset$ en omgekeerd, A door A' en omgekeerd, B door B' en omgekeerd,..., 0 door X en omgekeerd, dan krijgen we weer een juiste uitspraak.

Definitie 1.1.3. Een ring Θ heet een σ-ring als

$$A_i \in \Theta \quad (i=1,2,3,\ldots) \implies \Sigma_1^\infty A_i \in \Theta .$$

Voorbeeld (negatief): Als X oneindig is, dan is $\{V \mid V \in X, V$ eindig$\}$ geen σ-ring.

Stelling 1.1.2. Is Θ een σ-ring, en is $A_i \in \Theta$ $(i=1,2,3,\ldots)$, dan is $A_1A_2A_3\ldots \in \Theta$, $\lim\inf A_n \in \Theta$, $\lim\sup A_n \in \Theta$.

Bewijs: Is $A= \Sigma_1^\infty A_i$, dan is $A \in \Theta$. Dus $A-A_i \in \Theta$ (alle i). Dus $\Sigma_1^\infty (A-A_i) \in \Theta$, zodat $A- \Sigma_1^\infty (A-A_i) \in \Theta$, dus $A_1A_2\ldots \in \Theta$ (zie bewijs van st.1, 3^o). De bewering over lim inf en lim sup volgt nu direct uit hun definitie in 0.5..

Definitie 1.1.4. Is Γ een klasse, en $0 \in \Gamma$, dan is $\Omega(\Gamma)$ de klasse bestaande uit alle verzamelingen die in de vorm $\Sigma_1^\infty A_i$ (disjuncte vorm) met $A_i \in \Gamma$ kunnen worden geschreven. (Eindige sommen van deze vorm kan men tot oneindige maken door oneindig veel termen 0 toe te voegen, want 0 is met zichzelf disjunct).

Definitie 1.1.5. Een klasse Γ heet een semiring als

1^o $0 \in \Gamma$

2^o $(A \in \Gamma)$ & $(B \in \Gamma) \implies AB \in \Omega(\Gamma)$ & $A-B \in \Omega(\Gamma)$.

Opmerking: Daar $A+B=AB+(A-B)+(B-A)$ een disjuncte splitsing is, volgt uit $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ ook dat $A+B \in \Omega(\Gamma)$.

Voorbeelden 1. $X = (-\infty, \infty)$. Γ is de verzameling van alle cellen in X, en ook de lege verzameling rekenen we tot Γ. Een cel is een interval $(a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$.

2. $X = R_n$, Γ als in voorbeeld 1; een cel is nu een blokje $a_1 < x_1 \leq b_1, \ldots, a_n < x_n \leq b_n$. Het bewijs dat dit een semiring is, is door inductie naar n te geven, vgl. 1.9.

3. $X = (-\infty, \infty)$. Γ bestaat uit de lege verzameling en alle intervallen $(n,n+1]$ (n geheel).

4. X willekeurig. Γ bestaat uit de lege verzameling, alle éénpuntsverzamelingen en alle aftelbaar oneindige verzamelingen

<u>Stelling 1.1.3.</u> Elke ring is tevens semiring.
<u>Bewijs:</u> Uit st. 1.1.1.

<u>Stelling 1.1.4.</u> Is Γ een semiring, en $\Omega(\Gamma)=\Omega$, dan geldt

1^o. $\Gamma\subset\Omega$

2^o. $P_i\in\Omega$ $(i=1,2,\ldots)$ $\Longrightarrow$ $\Sigma_1^\infty P_i\in\Omega$,
(dus $A_i\in\Gamma$ $(i=1,2,\ldots)$ $\Longrightarrow$ $\Sigma_1^\infty A_i\in\Omega$)

3^o. $P\in\Omega$, $Q\in\Omega\Longrightarrow PQ\in\Omega$

4^o. $P\in\Omega$, $A\in\Gamma\Longrightarrow P-A\in\Omega$
(dus $B\in\Gamma$, $A_1\in\Gamma,\ldots,A_n\in\Gamma\Longrightarrow B-(A_1+\ldots+A_n)\in\Omega$)

5^o $P_i\in\Omega\,(i=1,2,\ldots)$, dan bestaat er een stel disjuncte Q_i's met $Q_i\in\Omega$, $\Sigma P_i=\Sigma Q_i$, $Q_i\subset P_i$, $P_i-Q_i\in\Omega$.

<u>Bewijs.</u> 1^o volgt uit $A=A+0+0+\ldots$. 2^o volgt uit 5^o (aftelbaar vele disjuncte verzamelingen uit Ω vormen kennelijk samen weer een element van Ω). 3^o volgt uit $(\Sigma A_i)(\Sigma B_j)=\Sigma_{ij}A_iB_j$; als de A_i's disjunct zijn en de B_j's ook, dan zijn de A_iB_j's disjunct.

4^o. $P=\Sigma C_i$ (disjuncte som, $C_i\in\Gamma$). Dan $P-A=\Sigma_i(C_i-A)$. Elke C_i-A zit in Ω, en de (C_i-A)'s zijn disjunct. Dus $P-A\in\Omega$.

5^o. We behandelen eerst het geval dat $P_i\in\Gamma$ voor alle i. We schrijven nu A_i i.p.v. P_i. Stel

$$Q_1=A_1,\quad Q_i=A_i-(A_1+\ldots+A_{i-1})\quad (i>1).$$

Dan is $\Sigma Q_i=\Sigma A_i$, en de Q_i's zijn disjunct ($x\in Q_i$ betekent dat i het kleinste getal is met $x\in A_i$). Ook is $Q_i\subset A_i$, en $Q_i\in\Omega$ op grond van 4^o. Tenslotte is $A_i-Q_i=A_i(A_1+\ldots+A_{i-1})=A_i(Q_1+\ldots+Q_{i-1})=$ $=A_iQ_1+\ldots+A_iQ_{i-1}$. De termen van de laatste som zijn onderling disjunct, (daar de Q's dat zijn) en behoren alle tot Ω (op grond van 3^o). Dus $A_i-Q_i\in\Omega$.

Zij vervolgens $P_i\in\Omega$ $(i=1,2,\ldots)$. We schrijven $P_i=\Sigma_{j=1}^\infty A_{ij}$ ($A_{ij}\in\Gamma$, met $A_{ij}A_{ik}=0$ als $j\neq k$). Op de aftelbare collectie $\{A_{ij}\}$ $(i,j=1,2,\ldots)$ passen we het zojuist bewezen resultaat toe. We vinden dan $Q_{ij}\in\Omega$, $Q_{ij}\subset A_{ij}$, $A_{ij}-Q_{ij}\in\Omega$, $\Sigma_{ij}Q_{ij}=\Sigma_{ij}A_{ij}=\Sigma_iP_i$, en alle Q_{ij}'s zijn onderling disjunct. Noem $\Sigma_jQ_{ij}=Q_i$. Dan is $Q_i\in\Omega$, $Q_i\subset P_i$, $\Sigma P_i=\Sigma Q_i$. En $P_i-Q_i=\Sigma_j(A_{ij}-Q_{ij})$. Bij vaste i is dit weer een disjuncte som met termen uit Ω, dus $P_i-Q_i\in\Omega$.

Opmerking. $\Omega(\Gamma)$ behoeft nog geen semiring te zijn, want het verschil van twee elementen van $\Omega(\Gamma)$ behoeft niet in $\Omega(\Omega(\Gamma)) = \Omega(\Gamma)$ te liggen:

Voorbeeld 5. Kies de X en Γ van voorbeeld 1. Neem $A=(0,1]$, en $B=S_1+S_2+\ldots$, waarin de S_i die van 0.1.1 zijn (met een kleine modificatie: we moeten cellen nemen i.p.v. intervallen). B ligt overal dicht in A, dus A-B bevat geen enkele cel. Ook is A-B niet leeg, zodat A-B niet tot $\Omega(\Gamma)$ behoort.

Opmerking. St. 1.1.4, 3° kan worden uitgebreid tot de doorsnede van eindig vele elementen, doch niet altijd tot de doorsnede van aftelbaar vele. In voorbeeld 5 hadden we iets van de gedaante $P \in \Omega(\Gamma)$, $A_i \in \Gamma\,(i=1,2,\ldots)$, $P - \Sigma_1^\infty A_i \notin \Omega(\Gamma)$. Stellen we $Q_n = P - \Sigma_1^n A_i$, dan is $Q_n \in \Omega(\Gamma)$ (st.1.1.4, 4°), en $Q_1Q_2Q_3\ldots = P - \Sigma_1^\infty A_i \notin \Omega(\Gamma)$.

1.2. Maat op een semiring.

Definitie 1.2.1. Zij Σ een klasse van deelverzamelingen van X. Een functie φ die aan elke $A \in \Sigma$ een gegeneraliseerd reëel getal $\varphi(A)$ toevoegt heet een verzamelingsfunctie. φ heet niet-negatief als $0 \leq \varphi(A) \leq \infty$ voor alle $A \in \Sigma$. φ heet monotoon als

$$(A \in \Sigma)\,\&\,(B \in \Sigma)\,\&\,(A \subset B) \implies \varphi(A) \leq \varphi(B).$$

φ heet totaal-additief als

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Sigma,\quad A_1 \in \Sigma,\quad A_2 \in \Sigma,\ldots \\ A = \Sigma_{i=1}^\infty A_i,\quad A_i\text{'s disjunct} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(A) = \Sigma_{i=1}^\infty \varphi(A_i).$$

φ heet eindig-additief als deze conditie alleen voor eindige sommen wordt geëist.

Opmerking. In de definitie van totaal-additiviteit wordt niet geëist dat elke aftelbare disjuncte som van elementen van Σ weer tot Σ behoort.

Definitie 1.2.2. μ heet een maat op Σ als

1°. $\mu(0) = 0$, $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ voor alle $A \in \Sigma$.

2°. $$\left.\begin{array}{l} A \in \Sigma,\ A_i \in \Sigma\,(i=1,2,3,\ldots) \\ A \subset \Sigma_1^\infty A_i \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) \leq \Sigma_1^\infty \mu(A_i).$$

3°. Voor elk natuurlijk getal n:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Sigma\ ,\ A_i \in \Sigma \quad (i=1,\ldots,n) \\ A_i\text{'s disjunct}\ ,\ A \supset \Sigma_1^n A_i \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) \geqq \Sigma_1^n \mu(A_i)\ .$$

Opmerking. Daar 3^o voor elke n geldt, geldt het overeenkomstige ook voor oneindige disjuncte sommen.

Stelling 1.2.1. Is μ een maat op Σ , dan is μ niet-negatief, monotoon en totaal-additief.
Bewijs: Monotoon: uit 2^o, met $A_2=A_3=\ldots=0$. Totaal-additief: Als $A= \Sigma_1^\infty A_i$, A_i's disjunct, kunnen we 2^o en 3^o (vgl. Opmerking) toepassen.

Stelling 1.2.2. Zij μ een niet-negatieve en totaal-additieve verzamelingsfunctie op een semiring Γ , en $\Omega = \Omega(\Gamma)$ (zie def.1.1.4). Dan kan μ op precies één manier tot een totaal-additieve verzamelingsfunctie op Ω worden voortgezet. Deze voortzetting is een maat, en voldoet zelfs aan:

$$\left.\begin{array}{l} P_i \in \Omega\ ,\ Q_i \in \Omega\ ,\ P_i\text{'s disjunct } (i=1,2,\ldots) \\ \Sigma_1^\infty P_i \subset \Sigma_1^\infty Q_i \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma_1^\infty \mu(P_i) \leq \Sigma_1^\infty \mu(Q_i)\ .$$

In het bijzonder geldt deze eigenschap voor P_i's en Q_i's uit Γ . En bovendien blijkt dat μ reeds op Γ een maat is.

Bewijs. Als $\Sigma_{i=1}^\infty A_i = \Sigma_{j=1}^\infty B_j$, en als beide sommen disjunct zijn, dan is $\Sigma_i \mu(A_i) = \Sigma_j \mu(B_j)$. Want $A_iB_j = \Sigma_k C_{ijk}$ ($C_{ijk} \in \Gamma$, en alle C_{ijk}'s disjunct). Nu is $A_i = \Sigma_{jk} C_{ijk}$, dus $\mu(A_i) = \Sigma_{jk} \mu(C_{ijk})$, ook $\mu(B_j) = \Sigma_{ik} \mu(C_{ijk})$. Dat $\Sigma \mu(A_i) = \Sigma \mu(B_i)$ is, blijkt nu door sommatieverwisseling.

We kunnen nu voor $P \in \Omega$ definiëren $\mu(P) = \Sigma_1^\infty \mu(A_i)$, als $P = \Sigma A_i$ een willekeurige disjuncte splitsing in A_i's uit Γ is. Daar $A_i \in \Omega$, is dit de enige kans om μ op Ω totaal-additief te krijgen. Inderdaad is deze μ nu totaal-additief, want als $P = \Sigma P_j$ een disjuncte splitsing is ($P \in \Omega$, $P_j \in \Omega$), dan is $P_j = \Sigma_i A_{ij}$ (alle A_{ij}'s disjunct), $\mu(P) = \Sigma_{ij} \mu(A_{ij})$ en $\mu(P_j) = \Sigma_i \mu(A_{ij})$, dus $\mu(P) = \Sigma \mu(P_j)$.

Zij nu $P_i \in \Omega$, $Q_i \in \Omega$, P_i's disjunct, $\Sigma P_i \subset \Sigma Q_i$. Op grond van st.1.1.4, 5^o kunnen we Q_i splitsen in $R_i + S_i$ ($R_i \in \Omega$, $S_i \in \Omega$, $R_iS_i = 0$) zó dat $\Sigma Q_i = \Sigma R_i$, $Q_i \supset R_i$, terwijl de R_i's onderling disjunct zijn. Nu is $\Sigma \mu(Q_i) = \Sigma \mu(R_i) + \Sigma \mu(S_i) \geq \Sigma \mu(R_i)$. We zullen bewijzen dat $\Sigma \mu(P_i) \leq \Sigma \mu(R_i)$. We hebben $P_i = \Sigma_j A_{ij}$ ($A_{ij} \in \Gamma$, alle A_{ij}'s disjunct), en $\Sigma_i \mu(P_i) = \Sigma_i \Sigma_j \mu(A_{ij})$. Te bewijzen is nu (na de A_{ij}'s weer doorlopend genummerd te hebben), dat uit $A_1+A_2+\ldots \subset R_1+R_2+\ldots$, A_i's disjunct, R_i's disjunct, $A_i \in \Gamma$, $R_i \in \Omega$ volgt dat $\Sigma\mu(A_i) \leq \Sigma\mu(R_i)$. We hebben $\Sigma R_i \in \Omega$, dus $\Sigma R_i - \Sigma_1^n A_i = S \in \Omega$ (st.1.1.4, 4^o). Daar μ op Ω totaal additief is, is nu

$$\Sigma\mu(R_i) = \mu(\Sigma R_i) = \mu(\Sigma_1^n A_i + S) = \Sigma_1^n \mu(A_i) + \mu(S) \geq \Sigma_1^n \mu(A_i).$$

Daar dit voor elke n geldt, geldt $\Sigma_1^\infty \mu(R_i) \geq \Sigma_1^\infty \mu(A_i)$, q.e.d.

We geven hier een aantal voorbeelden van semiringen met maat.

<u>Voorbeelden.</u> In de voorbeelden 1,2 en 3 is X willekeurig, en Γ de collectie van alle deelverzamelingen.

1. Triviale maat: $\mu(A)=0$ voor alle $A \in \Gamma$.

2. $\mu(0)=0$, $\mu(A)=\infty$ als $A \neq 0$.

3. $\mu(A)$ = aantal elementen van A (dat aantal wordt als ∞ geïnterpreteerd als A oneindig is).

4. X willekeurig. Γ bestaat uit alle nul- of éénpuntsverzamelingen. Op Γ is μ willekeurig gedefinieerd (behoudens $0 \leq \mu \leq \infty$).

5. X en Γ als in 1.1, voorbeeld 1. Γ bestaat uit alle cellen $a < x \leq b$, met $-\infty < a < b < \infty$, plus de lege verzameling. De functie g, gedefinieerd op $-\infty < x < \infty$, zij reëel, monotoon niet-dalend en overal rechtscontinu.

We definiëren nu μ door $\mu(0)=0$, $\mu((a,b]) = g(b)-g(a)$ ($-\infty < a < b < \infty$). Deze μ heet de <u>Lebesgue-Stieltjes-maat</u>. In het geval dat $g(x)=x$ (alle x) krijgen we de gewone Lebesgue-maat.

We controleren dat μ een maat is, aan de hand van def.2. De voorwaarden 1^o en 3^o daaruit zijn eenvoudig te controleren. We beperken ons dus tot conditie 2^o. Zij $A=(a,b]$, $A_i=(a_i,b_i]$, $A \subset \Sigma_1^\infty A_i$. Kies $\varepsilon > 0$. Verkort $(a,b]$ tot $A^*= [a+\delta,b]$, zó dat $\delta > 0$, $g(a+\delta)-g(a) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Verleng A_i tot $A_i^* = (a_i, b_i+\delta_i)$, zó dat $\delta_i > 0$, $g(b_i+\delta_i)-g(b_i) < 2^{-i-1}\varepsilon$. De keuze van δ en δ_i is mogelijk op grond van de rechtscontinuïteit. Het compacte interval A^* wordt nu overdekt door de open intervallen A_i^*, dus wegens Heine-Borel is er een eindig aantal dat A^* reeds overdekt. Dus voor zekere n

$$A^* \subset A_1^* + \ldots + A_n^* .$$

We maken nu van A^* de cel A^{**} door het linkereindpunt weg te nemen, en van A_i^* de cel A_i^{**} door het rechtereindpunt toe te voegen.

Dan geldt nog steeds $A^{**} \subset \Sigma_1^n A_i$. Hieruit volgt elementair dat $\mu(A^{**}) \leq \Sigma_1^n \mu(A_i^{**})$, dus

$\mu(A) \leq \mu(A^{**}) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \Sigma_1^n(\mu(A_i)+2^{-i-1}\varepsilon) < \varepsilon + \Sigma_1^\infty \mu(A_i)$.

Daar dit voor elke $\varepsilon > 0$ geldt, blijkt dat $\mu(A) \leq \Sigma_1^\infty \mu(A_i)$.

Opmerking. Wanneer bijv. $g(x) \equiv x$, en wanneer we voor X de verzameling der rationele getallen nemen in plaats van de reële, strandt het bovenstaande op het feit, dat Heine-Borel daar niet geldt. De functie μ is dan niet meer totaal-additief: Zij $V = X \cap (0,1]$, en zij $r_1, r_2, r_3, \ldots$ een aftelling van V. Nu is

$$V \subset \Sigma_{i=1}^\infty (r_i - 2^{-i}\varepsilon, r_i].$$

De maat links is 1, doch de som der maten rechts is ε , en dat kan < 1 zijn.

Definitie 1.2.3. De maat μ op de semiring Γ heet σ-finiet als er een rij A_i's is met $X = \Sigma_1^\infty A_i$, $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1,2,\ldots)$ (Er is dan ook een disjuncte rij van zulke A_i's).

We zullen ons slechts met σ-finiete maten bezighouden (Zie voor het niet σ-finiete geval: N.G. de Bruijn en A.C. Zaanen, Kon. Ak.v.Wetensch., Proceedings A 57 en Indagationes Math. 16, p. 456-466).

1.3. Uitwendige maat

Definitie 1.3.1. Een op de collectie van alle deelverzamelingen van X gedefinieerde functie ρ heet een uitwendige maat, als

1°. $\rho(0) = 0$, $0 \leq \rho(S) \leq \infty$ voor alle $S \subset X$.

2°. ρ monotoon ($S_1 \subset S_2$, dan $\rho(S_1) \leq \rho(S_2)$)

3°. ρ totaal-subadditief, d.w.z.

$$\rho(S_1+S_2+\ldots) \leq \rho(S_1)+\rho(S_2)+\ldots .$$

ρ heet σ-finiet als $S_1, S_2, \ldots$ zo bestaan dat $X = \Sigma_1^\infty S_i$ en $\rho(S_i) < \infty$ (alle i).

Voorbeeld. Zij X aftelbaar, en $\rho(S) = (\text{aantal elementen van } S)^{\frac{1}{2}}$. De subadditiviteit volgt uit de ongelijkheid

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots \leq (a_1+a_2+\ldots)^2 \qquad (0 \leq a_i \leq \infty).$$

Definitie 1.3.2. Zij Γ een semiring met σ-finiete maat μ. Voor elke $S \subset X$ definiëren we $\mu^*(S)$ door

$$\mu^*(S) = \inf \{ \mu(P) \mid S \subset P \in \Omega(\Gamma)\}$$

(vgl. st. 1.2.2). Het infimum bestaat, want er bestaat minstens één dergelijke P, daar μ σ-finiet is. Als voor alle betreffende P's $\mu(P) = \infty$ is, is met het infimum ∞ bedoeld).

μ^* heet de door (Γ, μ) voortgebrachte uitwendige maat.

Stelling 1.3.1. μ^* is een σ-finiete uitwendige maat.

Bewijs. 1e. Daar steeds $\mu(P) \geq 0$ is, geldt $0 \leq \mu^*(S) \leq \infty$ voor alle S. Daar $0 \in \Omega(\Gamma)$, $\mu(0) = 0$, is ook $\mu^*(0) = 0$.

2e. Is $S_1 \subset S_2$, dan is $\mu^*(S_1) = \inf V_1$, $\mu^*(S_2) = \inf V_2$, met getallenverzamelingen V_1 en V_2 waarvoor geldt $V_1 \supset V_2$. Daarom is $\inf V_1 \leq \inf V_2$.

3e. Kies $S_1, S_2, \ldots$ willekeurig. We bewijzen dat $\mu^*(\Sigma_1^\infty S_i) \leq \Sigma_1^\infty \mu^*(S_i)$. Neem aan dat $\Sigma_1^\infty \mu^*(S_i) < \infty$ (anders is er niets te bewijzen). Kies $\varepsilon > 0$, en $P_i \in \Omega(\Gamma)$ zo dat $\mu(P_i) < \mu^*(S_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Zij $P = \Sigma_1^\infty P_i$, dan is $P \in \Omega(\Gamma)$ (st. 1.1.4), $P \supset \Sigma_1^\infty S_i$ en $\mu(P) \leq \Sigma_1^\infty \mu(P_i)$ (st. 1.2.2). Derhalve is $\mu^*(S) \leq \mu(P) \leq \Sigma_1^\infty \mu^*(S_i) + \Sigma_1^\infty 2^{-i}\varepsilon$. De laatste som is ε. Daar ε willekeurig is, volgt het gestelde.

Stelling 1.3.2. Als Γ een semiring is met σ-finiete maat μ, dan is $\mu^*(Q) = \mu(Q)$ voor alle $Q \in \Omega(\Gamma)$.

Bewijs. Voor alle $P \in \Omega(\Gamma)$ met $P \supset Q$ geldt $\mu(P) \geq \mu(Q)$ (μ is monotoon op Ω, st. 1.2.2). Voor minstens één P (nl. Q zelf) is $\mu(P) = \mu(Q)$. Dus $\mu^*(Q) = \inf \mu(P) = \mu(Q)$.

1.4. Meetbare verzamelingen. In deze paragraaf is μ^* een σ-finiete uitwendige maat op X, niet noodzakelijk afkomstig van een maat op een semiring. We zullen nu meetbare verzamelingen definiëren; de meetbare verzamelingen blijken een σ-ring te vormen, en μ^* is daarop een maat.

Definitie 1.4.1. Een $E \subset X$ heet meetbaar als voor elke $S \subset X$ geldt

$$\mu^*(S) = \mu^*(SE) + \mu^*(SE') . \qquad (E' = X-E)$$

De collectie van alle meetbare E's wordt met Λ aangegeven.

Opmerkingen. Deze definitie (van Caratheodory) vervangt het invoeren van het begrip meetbaar via de inwendige maat (vgl. 0.2), die in de gegeven situatie niet direct kan worden aangegeven. Caratheodory's definitie is misschien niet erg doorzichtig, maar wél zeer handelbaar.

Stelling 1.4.1. $0 \in \Lambda$, $X \in \Lambda$
$E \in \Lambda \Rightarrow E' \in \Lambda$.

Stelling 1.4.2. $E_1 \in \Lambda$ en $E_2 \in \Lambda$, dan $E_1 + E_2 \in \Lambda$.

Bewijs. Zij S willekeurig. $S_1 = S - E_1 - E_2$, $S_2 = E_1S$, $S_3 = SE_2 - E_1$. Dan zijn S_1, S_2, S_3 disjunct, $S_1 + S_2 + S_3 = S$. We hebben $S = SE_1 + SE_1' = S_2 + (S_1+S_3)$, dus $\mu^*(S) = \mu^*(S_2) + \mu^*(S_1+S_3)$. Verder is $S_1 + S_3 = (S_1+S_3)E_2 + (S_1+S_3)E_2' = S_3 + S_1$, dus $\mu^*(S_1+S_3) = \mu^*(S_3) + \mu^*(S_1)$. Dus $\mu^*(S) = \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2) + \mu^*(S_3)$. Vervolgens is $S_2 + S_3 = (S_2+S_3)E_1 + (S_2+S_3)E_1' = S_2 + S_3$, dus $\mu^*(S_2+S_3) = \mu^*(S_2) + \mu^*(S_3)$. Dus $\mu^*(S) = \mu^*(S_2+S_3) + \mu^*(S_1) = \mu^*(S(E_1+E_2)) + \mu^*(S(E_1+E_2)')$, q.e.d. Bij dit bewijs is niet gebruikt dat μ^* een uitwendige maat is.

Stelling 1.4.3. Λ is een ring (en zelfs een Boole-algebra).

Bewijs. Zie def. 1.1.1 en 1.1.2. Na de vorige stellingen valt nog slechts te bewijzen dat het verschil van twee E's uit Λ weer in Λ ligt. Is $E_1 \in \Lambda$, $E_2 \in \Lambda$, dan is $E_1 - E_2 = (E_1' + E_2)'$. Nu kunnen we de vorige stellingen toepassen.

Stelling 1.4.4. Is $E_1 \in \Lambda$, $E_2 \in \Lambda$, $E_1E_2 = 0$, $S \subset X$, dan is

$$1^\circ. \quad \mu^*(S(E_1+E_2)) = \mu^*(SE_1) + \mu^*(SE_2) .$$
$$2^\circ. \quad \mu^*(E_1+E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) .$$

Bewijs. 1. $\mu^*(S(E_1+E_2)) = \mu^*(S(E_1+E_2)E_1) + \mu^*(S(E_1+E_2)E_1') = \mu^*(SE_1) + \mu^*(SE_2)$.

2. Pas 1° toe met $S = X$.

Stelling 1.4.5. Is $E_i \in \Lambda$ $(i = 1,2,\dots)$, $E_iE_j = 0 (i \neq j)$, $S \subset X$, dan is

1°. $\mu^*(S \Sigma_1^\infty E_i) = \Sigma_1^\infty \mu^*(SE_i)$.

2°. $\Sigma_1^\infty E_i \in \Lambda$.

3°. $\mu^*(\Sigma E_i) = \Sigma_1^\infty \mu^*(E_i)$.

Bewijs. 1°. Wegens de monotonie van μ^* is $\mu^*(S \Sigma_1^\infty E_i) \geq \mu^*(S \Sigma_1^n E_i) = \Sigma_1^n \mu^*(SE_i)$ (het laatste door herhaalde toepassing van de vorige stelling). Dus $\Sigma_1^n \mu^*(SE_i) \leq \mu^*(S \Sigma_1^\infty E_i)$ voor elke n, en daarom $\Sigma_1^\infty \mu^*(SE_i) \leq \mu^*(S \Sigma_1^\infty E_i)$. Daar μ^* totaal-subadditief is, geldt ook het teken in andere richting, dus het gelijkteken.

2°. Wegens $E_1 + \dots + E_n \in \Lambda$ geldt voor elke S

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \Sigma_1^n E_i) + \mu^*(S(E_1' \dots E_n')) .$$

Wegens de monotonie is dit

$$\geq \mu^*(S \Sigma_1^n E_i) + \mu^*(S(E_1'E_2'\dots)) .$$

Wegens st. 1.4.4, 1° is de eerste term $\Sigma_1^n \mu^*(SE_i)$. Nu geeft $n \to \infty$:

$$\mu^*(S) \geq \Sigma_1^\infty \mu (SE_i) + \mu^*(S(E_1'E_2'\dots)) .$$

Toepassing van 1e levert

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S(E_1+E_2+\dots)) + \mu^*(S(E_1+E_2+\dots)') .$$

Uit de subadditiviteit volgt het teken in andere richting, zodat we het gelijkteken hebben.

3°. Neem S = X in 1°.

Stelling 1.4.6. Λ is een σ-ring, en μ^* is een maat op Λ .

Bewijs. Daar Λ een ring is, dus een semiring, is elke aftelbare som van elementen van Λ ook als disjuncte som te schrijven (st. 1.1.4, 2°). Wegens st. 1.4.5, 2° ligt die weer in Λ , dus Λ is een σ-ring.

We controleren vervolgens def. 1.2.2 voor μ^* en Λ . Daarvan is 1° triviaal, 2° volgt uit monotonie en subadditiviteit van μ^* . 3° volgt uit $\mu^*(E_1) + \dots + \mu^*(E_n) = \mu^*(E_1+\dots+E_n)$ (st. 1.4.4, E_i's disjunct), en verder uit monotonie.

Stelling 1.4.7. Is $A \subset X$, $\mu^*(A) = 0$, dan A meetbaar.
Bewijs. Voor elke $S \subset X$ is $\mu^*(SA) \leq \mu^*(A)=0$ (monotonie), dus $\mu^*(SA)=0$. Verder is $\mu^*(SA') \leq \mu^*(S)$ (monotonie), dus $\mu^*(S) \geq \mu^*(SA)+ \mu^*(SA')$. Wegens de subadditiviteit geldt ook $\leq$, dus $=$. Dus A is meetbaar.

Door het voorgaande toe te passen op de uitwendige maat μ^* voortgebracht door een maat μ op een semiring Γ, breiden we deze maat dus uit tot een maat op een σ-ring Λ die Γ omvat (vgl. st. 1.6.1). We zullen op Λ weer μ schrijven i.p.v. μ^*. De overgang van (Γ, μ) op (Λ, μ) zullen we het Lebesgue-proces noemen, en we schrijven $(\Gamma, \mu) \xrightarrow{L} (\Lambda, \mu)$. In het bijzonder geeft voorbeeld 5 van 1.2 aanleiding tot de Lebesgue-Stieltjes-maat op een klasse van meetbare verzamelingen op $(-\infty, \infty)$, en in het bijzonder geeft $g(x) \equiv x$ de gewone Lebesgue-maat.

1.5. Rijen van meetbare verzamelingen. Als μ^* een uitwendige maat is, en Λ de klasse der meetbare verzamelingen, dan is μ^* een maat op de σ-ring Λ. Het volgende geldt algemeen voor elke maat op een σ-ring, onafhankelijk van de oorsprong daarvan. We zullen de σ-ring door Λ voorstellen, de elementen door E's en de maat door μ.

Stelling 1.5.1. Is $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, $E_n \to E$ dan is $\mu(E_n) \to \mu(E)$.
Bewijs. $E=E_1+E_2+\ldots=E_1+(E_2-E_1)+(E_3-E_2)+\ldots$, en de laatste som is disjunct. Dus $\mu(E)=\lim_{n\to\infty} \{\mu(E_1)+ \mu(E_2-E_1)+\ldots+ \mu(E_n-E_{n-1})\} =$
$= \lim_{n\to\infty} \mu(E_1+E_2-E_1+\ldots+E_n-E_{n-1})= \lim \mu(E_n)$.
Stelling 1.5.2. Is $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $E_n \to E$, $\mu(E_1) < \infty$, dan is $\mu(E_n) \to \mu(E)$.
Bewijs. E_1-E_n nadert niet-dalend tot E_1-E, dus op grond van de vorige stelling is $\mu(E_1 -E_n) \to \mu(E_1-E)$. Daar $\mu(E_1) < \infty$ is, en μ additief, volgt het gestelde resultaat direct.
Opmerking. De conditie $\mu(E_1) < \infty$ is niet overbodig. Is bijv. $E_n=(n, \infty)$, en μ de Lebesgue maat op $(-\infty, \infty)$, dan is $E_n \to 0$ doch $\mu(E_n) \to \infty$.
Stelling 1.5.3. Is $E_n \in \Lambda$, dan $\liminf \mu(E_n) \geq \mu(\liminf E_n)$.
Bewijs. Is $D_n=E_nE_{n+1}\ldots$, dan nadert D_n monotoon niet-dalend tot $\liminf E_n$. Dus

$$\mu(\liminf E_n) = \lim \mu(D_n) \leq \liminf \mu(E_n);$$

de laatste stap geldt wegens $D_n \subset E_n$.

We geven een voorbeeld waarbij het teken > geldt:

Voorbeeld 1. Lebesgue-maat. $E_n=(0,2]$ als n even is, en $(1,3]$ als n oneven is. Nu is $\liminf \mu(E_n)=2$, $\mu(\liminf E_n)= \mu((1,2])=1$.

Stelling 1.5.4. Is $E_n \in \Lambda$, $\mu(E_1+E_2+\dots) < \infty$, dan is $\limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n)$.

Bewijs. Vorm complementen t.o.v. $E_1+E_2+\dots$, en pas de vorige stelling toe.

Voorbeeld 2. E_n's als in voorbeeld 1. We hebben $\limsup \mu(E_n)=2$, en $\mu(\limsup E_n)= \mu((0,3])=3$.

Uit het volgende voorbeeld blijkt dat de eindigheidsconditie in st.1.5.4 niet overbodig is.

Voorbeeld 3. Is $E_n=(n,n+1]$, dan is $\limsup \mu(E_n)=1$, doch $\mu(\limsup E_n)= \mu(0)=0$.

Stelling 1.5.5. Als $E_n \in \Lambda$, $(n=1,2,\dots)$, $E_n \to E$ en als alle E_n in een vaste $A \in \Lambda$ liggen met $\mu(A) < \infty$, dan is $\mu(E_n) \to \mu(E)$.

Bewijs. Op grond van de beide vorige stellingen is

$$\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n) \leq \limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n).$$

Daar de uiterste leden gelijk zijn, zijn de binnenste het ook.

1.6. Reguliere uitwendige maat. Zij μ^* een σ-finiete uitwendige maat op X, niet noodzakelijk afkomstig van een maat op een semiring. Met behulp hiervan definieren we een σ-ring Λ van t.o.v. μ^* meetbare verzamelingen, en daarop is μ^* een maat (st.1.4.6). We hebben daarmee een semiring met maat, en daarmee kunnen we volgens def.1.3.2 weer een uitwendige maat op X definiëren. Deze noemen we μ^{**}.

Definitie 1.6.1. De uitwendige maat μ^* heet regulier als $\mu^*(S)= = \mu^{**}(S)$ voor alle $S\subset X$, terwijl bovendien μ^* σ-finiet is.

Opmerking. $\mu^{**}(S)= \inf \{ \mu^*(E) \mid E \in \Lambda, E \supset S \}$. Voor al zulke $E\supset S$ is $\mu^*(E)\geq \mu^*(S)$. Dus $\mu^*(S)\leq \mu^{**}(S)$.

Verder is $\mu^{**}(E) = \mu^*(E)$ voor alle $E \in \Lambda$ (st.1.3.2).

<u>Stelling 1.6.1.</u> Zij μ een σ-finiete maat op een semiring Γ, en zij μ^* de (volgens def.1.3.2) door μ geïnduceerde uitwendige maat. Dan is μ^* regulier en $\Gamma \subset \Omega(\Gamma) \subset \Lambda$, terwijl $\mu = \mu^*$ op $\Omega(\Gamma)$.

<u>Bewijs</u>. We korten $\Omega(\Gamma)$ af tot Ω. Dat $\mu = \mu^*$ op Ω, werd al in st.1.3.2 aangetoond. We bewijzen nu eerst dat $\Omega \subset \Lambda$. Daar Λ een σ-ring is, is het voldoende te bewijzen dat $\Gamma \subset \Lambda$. Zij $A \in \Gamma$. We moeten bewijzen dat $\mu^*(S) = \mu^*(SA) + \mu^*(SA')$ voor alle $S \subset X$, en wegens de subadditiviteit is het voldoende hier $\geq$ te bewijzen.

Als $P \supset S$, $P \in \Omega$, dan is wegens de monotonie

$$\mu^*(SA) + \mu^*(SA') \leq \mu^*(PA) + \mu^*(PA').$$

Daar $PA' = P - A \in \Omega$ (st.1.1.4, 4^o), daar $\mu = \mu^*$ op Ω, en daar μ additief is op Ω, is het rechterlid gelijk aan $\mu(P)$. Bij elke $\varepsilon > 0$ kunnen we P zó kiezen dat $\mu(P) \leq \mu^*(S) + \varepsilon$. Dus $\mu^*(SA) + \mu^*(SA') \leq \mu^*(S) + \varepsilon$. Daar het voor elke $\varepsilon > 0$ geldt, geldt het ook voor $\varepsilon = 0$. Dus $\Omega \subset \Lambda$ is bewezen.

Vervolgens merken we op dat $\Omega(\Lambda) = \Lambda$ (want Λ is een σ-ring), zodat

$$\mu^{**}(S) = \inf\{\mu^*(E) \mid E \in \Lambda, E \supset S\}.$$

Wegens $\Omega \subset \Lambda$ is dit hoogstens

$$\inf\{\mu^*(P) \mid P \in \Omega, P \supset S\},$$

zodat dus $\mu^{**}(S) \leq \mu^*(S)$. Uit de opmerking na def. 1.6.1 volgt nu dat $\mu^* = \mu^{**}$, dus μ^* is regulier.

<u>Stelling 1.6.2.</u> Elke reguliere uitwendige maat μ^* wordt geïnduceerd door een σ-finiete maat op een semiring.

<u>Bewijs</u>. Daar μ^* regulier is, is $\mu^* = \mu^{**}$, en μ^{**} is de uitwendige maat geïnduceerd door de μ^*, hetgeen een maat is op de t.o.v. μ^* meetbare verzamelingen.

1.7. <u>Maatuitbreiding.</u>

<u>Definitie 1.7.1.</u> Onder een <u>maatruimte</u> verstaan we een ruimte X, waarin zowel een semiring Γ als een maat μ op Γ zijn aangegeven. De maatruimte wordt met (X, Γ, μ) aangeduid (eventueel afgekort tot (Γ, μ)). Zonder het erbij te zeggen, zullen we steeds veronderstellen dat μ σ-finiet is.

Definitie 1.7.2. De maatruimte (X_1,Γ_1,μ_1) heet een voortzetting van (X,Γ,μ) (notatie $(X,\Gamma,\mu)\subset(X_1,\Gamma_1\mu_1)$) als

1^o. $X_1\supset X$.

2^o. $\Gamma_1\supset\Gamma$ (d.w.z. als $A\in\Gamma$, dus $A\subset X$, dan is ook $A\subset X_1$, en we eisen dat $A\in\Gamma_1$).

3^o. $\mu_1(A)=\mu(A)$ voor alle $A\in\Gamma$.

Opmerking. Als $(X,\Gamma,\mu)\subset(X_1,\Gamma_1,\mu_1)\subset(X_2,\Gamma_2,\mu_2)$, dan ook $(X,\Gamma,\mu)\subset(X_2,\Gamma_2,\mu_2)$.

Voorbeelden 1. Elke (X,Γ,μ) kan worden voortgezet tot (X,Λ,μ^*) door het Lebesgue-proces, nl. door, uitgaande van de door (X,Γ,μ) geïnduceerde uitwendige maat μ^*, de σ-ring der meetbare verzamelingen Λ te nemen. Deze μ^* op Λ zullen we later weer μ noemen.

Herhaling van het L-proces leidt tot niets nieuws: Als $(X,\Gamma,\mu)\xrightarrow{L}(X,\Lambda,\mu)$, dan $(X,\Lambda,\mu)\xrightarrow{L}(X,\Lambda,\mu)$. Volgens st.1.6.1 gaat deze tweede stap immers via dezelfde uitwendige maat als de eerste stap.

2. Zij $X=(-\infty,\infty)$, Γ_1, de collectie der cellen $(a,b]$, met $\mu_1((a,b])=b-a$. Voor Γ nemen we de cellen $(n,n+1]$, met n geheel, en μ-maat 1 (in beide gevallen nemen we ook de lege verzameling op). Nu is $(X,\Gamma,\mu)\subset(X,\Gamma_1,\mu_1)$. Het L-proces, toegepast op (X,Γ,μ) levert hier minder op dan (X,Γ_1,μ_1). Ga na dat $(X,\Gamma,\mu)\xrightarrow{L}(X,\Omega(\Gamma),\mu)$ in dit geval.

Definitie 1.7.3. (X,Γ,μ) en (X,Γ_1,μ_1) heten equivalent als ze dezelfde uitwendige maat induceren. In dat geval leiden ze via het L-proces tot dezelfde maatruimte.

Stelling 1.7.1. Nodig en voldoende opdat (X,Γ,μ) en (X,Γ_1,μ_1) equivalent zijn is dat

$$A\in\Gamma\Rightarrow\mu^*_1(A)\leq\mu(A)\quad\text{en}\quad A_1\in\Gamma_1\Rightarrow\mu^*(A_1)\leq\mu_1(A_1).$$

Bewijs. "Nodig" is triviaal (in beide gevallen het gelijkteken; bedenk dat $\mu=\mu^*$ op Γ, en $\mu_1=\mu^*_1$ op Γ_1). Nu "voldoende". Neem de genoemde implicaties als gegeven aan. Voor $P\in\Omega(\Gamma)$, $P=\Sigma A_i$ (disjunct, $A_i\in\Gamma$) geldt $\mu^*_1(P)\leq\Sigma\mu^*_1(A_i)$ (want μ^*_1 totaal-subadditief) $\leq\Sigma\mu(A_i)=\mu(P)$. Dus voor $S\subset X$ is $\mu^*(S)=\inf\{\mu(P)\mid P\supset S,$ $P\in\Omega(\Gamma)\}\geq\inf\{\mu_1(P)\mid P\supset S,\ P\in\Omega(\Gamma)\}$. Daar μ^*_1 monotoon is, zijn al deze μ^*_1 (P)'s $\geq$ $\mu^*_1(S)$, dus ook het inf. Dus $\mu^*(S) \geq \mu^*_1(S)$. Met dezelfde argumenten bewijzen we $\mu^* \leq \mu^*_1$, dus $\mu^* = \mu^*_1$.

Stelling 1.7.2. Zij $(X,\Gamma,\mu) \overset{L}{\rightarrow} (X,\Lambda,\mu)$, en $(X,\Gamma,\mu) \subset (X,\Gamma_1,\mu_1) \subset (X,\Lambda,\mu)$. Dan zijn (X,Γ,μ) en (X,Γ_1,μ_1) equivalent.

Bewijs. Uit $(\Gamma,\mu) \subset (\Gamma_1,\mu_1)$ volgt dat $\mu^* \geq \mu^*_1$. Uit $(\bar{\Gamma}_1,\mu_1) \subset (\Lambda,\mu)$ volgt dat $\mu^*_1 \geq \mu^{**}$. Daar μ^* regulier is, is $\mu^{**} = \mu^*$. Derhalve $\mu^* = \mu^*_1$.

Voorbeeld 3. Een voorbeeld van een Γ_1 tussen Γ en Λ is de door Γ voortgebrachte Borel-ring, d.i. de kleinste σ-ring die Γ omvat. In het geval van de gewone Lebesgue-maat kan men bewijzen dat deze echt tussen Γ en Λ gelegen is.

1.8. Approximatie van meetbare verzamelingen.

Stelling 1.8.1. Zij $(X,\Gamma,\mu) \overset{L}{\rightarrow} (X,\Lambda,\mu)$. Dan is er bij elke $E \in \Lambda$ een rij $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$, zó dat $P_n \in \Omega(\Gamma)$ $(n=1,2,\ldots)$, $\lim P_n \supset E$, $\mu(P_n) \rightarrow \mu(E)$ en $\mu(\lim P_n - E) = 0$ (voor stijgende rijen is iets dergelijks niet waar, de $\lim P_n$ zou dan trouwens zelf weer in $\Omega(\Gamma)$ liggen).

Bewijs. We nemen eerst aan dat $\mu(E) < \infty$ is. Wegens de definitie van uitwendige maat is $\mu(E) = \inf\{\mu(Q) \mid Q \in \Omega(\Gamma), Q \supset E\}$. Dus er is een rij $Q_1, Q_2, \ldots$ met $Q_n \in \Omega(\Gamma)$, $Q_n \supset E$, $\mu(Q_n) \rightarrow \mu(E)$. Neem nu $P_n = Q_1 \ldots Q_n$, dan is $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$, $P_n \supset E$, $\mu(P_n) \leq \mu(Q_n)$, dus $\mu(P_n) \rightarrow \mu(E)$.

Daar $\mu(E) < \infty$, is $\mu(P_n) < \infty$ op den duur, dus (st.1.5.2) $\mu(P_n) \rightarrow \mu(\lim P_n)$. Ook $\lim P_n - E$ is meetbaar, en $E \subset \lim P_n$, zodat $\mu(\lim P_n - E) = \mu(\lim P_n) - \mu(E) = 0$.

Vervolgens nemen we $\mu(E) = \infty$. Daar μ σ-finiet is, bestaat er een rij $A_1, A_2, \ldots$, met $\Sigma A_i = X$ en $\mu(A_i) < \infty$. We passen nu het voorgaande op elke EA_i toe. We vinden dan P_{ni}'s met $P_{n1} \supset P_{n2} \supset \ldots$, $P_{ni} \in \Omega(\Gamma)$, $\lim_{n\rightarrow\infty} P_{ni} \supset EA_i$, $\mu(\lim_{n\rightarrow\infty} P_{ni} - EA_i) = 0$. Neem nu $P_i = \Sigma_{i=1}^{\infty} P_{ni}$, waarvoor het gevraagde gemakkelijk te bewijzen is.

Definitie 1.8.1. Is $E \in \Lambda$, $F \in \Lambda$, dan heet $\mu(E \Delta F)$ de afstand van E tot F.

Stelling 1.8.2. Is $E \in \Lambda$, $F \in \Lambda$, $G \in \Lambda$, dan is

$$\mu(E \Delta G) \leq \mu(E \Delta F) + \mu(F \Delta G) \quad \text{(driehoeksongelijkheid).}$$

Bewijs. $E \Delta G = (E-G) + (G-E) = (E-G)F + (E-G)F' + (G-E)F + (G-E)F' \subset$

$\subset (F-G) + (E-F) + (F-E) + (G-F) = E \Delta F + F \Delta G.$

Opmerking. Λ behoeft nog geen metrische ruimte te zijn, want $\mu(E)$ kan oneindig zijn, en uit $\mu(E \Delta F)=0$ behoeft niet $E=F$ te volgen. Wanneer we echter verzamelingen met afstand 0 identificeren, is de collectie der meetbare verzamelingen met eindige maat wel een metrische ruimte.

Stelling 1.8.3. Zij $(X,\Gamma,\mu) \xrightarrow{L} (X,\Lambda,\mu)$. Zij E meetbaar, en $\mu(E) < \infty$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een eindige disjuncte som $\Sigma_1^m A_i$ $(A_i \in \Gamma)$, zó dat

$$\mu(E \Delta \Sigma_1^m A_i) < \varepsilon .$$

Bewijs. Blijkens st.1.8.1 is er een $P_n \in \Omega(\Gamma)$ met $P_n \supset E$, $\mu(P_n - E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Verder is $P_n = \Sigma_1^\infty A_i$ (disjuncte som) met $\mu(P_n) = \Sigma_1^\infty \mu(A_i)$. Daar $\mu(P_n)$ eindig is, is er een m zó dat $\mu(P_n - \Sigma_1^m A_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pas nu st.1.8.2 toe op E, P_n en $\Sigma_1^m A_i$.

Definitie 1.8.2. (X,Γ,μ) heet separabel als er een rij $E_1, E_2, \ldots$ bestaat $(E_n \in \Lambda)$, zó dat er bij elke $E \in \Lambda$ met $\mu(E) < \infty$ en elke $\varepsilon > 0$ een n bestaat zó dat $\mu(E \Delta E_n) < \varepsilon$.

Stelling 1.8.4. Opdat (X,Γ,μ) separabel is, is het voldoende dat er een rij $E_1, E_2, \ldots$ bestaat zó dat er bij elke $A \in \Gamma$ met $\mu(A) < \infty$ en bij elke $\varepsilon > 0$ een n bestaat zó dat $\mu(A \Delta E_n) < \varepsilon$.

Bewijs. Zij V de klasse bestaande uit alle verzamelingen die de vereniging zijn van eindig vele E_n's. Dan is V aftelbaar.

Volgens st.1.8.3 is er bij elke $E \in \Lambda$ met $\mu(E) < \infty$ een eindige som $\Sigma_1^m A_i$ te vinden die tot E een afstand $> \frac{1}{2}\varepsilon$ heeft. Volgens het gegeven kunnen we elke A_i benaderen door een der E_j's, met $\mu(A_i \Delta E_j) < \varepsilon/2m$. De vereniging dezer E_j's heeft tot $\Sigma_1^m A_i$ een afstand $< \frac{1}{2}\varepsilon$, dus tot de gegeven E een afstand $< \varepsilon$.

Voorbeelden 1. Als Γ aftelbaar is, dan is (X,Γ,μ) separabel. Neem nl. voor de E_i's de elementen uit Γ zelf.

2. De Stieltjes-Lebesgue-maatruimte (zie 1.2, voorbeeld 5) is separabel. Als separerende collectie kunnen we de intervallen $(r,s]$ nemen met rationale eindpunten. Daar de functie g rechtscontinu is, kunnen we bij gegeven $A=(a,b]$ de r en s zó dicht bij a resp.

b (en wel rechts van a resp. b) nemen dat $\mu((a,b]\ \Delta\ (r,s]) = g(r)-g(a)+g(s)-g(b) < \varepsilon$ is.

1.9. Cartesisch product van maatruimten.

Definitie 1.9.1. a. Zijn X en Y willekeurige ruimten, dan is het cartesisch product $X \times Y$ gedefinieerd als de verzameling van alle paren $(x,y)(x \in X, y \in Y)$.

b. Is $S_1 \subset X$, $S_2 \subset Y$, dan is $S_1 \times S_2$ de deelverzameling van $X \times Y$ bestaande uit alle (x,y) met $x \in S_1$, $y \in S_2$.

c. Zijn Θ_1, Θ_2 klassen van deelverzamelingen van X resp. Y, dan is $\Theta_1 \times \Theta_2$ de klasse van alle $S_1 \times S_2$ $(S_1 \in \Theta_1, S_2 \in \Theta_2)$.

d. Zijn φ_1 en φ_2 verzamelingsfuncties op Θ_1 resp. Θ_2, dan is $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ op $\Theta_1 \times \Theta_2$ gedefinieerd door

$$\varphi(S) = \varphi_1(S_1)\varphi_2(S_2) \quad \text{als } S_1 \in \Theta_1,\ S_2 \in \Theta_2.$$

e. Is $V \subset X \times Y$, $x \in X$, dan is $V_x = \{y \mid (x,y) \in V\}$. Analoog definiëren we V_y.

Voorbeeld. Γ_i= klasse van alle cellen op $(-\infty, \infty)$, plus de lege verzameling $(i=1,2)$. Dan is $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de collectie van alle tweedimensionale cellen, plus de lege verzameling.

Stelling 1.9.1. Is Γ_1 een semiring in X, Γ_2 een semiring in Y, dan is $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ een semiring in $X \times Y$.

Bewijs. Het is triviaal dat $0 \in \Gamma$. Stel nu $C_i = A_i \times B_i \in \Gamma$ $(i=1,2)$. Dan is

$$C_1C_2 = \{(x,y) \mid (x \in A_1 \ \&\ y \in B_1) \ \&\ (x \in A_2 \ \&\ y \in B_2)\},$$

dus $C_1C_2 = A_1A_2 \times B_1B_2 \in \Omega(\Gamma_1) \times \Omega(\Gamma_2)$, en het is gemakkelijk in te zien dat laatstgenoemde collectie een deel van $\Omega(\Gamma)$ is.
Verder is direct in te zien dat

$$C_1 - C_2 = (A_1 - A_2) \times B_1B_2 + (A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2) + A_1A_2 \times (B_1 - B_2),$$

en deze drie stukken zijn disjunct. Elk ligt in $\Omega(\Gamma)$, dus de som ligt in $\Omega(\Gamma)$ (zolang nog niet bewezen is dat Γ een semiring is mogen we dit alleen met disjuncte sommen doen).

De volgende stellingen zijn voorbereidingen tot stelling 1.9.4.

Stelling 1.9.2. Laat (X,Γ_1,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) maatruimten zijn, en zij $A_i\in\Gamma_1$, $B_i\in\Gamma_2$, $C_i=A_i\times B_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Laat $C_1,\ldots,C_n$ disjunct zijn, en

$$C_1+\ldots+C_n\subset C_o.$$

Dan is

$$\Sigma_1^n\ \mu_1(A_i)\ \mu_2(B_i)\leq\mu_1(A_o)\ \mu_2(B_o).$$

Bewijs. Is $A_i\in\Gamma_1$ $(i=0,\ldots,N)$, dan kunnen we $\Sigma_o^N A_i$ schrijven als disjuncte som $\Sigma_1^\infty A^j(A^j\in\Gamma_1)$ zó dat elke A_i de vereniging is van aftelbaar vele A^j's. Dit is gemakkelijk door inductie naar N te bewijzen. Voldoet $\Sigma_1^\infty A^j$ voor N, dan kunnen we in het geval N+1 schrijven

$$\Sigma_o^{N+1}A_i=(A_{N+1}-A_o-\ldots-A_N)+\Sigma_1^\infty A^jA_{N+1}+\Sigma_1^\infty(A^j-A_{N+1}),$$

en elke term is weer disjuncte som van aftelbaar vele elementen van Γ_1 (vgl. stelling 1.1.4, 4^o).

We passen dit nu toe met N=n, zowel voor $A_o,\ldots,A_n$ als voor $B_o,\ldots,B_n$. Elke $A_i\times B_i$ is nu de som van aftelbaar vele $A^j\times B^k$'s. Bij gegeven j en k zal $A^j\times B^k$ hoogstens in één der $A_i\times B_i$ met $1\leq i\leq n$ voorkomen (daar $C_1,\ldots,C_n$ disjunct zijn), en als $A^j\times B^k$ in één der $A_i\times B_i$ voorkomt, komt hij ook in $A_o\times B_o$ voor. Beide leden van de te bewijzen ongelijkheid zijn nu te schrijven als som van termen $\mu_1(A^j)\ \mu_2(B^k)$, en elke term links komt ook rechts voor. Alle termen die rechts méér voorkomen zijn ≥ 0, zodat de ongelijkheid bewezen is.

Definitie 1.9.2. Laat (X,Γ,μ) een maatruimte zijn, en B(x) een uitspraak over een variabel punt $x\in X$. We zeggen dat B(x) bijna overal geldt, of dat B(x) voor bijna alle x geldt, of

$$B(x)\qquad (p.p.)$$

(p.p. is afkorting voor presque partout), als er een V is met $\mu(X-V)=0$ zó dat B(x) geldt voor alle $x\in V$. Is $S\subset X$, dan zeggen we dat B(x) voor bijna alle $x\in S$ geldt als B(x) geldt op een verzameling V met $\mu(S-V)=0$.

Voorbeeld: Bij de gewone Lebesguemaat op $(-\infty,\infty)$ geldt dat bijna elke x irrationaal is.

Stelling 1.9.3. Laat (X,Γ_1,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) maatruimten zijn. Zij $0<a<\infty$, $0<b<\infty$, $A\subset X_1$, $\mu_1^*(A)>a$. Laat V een deel van $X\times Y$ zijn. Voor bijna elke $x\in A$ zij $\mu_2^*(V_x)>b$. Is tenslotte $V\subset\Sigma_1^\infty A_i\times B_i$

$(A_i \in \Gamma_1,\ B_i \in \Gamma_2)$, dan is

$$\Sigma_1^\infty\ \mu_1(A_i)\ \mu_2(B_i) > ab.$$

<u>Bewijs.</u> Zij $A_i \times B_i = C_i$; $S_n = \Sigma_1^n\ C_k$ en $S_{nx} = (S_n)_x$. Voor elke x is S_{nx} de som van een aantal der B_i, (nl. met de i's waarvoor $1 \leq i \leq n$ en $x \in A_i$ is). Bij vaste x is $\{S_{nx}\}$ een niet-dalende rij; zij $\lim S_{nx} = K(x)$. Wegens het gegeven is $K(x) \supset V_x$, dus $\mu_2(K(x)) \geq \mu_2^*(V_x)$. Voor bijna elke $x \in A$ is dus $\mu_2(K(x)) > b$. Dus bij bijna elke $x \in A$ is er een index $n_o(x)$ zó dat $\mu_2(S_{nx}) > b$ voor $n > n_o(x)$.

Zij $D_n = \{ x \mid \mu_2(S_{nx}) > b \}$. Dan is $\{D_n\}$ niet-dalend, en $\lim D_n$ omvat bijna de gehele A. We hebben $D_n \in \Omega(\Gamma_1)$ (wordt hierna aangetoond), dus $\lim \mu_1(D_n) \geq \mu_1^*(A) > a$. Er is dus een speciale n met $\mu_1(D_n) > a$.

Laat $A_1 + \ldots + A_n$ gesplitst zijn als disjuncte som ΣA^j $(A^j \in \Gamma_1)$ zó dat elke A_i een disjuncte som van aftelbaar vele A^j's is (zie bewijs van stelling 1.9.2). Op elke A^j is nu S_{nx} constant, we noemen deze constante verzameling S^j. Deze S^j is de som van een aantal B_i's: $S^j = \Sigma_{i \in K_j} B_i$, als $K_j = \{ i \mid A^j \subset A_i \}$. Uit de definitie van D_n volgt nu dat D_n de som van een aantal A^j's is. Dus D_n is meetbaar. Dit geldt voor elke n; van nu af aan bedoelen we met n echter de speciale n.

We splitsen ook $\Sigma_1^n B_i$ als disjuncte som ΣB^j, zó dat elke B_i som van een aantal B^j's is. Laat p_{jk} het aantal i's zijn met $A^j \subset A_i$, $B^k \subset B_i$, $1 \leq i \leq n$. Zij $q_{jk} = 1$ als $p_{jk} > 0$, $q_{jk} = 0$ als $p_{jk} = 0$. Dan is

$$\Sigma_1^n\ \mu_1(A_i)\ \mu_2(B_i) = \Sigma_j\ \Sigma_k\ p_{jk}\ \mu_1(A^j)\ \mu_2(B^k) \geq \Sigma_j\ \Sigma_k q_{jk}\ \mu_1(A^j)\mu_2(B^k).$$

Is j zó dat A^j in D_n ligt, dan is daarbij wegens $S^j = \Sigma_k q_{jk} B^k$ voldaan aan $\Sigma_k q_{jk}\ \mu_2(B^k) = \mu_2(S^j) > b$. Dus

$$\Sigma_1^n\ \mu_1(A_i)\ \mu_2(B_i) \geq b\,\Sigma_j'\ \mu_1(A^j)$$

waarin het accent aangeeft dat alleen j's met $A^j \subset D_n$ worden genomen. Het rechterlid is $b\ \mu_1(D_n)$ en dat is groter dan ab, q.e.d.

<u>Stelling 1.9.4.</u> Zijn (X, Γ_1, μ_1) en (Y, Γ_2, μ_2) σ-finiete maatruimten, dan is $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ een σ-finiete maat op $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

<u>Bewijs.</u> We controleren de eisen van definitie 1.2.2 en definitie 1.2.3.

1^o. $\mu(A\times B) = \mu_1(A)\,\mu_2(B) \geq 0$, en $\mu(0) = \mu(0\times 0) = \mu_1(0)\,\mu_2(0)=0$.

2^o. Zij $C \in \Gamma$, $C_i \in \Gamma$, $C=A\times B$, $C_i=A_i\times B_i$; $A, A_i \in \Gamma_1$; $B, B_i \in \Gamma_2 (i=1,2,\ldots)$; $C \subset \Sigma_1^\infty C_i$. Te bewijzen is dat $\Sigma\,\mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i) \geq \mu_1(A)\,\mu_2(B)$. Als $\mu_1(A)=0$, of $\mu_2(B)=0$ is dit triviaal. Zijn beide maten positief, dan kiezen we $0<a<\mu_1(A)$, $0<b<\mu_1(B)$, a en b eindig. Was $\Sigma\,\mu'_1(A_i)\,\mu_2(B_i) < \mu_1(A)\,\mu_2(B)$, dan konden a en b bovendien zo gekozen worden dat $\Sigma\,\mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i) < ab$. Dit is in strijd met stelling 1.9.3 (kies $V=A\times B$).

3^o. Uit stelling 1.9.2 volgt direct dat aan de derde eis van definitie 1.2.2 is voldaan.

4^o. μ_1 en μ_2 zijn σ-finiet. Dus er zijn rijen A_i en B_i $(i=1,2,\ldots)$ met $A_i \in \Gamma_1$, $B_i \in \Gamma_2$, $\mu_1(A_i) < \infty$, $\mu_2(B_i) < \infty$, $\Sigma_1^\infty A_i = X$, $\Sigma_1^\infty B_i = Y$. Het is nu duidelijk dat $\Sigma\, A_i \times B_j = X\times Y$, terwijl $\mu(A_i\times B_j) < \infty$ voor alle i en j.

<u>Definitie 1.9.3.</u> Zijn (X,Γ_1,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) maatruimten, dan wordt met $(X,\Gamma_1,\mu_1)\times(Y,\Gamma_2,\mu_2)$ bedoeld $(X\times Y,\, \Gamma_1\times\Gamma_2,\, \mu_1\times\mu_2)$, wat volgens stelling 1.9.4 weer een maatruimte is.

Zij Λ de ring der meetbare verzamelingen in $(X,\Gamma_1,\mu_1)\times(Y,\Gamma_2,\mu_2)$, dus $(X\times Y,\, \Gamma_1\times\Gamma_2,\mu) \xrightarrow{L} (X\times Y,\Lambda,\mu)$. Deze Λ is niet altijd gelijk aan $\Delta = \Lambda_1\times\Lambda_2$. Niet elke $A_1\times B_1 + A_2\times B_2$ behoeft een $A_3\times B_3$ te zijn, zodat Δ geen ring behoeft te zijn. Het is blijkens stelling 1.9.1 wèl een semiring, en we kunnen daarbij weer de meetbare verzamelingen in $X\times Y$ gaan zoeken. Dit leidt tot hetzelfde resultaat als met $\Gamma_1\times\Gamma_2$:

<u>Stelling 1.9.5.</u> Onderstellingen als bij stelling 1.9.4. Verder

$$(X,\Gamma_1,\mu_1) \xrightarrow{L} (X,\Lambda_1,\mu_1)\ ,\quad (Y,\Gamma_2,\mu_2) \xrightarrow{L} (Y,\Lambda_2,\mu_2)$$

$$(X,\Lambda_1,\mu_1)\times(Y,\Lambda_2,\mu_2) = (X\times Y,\Delta,\nu).$$

Dan is $(X\times Y,\Gamma,\mu) \subset (X\times Y,\Delta,\nu)$ en $(X\times Y,\Gamma,\mu) \sim (X\times Y,\Delta,\nu)$, (vgl. definitie 1.7.2 en definitie 1.7.3; $\sim$ betekent "equivalent").

<u>Bewijs</u>. De eerste bewering is nagenoeg triviaal. Voor de tweede moeten we volgens stelling 1.7.1 bewijzen

1^o. $\nu^*(A\times B) \leq \mu(A\times B)$ als $A\in\Gamma_1$, $B\in\Gamma_2$,

2^o. $\mu^*(E\times F) \leq \nu(E\times F)$ als $E\in\Lambda_1$, $F\in\Lambda_2$.

Hiervan is 1^o triviaal daar $(\Gamma,\mu)\subset(\Delta,\nu)$: bij vergroting van de semiring kan de geïnduceerde uitwendige maat niet toenemen.

Om 2^o te bewijzen onderstellen we eerst dat $\mu_1(E) < \infty$, $\mu_2(F) < \infty$. Kies $a > \mu_1(E)$, $b > \mu_2(F)$. Kies $P \in \Omega(\Gamma_1)$ met $P \supset E$, $\mu_1(P) < a$, en $Q \in \Omega(\Gamma_2)$ met $Q \supset F$, $\mu_2(Q) < b$. Gemakkelijk blijkt dat $P \times Q \supset E \times F$, en $\mu(P \times Q) = \mu_1(P)\,\mu_2(Q)$ (splits P resp. Q als disjuncte som van elementen van Γ_1 resp. Γ_2). Dus $\mu(P \times Q) < ab$, zodat $\mu^*(E \times F) < ab$. Door geschikte keuze van a en b is ab willekeurig dicht bij $\mu_1(E)\,\mu_2(F) = \nu(E \times F)$ te krijgen, zodat we 2^o hebben bewezen in het geval dat E en F eindige maten hebben.

Als $\mu_1(E)$ en $\mu_2(F)$ niet beide eindig zijn, splitsen we zowel E als F als disjuncte aftelbare som van meetbare verzamelingen met eindige maat: $E = \Sigma E_i$, $F = \Sigma F_i$. (Dit gaat met behulp van een disjuncte splitsing van X resp. Y in verzamelingen uit Γ_1 resp. Γ_2 met eindige maten). Nu is

$$\mu^*(E \times F) \leq \Sigma_i \, \Sigma_j \, \mu^*(E_i \times F_j) \leq \Sigma_i \, \Sigma_j \, \nu(E_i \times F_j) =$$

$$= \Sigma_i \, \Sigma_j \, \mu_1(E_i)\,\mu_2(F_j) = \mu_1(E)\,\mu_2(F) = \nu(E \times F).$$

In het bovenstaande hebben we nog de verschillende symbolen μ en ν gebruikt, om de uitwendige maten uit elkaar te houden. Nu stelling 1.9.5 echter bewezen is, kunnen we overal μ gebruiken.

Schema:

$$\left.\begin{array}{l} (\Gamma_1,\mu_1) \xrightarrow{L} (\Lambda_1,\mu_1) \\ (\Gamma_2,\mu_2) \xrightarrow{L} (\Lambda_2,\mu_2) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{cartesisch}\\ \text{product}\end{array} \rightarrow (\Lambda_1 \times \Lambda_2, \mu)$$

$$\downarrow L$$

$$\left.\begin{array}{l} (\Gamma_1,\mu_1) \\ (\Gamma_2,\mu_2) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{cartesisch}\\ \text{product}\end{array} \rightarrow (\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mu) \xrightarrow{L} (\Lambda,\mu)$$

<u>Definitie 1.9.3.</u> We zullen (Λ,μ) noteren als $(X,\Gamma_1,\mu_1).(Y,\Gamma_2,\mu_2)$.

In de volgende stelling zullen we maatruimten door kleine gr k-se letters voorstellen, zodat de zojuist ingevoerde notatie zegt dat $\alpha \times \beta \xrightarrow{L} \alpha\beta$. En uit stelling 1.9.5 kunnen we afleiden:

<u>Stelling 1.9.5^a.</u> Als $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ dan $\alpha \times \beta \sim \alpha' \times \beta'$.

De L-uitbreiding van $\alpha \times \beta$ hangt immers slechts van de L-uitbreidingen van α en β af.

<u>Stelling 1.9.6.</u> Zij $\alpha_i = (X_i,\Gamma_i,\mu_i)$ voor $i=1,2,3$ een sigmafiniete maatruimte. We identificeren $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ met $(X_1 \times X_2) \times X_3$, en

schrijven in beide gevallen $X_1 \times X_2 \times X_3$ (door $(x_1,(x_2,x_3))$ en $((x_1,x_2),x_3)$ beide als (x_1,x_2,x_3) te schrijven). Dan is dus ook

$$\alpha_1 \times (\alpha_2 \times \alpha_3) = (\alpha_1 \times \alpha_2) \times \alpha_3 ,$$

en beide leden zijn te schrijven als $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$. Als nu

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \overset{L}{\rightarrow} \gamma ,$$

dan is ook $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3) = \gamma$.

Dit doet inzien dat het er niet toe doet in welke volgorde we de operaties "cartesisch vermenigvuldigen" en "Lebesgue-proces" uitvoeren, als we maar weer eindigen met een Lebesgue-proces.

Bewijs. Daar $\alpha_2 \times \alpha_3 \overset{L}{\rightarrow} \alpha_2\alpha_3$, geldt $\alpha_2 \times \alpha_3 \sim \alpha_2\alpha_3$, zodat nu blijkens stelling 1.9.5[a] ook $\alpha_1 \times (\alpha_2\alpha_3) \overset{L}{\rightarrow} \gamma$. Derhalve is $\alpha_1 \times (\alpha_2 \times \alpha_3) \subset \alpha_1 \times (\alpha_2\alpha_3) \subset \gamma$.

Daar het eerste lid tot L-uitbreiding γ heeft, is volgens stelling 1.7.2 het tweede lid met het eerste equivalent. Dus $\alpha_1 \times (\alpha_2\alpha_3) \overset{L}{\rightarrow} \gamma$. Per definitie is echter $\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ de L-uitbreiding van $\alpha_1 \times (\alpha_2\alpha_3)$, zodat $\gamma = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$. Op dezelfde manier toont men aan dat $\gamma = (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$.

Met het oog op latere toepassingen gaan we nog wat dieper in op het product van twee maatruimten.

Stelling 1.9.7. Laat (X,Γ_1,μ_1) en (Y,Γ_2,μ_2) σ-finiete maatruimten zijn, en laat $\Gamma_1 \overset{L}{\rightarrow} \Lambda_1$, $\Gamma_2 \overset{L}{\rightarrow} \Lambda_2$, $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \overset{L}{\rightarrow} \Lambda$. Zij $E \in \Lambda$ (zodat $E \subset X \times Y$). Dan is, voor bijna elke x, $E_x \in \Lambda_2$. Is bovendien $\mu(E)=0$, dan is $\mu_2(E_x)=0$ voor bijna elke x.

Bewijs. We nemen eerst het laatstgenoemde geval, dus $\mu(E)=0$. Het is nu voldoende te laten zien dat voor $n=1,2,3,\ldots$ geldt dat $\{x \mid \mu_2^*(E_x) > n^{-1}\}$ de maat 0 heeft. Was dat niet het geval, dan had deze verzameling voor zekere n een positieve uitwendige maat. Stelling 1.9.3 zegt nu dat $\mu^*(E) > 0$, als μ^* de door $(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ geïnduceerde uitwendige maat is. Wegens stelling 1.9.6 is deze op Λ gelijk aan μ. We komen dus in strijd met $\mu(E)=0$.

Zij nu E meetbaar, $\mu(E)$ willekeurig. Volgens stelling 1.8.1 is $E=(\lim P_n)-N$, met $\mu(N)=0$, $P_n \in \Omega(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Voor elke x is $(P_n)_x$ μ_2-meetbaar (want $(P_n)_x \in \Omega(\Gamma_2)$), zodat ook $(\lim P_n)_x = \lim (P_n)_x$ μ_2-meetbaar is. Blijkens het voorafgaande heeft N_x bijna altijd de maat 0, dus is bijna altijd meetbaar. Dus E_x is bijna altijd meetbaar.

<u>Stelling 1.9.8.</u> (Onderstellingen als bij de vórige stelling). Is $E \subset X \times Y$, E meetbaar, en zó dat $\mu_2(E_x)=0$ is voor bijna elke $x \in X$, dan is $\mu(E)=0$.

<u>Bewijs</u>. Schrijf $X \times Y = \Sigma_1^\infty \Sigma_1^\infty A_i \times B_j$ ($A_i \in \Gamma_1, B_j \in \Gamma_2$, $\mu_1(A_i)$ en $\mu_2(B_j)$ eindig). Wanneer nu bewezen zou zijn dat elke $\mu(E(A_i \times B_j))=0$ is, volgt ook $\mu(E)=0$. We mogen ons dus beperken tot het geval dat $E \subset A \times B$, $A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2$, $\mu_1(A)$ en $\mu_2(B)$ eindig. Als $\mu_1(A)\,\mu_2(B)=0$, zijn we direct klaar. Stel dus $\mu_1(A) > 0$, $\mu_2(B) > 0$. We passen nu stelling 1.9.3 toe met $V=(A \times B)-E$. We vinden dat $\mu^*(V) \geq ab$, waarin $0 < a < \mu_1(A)$, $0 < b < \mu_2(B)$, a en b overigens willekeurig. Daar onze V meetbaar is, blijkt nu $\mu(V)= \mu(A \times B)$, dus $\mu(E)=0$.

1.10. <u>Orthogonale en affiene invariantie van L-maat in R_n</u>. De L-maat in R_1 ontstaat door het L-proces toe te passen op de semiring der halfopen intervallen $(a,b]$, met maat $\mu((a,b])=b-a$ (zie 1.2, voorbeeld 5). De L-maat in R_n ontstaat door bovengenoemde maatruimte α te noemen, en nu $\alpha.\alpha.\alpha \ldots \alpha$ (n factoren) te nemen (vgl. stelling 1.9.6). Deze is dus voort te brengen door de semiring der n-dimensionale cellen $a_1 < x_1 \leq b_1, \ldots, a_n < x_n \leq b_n$, met maat $(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)$.

Een punt van R_n geven we aan met één letter x (kolomvector). Is A een $n \times n$ matrix en a een vector, dan is $x \to x^* = Ax+a$ een affiene transformatie in R_n.

<u>Stelling 1.10.1.</u> Is E meetbaar in R_n, en is E^* het beeld van E bij de transformatie $x \to Ax+a$, dan is E^* weer meetbaar, en $\mu(E^*)= \mu(E).|\det A|$.

<u>Bewijs</u>. Voor verschuivingen $x \to x+a$ is dit nagenoeg triviaal (de maat van een cel verandert daarbij niet, zodat de uitwendige maat van een willekeurige verzameling onveranderd blijft, en dus ook meetbaar weer in meetbaar overgaat).

Vervolgens beschouwen we dilataties $x_1 \to p_1x_1, x_2 \to x_2, \ldots, x_n \to x_n$ (waarbij A dus een diagonale matrix is). Is $p_1 > 0$ dan argumenteren we als zoëven, alle maten worden dan p_1 keer zo groot. Is $p_1 < 0$, dan is enige voorzichtigheid gewenst, daar dan een cel niet in een cel overgaat. Gemakkelijk is echter in te zien dat het beeld van een cel C meetbaar is en de maat $|p_1| . \mu(C)$ heeft, want uit C ontstaat een cel door aftrekking en optelling van zijvlakken, die de maat 0 hebben. Is $p_1=0$ dan gaat C over in een verzameling van de maat 0 (want projectie op x_1-as heeft de maat 0).

Tenslotte bekijken we afschuivingen: $x_1 \to x_1+px_2$, $x_2 \to x_2$, $x_3 \to x_3, \ldots$. Een cel C gaat nu over in een scheef ding dat uit C ontstaat door er aan één kant iets bij op te tellen en aan de andere kant er iets van af te trekken. Deze twee stukken ontstaan uit elkaar door verschuiving, en hebben dus dezelfde maat. (Weliswaar moet even de meetbaarheid worden aangetoond van een gesloten driehoek in R_2, waarvan twee zijden evenwijdig aan de assen vallen. Zo'n driehoek is limiet van een rij meetbare verzamelingen: zet op de schuine zijde aan de buitenkant een "trapje", en laat de lengte der treden tot nul naderen).

Elke affiene transformatie is te krijgen door herhaalde toepassing van de hierboven beschreven operaties, zodat de stelling bewezen is.

Stelling 1.10.2. De maat in R_n is invariant bij orthogonale transformatie, want dan is det $A = \pm 1$.

1.11. Topologische en verzamelingstheoretische beschouwingen over de L-maat. We beschouwen de L-maat in R_n, en vanaf stelling 1.11.3 alleen in R_1.

Stelling 1.11.1. Aftelbare verzamelingen zijn meetbaar, met maat 0.

Bewijs. De maat van een punt is 0 (want een punt kan in een willekeurig kleine cel worden opgesloten); verder gebruiken we dat de maat totaal-additief is.

Merk op dat de stelling niet in een willekeurige maatruimte geldt. In 1.2, voorbeeld 3 heeft elk punt de maat 1. In 1.2, voorbeeld 5 (Stieltjes-Lebesgue) is de maat van een punt gelijk aan de sprong van $g(x)$ in dat punt.

Stelling 1.11.2. Open en gesloten verzamelingen in R_n zijn meetbaar.

Bewijs. Wegens stelling 1.4.1 is het voldoende de open verzamelingen te bekijken.

Als a een punt in R_n is, en $d > 0$, dan is de open kubus

$$K_{a,d} : \quad |x_i - a_i| < \tfrac{1}{2}d \qquad (i=1,\ldots,n)$$

meetbaar, want het is de limiet van de rij cellen C_n, met

$$C_n : \quad a-\tfrac{1}{2}d < x_i \leq a-\tfrac{1}{2}d - n^{-1}.$$

Zij nu V een willekeurige open verzameling. Laat W de aftelbare verzameling zijn der punten uit V met rationale coördinaten. Bij elke $a \in W$ kiezen we een $d=d(a)$ zó dat $K_{a,d} \subset V$. Nu is V de vereniging van aftelbaar veel meetbare verzamelingen, zodat V meetbaar is (stelling 1.4.5, 2^o).

<u>De verzameling van Cantor</u>, die we door S zullen voorstellen, is gedefinieerd op een wijze die herinnert aan de verzameling in par. 0.1. Laat uit het interval $A_1=[0,1]$ het open middelste derde deel weg, d.i. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Het restant V_1 bestaat uit 2 gesloten intervallen. Laat uit elk van deze weer het open middelste derde deel weg; restant V_2. Enzovoort. De rij $V_1,V_2,V_3,\dots$ daalt monotoon; S is gedefinieerd als de limiet van deze rij.

De getallen uit S zijn gemakkelijk aan te geven. Elke $x(0\leq x\leq 1)$ kan in een 3-adische breuk worden ontwikkeld, deze ontwikkeling is eenduidig als we verbieden dat vanaf zekere index alle cijfers tweeën zijn. Nu geldt: Nodig en voldoende opdat x in S ligt is dat in de ontwikkeling van x geen enkele één voorkomt, tenzij die uitsluitend door nullen wordt gevolgd.

<u>Stelling 1.11.3.</u> a) S is gesloten; b) S is nergens dicht; c) elk punt van S is verdichtingspunt van S; d) S heeft de machtigheid van het continuum; e) S is meetbaar, met maat 0.

<u>Bewijs</u>. a) Het complement van S is een vereniging van open intervallen, en is dus open.

b) Dat S nergens dicht is, betekent dat elk interval een deelinterval heeft dat geheel tot $S'=[0,1]-S$ behoort. Neem nu een open interval (a,b), $0<a<b<1$. Kies n zó groot dat er een geheel getal m is met $3^n a<m<m+1<3^n b$. Het interval $(3^{-n}(m+\frac{1}{3}), 3^{-n}(m+\frac{2}{3}))$ zal dan geheel in S' liggen, want van getallen in dat interval is het (n+1)-ste cijfer een één, terwijl er niet uitsluitend nullen achter staan.

c) Zij $x\in S$ dan $x=\Sigma_1^\infty a_i.3^{-i}$ of $x=\Sigma_1^k a_i.3^{-i}+3^{-k-1}$ (alle $a_i=0$ of 2). In het eerste geval nemen we $x_n=\Sigma_1^n a_i.3^{-i}$, in het tweede $x_n=\Sigma_1^k a_i.3^{-i}+\Sigma_{k+2}^{k+n} 2.3^{-i}$. In beide gevallen is $x_n\in S$, $x_n\to x$.

d) We zullen S éénéénduidig afbeelden op het interval $[0,1]$, waarvan de elementen als oneindige duale breuken kunnen worden geschreven. De afbrekende breuken uit S vormen een aftelbare verzameling, evenals de afbrekende duaalbreuken. Deze kunnen we dus 1-1 op elkaar afbeelden. De resterende getallen van S kunnen we 1-1 afbeelden op de resterende duaalbreuken, door in de 3-adische voorstelling van een getal van S alle tweeën door enen te vervangen en het resul-

taat weer als een 2-adische breuk te lezen.
e) Het complement van S t.o.v. $[0,1]$ heeft de maat $\frac{1}{3}+2.(\frac{1}{3})^2+2^2.(\frac{1}{3})^3+$ $+\ldots=1$, (zodat $\mu(S)=0$.

Stelling 1.11.4. De klasse Λ der meetbare verzamelingen is gelijkmachtig met de klasse Ω van alle deelverzamelingen van R_1.
Bewijs. Daar de S van Cantor 1-1 op het continuum is af te beelden, kunnen we de deelverzamelingen van S 1-1 op Ω afbeelden. Elk deel van S heeft de maat 0 en is dus meetbaar. Ω is dus gelijkmachtig met een deel van Λ . Omgekeerd is Λ gelijkmachtig met een deel van Ω (want $\Lambda \subset \Omega$), dus volgens een stelling van Bernstein zijn Λ en Ω gelijkmachtig.
Stelling 1.11.5. Er bestaan onmeetbare verzamelingen.
Bewijs. (Maakt gebruik van het z.g. keuzeaxioma). Zij R de additieve groep der reële getallen, en R_r de ondergroep der rationale. Uit elke restklasse van R mod R_r kiezen we een representant; we kiezen deze steeds in $(0,1)$. Zij V de verzameling dezer representanten.
Met $V(a)$ bedoelen we de over een afstand a verschoven V:
$V(a)=\{x \mid x-a \in V\}$; verder stelt $r_1,r_2,\ldots$ een aftelling van de rationale getallen in $(-1,1)$ voor.

We zullen bewijzen dat V onmeetbaar is. Onderstel dat V meetbaar is. We beschouwen

$$W = V(r_1) + V(r_2) + \ldots$$

Dit is een disjuncte som, want als $a \in V(r_1)$, $a \in V(r_2)$, dan liggen $a-r_1$ en $a-r_2$ beide in V, wat niet kan omdat ze congruent zijn mod R_r en we van elke restklasse slechts een representant gekozen hebben. Verder is elke $V(r_i)$ meetbaar (stelling 1.10.1), dus W ook. Tenslotte is

$$(0,1) \subset W \subset (-1,2).$$

Want als $x \in (0,1)$ dan is er een $v \in V$ met $v \equiv x \pmod{R_r}$. Daar $0<v<1$, voldoet $x-v=r$ aan $-1<r<1$, dus r is een r_i. Deshalve $x \in V(r_i)$. Anderzijds is elk getal w van W van de vorm $v+r_j$, met $0<v<1$, $-1<r_j<1$, dus $-1<w<2$.

We hebben dus $1 \leq \mu(W) \leq 3$. Dit geeft een tegenspraak, daar $\mu(W)= \mu(V)+ \mu(V)+\ldots$, waar òf 0 òf ∞ uitkomt.

Stelling 1.11.6. Elke Jordan-meetbare verzameling is meetbaar, en daarvoor is de Jordan-maat gelijk aan de Lebesgue-maat.

Bewijs. Dat E Jordan-meetbaar is betekent dat er een eindig getal $\mu_J(E)$ is, zó dat bij elke $n>0$ een U_n en een V_n te vinden zijn met $U_n \subset E \subset V_n$.

$$\mu_J(E) - \frac{1}{n} < \mu(U_n) \leq \mu_J(E) \leq \mu(V_n) < \mu_J(E) + \frac{1}{n},$$

terwijl zowel U_n als V_n verenigingen van eindig vele cellen zijn. Nu zijn $U=\lim\sup U_n$ en $V=\lim\inf V_n$ beide meetbaar, en $U \subset E \subset V$, $\mu(V) \leq \lim\inf \mu(V_n) = \mu_J(E)$ (stelling 1.5.3), en $\mu(U) \geq \lim\sup \mu(U_n)$ (stelling 1.5.4; alle U_n's liggen in V_1, en V_1 heeft eindige maat). Dus $\mu(U) = \mu(V) = \mu_J(E)$, zodat $\mu(V-U)=0$. Nu is ook $E-U$ meetbaar, met maat 0, dus E is meetbaar, en $\mu(E)=\mu_J(E)$.

De verzamelingen van de maat nul zijn "maattheoretisch dun". We noemen de klasse van deze verzamelingen even Δ_m. We kennen ook de klasse der "verzamelingstheoretisch dunne" verzamelingen Δ_v, bestaande uit de verzamelingen waarvan de machtigheid kleiner is dan die van het continuum. Tenslotte kennen we de klasse Δ_t der "topologisch dunne" verzamelingen, nl. de nergens dichte. Er zijn vele analogieën tussen deze drie klassen, bijv.

Stelling 1.11.7. De vereniging van aftelbaar vele verzamelingen uit de klasse Δ_m kan nooit een interval volledig bedekken. Dezelfde bewering geldt voor Δ_v, en ook voor Δ_t.

Bewijs. Voor Δ_m en Δ_v is de bewering nagenoeg triviaal. We beperken ons dus tot Δ_t. Een vereniging van aftelbaar vele nergens dichte verzamelingen heet een verzameling van de eerste categorie, en het complement van een verzameling van de 1^e categorie heet een verzameling van de tweede categorie. We bewijzen nu: een verzameling van de tweede categorie is overal dicht en heeft zelfs met elk interval een doorsnede die de machtigheid van het continuum bezit.

Zij I een open interval, en laat $V_n (n=1,2,\ldots)$ nergens dicht zijn. Kies in I twee disjuncte open deelintervallen I_o en I_1 die niets met V_1 gemeen hebben. Kies in I_o twee disjuncte open deelin tervallen I_{oo} en I_{o1} die niets met V_2 gemeen hebben, en evenzo I_{1o} en I_{11} in I_1. Zo gaan we door. Bij elke keuzerij van nullen en énen, bijv. 0100110..., beschouwen we de rij intervallen waarvan de indices met beginstukken van de keuzerij overeenstemmen. In het voorbeeld:

$$I_o \supset I_{o1} \supset I_{o1o} \supset I_{o1oo} \supset I_{o1oo1} \supset \cdots$$

Volgens de stelling over intervallennesten is er nu een nestgetal dat tot elk interval van de rij, dus tot geen enkele V_i behoort. Gemakkelijk is in te zien dat verschillende keuzerijen verschillende nestgetallen opleveren. Dus $I - \Sigma V_i$ bevat minstens evenveel getallen als er keuzerijen zijn.

Hoewel Δ_m, Δ_v en Δ_t analoog zijn, is er toch geen sterk verband tussen. Een verzameling van de maat 0 kan best overal dicht zijn (bijv. de verzameling der rationale getallen), en een nergens dichte verzameling kan best meetbaar zijn met positieve maat (zie de verzameling in 0.1). Verzamelingen van de maat 0 zowel als nergens dichte kunnen de machtigheid van het continuum hebben (stelling 1.11.3).

2. Integratie.

We zullen ons hoofdzakelijk bezighouden met integratie van functies gedefinieerd op een σ-finiete maatruimte X, met waarden in een Banachruimte B. Dit laatste is op zichzelf niet erg belangrijk. Het is hier gedaan om de volgende redenen: 1°. om zekere (op Banachruimten toepasbare) methoden te scheiden van methoden die met cartesische productmaat opereren, 2°. om oefening te geven met het zo belangrijke begrip Banachruimte.

Wat 1° betreft, geldt het nadeel dat we daardoor verschillende dingen dubbel moeten doen.

2.1. Banachruimte.

Definitie 2.1.1. Een ruimte R heet een complexe vectorruimte als er een optelling gedefinieerd is zowel als een scalaire vermenigvuldiging van vectoren met complexe getallen, terwijl

1° R is een abelse groep t.o.v. de optelling

2° Als α, β complexe getallen zijn, en $x \in R$, $y \in R$, dan is $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$$(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x \qquad (\text{dus } 0.x = 0).$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x, \qquad 1.x = x.$$

Definitie 2.1.2. R heet een reële vectorruimte als voldaan is aan dezelfde eisen als in def.2.1.1, doch met overal "reëel" i.p.v. "complex".

Definitie 2.1.3. Een reële of complexe vectorruimte R heet genormeerd als er bij elke $x \in R$ een eindig niet-negatief getal $\|x\|$ is gedefinieerd, zó dat

1° $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (voor alle $x \in R$)

2° $\|\alpha x\| = |\alpha| \,.\, \|x\|$ (voor alle reële resp. complexe α en alle $x \in R$).

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ voor alle $x \in R$, $y \in R$.

We concluderen dat $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$ (driehoeksongelijkheid) en dat $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x-y\|$. We merken op dat R een metrische ruimte wordt, door als afstand van twee punten x en y de norm $\|x-y\|$ te nemen.

Definitie 2.1.4. Een genormeerde complexe (resp. reële) vectorruimte B heet een Banachruimte (resp. reële Banachruimte) als B volledig is t.o.v. de norm. Dat wil zeggen: als $x_1, x_2, x_3, \ldots$ een rij is ($x_i \in B$), zó dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een index N is met $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ voor alle $n > N$, $m > N$, dan is er een $x \in B$ zó dat $\|x - x_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. Met andere woorden: elke fundamentaalrij is convergent.

Voorbeelden. 1°. $B = B_0$, d.i. het complexe vlak, met $\|x\| = |x|$.

2°. $B = R_n$, d.i. de complexe n-dimensionale vectorruimte. Als norm van $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen we nemen $\|x\| = (\Sigma_1^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, doch ook $\|x\| = \max_i |x_i|$ is een geschikte norm.

3°. B = verzameling der continue functies op $[0,1]$, met de triviale definities voor som en scalair product, en met norm $\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

Als $\|f_n - f_m\| \to 0$ ($n \to \infty$, $m \to \infty$), dan is voor elke t de rij $f_1(t), f_2(t), \ldots$ convergent. Noem de limiet f(t). Uit $\|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$ ($n > N$, $m > N$) volgt nu dat $\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$, want $\|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon + \|f_m(t) - f(t)\|$ als m groot genoeg is, en het laatste stuk gaat naar 0 als $m \to \infty$. Dus is ook $\|f_n - f\| \to 0$, d.w.z. f_n convergeert uniform naar f. Dus ook f is continu, zodat $f \in B$.

4°. B = verzameling der begrensde functies op $[0,1]$, met $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

5°. (later te bespreken): de verzameling van alle op een maatruimte L_p-integreerbare functies.

6°. (later te bespreken): de Hilbertruimte.

Definitie 2.1.5. Is B een Banachruimte, $x_n \in B$ ($n = 1, 2, \ldots$), $x \in B$ en $\|x_n - x\| \to 0$, dan zeggen we dat $x_n \to x$, of dat $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. De rij $\{x_n\}$ heet convergent als er een x bestaat met $x_n \to x$.

We zeggen dat $\Sigma_1^\infty x_k = x$ als $\lim_{n \to \infty} \Sigma_1^n x_k = x$.

In de volgende stellingen gaat het steeds over elementen van een Banach-ruimte.

Stelling 2.1.1. Een convergente rij heeft slechts één limiet.

Bewijs. Stel $x_n \to x$ en $x_n \to y$. Dan is $\|x_n - x\| \to 0$, $\|x_n - y\| \to 0$, dus $\|x - y\| \to 0$, dus $\|x - y\| = 0$, dus $x = y$.

Stelling 2.1.2. Is $x_n \in B$ $(n=1,2,\ldots)$, $\Sigma_1^\infty \|x_k\| < \infty$, dan convergeert $\Sigma_1^\infty x_k$, terwijl $\|\Sigma_1^\infty x_k\| \leq \Sigma_1^\infty \|x_k\|$. Bij andere rangschikking van de termen convergeert de reeks ook, en behoudt dezelfde som.

Bewijs. Daar steeds $\|\Sigma_n^{n+p} x_k\| \leq \Sigma_n^{n+p} \|x_k\|$, is $\{\Sigma_1^n x_k\}$ een fundamentaalrij, dus convergent. Noem de limiet s.

Zij vervolgens $\Sigma_1^\infty y_k$ een reeks die uit $\Sigma_1^\infty x_k$ ontstaat door wijziging van de rangschikking. Daar $\Sigma_1^\infty \|y_k\| = \Sigma_1^\infty \|x_k\| < \infty$, is ook $\Sigma_1^\infty y_k$ convergent. Kies nu een $\varepsilon > 0$. Neem daarbij N zo groot dat $\Sigma_{N+1}^\infty \|x_k\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $\|s - \Sigma_1^N x_k\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Kies M zo groot dat $x_1,\ldots,x_N$ onder $y_1,\ldots,y_M$ voorkomen, en kies K zo groot dat $y_1,\ldots,y_M$ onder $x_1,\ldots,x_K$ voorkomen. Dan is

$$\|\Sigma_1^M y_k - \Sigma_1^N x_k\| \leq \Sigma_{N+1}^K \|x_k\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

dus $\|\Sigma_1^M y_k - s\| < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $\Sigma_1^n y_k$ ook naar s convergeert. Verder is $\|s\| \leq \|\Sigma_1^N x_k\| + \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $\|s\| \leq \Sigma_1^\infty \|x_k\| + \frac{1}{2}\varepsilon$; wegens de willekeur van ε is dus $\|s\| \leq \Sigma_1^\infty \|x_k\|$.

Stelling 2.1.3. Is $x_{ij} \in B$ $(i,j=1,2,\ldots)$, $\Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \|x_{ij}\| < \infty$, dan zijn de reeksen $\Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty x_{ij}$ en $\Sigma_{j=1}^\infty \Sigma_{i=1}^\infty x_{ij}$ gelijk, en hebben dezelfde som.

Bewijs. Geheel als bij de overeenkomstige stelling voor absoluut convergente dubbelreeksen met reële termen.

Stelling 2.1.4. $\|x\|$ is een continue functie van x (bij de topologie die voortvloeit uit de metriek, waarbij $\|x-y\|$ als afstand van x en y wordt aangenomen). Ook is $\|x-y\|$ een continue functie van x en y.

Bewijs. Als $\|x-x_0\| < \varepsilon$, dan $|\,\|x\| - \|x_0\|\,| < \varepsilon$.

Als $\|x-x_0\| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\|y-y_0\| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dan $|\,\|x-y\| - \|x_0-y_0\|\,| < \varepsilon$.

Definitie 2.1.6. (vgl. def. 1.8.2). De Banachruimte B heet separabel als er een rij $x_1, x_2, \ldots$ is die overal dicht ligt in B, d.w.z. dat er bij elke $\varepsilon > 0$ en elke $x \in B$ een n bestaat met $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Voorbeeld van een inseparabele Banachruimte: Zij S een niet-aftelbare verzameling. Is f een op S gedefinieerde functie met complexe waarden, die hoogstens aftelbaar vaak $\neq 0$ is, dan zullen we $\Sigma_{s\in S} |f(s)|$ definieren als de som die ontstaat door alle nullen weg te schrappen. Onder B verstaan we de collectie van alle dergelijke functies, voor zover $\Sigma_{s\in S} |f(s)| < \infty$ is. Som en scalair product worden op de triviale wijze gedefinieerd, terwijl $\|f\| = \Sigma_{s\in S} |f(s)|$ wordt genomen. Dat B volledig is t.o.v. deze norm, blijkt als volgt. Zij $\{f_n\}$ een fundamentaalrij. Zij S_1 het deel van S waarop alle f_n nul zijn. Dan is $S-S_1=S_0$ dus aftelbaar. Voor elke $s\in S_0$ is $\{f_n(s)\}$ een fundamentaalrij van complexe getallen, daar $|f_n(s)-f_m(s)|\leq\|f_n-f_m\|$. Voor elke $s\in S_0$ bestaat dus lim $f_n(s)$. Noem die $f(s)$, en definieer $f=0$ op S_1. Zij $\varepsilon>0$, en N zó dat $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ als $n>N$, $m>N$. Voor elk eindig deel S_e van S_0 geldt dan $\sum_{s\in S_e}|f_n(s)-f_m(s)|<\varepsilon$, dus $\sum_{s\in S_e}|f_n(s)-f(s)|\leq\varepsilon$. Derhalve is $\sum_{s\in S_0}|f_n(s)-f(s)|\leq\varepsilon$ voor alle $n>N$, en N hangt niet van S_0 af. Bijgevolg is $\|f\|<\infty$, dus $f\in B$, en $\|f-f_n\|\to 0$.

Tenslotte laten we zien dat B inseparabel is. Neem aan dat $f_1, f_2, \ldots$ een rij is die overal dicht ligt in B. Er is dan een overaftelbaar deel van S waarop alle f_n nul zijn. Kies daarin een punt s_0, en laat g de karakteristieke functie van $\{s_0\}$ zijn (dus $g(s_0)=1$, $g(s)=0$ als $s\neq s_0$). Kennelijk is nu $\|g-f_n\| = 1+\|f_n\|\geq 1$. Kiezen we nu $\varepsilon<1$ en $x=g$, dan zien we dat aan de eis van def.2.1.6 niet is voldaan.

In de volgende paragrafen gaat het steeds over een (complexe) Banachruimte. Steeds is zonder enige moeite in te zien dat alles ook voor reëele Banachruimten geldig is te maken, mits men de voor de hand liggende verandering aanbrengt dat men overal "complex getal" door "reëel getal" vervangt.

2.2. Trapfuncties. Zij (X, Γ, μ) een σ-finiete maatruimte (doorgaans gemakshalve tot X afgekort) en B een Banachruimte.

Definitie 2.2.1. Is $S\subset X$, dan is χ_S de karakteristieke functie van S, d.i. de op X gedefinieerde functie die $=1$ is op S en $=0$ op $X-S$.

Definitie 2.2.2. Een trapfunctie is een afbeelding t van X in B die hoogstens aftelbaar vele waarden $b_1, b_2, \ldots$ aanneemt, terwijl voor elk dezer waarden de verzameling $\{x \mid t(x)=b_i\}$ meetbaar is. De collectie van alle trapfuncties heet T.

Met andere woorden $t(x)=\Sigma_1^\infty b_i\chi_{E_i}(x)$, met $b_i\in B$, terwijl $X=\Sigma_1^\infty E_i$ een disjuncte splitsing van X in meetbare delen is.

Definitie 2.2.3. Een "speciale trapfunctie" is een functie van de gedaante $s(x)=\Sigma_{i=1}^n b_i\chi_{A_i}(x)$, waarbij n eindig is, $b_i\in B$, $A_i\in\Gamma$, $\mu(A_i)<\infty$ $(i=1,\ldots,n)$. De collectie van alle speciale trapfuncties heet T^*.

Opmerking 1. Een speciale trapfunctie is ook een trapfunctie (zie st.2.2.3).

Opmerking 2. De speciale trapfuncties vormen een lineaire ruimte, want een speciale trapfunctie van n termen plus een speciale trapfunctie van m termen levert een speciale trapfunctie van n+m termen op (dat doorsnede, som of verschil van elementen van Γ niet altijd als som van eindig vele elementen van Γ kunnen worden geschreven, is dus geen bezwaar).

Definitie 2.2.4. Zij f een afbeelding van X in B, dan is $\varphi(f)$ gedefinieerd door

$$\varphi(f) = \inf \left\{ \Sigma_1^\infty \mu(E_i) \sup_{x\in E_i} \|f(x)\| \;\middle|\; \Sigma_1^\infty E_i = X \;,\; E_i\text{'s meetbaar} \right\} ,$$

zodat $0 \leq \varphi(f) \leq \infty$.

Stelling 2.2.1. Is $t \in T$, $t = \Sigma_1^\infty b_i \chi_{E_i}$, $X = \Sigma_1^\infty E_i$ disjunct, dan is $\varphi(t) = \Sigma_1^\infty \mu(E_i).\|b_i\|$.

Bewijs. We hebben $\varphi(t) \leq \Sigma_1^\infty \mu(E_i).\|b_i\|$, omdat het rechterlid één der getallen is waarover in de definitie van $\varphi(t)$ het inf wordt genomen.

Is verder $X = \Sigma F_i$ (F_i's meetbaar), dan is

$$\Sigma_1^\infty \mu(F_i) \sup_{x\in F_i} \|t(x)\| = \Sigma_{i=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \mu(F_iE_j) \sup_{x\in F_i} \|t(x)\| \geq$$

$$\geq \Sigma_i \Sigma_j \mu(F_iE_j) \sup_{x\in F_iE_j} \|t(x)\| = \Sigma_j \Sigma_i \mu(F_iE_j) \|b_j\| \geq$$

$$\geq \Sigma_j \|b_j\| \mu(E_i).$$

Stelling 2.2.2. 1°. $\varphi(f+g) \leq \varphi(f) + \varphi(g)$.

2°. Zijn $\varphi(f)$ en $\varphi(g)$ eindig, dan is $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \varphi(f-g)$.

3°. $\varphi(\alpha f) = |\alpha| \varphi(f)$ als α een complex getal is.

4°. $\varphi(\|f\|) = \varphi(f)$.

5°. Als $f(x)=0$ (p.p.), dan $\varphi(f)=0$.

6°. Als $\|f(x)\| \leq \|g(x)\|$ (p.p.), dan is $\varphi(f) \leq \varphi(g)$.

Bewijs: 1°. Uit $\sup_{E_jF_j} \|f+g\| \leq \sup_{E_jF_j} \|f\| + \sup_{E_iF_j} \|g\| \leq \sup_{E_i} \|f\| + \sup_{F_j} \|g\|$.

2°. $\varphi(f) \leq \varphi(g) + \varphi(f-g)$ en $\varphi(g) \leq \varphi(f) + \varphi(g-f)$.

3°. Uit $\sup \|\alpha f(x)\| = |\alpha| \sup \|f(x)\|$.
4°. In de definitie van $\varphi(f)$ komt slechts de norm van f voor.
5°. Neem $E_1=\{x \mid f(x)=0\}$, $E_2=\{x \mid f(x)\neq 0\}$, $E_3=E_4=\ldots=0$.
6°. We hebben $\|f(x)\| \leq \|g(x)\| + \|n(x)\|$, met $n(x)=0$ (p.p.).
Dus $\varphi(f) \leq \varphi(g) + \varphi(n) = \varphi(g)$.

Stelling 2.2.3. Is $b_i \in B$, $A_i \in \Gamma$, $\mu(A_i) < \infty$ $(i=1,\ldots,n)$, dan bestaan er disjuncte verzamelingen $E_1,\ldots,E_m$ $(E_j \in \Lambda)$ en elementen $c_1,\ldots,c_m$ van B zó dat

$$\Sigma_1^n \, b_i \, \chi_{A_i}(x) = \Sigma_1^m \, c_j \, \chi_{E_j}(x) \qquad (x \in X),$$

en dan is $\Sigma_1^n \, b_i \, \mu(A_i) = \Sigma_1^m \, c_j \, \mu(E_j)$.

Bewijs. Er is een stel disjuncte meetbare verzamelingen $E_1,\ldots,E_m$ zó dat elke A_i de vereniging van een aantal E_j's is: $A_i = \Sigma_j \, p_{ij} \, E_j$ $(p_{ij}=0$ of $1)$. Nu is $\Sigma_1^n \, b_i \, \chi_{A_i}(x) = \Sigma_{j=1}^m \, \chi_{E_j}(x) \, . \, \Sigma_{i=1}^n \, p_{ij} \, b_i$.

$$\Sigma_i \, b_i \, \mu(A_i) = \Sigma_i \, \Sigma_j \, b_i \, p_{ij} \, \mu(E_j) = \Sigma_j \, \mu(E_j) \, \Sigma_i \, b_i p_{ij} \, .$$

Definitie 2.2.5. Is $s \in T^*$, $s(x) = \Sigma_1^n \, b_i \, \chi_{A_i}(x)$, dan definieren we het element $L(s)$ van B door

$$L(s) = \Sigma_1^n \, b_i \, \mu(A_i).$$

($L(s)$ is onafhankelijk van de speciale wijze van voorstellen van s met A_i's en b_i's; dit blijkt door st.2.2.3 op het verschil van twee dergelijke voorstellingen toe te passen.)

Stelling 2.2.4. L is lineair op T^*:

$$L(s_1+s_2) = L(s_1) + L(s_2) \qquad \text{als } s_1 \in T^*, \; s_2 \in T^*$$

$$L(\alpha s) = \alpha L(s) \text{ als } \alpha \text{ een complex getal is, en } s \in T^* .$$

Bewijs. De eerste regel blijkt door zowel s_1 als s_2 als lineaire combinatie C_1 en C_2 van m resp. n karakteristieke functies te schrijven, en dan s_1+s_2 als lineaire combinatie van m+n karakteristieke functies. De tweede regel is nog trivialer.

Stelling 2.2.5. Als $s \in T^*$, dan is $\|L(s)\| \leq \varphi(s)$.

Bewijs. s is te schrijven als $\Sigma_1^m \, c_j \, \chi_{E_j}$ (E_j's disjunct, zie st. 2.2.3), en $L(s) = \Sigma_1^m \, c_j \, \mu(E_j)$. Dus $\|L(s)\| \leq \Sigma_1^m \|c_j\| \, \mu(E_j)$. Pas nu st.2.2.1 toe.

<u>Stelling 2.2.6.</u> Als $s \in T^*$, dan is ook $\|s\|$ (gedefinieerd door $\|s\|(x) = \|s(x)\|$) een trapfunctie, en $L(\|s\|) = \varphi(s)$.

<u>Bewijs</u>. $s = \Sigma_1^m b_i \chi_{E_i}$, met disjuncte en meetbare E_i's. Dus $\|s\| = \Sigma_1^m \|c_i\| \chi_{E_i}$.

Blijkens st.2.2.1 en st.2.2.3 zijn nu $\varphi(s)$ en $L(\|s\|)$ beide gelijk aan $\Sigma_1^m \|c_i\| \mu(E_i)$.

2.3. <u>Meetbare functies $X \to B$</u>. Zij weer X een σ-finiete maatruimte en B een Banachruimte. De collectie van alle afbeeldingen van X in B stellen we door B^X voor.

<u>Definitie 2.3.1.</u> $f \in B^X$ heet meetbaar als er een rij trapfuncties $t_1, t_2, \ldots$ is zo dat voor bijna elke x geldt $t_n(x) \to f(x) (n \to \infty)$.

In het bijzonder is elke trapfunctie meetbaar, evenals elke functie die bijna overal nul is.

<u>Stelling 2.3.1.</u> Zijn f en g meetbaar en zijn α en β complexe constanten, dan zijn $\alpha f + \beta g$ en $\|f\|$ meetbaar.

<u>Bewijs</u>. $t_n^1 \to f$(p.p.), $t_n^2 \to g$(p.p.), dan $\alpha t_n^1 + \beta t_n^2 \to \alpha f + \beta g$ (p.p.), en $\|t_n\| \to \|f\|$ (p.p.).

<u>Stelling 2.3.2</u>. Nodig en voldoende opdat $f \in B^X$ meetbaar is, is dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een trapfunctie t is met $\|f(x) - t(x)\| < \varepsilon$ (p.p.).

<u>Bewijs</u>. <u>Nodig</u>. Zij $t_n \to f$(p.p.), en $\varepsilon > 0$. Definieer E_k door

$$E_k = \{x \mid \|t_n(x) - t_m(x)\| < \varepsilon \quad (n \geq k,\ m \geq k)\}.$$

Voor elke n en m is de verzameling waarop $\|t_n(x) - t_m(x)\| < \varepsilon$, meetbaar (want $t_n - t_m$ is een trapfunctie). Dus E_k is (als doorsnede van aftelbaar veel van zulke verzamelingen) ook meetbaar. Bijna elke $x \in X$ ligt in een E_k. Definieer nu t(x) door

$$t(x) = \begin{cases} t_k(x) & \text{als } x \in E_k,\ x \notin E_1 + \ldots + E_{k-1} \\ 0 & \text{als } x \in X - \Sigma_1^\infty E_k. \end{cases}$$

Afgezien van $X - \Sigma_1^\infty E_k$ (die de maat nul heeft) is nu overal $\|t(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Voldoende. Neem achtereenvolgens $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$ en construeer daarbij resp. $t_1, t_2, \ldots$.

Stelling 2.3.3. Is $f \in B^X$, $f_1 \in B^X$, $f_2 \in B^X, \ldots$, zijn $f_1, f_2, \ldots$ meetbaar, en is $f_n(x) \to f(x)$ (p.p.), dan is $f(x)$ meetbaar.

Bewijs. Neem voor elke k de trapfunctie t_k zó dat $\|f_k(x)-t_k(x)\| < 2^{-k}$ (p.p.). Dan is ook $t_k(x) \to f(x)$ (p.p.), dus f is meetbaar (def.2.3.1).

Stelling 2.3.4. Zij B separabel, en $f \in B^X$. Dan is de volgende voorwaarde nodig en voldoende voor de meetbaarheid van f: Bij elke $\varepsilon > 0$ en elke $b \in B$ is de verzameling

$$E(b,\varepsilon) = \{ x \mid x \in X, \ \|f(x) - b\| < \varepsilon \}$$

een meetbaar deel van X.

Gevolg: Is B separabel, dan is nodig en voldoende voor meetbaarheid van f dat voor elk open deel V van B geldt dat $\{x \mid f(x) \in V\}$ meetbaar is.

Bewijs. 1°. Nodig. Zij f meetbaar. Bij elke n kiezen we een trapfunctie t_n zó dat overal $\|f(x)-t_n(x)\| < n^{-1}$. De punten van X die hier niet voor alle n aan voldoen vormen een verzameling van de maat 0, die we rustig uit X weg kunnen laten. Zij E_n de verzameling

$$E_n = \{ x \mid \| t_n(x)-b \| < \varepsilon - \tfrac{1}{n} \} .$$

Dan is E_n meetbaar, want het is de vereniging van een aantal der aftelbaar vele meetbare verzamelingen waarop t_n constant is. Verder is $\liminf E_n = E(b,\varepsilon)$, zodat $E(b,\varepsilon)$ meetbaar is.

2°. Voldoende. Zij $E(b,\varepsilon)$ meetbaar voor alle $b \in B$ en alle $\varepsilon > 0$. We kiezen een ε . Zij $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ een aftelbare verzameling die overal dicht ligt in B. Kort af: $E(b_k,\varepsilon) = E_k$. Dan zijn $E_1, E_2, \ldots$ meetbaar, en samen overdekken ze X (want als $x \in X$, dan is er een index n zó dat $\|f(x)-b_n\| < \varepsilon$). Definieer $t(x)=b_1$ als $x \in E_1$, $t(x)=b_2$ als $x \in E_2-E_1$, $t(x)=b_3$ als $x \in E_3-E_1-E_2$, enz. Voor elke x is er nu een n met $x \in E_n$ en $t(x)=b_n$, dus $\|f(x)-t(x)\| < \varepsilon$.

Opmerking. De stelling blijft juist als $< \varepsilon$ wordt vervangen door $\leq \varepsilon$, want $\lim_{n\to\infty} E(b, \varepsilon+n^{-1}) = E^*(b,\varepsilon) = \{x \mid x \in X, \|f(x)-b\| \leq \varepsilon\}$, en $\lim_{n\to\infty} E^*(b, \varepsilon-n^{-1}) = E(b,\varepsilon)$.

Stelling 2.3.5. Zij $f \in B^X$. Dan is de volgende voorwaarde nodig en voldoende voor de meetbaarheid van f: Bij elke $\varepsilon > 0$ is er een trapfunctie t met $\varphi(f-t) < \varepsilon$. (Dit criterium herinnert aan de definitie van de Riemann-integraal).

Bewijs. 1°. Nodig. Zij $X = \Sigma_1^\infty E_i$ (disjuncte som) met $\mu(E_i) < \infty$. Zij χ_i de karakteristieke functie van E_i. Kies $\varepsilon > 0$. Kies t_i zó dat $\sup_X \|f-t_i\| < (1+\mu(E_i))^{-1}\, 2^{-i}\varepsilon$. (De uitzonderingsverzameling heeft maat 0 en speelt geen rol). Nu is $t = \Sigma_1^\infty t_i\, \chi_i$ weer een trapfunctie, en $t(x) = t_i(x)$ als $x \in E_i$. Dus

$$\Sigma_1^\infty\, \mu(E_i) \sup_{x \in E_i} \|f-t\| < \Sigma_1^\infty 2^{-i}\varepsilon = \varepsilon .$$

Het linkerlid is één der getallen uit de verzameling waarvan $\varphi(f-t)$ het infimum is.

2°. Voldoende. Nu is er bij elke i $(i = 1, 2, \ldots)$ een t_i met $\varphi(f-t_i) < 2^{-2i}$, en bijgevolg is er een disjuncte verdeling $X = \Sigma_1^\infty E_n$ zó dat

$$\Sigma_1^\infty\, \mu(E_n) \sup_{x \in E_n} \|f(x) - t_i(x)\| < 2^{-2i}.$$

Hieruit volgt dat overal $\|f-t_i\| < 2^{-i}$, hoogstens met uitzondering van een meetbare verzameling $E^{(i)}$ met maat $< 2^{-i}$. Noem $F^{(i)} = E^{(i)} + E^{(i+1)} + \ldots$, dan is $\mu(F^{(i)}) < 2^{1-i}$, dus $F^{(i)} \to N$, $\mu(N) = 0$. Op $X-N$ geldt nu dat $t_i(x) \to f(x)$.

Stelling 2.3.6. Laat B_1, B_2, B_3 separabele Banachruimten zijn. Laat φ : $(a,b) \to F(a,b) \in B_3$

een continue afbeelding van $B_1 \times B_2$ in B_3 zijn. Is nu $f \in B_1^X$, $g \in B_2^X$, en is $F(f(x), g(x)) = h(x)$ (dus $h \in B_3^X$). Zijn dan f en g meetbaar, dan is h meetbaar.

Bewijs. Volgt gemakkelijk uit het gevolg van st.2.3.4.

Definitie 2.3.2. Zij $f \in B^E$, $E \subset X$ en E meetbaar. Dan heet f meetbaar op E als $\chi_E . f$ meetbaar is (met $\chi_E(x) f(x)$ wordt 0 bedoeld als $x \notin E$).

Stelling 2.3.7. Is f meetbaar, $E \subset X$, E meetbaar, dan is f meetbaar op E.

Bewijs. Uit def.2.3.1: Is $t_n(x) \to f(x)$ (p.p.), dan ook $\chi_E(x) t_n(x) \to \chi_E(x) f(x)$ (p.p.).

Ter voorbereiding van de stelling van Egoroff bespreken we een maattheoretische hulpstelling.

Stelling 2.3.8. Zij (X, Λ, μ) een σ-finiete maatruimte, en laat $E \in \Lambda$, $A_{ij} \in \Lambda$ $(i,j=1,2,\ldots)$. Voor elke j is gegeven dat $A_{1j} \subset A_{2j} \subset \ldots$, $\lim_{i\to\infty} A_{ij} = E-N_j$, met $\mu(N_j)=0$. Dan is er een rij $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, met $E_n \in \Lambda$ $(n=1,2,\ldots)$, $\lim_{n\to\infty} E_n = E-N$, $\mu(N)=0$, terwijl er bij elke n en elke j een index $\varphi_n(j)$ is te bepalen, zó dat $E_n \subset A_{ij}$ voor $i \geq \varphi_n(j)$.

Bewijs. We nemen eerst aan dat $\mu(E) < \infty$. Voor elke j is dan

$$\mu(E-A_{ij}) \to 0 \qquad (i \to \infty,\ j \text{ vast}).$$

Kies nu $\varphi_n(j)$ zo dat $\mu(E-A_{\varphi_n(j),j}) < 2^{-n-j}$ $(n,j=1,2,\ldots)$.

Bij vaste n heeft de vereniging van alle $E-A_{\varphi n(j),j}$ een maat $\leq 2^{-n}$. Is nu E_n de doorsnede van alle $A_{\varphi_n(j),j}$'s, dan is ook $\mu(E-E_n) \leq 2^{-n}$. We kunnen er bij de keuze van $\varphi_n(j)$ gemakkelijk voor zorgen dat $\varphi_n(j)$ een stijgende functie van n wordt. Dan blijkt dat $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, $\mu(E-E_n) \to 0$, dus $\mu(E-\lim E_n)=0$, q.e.d.

Zij vervolgens $\mu(E) = \infty$. Daar X σ-finiet is, hebben we $E = \Sigma_1^\infty E^{(k)}$, $E^{(k)}$'s disjunct, elk met eindige maat. Bij elke k passen we nu het voorafgaande toe op $A_{ij}^{(k)}$'s, gedefinieerd als $A_{ij}^{(k)} = E^{(k)} A_{ij}$. We vinden zo een stel $E_1^{(k)} \subset E_2^{(k)} \subset \ldots$, met $E_n^{(k)} \to E^{(k)} - N^{(k)}$, $\mu(N^{(k)})=0$, terwijl bij vaste n, j en k geldt dat $E_n^{(k)} \subset A_{ij}^{(k)}$ voor alle voldoend grote waarden van i.

Neem nu $F^{(n)} = E_n^{(1)} + E_{n-1}^{(2)} + \ldots + E_1^{(n)}$. Dan $F^{(1)} \subset F^{(2)} \subset \ldots$, en $F^{(n)} \subset \Sigma_{k=1}^{n} A_{ij}^{(k)}$ voor alle voldoend grote waarden van i. Dus $F^{(n)} \subset \Sigma_{k=1}^{\infty} A_{ij}^{(k)} = A_{ij}$ voor voldoend grote waarden van i. Bovendien is, als $n \to \infty$,

$$F^{(n)} \to \lim E_n^{(1)} + \lim E_n^{(2)} + \ldots = (E^{(1)} - N^{(1)}) + \ldots = E - \Sigma_1^\infty N^{(n)}.$$

Daar elke $N^{(n)}$ de maat 0 heeft, heeft ook $\Sigma N^{(n)}$ de maat nul.

Stelling 2.3.9. (Stelling van Egoroff). Zij $E \subset X$, E meetbaar. Laat $f, f_1, f_2, \ldots$ elementen van B^X zijn, en $f_1, f_2, f_3, \ldots$ alle meetbaar op E. Neem aan dat voor bijna $x \in E$ geldt

$$f_i(x) \to f(x) \qquad (i \to \infty),$$

zodat ook f meetbaar is (st.2.3.3). Dan is er een stijgende rij meetbare verzamelingen $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ met $\lim_{n\to\infty} E_n = E - N$, $\mu(N)=0$, terwijl voor elke n geldt

$$\text{"}f_i(x) \to f(x) \quad \text{uniform op } E_n\text{"} .$$

<u>Bewijs</u>. Zij A_{ij} de verzameling van alle $x \in E$ waarvoor geldt

$$p > i,\ q > i \implies \|f_p(x) - f_q(x)\| < 2^{-j}.$$

Dan is A_{ij} meetbaar, als doorsnede van aftelbaar vele meetbare verzamelingen (st.2.3.4; bij het "nodig" is daar de separabiliteit van B niet gebruikt). Duidelijk is dat $A_{1j} \subset A_{2j} \subset \ldots$, en dat $\lim_{i\to\infty} A_{ij}$ bijna de gehele E is. Neem nu $E_1, E_2, \ldots$ overeenkomstig st.2.3.8. Zij n een natuurlijk getal. Voor elke $x \in E_n$ geldt nu, daar $E_n \subset A_{\varphi_n(j),j}$, dat $\|f_p(x) - f_q(x)\| < 2^{-j}$ voor alle p en q die groter zijn dan $\varphi_n(j)$. Daar $\varphi_n(j)$ onafhankelijk van x is, besluiten we tot uniforme convergentie op E_n.

2.4 Sommeerbare functies $X \to B$.

Definitie 2.4.1. Als f meetbaar is en $\varphi(f) < \infty$ (zie def.2.2.4), dan heet f sommeerbaar.

Stelling 2.4.1. Als f en g sommeerbaar zijn, en α en β complexe constanten, dan zijn $\alpha f + \beta g$ en $\|f\|$ sommeerbaar.

Bewijs: Stelling 2.3.1 en stelling 2.2.2.

Stelling 2.4.2. Nodig en voldoende opdat een meetbare functie f sommeerbaar is, is dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een speciale trapfunctie s bestaat zó dat $\varphi(f-s) < \varepsilon$.

Bewijs. 1°. Nodig. Daar f meetbaar is, is er een trapfunctie t met $\varphi(f-t) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (stelling 2.3.5). Daar $\varphi(f)$ eindig is, is nu ook $\varphi(t)$ eindig.

Zij $t = \Sigma_1^\infty b_i \chi_{E_i}$ (E_i's disjunct). Daar $\Sigma \|b_i\| \mu(E_i) < \infty$ (st.2.2.1), kunnen we n zó bepalen dat $t_n = \Sigma_1^n b_i \chi_{E_i}$ voldoet aan $\varphi(t-t_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$. We mogen veronderstellen dat $b_1, \ldots, b_n$ alle $\neq 0$ zijn. Ook $\varphi(t_n) = \Sigma_1^n \|b_i\| \mu(E_i)$ is eindig, dus $\mu(E_1), \ldots, \mu(E_n)$ zijn eindig.

Als E meetbaar is, met eindige maat, en $\varepsilon' > 0$, dan is er volgens st.1.8.3 een $V = \Sigma_1^m A_j$ (disjuncte som, $A_j \in \Gamma$) te vinden met $\mu(E \Delta V) < \varepsilon'$. Dan heeft elk der A_j's eindige maat, zodat χ_V een speciale trapfunctie is. Daar $|\chi_E - \chi_V| = 1$ op $E \Delta V$ en $=0$ op het complement daarvan, is $|\chi_E - \chi_V|$ een trapfunctie, en $\varphi(|\chi_E - \chi_V|) = \mu(E \Delta V) < \varepsilon'$.

Neem nu $\varepsilon' = \varepsilon / K$, $K = 4(\|b_1\| + \ldots + \|b_n\|)$. We kiezen bij elke E_i een V_i als zoëven aangegeven. Dan is $s = \Sigma_1^n b_i \chi_{V_i}$ een speciale trapfunctie, en $\varphi(t_n - s) \leq \Sigma_1^n \|b_i\| \varphi(\chi_{E_i} - \chi_{V_i}) < \varepsilon/4$. Derhalve is $\varphi(f-s) \leq \varphi(f-t) + \varphi(t-t_n) + \varphi(t_n - s) < \varepsilon$.

2°. Voldoende. Triviaal, want voor een speciale trapfunctie s geldt $\varphi(s) < \infty$.

Opmerking. Als $B = B_r$ (reële getallen) is; en $f(x) \geq 0$ voor alle x, dan kan ook t niet-negatief worden gekozen; s wordt dan automatisch niet-negatief.

Stelling 2.4.3. Als f sommeerbaar is, dan is er één en slechts één element $b \in B$ zó dat voor elke $\varepsilon > 0$ geldt:

$$s \in T^*, \quad \varphi(s-f) < \varepsilon \Longrightarrow \|L(s) - b\| < \varepsilon.$$

(T^* is de collectie der speciale trapfuncties).

Bewijs. Bij elke n (n=1,2,...) kiezen we volgens st.2.4.2 een $s_n \in T^*$ met $\varphi(f-s_n) < 2^{-n}$. Dan is (st.2.2.2) $\varphi(s_n-s_m) < 2^{-n+1}$ als $n < m$. Dus (st.2.2.5) $\| L(s_n-s_m)\| < 2^{-n+1}$, zodat (st.2.2.4) $\| L(s_n)-L(s_m)\| < 2^{-n+1}$ $(n < m)$. Er is derhalve een element $b \in B$ zó dat $\| L(s_m)-b\| \to 0$, want B is volledig. Bovendien vinden we $\| L(s_n)-b\| \leq 2^{-n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$.

Zij vervolgens $\varepsilon > 0$ gegeven, en zij $s \in T^*$, $\varphi(s-f) < \varepsilon$. Kies n zo groot dat $\varphi(f-s_n)$ en $\|L(s_n)-b\|$ beide kleiner zijn dan $a=\frac{1}{2}(\varepsilon - \varphi(s-f))$. Dan is $\varphi(s-s_n) \leq \varphi(s-f)+ \varphi(f-s_n) < \varepsilon -2a+a= \varepsilon -a$, dus $\| L(s-s_n)\| < \varepsilon -a$. Derhalve is

$$\| L(s) - b\| \leq \|L(s-s_n)\| + \| L(s_n) - b \| < \varepsilon .$$

Dat b eenduidig bepaald is blijkt op de bekende wijze: als $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \| b_1-b_2\|$, dan kunnen $\|b_1-L(s)\| < \varepsilon$ en $\|b_2-L(s)\| < \varepsilon$ niet tegelijk gelden.

Definitie 2.4.2. Het in stelling 2.4.3 genoemde element b heet de integraal van f over X; notatie $b=\int_X f \, d\mu$. (Deze integraal is slechts gedefinieerd als f sommeerbaar is.)

Opmerking. Het begrip sommeerbaarheid is gedefinieerd met behulp van de σ-ring Λ , doch b is gedefinieerd met behulp van een semiring Γ (die Λ als Lebesgue-afsluiting heeft). Het is echter niet moeilijk in te zien dat b voor al zulke Γ's hetzelfde is. Daartoe is het voldoende te laten zien dat b niet verandert wanneer we, in plaats van Γ , de Λ beschouwen (wat ook een semiring is). Ter onderscheiding schrijven we even T_Γ^* , T_Λ^* , L_Γ , L_Λ , b_Γ , b_Λ . Er is een $s \in T_\Gamma^*$ $\varphi(s-f) < \varepsilon$ (st.2.4.2). Wegens $\Gamma \subset \Lambda$ is ook $s \in T_\Lambda^*$. Dus volgens st.2.4.3 is

$$\| L_\Gamma (s) - b_\Gamma\| < \varepsilon , \quad \| L_\Lambda (s) - b_\Lambda\| < \varepsilon .$$

Door s als $\Sigma_1^m b_i \chi_{A_i}$ $(A_i \in \Gamma)$ te schrijven, zien we, daar ook $A_i \in \Lambda$, dat $L_\Gamma (s)=L_\Lambda (s)$ (def.2.2.5). We concluderen dus dat $b_\Gamma =b_\Lambda$.

Stelling 2.4.4. Als $s \in T^*$, dan is $\int_X s \, d\mu =L(s)$.

Bewijs. Is ook $s_1 \in T^*$, en $\varphi(s_1-s) < \varepsilon$ dan is $\| L(s_1)-L(s)\| < \varepsilon$ (st.2.2.4 en st.2.2.5). Verder st.2.4.3.

Stelling 2.4.5. Als f sommeerbaar is, dan is $\varphi(f)=\int_X \|f\| \, d\mu$.

Bewijs. Blijkens st.2.4.1 is $\|f\|$ sommeerbaar. Alles speelt zich verder in de Banachruimte B_r der reële getallen af.

Volgens st.2.4.2 is er bij elke $\varepsilon > 0$ een speciale trapfunctie t (met reële waarden) zó dat $\varphi(\|f\| -t) < \varepsilon$, en t kan zo worden ge-

kozen dat $t(x) \geq 0$ voor alle x. Is $t(x)= \Sigma_1^n b_i \chi_{A_i}(x)$, dan is (st.2.2.3) t ook voor te stellen als $t(x)= \Sigma_1^m c_j \chi_{E_j}(x)$ met disjuncte E_j's. Alle c_j's zijn dus ≥ 0. Nu blijkt uit st.2.2.1 dat
$\varphi(t)= \Sigma_1^m c_j \mu(E_j)= \Sigma_1^n b_i \mu(A_i)=L(t)$.

St.2.4.3 leert ons dat $|L(t)-b|<\varepsilon$ is, met $b=\int_X \|f(x)\| d\mu$.
Dus

$$|\varphi(\|f\|)-b| \leq |\varphi(t)-b| + \varphi(\|f\|-t) \leq |L(t)-b| + \varepsilon < 2\varepsilon .$$

Het gestelde volgt uit de willekeur van ε.

Stelling 2.4.6. Als f en g sommeerbaar zijn, en α en β complexe getallen, dan is

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu .$$

Bewijs. Approximeer f en g door speciale trapfuncties s_1 resp. s_2. Pas dan st.2.2.4 en st.2.2.2, 1^o en 3^o toe, in combinatie met st. 2.4.3.

Stelling 2.4.7. Als f sommeerbaar is, dan is $\|\int_X f\, d\mu\| \leq \int_X \|f\|\, d\mu$.

Bewijs: Approximeer f door een speciale trapfunctie s, en pas st. 2.2.5 toe.

Stelling 2.4.8. Is $f(x)=0$ (p.p.), dan is $\int_X f\, d\mu = 0$.

Bewijs. $0 \in T^*$, en $\varphi(f-0)=0$ (st.2.2.2, 5^o) dus voor elke $\varepsilon > 0$ is $\|\int_X f\, d\mu - L(0)\| < \varepsilon$. Daar $L(0)=0$, volgt het gestelde.

Definitie 2.4.3. Zij E meetbaar, $f \in B^E$. $g(x)$ is gedefinieerd als $f(x)$ voor $x \in E$, en als 0 voor $x \in X-E$. Nu heet f sommeerbaar over E als g sommeerbaar is, en $\int_E f(x) d\mu$ betekent $\int_X g(x) d\mu$.

Stelling 2.4.9. Is $b \in B$, E meetbaar, $\mu(E) < \infty$, $f(x)=b$ op E, dan is f sommeerbaar over E, en

$$\int_E f(x) d = b\, \mu(E).$$

Bewijs. Het linkerlid is de integraal van $b\, \chi_E(x)$ over X, dus $= L_\Lambda(b\, \chi_E)$ (st.2.4.4) (vgl. opm.na def.2.4.2), en dat is $b\, \mu(E)$ (def. 2.2.5).

2.5. Meetbare reële functies. Op de σ-finiete maatruimte X beschouwen we functies waarvan de waarden gegeneraliseerd reële getallen zijn.

Definitie 2.5.1. Als f een gegeneraliseerde reële functie is, dan definiëren we: $E_\infty(f)= \{x \mid f(x)= +\infty\}$, $E_{-\infty}(f)=\{x \mid f(x)=-\infty\}$, $E_e(f)=\{x \mid -\infty < f(x) < \infty\}= X-E_\infty(f)-E_{-\infty}(f)$.

Definitie 2.5.2. De gegeneraliseerd reële functie f heet meetbaar als $E_\infty(f)$ en $E_{-\infty}(f)$ meetbaar zijn (dus ook $E_e(f)$), terwijl f meetbaar is op $E_e(f)$ (d.w.z. dat $\chi.f$ meetbaar is, als χ de karakteristieke functie van $E_e(f)$ is; meetbaarheid van eindige reële functies is gedefinieerd in def.2.3.1, als we nemen $B=B_r=$ Banachruimte der reële getallen.

Stelling 2.5.1. Nodig en voldoende opdat de gegeneraliseerd reële functie f meetbaar is, is dat voor elk eindig getal a geldt dat $\{x \mid f(x) < a\}$ meetbaar is.

Bewijs. Nodig. Zij f meetbaar, en zij χ de karakteristieke functie van E_e. Uit het gevolg van st.2.3.4 (merk op dat B_r separabel is: de rationale getallen liggen overal dicht) blijkt dat voor elke eindige a geldt dat $\{x \mid \chi(x)f(x) < a\}$ meetbaar is. Door hieraan $E_{-\infty}$ toe te voegen, ontstaat $\{x \mid f(x) < a\}$, wat dus ook meetbaar is.

Voldoende: Zij $\{x \mid f(x) < a\}$ meetbaar voor elke a. Door a naar $-\infty$ resp. $+\infty$ te laten gaan zien we dat $E_{-\infty}$ en $E_{-\infty}+E_e$ meetbaar zijn, dus ook E_e en $E_{+\infty}$ zijn meetbaar. Is $-\infty < b < a < \infty$, dan is ook $\{x \mid b+n^{-1} \quad f(x) < a\}$ meetbaar voor elke n, dus $\{x \mid f(x) \in J\}$ is meetbaar voor elk open interval J. Daaruit volgt weer dat χf meetbaar is (st.2.3.4).

Definitie 2.5.3. Zij f een gegeneraliseerd reële functie, en zij R de maatruimte der reële getallen met Lebesgue-maat. Onder de ordinatenverzameling V_f van f verstaan we de in $X \times R$ gelegen verzameling

$$\{(x,y) \mid x \in X, \quad y \in R, \quad y < f(x)\}$$

(als $f(x) = -\infty$, dan is er geen enkele y die aan $y < f(x)$ voldoet). Verder stelt V_f^* de afgeknotte ordinatenverzameling voor:
$V_f^* = \{(x,y) \mid x \in X, y \in R, \ 0 < y < f(x)\}$.

De productmaat in $X \times R$ zullen we door ν voorstellen.

Stelling 2.5.2. f is dan en slechts dan meetbaar als V_f meetbaar is.

Bewijs. Neem aan dat f meetbaar is. V_f is de vereniging van $E_\infty \times R$ en $(E_e \times R)V_g$, waarin $g = \chi_e f$. Het is dus voldoende aan te tonen dat V_g meetbaar is. g is overal eindig. Daar g meetbaar is, is er (st.2.3.2) bij elke n een reële trapfunctie t_n^* met $\|g(x)-t_n^*(x)\| < n^{-1}$ (p.p.). Nemen we $t_n(x) = t_n^* - n^{-1}$, dan is $t_n(x) < g(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ en $t_n(x) \to g(x)$ voor elke x, met uitzondering van een verzameling N met maat 0. Zij $N' = N \times R$. Elke V_{t_n} is meetbaar (volgt uit def.2.2.2), terwijl $V_{t_n} - N' \to V_g - N'$. Daar ook N' meetbaar is, blijkt dat $V_g - N'$

meetbaar is. Bovendien is $\nu(N')=0$, zodat ook V_g meetbaar is.

Zij omgekeerd V_f meetbaar. Dan geldt (st.1.9.7) voor bijna elke $y \in R$ dat $\{x \mid f(x) \leq y\}$ meetbaar is. Is $a \in R$, dan is er dus bij elke n $(n=1,2,\dots)$ een y $(a-n^{-1} < y < a)$ waarvoor die verzameling meetbaar is. Nemen we nu de limiet voor $n \to \infty$, dan zien we dat ook $\{x \mid f(x) < a\}$ meetbaar is.

Definitie 2.5.4. De gegeneraliseerd reële functie f heet sommeerbaar als $E_{-\infty}$ en E_∞ de maat 0 hebben, terwijl f sommeerbaar is op E_e.

Onder $\int_X f(x)\,d\mu$ verstaan we $\int_X f(x)\,\chi_{E_e}(x)d\mu$. We hebben daarbij dus op E_∞ de waarde ∞ van $f(x)$ door 0 vervangen. Hadden we op E_∞ andere eindige waarden aan $f(x)$ toegekend, dan hadden we dezelfde waarde voor de integraal gekregen (st.2.4.8).

Is f sommeerbaar volgens def.2.5.4, dan is f ook meetbaar (def.2.5.2).

Stelling 2.5.3. Zij $0 \leq f(x) < \infty$ voor alle x. Dan zijn (1) en (2) equivalent:

(1) f is sommeerbaar.

(2) V_f^* is meetbaar, en $\nu(V_f^*) < \infty$.

Als (1) of (2) geldt (zodat dus beide gelden), dan is $\nu(V_f^*)=\int_X f\,d\mu$.

Bewijs. Zowel uit (1) als uit (2) volgt dat f meetbaar is. Kies een getal $\eta > 1$, en definieer $E_k=\{x \mid \eta^k \leq f(x) < \eta^{k+1}\}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$. Dan zijn de E_k's meetbaar (st.2.5.1), en $E_\infty + \Sigma_{-\infty}^{\infty} E_k$ is een disjuncte som.

Zij $F_k=\{y \mid 0< y < \eta^k\}$, $F_\infty=\{y \mid 0 \leq y < \infty\}$, Dan is

$$E_\infty \times F_\infty + \Sigma_{-\infty}^{\infty} E_k \times F_k \subset V_f^* \subset E_\infty \times F_\infty + \Sigma_{-\infty}^{\infty} E_k \times F_{k+1}$$

Als (1) geldt, dan is $\mu(E_\infty)=0$, dus $\nu(E_\infty \times F_\infty)=0$. Als (2) geldt, dan is volgens $E_\infty \times F_\infty \subset V_f^*$ ook $\mu(E_\infty)=0$, dus weer $\nu(E_\infty \times F_\infty)=0$. Zonder beperking kunnen we dus aannemen dat E_∞ leeg is (vgl. st.2.4.8).

Zij t de trapfunctie $t=\Sigma_{-\infty}^{\infty}\eta^k \chi_{E_k}$. Dan is (st.2.2.1)

$$\varphi(t)=\Sigma_{-\infty}^{\infty}\eta^k\,\mu(E_k)=\Sigma_{-\infty}^{\infty}\nu(E_k \times F_k) \leq \nu(V_f^*) \leq \varphi(\eta t)=\eta\,\varphi(t).$$

Verder is $t(x) \leq f(x) \leq \eta t(x)$ voor alle x, zodat $\varphi(t) \leq \varphi(f) \leq \eta\varphi(t)$ (st.2.2.2, 6°). Dus

$$\varphi(f) \leq \eta\,\nu(V_f) \text{ en } \nu(V_f^*) \leq \eta\,\varphi(f).$$

Hieruit volgt, wegens de willekeur van η, dat $\varphi(f)$ en $\nu(V_f^*)$ gelijk zijn. Is één van beide eindig, dan is de andere het ook. En $\varphi(f)$ stemt met de integraal van f overeen (st.2.4.5).

In def.2.5.3 hebben we V_f gedefinieerd met $y < f(x)$. We hadden even goed $y \leq f(x)$ kunnen nemen, hetgeen blijkt uit

Stelling 2.5.4. Is V_f meetbaar, dan is $\nu(W_f)=0$, waarin $W_f = \{(x,y) \mid y \in R,\ y=f(x)\}$. Is omgekeerd $\nu(W_f)=0$ en zijn E_∞ en $E_{-\infty}$ meetbaar, dan is V_f meetbaar.

Bewijs. Zij V_f meetbaar. Dan is f meetbaar, dus ook $f+n^{-1}$ meetbaar $(n=1,2,\ldots)$. Dus is $V_{f+n^{-1}}$ meetbaar. Daar $W_f = (\lim V_{f+n^{-1}}) - V_f$, is ook W_f meetbaar. Dat dan $\nu(W_f)=0$ is, volgt bijv. uit st.1.9.8.

Zij omgekeerd $\nu(W_f)=0$. Dan is (op grond van de definitie van uitwendige maat in $X \times R$ bij gegeven $n > 0$ de gehele W_f te overdekken door een som $K = \Sigma_1^\infty E_i \times (a_i, b_i]$, met $\nu(K) \leq \Sigma_1^\infty \mu(E_i)(b_i - a_i) < n^{-1}$. Laat $r_1, r_2, r_3, \ldots$ een aftelling zijn van de rationale positieve getallen, en $K_j = \Sigma_1^\infty E_i \times (a_i - r_j, b_i - r_j]$. Dan is

$$\Sigma_1^\infty K_j - K \subset V_f \subset \Sigma_1^\infty K_j \ .$$

Dus $S_n \subset V_f \subset T_n$, S_n en T_n meetbaar, $\nu(T_n - S_n) < n^{-1}$. Stel $\Sigma_1^\infty S_i = S$, $T_1 T_2 \ldots = T$. Dan zijn S en T meetbaar, en $\nu(T-S) < n^{-1}$ voor elke n. Dus $\nu(T-S)=0$, dus $\nu(V_f - S)=0$, dus V_f meetbaar.

Definitie 2.5.5. Is $0 \leq f(x) \leq \infty$ (alle x) en f(x) meetbaar, doch niet sommeerbaar, dan wordt aan $\int_X f(x)d\mu$ de waarde ∞ toegekend.

Volgens st.2.5.2 en st.2.5.3 is in dat geval ook $\nu(V_f^*) = \infty$, zodat voor alle meetbare gegeneraliseerde niet-negatieve functies geldt dat de integraal gelijk is aan $\nu(V_f^*)$. De integraal is oneindig als $\mu(E_\infty) > 0$, maar ook als $\mu(E_\infty)=0$ is doch f niet sommeerbaar over E_e.

Is B een Banachruimte, en $f \in B^X$, dan is $\varphi(f) = \infty$ als f meetbaar is doch niet sommeerbaar. Daaruit volgt dat st.2.4.5 kan worden uitgebreid tot

Stelling 2.5.5. Is $f \in B^X$, f meetbaar, dan is $\varphi(f) = \int_X \|f\| d\mu$.

De voorafgaande stellingen laten zich onmiddellijk uitbreiden tot het geval dat we functies beschouwen die slechts op een gegeven meetbare verzameling E meetbaar resp. sommeerbaar zijn. Men kan zulke stellingen trouwens direct verkrijgen door op te merken dat (E, Λ', μ) een maatruimte is, waarbij $\Lambda' = \{A \mid A \subset E,\ A \in \Lambda\}$.

Stelling 2.5.3 stelt ons in staat om enkele integraalstellingen op zeer eenvoudige wijze te verkrijgen.

Stelling 2.5.6. 1^o. Is $0 \leq f(x) \leq \infty$ (alle x), f meetbaar en $\int_X f(x)d\mu = 0$, dan $f(x)=0$ (p.p.).

2^o. Is $f \in B^X$, f meetbaar, en $\int_X \|f\|\, d\mu = 0$, dan $f(x)=0$ (p.p.).

Bewijs: 1^o. Daar V_f^* meetbaar is, met maat 0, heeft bijna elke verticale doorsnede de maat 0 (st.1.9.7). De doorsnede $(V_f^*)_x$ is echter het interval $0 < y < f(x)$, en de maat daarvan is $f(x)$.

2^o. Uit het gegeven en uit 1^o volgt dat $\|f(x)\| = 0$ (p.p.), dus $f=0$ (p.p.).

Stelling 2.5.7. Is $0 \leq f(x) \leq \infty$ (alle x), $X = \Sigma_1^\infty E_i$ (E_i meetbaar, disjuncte som), dan is

$$\int_X f(x)\, d\mu = \Sigma_{i=1}^\infty \int_{E_i} f(x)d\mu .$$

Bewijs. De integraal over E_i is de ν-maat van $V^*(f) \cap (E_i \times R)$, enz.

Stelling 2.5.8. Is $0 \leq f(x) \leq \infty$ (alle x), f sommeerbaar, $E, E_1, E_2, \ldots$ meetbaar, $E_n \to E$ $(n \to \infty)$, dan is

$$\int_{E_n} f(x)d\mu \to \int_E f(x)d\mu .$$

Bewijs. Daar $V^*(f)$ eindige maat heeft, mogen we op de verzamelingen $V^*(f) \cap (E_n \times R)$ en $V^*(f) \cap (E \times R)$ st.1.5.5 toepassen.

Stelling 2.5.9. (zg. Lemma van Fatou). Zij $0 \leq f_n(x) \leq \infty$ (alle x; $n=1,2,\ldots$), en laat alle f_n meetbaar zijn. Dan is

$$\int_X \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int_X f_n\, d\mu .$$

Bewijs. Zij $\liminf f_n = g$. g is meetbaar (uit $g(x) > a$ volgt $f_n(x) > a$ o.d.d. en omgekeerd). Merk op dat V_g^* en $\liminf V_{f_n}^*$ hoogstens een deel van W_g verschillen (zie st.2.5.4); dit verschil heeft dus de ν-maat 0. Pas nu st.1.5.3 toe op $V_{f_n}^*$.

Stelling 2.5.10. Is E meetbaar, dan is $\int_E d\mu = \mu(E)$.

Bewijs. De V^* van de karakteristieke functie van E is $E \times (0,1)$, zodat de ν-maat ervan gelijk is aan $\mu(E)$.

<u>Stelling 2.5.11.</u> Is $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$, en $f_n(x) \to f(x)$ voor alle x, terwijl $f_1, f_2, \ldots$ meetbaar zijn, dan is

$$\int_X f_n(x)d\mu \to \int_X f(x)d\mu \,.$$

<u>Bewijs.</u> $V^*_{f_n}$ nadert niet-dalend tot V^*_f, zodat de stelling volgt uit st.1.5.1.

<u>Stelling 2.5.12.</u> Zij voor $i=1,2,\ldots, f_i(x)$ meetbaar, en $0 \leq f_i(x) \leq \infty$. Dan geldt

$$\Sigma_1^\infty \int_X f_i(x)d\mu = \int_X \Sigma_1^\infty f_i(x)d\mu \,.$$

<u>Bewijs.</u> $F_n(x) = \Sigma_1^n f_i(x)$ nadert niet-dalend naar $F(x) = \Sigma_1^\infty f_i(x)$, zodat we de vorige stelling kunnen toepassen. We behoeven daartoe slechts te bewijzen dat bij een eindige som het integraalteken met het somteken verwisseld mag worden. Dit is duidelijk als één der f_i's niet sommeerbaar is, want dan zijn beide leden oneindig groot. Zijn $f_i, \ldots, f_n$ wèl sommeerbaar, dan kunnen we st.2.4.6 toepassen (na eerst de dunne verzameling waarop niet alle f_i's eindig zijn, te hebben weggenomen).

2.6. <u>De stelling van Lebesgue.</u> We keren weer terug naar functies $f \in B^X$. We zullen eerst een kleine uitbreiding geven van het begrip sommeerbaarheid, door ook functies te beschouwen die niet overal gedefinieerd zijn.

<u>Definitie 2.6.1.</u> Laat f(x) gedefinieerd en $f \in B$ zijn voor $x \in X-N$, waarbij $\mu(N)=0$. Dan heet f nog sommeerbaar als f slechts sommeerbaar is over X-N, en onder $\int_X f(x)d\mu$ wordt $\int_{X-N} f(x)d\mu$ verstaan.

Wanneer tòch achteraf f op N gedefinieerd zou worden, zou f sommeerbaar blijven (en niet sommeerbaar worden als hij niet sommeerbaar was), en de integraal zou niet veranderen (st.2.4.8).

Ga na dat alle stellingen uit 2.4 en 2.5 geldig blijven bij deze nieuwe opvatting van sommeerbaarheid en integraal.

<u>Definitie 2.6.2.</u> Zij E meetbaar, $f_n \in B^E$, $f \in B^E$. We zeggen dat f_n op E gemajoreerd convergeert naar f als er op E een niet-negatieve sommeerbare functie g is met $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ (p.p. op E), terwijl voor bijna elke $x \in E$ geldt $f_n(x) \to f(x)$.

<u>Stelling 2.6.1.</u> (Lebesgue). Is f_k sommeerbaar op E $(k=1,2,\ldots)$, en convergeert f_k op E gemajoreerd naar f, dan is ook f sommeerbaar op E, en

$$\int_E f_k(x)d\mu \to \int_E f(x)d\mu \ .$$

Bewijs. Zonder beperking kunnen we E=X nemen. We hebben $\|f_k(x)\| \leq g(x)$ (p.p.), en $g(x)$ is sommeerbaar. Daar $f_k \to f$ (p.p.), is f meetbaar. Ook is $\|f\| \leq g(x)$ (p.p.), dus f sommeerbaar (zie bijv. st.2.2.2, 6^o, of merk op dat $V^*_{\|f\|} \subset V^*_g$). We kunnen nu met $f_k - f$ gaan werken, zodat het voldoende is het geval te beschouwen dat $f_k \to 0$.

Daar X σ-finiet is, is $X = \lim E^{(m)}$, $E^{(m)}$ meetbaar, $\mu(E^{(m)}) < \infty$. Daar $X - E^{(m)} \to 0$, kunnen we bij gegeven ε de m zo groot kiezen dat (zie st.2.5.8)

$$\int_{X-E^{(m)}} g(x)d\mu < \tfrac{1}{2}\varepsilon \ .$$

Op $E^{(m)}$ en de rij $f_1, f_2, \ldots$ passen we st.2.3.9 (Egoroff) toe. We hebben dan $E_n \subset E^{(m)}$, $E_n \to E^{(m)} - N$, $\mu(N) = 0$, en op elke $E^{(n)}$ convergeert f_k uniform naar 0. Nu passen we nog eens st.2.5.8 toe: we kiezen n zo dat

$$\int_{E^{(m)}-N-E_n} g(x)d\mu < \tfrac{1}{4}\varepsilon \ .$$

Tenslotte kiezen we k_o zó dat voor $k > k_o$ geldt

$$\| f_k(x)\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon \ / \ \mu(E^{(m)}) \qquad (x \in E_n) \ .$$

Uit st.2.2.2,6^o, st.2.4.6 en st.2.5.10 volgt nu dat

$$\int_X \| f_k(x)\| \, d\mu < \varepsilon \qquad (k > k_o),$$

zodat volgens st.2.4.7 geldt dat $\int_X f_k(x)d\mu \to 0$.

Stelling 2.6.2. Zij $X = \Sigma_1^\infty E_i$ (disjuncte som, E_i's meetbaar), en f sommeerbaar, dan is

$$\int_X f(x)d\mu = \Sigma_1^\infty \int_{E_i} f(x)d\mu \ .$$

Bewijs. Zij $f_n(x) = \Sigma_1^n \chi_{E_k}(x)f(x)$. Dan convergeert f_n naar f, en wordt door $\|f\|$ gemajoreerd.

Stelling 2.6.3. Laat $f_1, f_2, \ldots$ sommeerbaar zijn over X. Onderstel dat

(1) $$\Sigma_1^\infty \int_X \| f_i(x)\| \, d\mu < \infty \ .$$

Dan geldt

(2) $F(x) = \Sigma_1^\infty \|f_i(x)\|$ is sommeerbaar.

(3) $\Sigma_1^\infty f_i(x)$ is bijna overal absoluut convergent, en de som van de

reeks is sommeerbaar.

(4) $\quad \Sigma_1^\infty \int_X f_i(x)d\mu$ is absoluut convergent, en $= \int_X \Sigma_1^\infty f_i(x)d\mu$.

(5) $\quad \Sigma_1^\infty \int_X \|f_i(x)\|\ d\mu = \int_X \Sigma_1^\infty \|f_i(x)\|\ d\mu$.

Is (2) gegeven i.p.v. (1), dan kan men (1), (3), (4), (5) bewijzen.

Samenvattende kan men zeggen: in (4) heeft alles betekenis, en de gelijkheid geldt, zodra één der leden een (eindige) betekenis krijgt wanneer men f door $\|f\|$ vervangt. ("Bij absolute convergentie is alles geoorloofd". Ook als alle f_i's gegeneraliseerd niet-negatief zijn, is alles geoorloofd, volgens st.2.5.12).

Bewijs. Uit st.2.5.12 blijkt dat (1) en (2) equivalent zijn, en (5) tot gevolg hebben. We merken nog op dat (2) impliceert dat $\Sigma_1^\infty \|f_i(x)\|$ bijna overal convergeert. Derhalve convergeert $\Sigma_1^\infty f_i(x)$ bijna overal (st.2.1.4).

De convergentie p.p. van $\Sigma_1^n f_i$ naar $\Sigma_1^\infty f_i$ is gemajoreerd door F, want $\| \Sigma_1^n f_i \| \leq \Sigma_1^n \|f_i\| \leq F$, en F is sommeerbaar. Uit st.2.6.1 volgt nu dat $\int \Sigma_1^\infty f_i(x)$ sommeerbaar is, en dat $\int \Sigma_1^n f_i d\mu \to \int \Sigma_1^\infty f_i d\mu$. Tenslotte volgt nog uit (1) (met gebruik van st.2.4.7), dat het linkerlid van (4) absoluut convergeert.

Met behulp van st.2.6.3 geven we een verscherping van st.2.4.2.

Stelling 2.6.4. Zij $f \in B^X$, f sommeerbaar. Dan is er een rij $s_1, s_2, \ldots$ van speciale trapfuncties zó dat $f(x) = \Sigma_1^\infty s_i(x)$ (p.p.) en $\Sigma_1^\infty \int_X \|s_i(x)\|\ d\mu < \infty$.

Bewijs. Volgens st.2.4.2 is er bij elke i een speciale trapfunctie t_i zó dat $\int \|f(x)-t_i(x)\|\ d\mu < 2^{-i}$. Neem $s_1=t_1$, $s_2=t_2-t_1$, $s_3=t_3-t_2, \ldots$. Dan is $\int_X \|s_i(x)\|\ d\mu < 2^{2-i}$ $(i=1,2,\ldots)$. Volgens st.2.6.3 is nu $\Sigma_1^\infty s_i(x)$ bijna overal convergent naar een sommeerbare functie $S(x)$. Verder is

$$\int_X \| S(x)-t_i(x)\|\ d\mu = \int_X \| \Sigma_{i+1}^\infty s_k(x)\|\ d\mu \leq \int_X \Sigma_{i+1}^\infty \| s_k(x)\|\ d\mu =$$
$$= \Sigma_{i+1}^\infty \int_X \|s_k(x)\|\ d\mu < 2^{1-i}+2^{-i}+2^{-1-i}+\ldots = 2^{2-i}.$$

Derhalve is $\int_X \| S(x)-f(x)\|\ d\mu < 2^{-i}+2^{2-i}$ $(i=1,2,\ldots)$. Deze integraal is dus nul, zodat $S(x)=f(x)$ (p.p.) (st.2.5.6).

2.7. <u>De stelling van Fubini.</u> Deze heeft betrekking op het herleiden van meervoudige integralen tot herhaalde. Laat (X, Λ_1, μ_1) en (Y, Λ_2, μ_2) σ-finiete maatruimten zijn; Λ_1 en Λ_2 zijn de klassen van meetbare verzamelingen. Het cartesiche product is $(X \times Y, \Lambda_1 \times \Lambda_2, \mu)$ $(\mu = \mu_1 \times \mu_2)$. B is weer een Banachruimte. Een meervoudige integraal is de integraal van een functie $f(x,y)$ $(f \in B^{X \times Y})$ over een meetbare verzameling E uit $X \times Y$. Aangezien we deze kunnen interpreteren als de integraal van $\chi_E . f$ over de gehele $X \times Y$, kunnen we ons beperken tot integralen over de gehele $X \times Y$.

<u>Stelling 2.7.1.</u> Zij $f \in B^{X \times Y}$, f sommeerbaar. Dan is voor bijna elke $x \in X$:

(1) $f(x,y)$ sommeerbaar over Y.

En als $\varphi(x) = \int_Y f(x,y) d\mu_2$ (zodat $\varphi(x)$ voor bijna alle x gedefinieerd is), dan is $\varphi(x)$ sommeerbaar, en

(2) $$\int_X \varphi(x) d\mu_1 = \int_{X \times Y} f(x,y) d\mu \ .$$

(Het linkerlid kan ook geschreven worden als $\int_X d\mu_1 \int_Y f \, d\mu_2$, hetgeen betekent $\int_X \{ \int_Y f \, d\mu_2 \} d\mu_1$).

<u>Bewijs.</u> $\Gamma = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ is een semiring die de productmaatruimte voortbrengt. Bij deze Γ definiëren we de speciale trapfuncties in $X \times Y$ (def.2.2.3).

We nemen nu eerst bijzondere gevallen:

1°. $f(x,y)=0$ bijna overal in $X \times Y$. Zij E de meetbare verzameling waarop $f \neq 0$. Volgens st.1.9.7 is $\mu_2(E_x)=0$ voor bijna alle x, zodat $\varphi(x)=0$ (p.p.) En in (2) blijken nu beide leden 0 te zijn.

2°. Zij $f = b \chi_E$, waarin $E = E_1 \times E_2$, $E_1 \in \Lambda_1$, $E_2 \in \Lambda_2$, $\mu(E) < \infty$, terwijl b een constante uit B is. We mogen onderstellen $\mu(E) > 0$ (anders is 1° van toepassing). Uit $0 < \mu(E) < \infty$ volgt nu dat $\mu_1(E_1) < \infty$, $\mu_2(E_2) < \infty$. Is $x \in E_1$, dan is $f(x,y)$, beschouwd als functie van y, gelijk aan $b \chi_{E_2}(y)$. Deze is sommeerbaar daar $\mu_2(E_2) < \infty$ is. Als $x \notin E_1$ dan is $f(x,y)$, weer beschouwd als functie van y, identiek nul, dus sommeerbaar. Aan (1) is dus voldaan. We vinden dat $\varphi(x) = b \chi_{E_1}(x) \mu_2(E_2)$, waaruit nu (2) volgt (vgl.st.2.4.9).

3°. Is f een speciale trapfunctie, dan kunnen we (1) en (2) bewijzen door f te splitsen in functies van het onder 2° behandelde type (pas st.2.4.1 en st.2.4.6 toe).

Neem nu een willekeurige sommeerbare functie f. Volgens st. 2.6.4 is $f = \Sigma_1^\infty s_i(x,y)$ (p.p. in $X \times Y$), $\Sigma_1^\infty \int_{X\times Y} \|s_i(x,y)\| \, d\mu < \infty$. Voor elke s_i zijn (1) en (2) al bewezen, dus

$$\int_X d\mu_1 \int_Y s_i(x,y) d\mu_2 = \int_{X\times Y} s_i(x,y) d\mu \, .$$

We willen beide leden sommeren over i (i=1,2,3,...) en in beide leden de sommatie en integraties verwisselen. Daartoe zullen we eerst de absolute convergentie vast. Elke $\|s_i(x,y)\|$ is een speciale trapfunctie (ga dit na), zodat volgens 3°:

$$\int_X d\mu_1 \int_Y \|s_i(x,y)\| \, d\mu_2 = \int_{X\times Y} \|s_i(x,y)\| \, d\mu \, .$$

We weten reeds dat het rechterlid, gesommeerd over i, een convergente reeks oplevert. Daaruit volgt nu hetzelfde voor het linkerlid, en dus (st.2.5.12) dat $\int_X \{ \Sigma_1^\infty \int_Y \|s_i(x,y)\| \, d\mu_2 \} d\mu_1 < \infty$, en (nog eens volgens st.2.5.12) dat $\int_X \{ \int_Y \Sigma_1^\infty \|s_i(x,y)\| \, d\mu_2 \} d\mu_1 < \infty$.

Het laatste garandeert dat voor bijna elke x geldt $\int_Y \Sigma_1^\infty \|s_i(x,y)\| \, d\mu_2 < \infty$. Volgens st.2.6.3 convergeert bij zo'n waarde van x de reeks $\Sigma_1^\infty s_i(x,y)$ voor bijna alle y, terwijl de som sommeerbaar is over y, en

$$\Sigma_1^\infty \int_Y s_i(x,y) d\mu_2 = \int_Y \Sigma_1^\infty s_i(x,y) d\mu_2 .$$

Noem $\int_Y s_i(x,y) d\mu_2 = \phi_i(x)$ (p.p. gedefinieerd). Dan is $\phi_i(x)$ sommeerbaar en $\Sigma_1^\infty \int_X \| \phi_i(x) \| \, d\mu_1 \leq \Sigma_1^\infty \int_X \{ \int_Y \| s_i(x,y) \| d\mu_2 \} d\mu_1 < \infty$. Dus volgens st.2.6.3 is $\Sigma_1^\infty \phi_i(x)$ bijna overal convergent, met sommeerbare som, en $\Sigma_1^\infty \int_X \phi_i(x) d\mu_1 = \int_X \Sigma_1^\infty \phi_i(x) d\mu_1$. Resumerende:

$$\Sigma_1^\infty \int_X \{ \int_Y s_i(x,y) d\mu_2 \} d\mu_1 = \int_X \{ \int_Y \Sigma_1^\infty s_i(x,y) d\mu_2 \} d\mu_1 ;$$

voor bijna elke x geldt dat $s_i(x,y)$ en $\Sigma_1^\infty s_i(x,y)$ sommeerbaar zijn over y, en de integralen over Y zijn sommeerbare functies van x.

Het linkerlid is gelijk aan $\Sigma_1^\infty \int_{X\times Y} s_i(x,y) d\mu$. Ook hier is wegens de absolute convergentie de sommatie verwisselbaar met de integratie.

We hebben nu de stelling bewezen met $\Sigma_1^\infty s_i(x,y)$ in plaats van f(x,y). Maar het verschil van deze twee is een functie die bijna overal in $X \times Y$ nul is. En daarvoor was de stelling reeds onder 1° bewezen.

<u>Stelling 2.7.2.</u> Zij $0 \leq f(x,y) < \infty$, f meetbaar op $X \times Y$. Dan is voor bijna elke x de functie f(x,y) een meetbare functie van y. Verder

is $\int_Y f(x,y)d\mu_2$ (die dus voor bijna alle x gedefiniëer is) een meetbare functie van x, en

$$\int_X d\mu_1 \int_Y f(x,y)d\mu_2 = \int_{X\times Y} f(x,y)d\mu \ .$$

Bewijs. We construeren afgeknotte functies f_n. Zij voor elke n, E_n een meetbaar deel van $X \times Y$, met $\mu(E_n) < \infty$, $\lim E_n = X \times Y$. Neem nu

$$f_n(x) = \chi_{E_n}(x) \ . \ \min(f(x),n).$$

Dan is f_n overal eindig, en sommeerbaar: $\int_{X\times Y} f_n \, d\mu \leq n.\ \mu(E_n)$, zodat we st.2.7.1 daarop mogen toepassen (met $B=B_r$):

(1) $$\int_X d\mu_1 \int_Y f_n(x,y)d\mu_2 = \int_{X\times Y} f_n(x,y)d\mu \ .$$

We merken verder op dat $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$, $f = \lim f_n$. Daaruit volgt, via st.2.5.3 en st.1.5.1, dat $\int_{X\times Y} f_n d\mu \to \int_{X\times Y} f \, d\mu$. In het linkerlid van (1) kunnen we op overeenkomstige wijze te werk gaan. Voor bijna elke x is $f_n(x,y)$ meetbaar (st.2.7.1) en (daar f_n stijgend tot f nadert) dus $\int_Y f_n(x,y)d\mu_2 \to \int_Y f(x,y)d\mu_2$. Dit laatste is meetbaar (limiet v.e. rij meetbare functies). Daar $\int_Y f_n d\mu_2$ stijgend tot $\int_Y f \, d\mu_2$ nadert, nadert nu het linkerlid van (1) tot $\int_X d\mu_1 \int_Y f \, d\mu_2$.

Stelling 2.7.3. Is E een meetbaar deel van $X \times Y$, en $E_x = \{ y \mid (x,y) \in E \}$, dan is E_x voor bijna elke x meetbaar; $\mu_2(E_x)$ is een meetbare functie van x, en

$$\int_X \mu_2(E_x)d\mu_1 = \mu(E).$$

Bewijs. Pas st.2.7.2 toe met $f = \chi_E$.

Merk op dat st.1.9.7 en st.1.9.8 direct uit st.2.7.3 volgen.

Stelling 2.7.4. De conclusies van st.2.7.1 blijven gelden als het gegeven (1) wordt vervangen door: f is meetbaar, en $\int_X d\mu_1 \int_Y \| f(x,y) \| d\mu_2 < \infty$.

Bewijs. Met st.2.7.2 concluderen we dat $\int_{X\times Y} \| f(x,y) \| \, d\mu < \infty$ is; samen met de meetbaarheid van f betekent dit dat f sommeerbaar is over $X \times Y$.

Stelling 2.7.5. We geven nu een samenvatting: (stelling van Fubini). Zij $f \in B^{X\times Y}$ of f gegeneraliseerd niet-negatief reëel. In het eerste geval eisen we dat één der uitdrukkingen

$$\int_X \{ \int_Y \|f(x,y)\| \, d\mu_2 \} \, d\mu_1, \int_Y \{ \int_X \| f(x,y)\| \, d\mu_1 \} \, d\mu_2, \int_{X\times Y} \|f(x,y)\| d\mu$$

eindig is, en dat f meetbaar is. In het tweede geval eisen we slechts dat f meetbaar is. Onder deze veronderstellingen geldt:

$$\int_X d\mu_1 \int_Y f(x,y)d\mu_2 = \int_Y d\mu_2 \int_X f(x,y)d\mu_1 = \int_{X\times Y} f(x,y)d\mu \ .$$

De integralen $\int_Y f \, d\mu_2$ en $\int_X f \, d\mu_1$ hebben voor bijna alle x resp. y betekenis. De herhaalde integralen en de dubbelintegralen hebben betekenis. (Een integraal $\int_X f \, d\mu$ over een maatruimte (X, Λ, μ) heeft betekenis

in het geval $f \in B^X$: als f(x) p.p. gedefiniëerd is, en sommerbaar is (zie def.2.6.1),

in het geval $0 \leq f(x) \leq \infty$: als f(x) meetbaar is volgens def. 2.5.2 (de integraal kan dan ∞ zijn).)

<u>Opmerking 1.</u> Bij cartesische producten van meer dan twee maatruimten kan men door herhaalde toepassing van st.2.7.5 het met st.2.7.5 overeenkomende resultaat verkrijgen. Bedenk nl. dat bijv. $X\times Y\times Z\times W$ als product van twee maatruimten kan worden geschreven: bijv. $X\times(Y\times Z\times W)$ of $(X\times Y)\times(Z\times W)$. Er geldt bijv. (in beknopte notatie)

$$\int_{X\times Y\times Z\times W} = \int_X \int_{Y\times W} \int_Z = \int_{X\times Z} \int_{Y\times W} = \int_{X\times Y\times W} \int_Z \quad \text{enz.}$$

mits f meetbaar is en of $0 \leq f \leq \infty$, of f zijn waarden in B heeft en één dezer uitdrukkingen absoluut convergeert (d.w.z. eindig blijft als f door $\|f\|$ wordt vervangen.

<u>Opmerking 2.</u> De stellingen over integratie term voor term (st. 2.5.12 en st.2.6.3) zijn bijzondere gevallen van de stelling van Fubini. Men neme daartoe voor Y een aftelbare ruimte. Λ_2 is de collectie van alle deelverzamelingen van Y, en $\mu_2(E)$= aantal elementen van E als $E \in \Lambda_2$. In plaats van $\int_Y f(y)d\mu_2$ is dan $\sum_{y\in Y} f(y)$ te schrijven. Dat f sommeerbaar is over y betekent dat $\Sigma \|f(y)\|$ convergeert.

2.8. <u>Riemann-integraal.</u> In onze taal kunnen we de R-integraal als volgt definiëren.

<u>Definitie 2.8.1.</u> Een functie $f \in B^X$ heet eigenlijk Riemann-integreerbaar ((ER)-integreerbaar) als er bij elke $\varepsilon > 0$ speciale trapfuncties s_1 en s_2 bestaan zó dat

$$\| f(x) - s_1(x)\| \leq \|s_2(x)\| \;, \qquad \int_X \|s_2(x)\|\, d\mu < \varepsilon .$$

Onder $^{(ER)}\int f(x)d\mu$ verstaat men het element b B waarvoor bij elk dergelijk stel ε, s_1, s_2 geldt dat $\|b-\int_X s_1(x)d\mu\| < \varepsilon$ is.

Stelling 2.8.1. Zij f (ER)-integreerbaar. Dan is f sommeerbaar, en de verzameling waarop $f\neq 0$ is, heeft eindige maat. $^{(ER)}\int f(x)d\mu$ is éénduidig bepaald, en $= \int f(x)d\mu$.

Bewijs. Uit st.2.4.2 volgt dat f sommeerbaar is.

Daar $\|f-s_1\| \leq \|s_2\|$, is $f\neq 0$ hoogstens op de verzamelingen waarop $s_1\neq 0$ of $s_2\neq 0$, en dit zijn eindige sommen van A_i's met eindige maat (def.2.2.3).

Uit $\|f-s_1\| \leq \|s_2\|$ volgt dat $\|\int_X f\,d\mu - \int_X s_1 d\mu\| \leq \int_X \|s_2\|\, d\mu$. Derhalve voldoet $\int_X f\,d\mu$ aan de eis die aan b is gesteld. Het is duidelijk dat er slechts één zo'n b is: zouden b_1 en b_2 beide voldoen dan was $\|b_1-b_2\| < 2\varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$, dus $b_1=b_2$.

Wat betreft de oneigenlijke Riemann-integraal zullen we ons beperken tot een bijzonder geval dat de situatie duidelijk weergeeft.

Definitie 2.8.2. Zij $f \in B^X$, en zij X het interval $(0,\infty)$ met de gebruikelijke maat. Laat voor elk paar getallen a,b met $0 < a < b < \infty$ gelden dat f (ER)-integreerbaar is over (a,b) (d.w.z. dat $f.\chi_{(a,b)}$ (ER)-integreerbaar is). Laat verder $\lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty} {}^{(ER)}\int_a^b f(x)d\mu$ bestaan (als $B=B_r$, laten we slechts een eindige limiet toe). Dan heet f (OR)-integreerbaar over $(0,\infty)$, en de genoemde limiet wordt met $^{(OR)}\int_0^\infty f(x)d\mu$ aangeduid.

Voorbeeld: $^{(OR)}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\cos x\; d\mu$ bestaat (bedenk dat $\left|\int_p^q x^{-\frac{1}{2}}\cos x\; d\mu\right| < 2p^{-\frac{1}{2}}$ als $0 < p < q$).

Stelling 2.8.2. Laat f(x) over elk interval (a,b) met $0 < a < b < \infty$ (ER)-integreerbaar zijn. Dan geldt:

f sommeerbaar over $(0,\infty)$ $\Longleftrightarrow$ $\|f\|$ (OR)-integreerbaar over $(0,\infty)$.

Als een der beide leden geldt (dus de andere ook) is f ook zelf (OR)-integreerbaar, en $\int_0^\infty f(x)d\mu = {}^{(OR)}\int_0^\infty f(x)d\mu$.

Bewijs. Zij f sommeerbaar, en $\int_0^\infty \|f\|\, d\mu = c$ (dus $0 \leq c < \infty$). Dan is

$$^{(ER)}\int_a^b \|f\|\, d\mu = \int_a^b \|f\|\, d\mu \leq c .$$

Daar het linkerlid monotoon van a en b afhangt heeft het een eindige limiet als $a \to 0$, $b \to \infty$. Dus $\|f\|$ is (OR)-integreerbaar.

Verder is $(ER)\int_a^b f(x)d\mu = \int_a^b f(x)d\mu$. Als $a \to 0$, $b \to \infty$ nadert het rechterlid tot $\int^\infty f(x)d\mu$ (want $f.\ \chi_{(a,b)}$ nadert gemajoreerd tot f). Dus $(OR)\int_0^\infty f(x)d\mu$ bestaat, en is gelijk aan $\int_0^\infty f(x)d\mu$.

Is omgekeerd gegeven dat $\|f\|$ (OR)-integreerbaar is over $(0,\infty)$, dan is volgens st.2.5.8: $\int_0^\infty \|f\| d\mu = \lim \int_{n^{-1}}^n \|f\| d\mu = \lim\ (ER) \int_{n^{-1}}^n \|f\| d\mu =$ $= (OR)\int_0^\infty \|f\| d\mu < \infty$. Daar f ook meetbaar is (als limiet van $f.\ \chi_{(n^{-1},n)}$), is f nu sommeerbaar.

We zien dus dat een oneigenlijke Riemann-integraal dan en slechts dan als Lebesgue-integraal kan worden geïnterpreteerd wanneer de integraal absoluut convergeert. De moeilijkheden die bij relatief convergente (OR)-integralen ontstaan t.a.v. verwisseling van integratie met limietovergang, sommatie en integratie, worden door de Lebesgue-theorie niet opgelost.

De (OR)-integraal $\int_0^\infty$ is gedefinieerd als limiet van $\int_{E_n}$, waarbij E_n op een zeer speciale wijze tot $(0,\infty)$ nadert. Slechts in het geval van absolute convergentie kan men zeggen dat de limiet bestaat voor elke dergelijke rij $\{E_n\}$.

2.9. Voorbeelden. We geven hier een aantal toepassingen van de stelling van Lebesgue (st.2.6.1), van de stelling over integratie term voor term (st.2.5.12 en st.2.6.3) en van de stelling van Fubini (st.2.7.5). Het gaat steeds over de gewone Lebesgue-maat op $(-\infty,\infty)$, en daarom zullen we i.p.v. $d\mu$ het meer gebruikelijke dx schrijven.

1. Zij p een constante $(-1 < p < \infty)$. Dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-px}\,dx = \int_0^\infty e^{-(1+p)x}\,dx = \frac{1}{1+p} .$$

Want $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{(0,n)}(x)\right| \le e^{-x}$ $(0<x<\infty)$, daar $1-u \le e^{-u}$ $(0\le u\le 1)$, zodat $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{(0,n)}(x)e^{-px}$ gemajoreerd nadert tot $e^{-(1+p)x}$.

Merk op dat op $(0,\infty)$ ook $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-px}$ naar $e^{-(1+p)x}$ convergeert, maar dit is geen gemajoreerde convergentie voor alle $p > -1$ (wel bijv. voor $p > 1$).

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1+\frac{x}{n})^n \; e^{-x^2} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-x^2} \, dx.$

De convergentie is gemajoreerd want

$$\left| (1+\frac{x}{n})^n \right| \leq (1+\frac{|x|}{n})^n \leq e^{|x|} ,$$

en $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x| -x^2} dx$ convergeert.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+x} \, dx = 0$ (majorant e^{-x})

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin^n x \, dx}{x^2} = 0$.

De integraal convergeert absoluut als $n \geq 2$, daar $|x^{-2}\sin^2 x| \leq 1$ $(0 < x \leq 1)$ en $|x^{-2}\sin^2 x| \leq x^{-2}$ $(x \geq 1)$. Als $n \geq 2$ is, wordt de integrand door $x^{-2}\sin^2 x$ gemajoreerd. Daar $\sin^n x \to 0$ (p.p.) blijkt dat de integraal naar nul gaat.

5. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \Sigma_0^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^1 x^{2n} \log x \, dx.$

Dit blijkt uit

$$\Sigma_0^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{n} \right| \int_0^1 x^{2n} |\log x| \, dx = \int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{1-x^2}} \, dx < \infty .$$

6. Is $a > 0$, dan is

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos x \, dx = \Sigma_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \, dx ,$$

aangezien

$$\Sigma_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{x^m}{m!} \, dx = \int_0^{\infty} e^{-ax^2+x} \, dx < \infty .$$

7. Laat $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$, zodat $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ en $\int_0^{\infty} e^{-y} y^{q-1} dy$ absoluut convergeren. Het zijn $\Gamma(p)$ resp. $\Gamma(q)$. Nu is

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-xy} (xy)^{q-1} x \, dy ,$$

want de integraal over y is gelijk aan $\Gamma(q)$ voor bijna alle $x \geq 0$ ($x=0$ is een uitzondering). Als we de integranden door hun absolute waarden vervangen, convergeert alles nog (er komt dan $\Gamma(\mathrm{Re}\, p)\, \Gamma(\mathrm{Re}\, q)$ uit). Nu is volgens Fubini:

$$\Gamma(p)\ \Gamma(q) = \int_0^\infty y^{q-1}\, dy \int_0^\infty e^{-x(1+y)}\ x^{p+q-1}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{q-1}\ \Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}}\, dy = \Gamma(p+q)\ B(p,q).$$

Dit is de formule van Binet; $B(p,q)$ is de betafunctie van Euler.

8. Te berekenen $\int_0^\infty x^{-2}(1-\cos x)dx$.

We hebben $x^{-2} = \int_0^\infty e^{-xy} y\, dy\ (x > 0)$, en

$$\int_0^\infty (1-\cos x)\, dx \int_0^\infty e^{-xy} y\, dy = \int_0^\infty y\, dy \int_0^\infty e^{-xy}(1-\cos x)dx\ ,$$

want $1-\text{cox } x \geq 0$ voor alle x.

Het rechterlid herleidt men gemakkelijk tot

$$\int_0^\infty y\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}\pi\ .$$

9. Beschouw $\int_0^\infty x^{-p} \sin x\, dx$, met $0 < \operatorname{Re} p < 2$. Deze convergeert niet absoluut als $0 < \operatorname{Re} p \leq 1$. We berekenen de limiet van $\int_0^n$ als n door de gehele getallen naar ∞ gaat (maar we kunnen even goed een andere rij nemen).

Daar $x^{-p}\ \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-xy}\ y^{p-1}\, dy$, is

$$\Gamma(p) \int_0^n x^{-p} \sin x\, dx = \int_0^n \left\{ \sin x \int_0^\infty e^{-xy}\ y^{p-1}\, dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ y^{p-1} \int_0^n e^{-xy} \sin x\, dx \right\} dy$$

want als we de integranden door hun absolute waarden vervangen, wordt het middelste lid:

$$\int_0^n |\sin x|\ x^{-p}\ \Gamma(\operatorname{Re} p)\, dx < \infty .$$

Noem $y^{p-1} \int_0^n e^{-xy} \sin x\, dx = \varphi_n(y)$. We hebben $\varphi_n(y) \to / y^{p-1}(1+y^2)$ als $n \to \infty$ en $y \to 0$. We gaan nu $\varphi_n(y)$ majoreren:

$$\varphi_n(y) = y^{p-1} \operatorname{Im} \int_0^n e^{(i-y)x}\, dx = y^{p-1} \operatorname{Im} \frac{e^{(i-y)n} - 1}{i-y} =$$

$$= \frac{y^{p-1}}{1+y^2}\,(-ye^{-yn} \sin n - e^{-yn} \cos n + 1),$$

zodat $|\varphi_n(y)| \leq \frac{y^{\mathrm{Re}\ p-1}}{1+y^2}(ye^{-y}+e^{-y}+1)$. Het rechterlid is sommeerbaar over $(0,\infty)$, zodat de stelling van Lebesgue mag worden toegepast:

$$\Gamma(p)\int_0^n x^{-p}\sin x\,dx \to \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}p)\,\Gamma(1-\tfrac{1}{2}p).$$

2.10. Stieltjes-integralen. De Lebesgue-Stieltjesmaat werd reeds in 1.2 (voorbeeld 5) besproken. We zullen een kleine uitbreiding aan de definitie geven.

Definitie 2.10.1. Is g een monotoon niet-dalende functie in $(-\infty,\infty)$, dan schrijven we

$$g_+(a) = \lim_{x\downarrow a} g(x), \qquad g_-(a) = \lim_{x\uparrow a} g(x),$$

zodat $g_-(a) \leq g(a) \leq g_+(a)$. Het verschil $g_+(a) - g_-(a)$ heet de sprong van g in a.

Stelling 2.10.1. g_+ is overal rechtscontinu, g_- is overal linkscontinu; beide zijn monotoon niet-dalend.

Bewijs: Zijn a en ε gegeven, dan is $b>a$ zó te kiezen dat

$$g(x) < g_+(a) + \varepsilon \quad \text{als} \quad a<x<b,$$

zodat ook $g_+(x) < g_+(a)+\varepsilon$. Anderzijds is voor al zulke x ook $g(x) \geq g_+(a)$, dus $g_+(x) \geq g_+(a)$. Met g_- gaat het analoog.

Definitie 2.10.2. Is Γ de collectie der cellen $(a,b]$, plus de lege verzameling, en is g monotoon niet-dalend in $(-\infty,\infty)$, dan is de maat μ_g op Γ gedefinieerd door $\mu_g(0)=0$, $\mu_g((a,b])=g_+(b)-g_+(a)$ $(-\infty<a<b<\infty)$.

Stelling 2.10.2. Is $-\infty<a<b<\infty$, dan is

$$\mu((a,b)) = g_-(b)-g_+(a)\ ; \quad \mu(\{b\}) = g_+(b)-g_-(b),$$
$$\mu([a,b)) = g_-(b)-g_-(a); \quad \mu([a,b]) = g_+(b)-g_-(a).$$

(hier is $\{b\}$ de verzameling die slechts uit het getal b bestaat).

Bewijs: $(a,b) = \lim\,(a,b-n^{-1}]$, enz.; bedenk dat $(g_+)_- = g_-$.

Opmerking: Is Γ' de collectie der gespiegelde cellen $[a,b)$, en is μ' daarop gedefinieerd door $\mu'([a,b)) = g_-(b)-g_-(a)$, dan is $(R,\Gamma,\mu) \sim (R,\Gamma',\mu')$. Want elke $[a,b)$ is μ-meetbaar met maat $\mu'([a,b))$, en $(a,b]$ is μ'- meetbaar met maat $\mu((a,b])$ (zie st. 1.7.1).

In de volgende stellingen hebben de woorden meetbaar, sommeerbaar, etc. betrekking op de maat μ_g, waarin g een monotoon niet-dalende functie op $(-\infty,\infty)$ is.

<u>Stelling 2.10.3.</u> Is de reële functie f(x) op $(-\infty,\infty)$ continu of monotoon, dan is f meetbaar.

<u>Bewijs</u>. Zij f continu. Dan is op elk interval $[n,n+1]$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ f uniform continu, dus op $(n,n+1]$ is f uniform te benaderen door trapfuncties. D.w.z. er is bij elke $\varepsilon > 0$ een $t_n(x)$, met $|f(x)-t_n(x)| < \varepsilon$ $(n < x \leq n+1)$, $t_n(x)=0$ buiten $(n,n+1]$. Nu is $\Sigma_{-\infty}^{\infty} t_n=t$ een trapfunctie met $|f(x)-t(x)| < \varepsilon$ voor alle x. Volgens definitie 2.3.1 is nu f meetbaar.

Vervolgens nemen we een monotone functie f. Dan is st.2.3.4 toepasbaar, want $E(b,\varepsilon)$ is een interval, dus meetbaar.

<u>Stelling 2.10.4.</u> Is J een interval en is f continu of monotoon op J, zijn bovendien f en g begrensd op J, dan is f sommeerbaar over J.

<u>Bewijs</u>. Over elk gesloten deelinterval van J is f meetbaar (want daarbuiten is de functie continu resp. monotoon voort te zetten), dus f is meetbaar over J (st.2.3.3).

Het interval J kan 0,1 of 2 eindpunten hebben. Deze eventuele eindpunten hebben eindige maat, en f is eindig in deze punten, zodat f over de verzameling der eindpunten sommeerbaar is. Laten we uit J de eventuele eindpunten weg, dan ontstaat een open interval J'. Dit is te beschouwen als $\Sigma_{-\infty}^{\infty} A_i$, met $A_i \in \Gamma$, terwijl A_{i+1} direct achter A_i aansluit.

Zij $|f(x)| \leq M$ op J. Dan is

$$\int_{J'} |f(x)|\, d\mu \leq M\, \Sigma_{-\infty}^{\infty} \mu(A_i) = M(\sup_J g(x) - \inf_J g(x)) < \infty ,$$

dus f is sommeerbaar.

<u>Definitie 2.10.3.</u> Is f sommeerbaar over een meetbare verzameling E, dan wordt de integraal van f over E aangeduid met $\int_E f(x)\, d\, g(x)$.

<u>Opmerking 1.</u> Is E een interval (a,b) of (a,b] of [a,b) of [a,b], dan is het gevaarlijk om $\int_a^b f(x)d\,g(x)$ te schrijven. Want de integraal over de eenpuntsverzameling b bedraagt $f(b)\,(g_+(b)-g_-(b))$ (st.2.4.9), zodat bijv.

$$\int_{(a,b]} f(x)dg(x) = \int_{(a,b)} f(x)dg(x) + f(b)(g_+(b)-g_-(b)).$$

Opmerking 2. Is f continu op $[a,b]$ ($-\infty < a < b < \infty$), dan is $\int_{(a,b]} f(x)dg(x)$ te beschouwen als limiet van sommen van de vorm

$$S = \Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

waarin $a=x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 \leq \ldots < \xi_n < x_n = b$, terwijl de limiet-overgang van het type is dat we bij R-integralen kennen. Het verschil tussen S en de integraal is nl. in absolute waarde hoogstens

$$\Sigma_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

waarin M_i resp. m_i het max. resp. min. is van f op $(x_{i-1}, x_i]$. Door bij gegeven ε de intervallen klein genoeg te kiezen, kunnen we de laatstgenoemde som $< \varepsilon(g(b)-g(a))$ maken.

Uit deze beschouwing volgt nog, in het geval dat $g(x)$ een continue afgeleide heeft, dat

$$\int_{(a,b)} f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

We kunnen nl. ξ_i zó kiezen dat $g(x_i)-g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, en dan wordt S een Riemannse som voor fg'.

Stelling 2.10.5. Laat f en g monotoon niet-dalende functies op $(-\infty, \infty)$ zijn; f overal linkscontinu, g overal rechtscontinu. Laat $-\infty < a < b < \infty$ zijn. Dan is

$$_{(a,b)} f_+(x)dg(x) + {}_{(a,b)} g_-(x)df(x) = f_-(b)g_-(b) - f_+(a)g_+(a);$$

Bewijs. Zij $X=Y=(-\infty, \infty)$; Γ is de cellencollectie (def.2.10.2). We beschouwen de maatruimten (X, Γ, μ_f) en (Y, Γ, μ_g). In het cartesische product nemen we de verzameling $\{(x,y) \mid a < x < b,\ a < y < x\}$; de karakteristieke functie daarvan heet $\chi(x,y)$. Volgens de stelling van Fubini (st.2.7.2) is nu

$$\int_X d\mu_f \int_Y \chi(x,y)d\mu_g = \int_Y d\mu_g \int_X \chi(x,y)d\mu_f ,$$

zodat

$$\int_{(a,b)} (g_-(x) - g_+(a))d\mu_f = \int_{(a,b)} (f_-(b) - f_+(x)d\mu_g ,$$

waaruit de eerste der te bewijzen formules direct volgt. De tweede volgt op dezelfde manier uit de beschouwing van de verzameling $\{(x,y) \mid a < x=y < b\}$.

$$\int_{(a,b)} (f_+(x) - f_-(x))dg(x) = \int_{(a,b)} (g_+(x) - g_-(x))df(x).$$

Hoofdstuk 3. Totaal-additieve functies.

3.1. Inleiding.

Dit hoofdstuk is in zekere zin een uitbreiding van hoofdstuk 1 (maat). Een maat is een niet-negatieve totaal-additieve verzamelingsfunctie. We zullen hier van de niet-negativiteit afstand doen.

Definitie 3.1.1. Zij R_g de verzameling der gegeneralizeerd reële getallen. Een reeks $\Sigma_1^\infty a_i$ $(a_i \in R_g)$ heet eenzijdig convergent als de negatieve termen uit de reeks samen een convergente reeks vormen. In het bijzonder is dan elke $a_i > -\infty$. Onder de som van een eenzijdig convergente reeks verstaan we de som der niet-negatieve termen (die $+\infty$ kan zijn) plus de som der negatieve (die eindig is).

Een eenzijdig convergente reeks Σa_i kan steeds worden gesplitst, met $a_i = b_i + c_i$, waarbij $0 \leq b_i \leq \infty$, $\Sigma_1^\infty |c_i| < \infty$. Voor de som geldt dan $\Sigma a_i = \Sigma b_i + \Sigma c_i$. Gemakkelijk gaat men verder na dat de stellingen over volgordeverwisseling en over dubbelreeksen gelden (zie het slot van 0.4 voor niet-negatieve, en st.2.1.2, st.2.1.3 voor absoluut convergente reeksen).

Als Σa_i niet eenzijdig convergeert, en $\Sigma -a_i$ evenmin, dan kan $\lim \Sigma_1^n a_i$ toch wel bestaan, maar door volgordeverandering kunnen we dan een convergente reeks met een andere som of zelfs een divergente reeks maken.

Definitie 3.1.2. Zij X een ruimte, en Γ een semiring van deelverzamelingen van X (zie 1.1). Aan elke $A \in \Gamma$ zij een getal $\nu(A) \in R_g$ toegevoegd. We noemen ν een totaal-additieve verzamelingsfunctie (op Γ) als $\nu(0)=0$, en als voor elke $A \in \Gamma$ en voor elke disjuncte splitsing $A = \Sigma_1^\infty A_i$ $(A_i \in \Gamma)$ geldt dat $\Sigma_1^\infty \nu(A_i)$ eenzijdig convergeert en $\nu(A)$ tot som heeft. (Is bovendien ν niet-negatief, dan is ν dus een maat op Γ, zie st.1.2.2 en def.1.2.1).

We merken op dat $\nu(A) > -\infty$ voor alle $A \in \Gamma$, anders zou $\nu(A) + \nu(0) + \nu(0) + \ldots$ niet eenzijdig convergeren.

Definitie 3.1.3. De totaal-additieve functie ν heet een verschilmaat op Γ als er bij elke $A \in \Gamma$ een getal c $(0 < c < \infty)$ bestaat zó dat voor elke eindige disjuncte som $\Sigma_1^N A_i$ (met $A_i \in \Gamma$, $\Sigma_1^N A_i \subset A$) geldt dat $\Sigma_1^N \nu(A_i) > -c$.

Voorbeelden. 1. Laat μ een σ-finiete maat zijn op Γ, en laat g en h gegeneraliseerd reële functies op X zijn die μ-meetbaar zijn, d.w.z. meetbaar zijn t.o.v. de Lebesgue-uitbreiding van deze maat. g is gegeneraliseerd niet-negatief, en h is sommeerbaar over elke $A \in \Gamma$. Definieer ν op Γ door

$$\nu(A) = \int_A g(x)d\mu - \int_A h(x)d\mu .$$

Dan is ν een verschilmaat. Dat ν totaal-additief is blijkt door verwisseling van sommatie en integratie (st.2.5.12 en st.2.6.3). Verder is, als $\Sigma_1^N A_i \subset A$:

$$\Sigma_1^N \nu(A_i) \geq \Sigma_1^N \int_{A_i} h(x)d\mu \geq - \int_A |h(x)| \, d\mu = -c.$$

2. Zij Γ de collectie intervallen $(a,b]$ met $-\infty < a < b \leq 1$, plus de lege verzameling. Voor $-\infty < x < 1$ zij $g(x)$ gedefinieerd als $(1-x)^{-1}$. We nemen $\nu((a,b])=g(b)-g(a)$ als $a < b < 1$, $\nu((a,1]) = -g(a)$ als $a < 1$. Deze ν is totaal-additief. Is nl. $(a,b] = \Sigma_1^\infty (a_i,b_i]$ dan is zeker $\nu((a,b]) = \Sigma_1^\infty \nu((a_i,b_i])$ als $b < 1$ is (zie 1.2, voorbeeld 5). Is $b=1$, dan is één der b_i, bijv. b_1, gelijk aan 1. Dan is ook $(a,a_1] = \Sigma_2^\infty (a_i,b_i]$ en dus $\nu((a,a_1]) = \Sigma_2^\infty \nu((a_i,b_i])$. Derhalve is

$$\nu((a,1]) = -g(a) = \nu((a_1,1]) + g(a_1)-g(a) =$$
$$\nu((a_1,1]) + \nu((a,a_1]) = \Sigma_1^\infty \nu((a_i,b_i]).$$

Dus ν is totaal-additief. Het is echter geen verschilmaat, want

$$A_n = (1 - \tfrac{1}{n},1] \subset A \doteq (0,1] \text{ , en } \nu(A_n) = -n,$$

en n kan willekeurig groot gekozen worden.

Opmerking. Als Γ een σ-ring is, en $X \in \Gamma$, dan is elke totaal-additieve functie op Γ een verschilmaat (st.3.2.2).

Definitie 3.1.4. Zij ν totaal-additief op de semiring Γ. Dan is voor alle $A \in \Gamma$ het getal $\psi(A) \in R_g$ gedefinieerd door

$$\psi(A) = \sup \{ \Sigma_1^N - \nu(A_i) | N=1,2,\ldots; A_i \in \Gamma, A \supset A_1+\ldots+A_N \text{ (disjunct)} \}.$$

Stelling 3.1.1. Zij ν totaal-additief op de semiring Γ. Dan is ψ een maat op Γ, en $\psi(A)+\nu(A)\geq 0$ voor alle $A\in\Gamma$.

Bewijs. Neem in def.3.1.4 eerst $N=1$, $A_1=A$. Dan blijkt dat $\psi(A)+\nu(A)\geq 0$. Neem ook $N=1$, $A_1=0$, dan blijkt dat $\psi(A)\geq -\nu(0)=0$. Verder is, als $A=0$, ook $A_1=\ldots=A_N=0$, zodat we vinden dat $\psi(0)=0$. We moeten nu nog bewijzen dat ψ totaal-additief is (dan zegt st. 1.2.2 dat ψ een maat is).

Zij dus $B=\Sigma_1^\infty B_i$ (disjunct), $B\in\Gamma, B_i\in\Gamma$. Neem eerst aan dat $\psi(B)<\Sigma_1^\infty\psi(B_i)$. Kies n zó groot dat $\psi(B)<\Sigma_1^n\psi(B_i)$. Neem verder ε zo dat $0<\varepsilon<1$ en $\psi(B)<(1-\varepsilon)\,\Sigma_1^n\psi(B_i)$. Bij elke B_i kiezen we een eindige disjuncte som $\Sigma_j A_{ij}\subset B_i$, met $A_{ij}\in\Gamma$, $-\Sigma_j\,\nu(A_{ij})\geq(1-\varepsilon)\,\psi(B_i)$ (dit gaat ook nog als $\psi(B_i)=0$). Nu is $\Sigma_{ij}A_{ij}$ een eindige disjuncte som, bevat in B, en

$$-\Sigma_{ij}\,\nu(A_{ij})\geq(1-\varepsilon)\,\Sigma_1^n\,\psi(B_i)>\psi(B),$$

doch volgens def.3.1.3 is het eerste lid $\leq\psi(B)$.

Het is nu voldoende te bewijzen dat $\psi(B)\leq\Sigma_1^\infty\psi(B_j)$. Zij $B\supset A_1+\ldots+A_N$ (disjuncte som; $A_i\in\Gamma$). Splits A_iB_j als disjuncte som $\Sigma_{k=1}^\infty C_{ijk}$ ($C_{ijk}\in\Gamma$), dan is ook $\Sigma_{ijk}C_{ijk}$ een disjuncte som. Nu is $\nu(A_i)=\Sigma_{jk}\nu(C_{ijk})$ (eenzijdig convergent), dus $\Sigma_1^N\,\nu(A_i)=$ $=\Sigma_{ijk}\,\nu(C_{ijk})$. De laatste som is nu ook eenzijdig convergent, dus gelijk aan $\Sigma_j(\Sigma_{ik}\,\nu(C_{ijk}))$. Daar $\Sigma_{ik}C_{ijk}\subset B_j$, is $-\Sigma_{ik}\,\nu(C_{ijk})\leq\psi(B_j)$. Dus $-\Sigma_1^N\,\nu(A_i)\leq\Sigma_{j=1}^\infty\,\psi(B_j)$. Neem het supremum van het linkerlid, dan blijkt de gevraagde ongelijkheid.

Stelling 3.1.2. Zij ν een verschilmaat op de semiring Γ. Dan is $\psi(A)<\infty$ voor alle $A\in\Gamma$, en ν is het verschil van twee maten, nl. $\nu+\psi$ en ψ. Ook $\nu+2\psi$ is een maat, die met $|\nu|$ wordt aangeduid, en we hebben

$$|\nu(A)|\leq|\nu|(A)\quad\text{voor alle } A\in\Gamma.$$

Bewijs. Uit def.3.1.3 en def.3.1.4 volgt direct dat $\psi(A)<\infty$ voor alle $A\in\Gamma$. Daar ν en ψ totaal-additief zijn en $\psi\geq 0$, $\nu+\psi\geq 0$, $\nu+2\psi\geq 0$ (st.3.1.1), zijn ψ, $\nu+\psi$ en $\nu+2\psi$ maten. Daar $\psi(A)<\infty$ voor alle A, is $\nu(A)=(\nu+\psi)(A)-\psi(A)$.

Verder is voor elke $A\in\Gamma$ ook $\nu(A)\leq\nu(A)+2\,\psi(A)$ en $\nu(A)\geq$ $\geq-\nu(A)-2\,\psi(A)$, resp. wegens $\psi\geq 0$ en $\nu+\psi\geq 0$. Daaruit volgt de ongelijkheid voor $|\nu|$.

3.2. De splitsing van Hahn. Zij Γ een semiring met verschilmaat ν. Laat ϕ, $\nu+\phi$, $\nu+2\phi = |\nu|$ de in def.3.1.4 en st.3.1.2 genoemde maten zijn. We eisen verder dat $X \in \Omega(\Gamma)$, d.w.z. dat X te schrijven is als $X = \Sigma_1^\infty A_i$ (disjunct) met $A_i \in \Gamma$.

Daar $\phi(A) < \infty$ voor alle $A \in \Gamma$ blijkt nu dat (X, Γ, ϕ) σ-finiet is. De maat ϕ is dus voort te zetten tot een σ-ring, nl. de σ-ring der ϕ-meetbare verzamelingen. De verschilmaat ν behoeft niet tot een σ-ring voortzetbaar te zijn.(Beschouw het voorbeeld 1 na def.3.1.3, en neem daarin voor h een functie die over elke A, doch niet over de gehele X sommeerbaar is).

We zullen verder steeds veronderstellen dat $\phi(X) < \infty$ is. Dit is steeds te bereiken door X in disjuncte stukken te verdelen en die stukken afzonderlijk te beschouwen.

De volgende stelling leert ons de vraag naar de structuur van een verschilmaat op een semiring te verplaatsen naar het overeenkomstige probleem bij een σ-ring, waar het eenvoudiger is.

Stelling 3.2.1. Zij Γ een semiring in X, en ν een verschilmaat op Γ. Zij $X \in \Omega(\Gamma)$, en ν σ-finiet (d.i. $X = \Sigma_1^\infty A_i$ disjunct, met $\nu(A_i) < \infty$). Tenslotte onderstellen we dat $\phi(X) < \infty$. Dan zijn ϕ en $\phi+\nu$ voort te zetten tot maten op de σ-ring Λ der t.o.v. $|\nu|$ meetbare verzamelingen. Verder is $\nu = (\phi+\nu) - \phi$ weer een verschilmaat op Λ. Op Λ speelt ϕ weer de door def.3.1.4 (met Λ i.p.v. Γ) aangewezen rol t.o.v. ν.

Bewijs. Ook $|\nu| = \nu + 2\phi$ is σ-finiet (uit $\nu(A_i) < \infty$ volgt $|\nu(A_i)| < \infty$), zodat we de Lebesgue-uitbreiding $(X, \Lambda, |\nu|)$ kunnen beschouwen.

Is $E \in \Lambda$, dan is E ook ϕ-meetbaar en $(\phi+\nu)$-meetbaar. Volgens st.1.8.1 is er nl. een $E_1 \supset E$, zó dat E_1 limiet is van een rij $P_1, P_2, .., P_i \downarrow E_1$ $(P_i \in \Omega(\Gamma))$, en zó dat $E_1 - E = N$ de $|\nu|$-maat 0 heeft. E_1 is kennelijk ook ϕ en $(\phi+\nu)$-meetbaar. Het is nu voldoende aan te tonen dat $|\nu|(N) = 0$ impliceert dat ook $\phi^*(N) = (\phi+\nu)^*(N) = 0$. Kies daartoe ε, en maak een disjuncte som $\Sigma_1^\infty A_i \supset N$ met $A_i \in \Gamma$, $\Sigma_1^\infty |\nu|(A_i) < \varepsilon$. Daar echter $\phi(A_i) \leq |\nu|(A_i)$ is (st.3.1.2), is $\phi^*(N) \leq \varepsilon$, dus $\phi^*(N) = 0$. Hetzelfde argument werkt voor $\phi + \nu$. Dus $\phi + \nu$ en ϕ zijn maten op Λ; daar $\phi(X) < \infty$ is, blijkt dat ν totaaladditief is.

Daar $\phi(X) < \infty$, en $X \in \Lambda$, is $\phi(E) < \infty$ voor elke $E \in \Lambda$. We kunnen dus ν tot Λ voortzetten door $\nu(E) = (\phi+\nu)(E) - \phi(E)$.

We bewijzen verder dat $\psi = \psi_1$ op Λ , waarin

$$\psi_1(E) = \sup\{-\nu(F) \mid F \subset E,\ F \in \Lambda\} \qquad (E \in \Lambda).$$

Duidelijk is dat $-\nu(F) = \psi(F) - (\psi+\nu)(F) \leq \psi(F) \leq \psi(E)$, dus $\psi_1(E) \leq \psi(E)$ $(E \in \Lambda)$. Verder is $\psi_1(A) \geq \psi(A)$ $(A \in \Gamma)$ (gebiedsvergroting onder het sup). Dus $\psi_1(A) = \psi(A)$. Kies $\varepsilon > 0$. Neem nu een $E \in \Lambda$, en approximeer die door $B = A_1 + \ldots + A_n$ (disjunct) met $\psi(E \Delta B) < \varepsilon$, $A_i \in \Gamma$ (st.1.8.3). In A_i kiezen we F_i met $-\nu(F_i) > \psi(A_i) - \varepsilon n^{-1}$. Neem nu $F = E(F_1 + \ldots + F_n)$, dan is $-\nu(F) = -\nu(F_1 + \ldots + F_n) + \nu((F_1 + \ldots + F_n) - E) >$ $> \psi(B) - 2\varepsilon - \psi((F_1 + \ldots + F_n) - E) \geq \psi(B) - 2\varepsilon - \psi(E \Delta B) > \psi(B) - 3\varepsilon > \psi(E) - 4\varepsilon$. Hieruit volgt dat $\psi_1(E) \geq \psi(E) - 4\varepsilon$, zodat $\psi_1(E) = \psi(E)$ bewezen is.

Uit het feit dat $\psi_1(E) < \infty$ voor alle $E \in \Lambda$ volgt nu dat ν een verschilmaat is op Λ .

We werken nu verder op een σ-ring. We behoeven nu niet meer te eisen dat ν σ-finiet is (dat was slechts nodig om van een semiring naar een σ-ring te komen) en we behoeven niet a priori te eisen dat ν een verschilmaat is; totaal-additiviteit is voldoende.

<u>Stelling 3.2.2.</u> Zij Λ een σ-ring van deelverzamelingen van X, met $X \in \Lambda$. Zij ν een totaal-additieve functie op Λ . Voor elke $E \in \Lambda$ is volgens def.3.1.4 $\psi(E)$ gedefinieerd als

$$\psi(E) = \sup\{-\nu(F) \mid F \in \Lambda,\ F \subset E\},$$

en volgens st.3.1.1 is dat een maat op Λ . Verder geldt:

1°. Is $E \in \Lambda$, en b een getal met $b < \psi(E)$, dan is er een F met $-\nu(F) > b$, $\psi(F) = \psi(E)$.

2°. $\psi(X) < \infty$, en ν is een verschilmaat op Λ .

<u>Bewijs</u>. 1°. Zij $E \in \Lambda$, $b < \psi(E)$. Kies $b_1, b_2, \ldots$ zó dat $b < b_1 < b_2 < \ldots <$ $< \psi(E)$, $b_n \to \psi(E)$ $(n \to \infty)$. Voorlopig blijft de mogelijkheid open dat $\psi(E) = \infty$ is.

Kies $E_1 \in \Lambda$ met $E_1 \subset E$, $-\nu(E_1) > b$.

Kies $E_2 \in \Lambda$ met $E_2 \subset E - E_1$, en

$$-\nu(E_2) + \psi(E_1) > b_1, \quad -\nu(E_2) \geq 0.$$

Dit kan, daar $\psi(E - E_1) + \psi(E_1) = \psi(E) > b_1$ is. Is reeds $\psi(E_1) > b_1$, dan kunnen we $E_2 = 0$ nemen.

Kies $E_3 \in \Lambda$ met $E_3 \subset E - E_1 - E_2$, en

$$- \nu(E_3) + \psi(E_1) + \psi(E_2) > b_2, \quad - \nu(E_3) \geq 0.$$

Dit kan, daar $\psi(E-E_1-E_2)+ \psi(E_1)+ \psi(E_2)= \psi(E) > b_2$ is. Zo gaan we verder. Nu is $E_1+E_2+\ldots \in \Lambda$, en $\psi(E_1+E_2+\ldots) \geq \psi(E_1)+\ldots+ \psi(E_n) \geq b_n$ voor elke n, anderzijds is $\psi(E_1+E_2+\ldots) \leq \psi(E)$. Daar $b_n \to \psi(E)$, is dus

$$\psi(E_1+E_2+\ldots) = \psi(E).$$

Verder is $- \nu(E_1+E_2+\ldots) = - \nu(E_1) - \nu(E_2) - \ldots > b+0+0+\ldots=b$. Kies dus $F=E_1+E_2+\ldots$, en 1° is bewezen.

2°. Neem aan dat $\psi(X)= \infty$ is. Volgens 1° kunnen we dan $F_1 \subset X$ vinden met $\psi(F_1)= \infty, - \nu(F_1) > 1$, verder $F_2 \subset F_1$ met $\psi(F_2)=\infty$, $- \nu(F_2) > - \nu(F_1)+1$, dan $F_3 \subset F_2$ met $\psi(F_3)= \infty, - \nu(F_3) > - \nu(F_2)+1$, enz. Nu zijn $\nu(F_1), \nu(F_2), \ldots$ alle eindig, en $- \nu(F_1-F_2) > 1$, $- \nu(F_2-F_3) > 1, \ldots$. En $F_1-F_2, F_2-F_3, \ldots$ zijn disjunct. We komen nu in strijd met de eis dat in

$$\nu((F_1-F_2)+(F_2-F_3)+\ldots) = \nu(F_1-F_2)+ \nu(F_2-F_3)+\ldots$$

het rechterlid eenzijdig convergeert. Derhalve is $\psi(X) < \infty$.

Hieruit volgt nu dat ν een verschilmaat is, want voor de c in def.3.1.3 kunnen we $\psi(X)$ nemen.

<u>Stelling 3.2.3.</u> (Hahn). Zij Λ een σ-ring in X, met $X \in \Lambda$, en zij ν totaal-additief op Λ. Dan is er een $E_o \in \Lambda$ zó dat

$$\psi(E)=0, \quad \nu(E)=|\nu|(E) \quad \text{als } E \in \Lambda,\ E \subset X - E_o,$$

$$(\psi+\nu)(E)=0, \quad \nu(E)=-|\nu|(E) \quad \text{als } E \in \Lambda,\ E \subset E_o.$$

(Zie voor de def. van $|\nu|$ st.3.1.2; bewezen is reeds in st.3.2.1 dat ν een verschilmaat is).

<u>Bewijs</u>. We hebben $\psi(X) < \infty$ (st.3.2.2). Zij $b_1, b_2, \ldots$ een rij getallen met $-\infty < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < \psi(X)$, $b_i \to \psi(X)$. Volgens st.3.2.2 kunnen we achtereenvolgens $E_1, E_2, \ldots$ kiezen met $E_i \in \Lambda$, $X \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $\psi(X)= \psi(E_1)= \psi(E_2)=\ldots, - \nu(E_1) > b_1, - \nu(E_2) > b_2, \ldots$. Voor alle $E \subset X$ is $- \nu(E) \leq \psi(E) \leq \psi(X)$, dus we vinden dat $- \nu(E_i) \to \psi(X)$.

Zij $\lim E_i=E_o$. Daar $\psi + \nu$ een maat is, en $(\psi+\nu)(E_1) < \psi(E_1)-b_1 < \infty$, is $(\psi+\nu)(E_i) \to (\psi+\nu)(E_o)$ (st.1.5.2). Ook ψ is een maat, en $\psi(E_1) < \infty$, dus $\psi(E_i) \to \psi(E_o)$, zodat $\psi(E_o)= \psi(X)$. We vinden nu dat $\nu(E_i) \to \nu(E_o)$, en dus dat $\nu(E_o)=- \psi(X)$.

Zij nu $E \in \Lambda$, $E \subset X-E_o$. Dan zijn E en E_o disjunct, dus

$\psi(E)+\psi(E_0)=\psi(E+E_0)\leq\psi(X)$. Hieruit volgt $\psi(E)=0$, dus, daar $|\nu| = \nu+2\psi$, geldt $\nu(E)=|\nu|(E)$.

Neem vervolgens $E\in\Lambda$, $E\subset E_0$. $\psi+\nu$ is een maat, dus

$$(\psi+\nu)(E)\leq(\psi+\nu)(E_0).$$

Daar het rechterlid nul is, is het linkerlid het ook.

3.3. De stelling van Radon-Nykodim.

We vragen ons af of het na def.3.1.3 gegeven voorbeeld van een totaal-additieve functie het meest algemene is. Dat is niet zo, zelfs niet als Γ een σ-ring is. In dat voorbeeld is nl. voor alle meetbare E met $\mu(E)=0$ voldaan aan $\nu(E)=0$, en dat behoeft niet voor elke ν het geval te zijn. Onder de voorwaarde dat $\mu(E)=0$ steeds $\nu(E)=0$ impliceert, kunnen we echter de functie als integraal representeren. We nemen eerst aan dat ν zelf ≥ 0 is:

Stelling 3.3.1. Zij Λ een σ-ring in X, waarop μ en ν maten zijn. We nemen aan dat μ σ-finiet is, en dat

$$(E\in\Lambda \ \&\ \mu(E)=0) \Rightarrow \nu(E)=0.$$

Dan is er een μ-meetbare niet-negatieve gegeneraliseerd reële functie f op X, zo dat voor alle $E\in\Lambda$ geldt

$$\nu(E) = \int_X f(x)d\mu .$$

De functie f is op nulfuncties na eenduidig bepaald. Is bovendien $\nu(X)<\infty$, dan is f sommeerbaar.

Bewijs. Daar we X kunnen splitsen in stukken met eindige μ-maat, mogen we direct $\mu(X)<\infty$ onderstellen.

Daar $\mu(X)<\infty$ is, is $\nu-r\mu$ een totaal-additieve functie op Λ, voor elk eindig getal r. Volgens st.3.2.3 is er dus een E_r zó dat

$$E\subset E_r \Rightarrow \nu(E)\geq r\,\mu(E)$$
$$E\subset X-E_r \Rightarrow \nu(E)\leq r\,\mu(E) .$$

Er behoeft niet voldaan te zijn aan $E_r\subset E_s$ voor $r<s$. Daarom definiëren we, voor elk eindig getal $y\geq 0$:

$$F_y = \sum_{r>y} E_r ,$$

waarin r de positieve rationale getallen doorloopt. Dan is wel $F_z\subset F_y$ voor $y<z$. En de F's vervullen nog dezelfde functie: Is

$E \subset X-F_y$, dan is $E \subset X-E_r$ voor elke $r > y$, dus $\nu(E) \leq r\,\mu(E)$ voor elke $r > y$, dus $\nu(E) \leq y\,\mu(E)$. Is anderzijds $E \subset F_y$, dan is E te schrijven als disjuncte som

$$E = \sum_{r > y} E^{(r)} \qquad (E^{(r)} \subset E_r),$$

en daar $\nu(E^{(r)}) \geq r\,\mu(E^{(r)}) \geq y\,\mu(E^{(r)})$ is, blijkt dat $\nu(F_y) \geq y\,\mu(F_y)$.

Laat F_∞ de doorsnede van alle F_y zijn. F_∞ ligt in Λ, want het is de limiet van de rij $F_1, F_2, \ldots$. Is $\mu(F_\infty) > 0$, dan blijkt uit $\nu(F_\infty) > y\,\mu(F_\infty)$ (voor alle y) dat $\nu(F_\infty) = \infty$. Is echter $\mu(F_\infty) = 0$, dan is $\nu(F_\infty) = 0$ op grond van het gegeven. Voor alle $x \in X$ definiëren we

$$f(x) = \sup\{\, y \mid x \in F_y \,\}, \quad \text{dus } 0 \leq f(x) \leq \infty .$$

Dan is f μ-meetbaar, omdat de verzameling $\{x \mid f(x) \geq a\} = F_a$ is voor elke eindige a (st.2.5.1). We merken op dat $f(x) = \infty$ op F_∞ en slechts daar.

Zij nu $E \in \Lambda$, $\nu_1(E) = \int_E f(x)d\mu$. We bewijzen dat $\nu_1(E) = \nu(E)$. We splitsen E als $EF_\infty + E(X-F_\infty)$. Voor EF_∞ geldt weer $\nu(EF_\infty) > y\,\mu(EF_\infty)$ (alle y), dus $\nu(EF_\infty) = \infty$ als $\mu(EF_\infty) > 0$, en weer $\nu(EF_\infty) = 0$ als $\mu(EF_\infty) = 0$. Daar $f = \infty$ op F_∞, gelden dezelfde uitspraken voor ν_1. We kunnen ons verder beperken tot $E(X-F_\infty)$.

Op $X-F_\infty$ kunnen we f insluiten tussen twee trapfuncties. Zij $p > 0$, en

$$f_1(x) = p \max\{\, n \mid x \in F_{np} \,,\; n = 1,2,\ldots \,\}.$$

Gemakkelijk is nu in te zien dat $\nu(E) \leq \int_E f_1(x)d\mu$ als $E \subset X-F_\infty$, en evenzo $\nu(E) \geq \int_E (f_1(x)-p)d\mu$. Daar ook $\nu_1(E)$ tussen deze beide integralen ligt, en $\int_E p\,d\mu \leq p\int_X d\mu = p\,\mu(X) \to 0$ als $p \to 0$, vinden we dat $\nu(E) = \nu_1(E)$.

Als $\nu(X) < \infty$ is, is ook $\nu_1(X) < \infty$, en dat wil zeggen dat f sommeerbaar is.

Dat f op nulfuncties na eenduidig is bepaald, is gemakkelijk in te zien. Is nl. $f_1 \neq f_2$ op een verzameling van positieve μ-maat, dan is bijv. ook $f_1 > f_2$ op een verzameling E van positieve maat. f_2 is eindig op E, dus er is een eindig getal a en een deel E_1 van E, zó dat $f_2 < a$ op E_1 en $\mu(E_1) > 0$. Nu is $\int_{E_1}(f_1-f_2)d\mu > 0$ en $\int_{E_1} f_2 d\mu < \infty$, dus $\int_{E_1} f_1 d\mu \neq \int_{E_1} f_2 d\mu$.

Stelling 3.3.2. (Radon-Nykodim). Laat Λ een σ-ring zijn in X, en μ een σ-finiete maat op Λ (dus $X \in \Lambda$). Zij verder ν totaal-additief op Λ, en zij voldaan aan $(E \in \Lambda \ \& \ \mu(E)=0) \Longrightarrow \nu(E)=0$. Dan is er een meetbare functie f op X, van de vorm f=g-h (g gegeneraliseerd niet-negatief, h sommeerbaar), zó dat voor alle $E \in \Lambda$ geldt

$$\nu(E) = \int_X f(x)d\mu , \qquad |\nu|(E) = \int_X |f(x)|\, d\mu .$$

Bewijs. Volgens stelling 3.2.3 kunnen we X splitsen als X_1+X_2 (disjunct), zó dat $\psi(E)=0$ voor alle $E \subset X_1$, $(\psi+\nu)(E)=0$ voor alle $E \subset X_2$ (X_1, X_2, E behoren alle tot Λ).

We beschouwen nu de σ-ring Λ_1 van alle $E \in \Lambda$ met $E \subset X_1$. Daarop passen we st.3.3.1 toe. Er is dus een meetbare functie $k_1 \geq 0$ op X_1 zó dat

$$\nu(E) = \int_E k_1(x)d\mu \qquad (E \in \Lambda,\ E \subset X_1).$$

Evenzo is er een meetbare functie $k_2 \geq 0$ op X_2, zó dat

$$-\nu(E) = \int_E k_2(x)d\mu \qquad (E \in \Lambda,\ E \subset X_2).$$

Daar $-\nu(E) = \psi(E)$ in dit geval, en $\psi(X_2) < \infty$ (st.3.1.2), is k_2 sommeerbaar.

Neem $f=k_1$ op X_1, $f=-k_2$ op X_2. Zij $E \subset X$, $E \in \Lambda$. Dan is

$$\nu(E) = \nu(EX_1) + \nu(EX_2) = \int_{EX_1} k_1(x)d\mu - \int_{EX_2} k_2(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu$$

$$|\nu|(E) = \nu(EX_1) - \nu(EX_2) = \int_{EX_1} k_1(x)d\mu + \int_{EX_2} k_2(x)d\mu = \int_E |f(x)|\,d\mu .$$

Opmerking. Evenals bij st.3.3.1 kunnen we bewijzen dat f op nulfuncties na eenduidig bepaald is.

3.4. Absolute continuïteit.

Definitie 3.4.1. Laat Γ een semiring zijn met maat μ, en $\nu(A)$ zij gedefinieerd voor alle $A \in \Gamma$. Dan heet ν absoluut continu (t.o.v. μ) als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zó dat voor elk natuurlijk getal n, en voor elk stel van disjuncte verzamelingen $A_1, \ldots, A_n$ uit Γ waarvoor voldaan is aan

$$\Sigma_1^n \mu(A_i) < \delta ,$$

ook voldaan is aan

$$\Sigma_1^n |\nu(A_i)| < \varepsilon .$$

Voorbeeld. Zij $\Gamma = \Lambda$ een σ-ring met maat μ, en f sommeerbaar over X. Laat $\nu(E)$ gedefinieerd zijn door $\nu(E)=\int_E f(x)d\mu$. Dan is ν absoluut continu t.o.v. μ . Kies $\varepsilon > 0$. Zij nu $f_n=\min(|f(x)|,n)$, dan convergeert f_n stijgend naar $|f|$, zodat er een n is met $\int_X (|f|-f_n)d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$. Kies $\delta=\varepsilon/(2n)$. Is dan $E \in \Lambda$, $\mu(E) < \delta$ dan is $|\nu(E)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \int_E f_n d\mu \leq \frac{1}{2}\varepsilon + n\,\mu(E) \leq \varepsilon$.

Definitie 3.4.2. De reële functie $\varphi(x)$, gedefinieerd op een interval J heet absoluut continu als er bij elke ε een δ is, zó dat voor elk eindig stel getallen $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ uit J, met

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y_n$$

$$\Sigma_1^n (y_i - x_i) < \delta$$

voldaan is aan

$$\Sigma_1^n |\varphi(y_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon .$$

Het begrip "interval" wordt in de gewone zin genomen: het bevat uitsluitend eindige getallen.

De klasse der absoluut continue functies dankt zijn bestaansrecht aan st.3.4.3. We merken hier even op dat een absoluut continue functie steeds continu is (neem n=1) en begrensde variatie heeft over elk eindig deelinterval.

Stelling 3.4.1. Zij φ absoluut continu op J. Zij Γ de semiring der cellen $(c,d]$ met $c \in J$, $d \in J$, $c < d$, plus de lege verzameling. We definiëren, als $A \in \Gamma$, $\nu(A)$ door

$$\nu(0) = 0 , \quad \nu((c,d]) = \varphi(d) - \varphi(c).$$

Dan is ν een absoluut continue verschilmaat op Γ .

Bewijs. We laten eerst zien dat ν totaal-additief is. Zij $(c,d]$ disjunct gesplitst: $(c,d] = \Sigma_1^\infty (c_i,d_i]$. Kies ε, daarbij δ volgens def.3.4.2, en daarbij n_0 zo dat $\Sigma_{n+1}^\infty (d_i - c_i) < \delta$ voor $n > n_0$.

Kies een $n > n_0$. Door verandering van de volgorde is te bereiken dat

$$c \leq c_1 < d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \ldots < d_n \leq d ,$$

zodat
$$(c,c_1] + (d_1,c_2]+\ldots+(d_n,d] = \Sigma_{n+1}^{\infty} (c_i,d_i] \, , .$$

en, daar de "gewone" maat een maat is,
$$(c_1-c) + (c_2-d_1) + \ldots + (d-d_n) = \Sigma_{n+1}^{\infty} (d_i-c_i) < \delta.$$

Derhalve is
$$|\varphi(c_1) - \varphi(c)| + \ldots + |\varphi(d) - \varphi(d_n)| < \varepsilon \, ,$$

dus
$$|(\varphi(d)- \varphi(c)) - \{(\varphi(d_1)- \varphi(c_1)) + \ldots + (\varphi(d_n)- \varphi(c_n))\}| < \varepsilon \, ,$$

of
$$|\varphi((c,d]) - \Sigma_1^n \varphi((c_i,d_i])| < \varepsilon .$$

We kunnen dit nu weer met de oorspronkelijke nummering interpreteren, en merken op dat het voor elke $n > n_o$ geldt. Dus
$$\varphi((c,d]) = \Sigma_1^{\infty} \varphi((c_i,d_i]).$$

Dat ν ook een verschilmaat is, is niet moeilijk in te zien. Neem $\varepsilon = 1$, en zij δ_1 de bijbehorende δ . Is $a \in J$, $b \in J$, en
$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b,$$

dan kunnen we elke $(a_i,b_i]$ onderverdelen in cellen met lengte $< \frac{1}{4}\delta$, zodat
$$(a_1,b_1] +\ldots+(a_n,b_n] = (c_1,d_1] +\ldots+(c_N,d_N] \, ,$$

waarbij de cellen in het rechterlid disjunct zijn en elk een lengte $< \frac{1}{4}\delta_1$ hebben. We nemen ze nu in groepen bij elkaar, zó dat de gezamenlijke lengte in een groep $< \delta_1$, doch (hoogstens met uitzondering van één der groepen) $> \frac{1}{2}\delta_1$. Het aantal groepen is dan hoogstens $2(b-a)\delta_1^{-1}+1=M$. We vinden nu
$$\Sigma|\varphi(b_i)- \varphi(a_i)| \leq \Sigma|\varphi(d_j)- \varphi(c_j)| \leq M.$$

door de som in het middelste lid naar de groepen te splitsen. Voor het getal c (dat van $(a,b]$ af mocht hangen) in def.3.1.3 kunnen we dus M nemen.

Tenslotte blijkt de absolute continuïteit van ν direct uit def.3.4.2 en 3.4.1.

<u>Stelling 3.4.2.</u> Zij Γ een semiring in X met $X \in \Gamma$, en μ een σ-finiete maat op Γ. Zij verder ν een absoluut continue verschilmaat op Γ, met $\nu(X) < \infty$. Dan is er een sommeerbare functie f op X, zó dat

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu$$

voor elke $A \in \Gamma$.

<u>Bewijs.</u> We hebben $\nu = (\nu+\psi) - \psi$ op Γ, waarbij $\nu+\psi$ en ψ maten op Γ zijn, en $\psi(A) < \infty$ voor alle $A \in \Gamma$ (st.3.1.2). We laten eerst zien dat ψ absoluut continu is (t.o.v. μ) op Γ.

Zij $\varepsilon > 0$, en δ daarbij gekozen op grond van de absolute continuïteit van ν (def.3.4.1). Laat $A_1,\dots,A_n$ disjuncte elementen van Γ zijn, met $\Sigma\mu(A_i) < \delta$. Dan is $\Sigma\psi(A_i)$ het supremum van

$$\Sigma_{i=1}^{n} \; \Sigma_{j=1}^{N_i} - \nu(A_{ij}),$$

waarin $A_{ij} \in \Gamma$, $A_{ij} \subset A_i$, terwijl alle A_{ij}'s disjunct zijn. Daar $\Sigma\Sigma\mu(A_{ij}) < \delta$, is de uitdrukking waarvan $\Sigma\psi(A_i)$ het supremum is, steeds $< \varepsilon$, zodat $\Sigma\psi(A_i) \leq \varepsilon$. Derhalve is ψ absoluut continu. Dus ook $\nu+\psi$ en $\nu+2\psi = |\nu|$ zijn absoluut continu.

Laat $|\nu|^*$ de door $|\nu|$ voortgebrachte uitwendige maat voorstellen. We zullen bewijzen: is $E \in \Lambda$, $\mu(E)=0$, dan is $|\nu|^*(E)=0$. Zij $\varepsilon > 0$, en $E \subset A_1+A_2+\dots$ een disjuncte overdekking van E, met $\Sigma_1^\infty \mu(A_i) < \delta$, waarin δ het getal is dat bij ε behoort op grond van de absolute continuïteit van $|\nu|$. Dan blijkt dat $\Sigma_1^n |\nu|(A_i) < \varepsilon$ voor elke n, dus $\Sigma_1^\infty |\nu|(A_i) \leq \varepsilon$. Wegens de willekeur van ε blijkt dat $|\nu|^*(E)=0$.

Uit st.1.8.1 volgt nu dat elke $E \in \Lambda$ meetbaar is t.o.v. $|\nu|$, want E is voor te stellen als $\lim P_n - N$, met $P_n \in \mathfrak{R}(\Gamma)$, $\mu(N)=0$, dus $|\nu|(N)=0$.

Wegens $X \in \Gamma$ is $\psi(X) < \infty$ (st.3.1.2). Daar ook $\nu(X) < \infty$ is, is ν σ-finiet. We kunnen dus stelling 3.2.1 toepassen, dus ν voortzetten tot de σ-ring der $|\nu|$-meetbare verzamelingen. Daar speelt ψ weer de door def.3.1.4 aangewezen rol, dus $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ blijft op die σ-ring gelden.

Derhalve geldt: ν is absoluut continu en totaal-additief op Λ; $\nu(E)=0$ voor alle $E \in \Lambda$ met $\mu(E)=0$. Volgens st.3.3.2 is er nu een f zó dat $\nu(E)=\int_E f(x)d\mu$ voor alle $E \in \Lambda$. Daar $\nu(X) < \infty$ is, constateren we dat f sommeerbaar is over X.

<u>Stelling 3.4.3</u>. Laat $\varphi(x)$ absoluut continu zijn op een interval J. Dan is er een functie f, die (t.o.v. de gewone Lebesguemaat) sommeerbaar is over elk eindig deelinterval, terwijl voor alle a,b uit J ($a < b$) geldt dat

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

<u>Bewijs</u>. We verdelen J zo nodig in eindige intervallen J_k met lengten ≥ 1, en passen op elke J_k st.3.4.1 en st.3.4.2 toe.

<u>Opmerking</u>. Men kan nog aantonen dat f de som is van een begrensde en een sommeerbare functie.

Corrigendum

blz.3 regel 12 v.o.: "disjuncte intervallen" moet zijn "disjuncte open intervallen".

blz.6 midden. Toevoegen: onder $\frac{\infty}{a}$ resp. $\frac{-\infty}{a}$ verstaat men $a^{-1}.\infty$ resp. $a^{-1}.(-\infty)$ als a eindig is en $\neq 0$.

blz.7 regel 16 v.b. toevoegen: "en B".
regel 16 v.o.: "disjunst" moet zijn "disjunct".

blz.8 regel 10 v.b.: $(0 \leq a_n \leq \infty)$ moet vervallen.

blz.10 regel 3 van def.1.1.4: "vorm" moet zijn "som".

blz.12 regel 6 van def.1.2.1 moet luiden: φ heet totaal-additief als $0 \in \Sigma$, $\varphi(0)=0$ en bovendien
In def.1.2.2.3^0 moet staan: "voor elk natuurlijk getal n: "

blz.13 In regel 1 moet staan: $\mu(A) \geq \Sigma_1^n \mu(A_i)$.

blz.14 Het slot van voorbeeld 4 moet luiden: (behoudens $0 \leq \mu \leq \infty$ en $\mu(0)=0$).
In voorbeeld 5 regel 3 achter "gedefinieerd" toevoegen "en eindig".
In regel 10 van voorbeeld 5 staat (a,b), dit moet zijn (a,b] .

blz.16 regel 15 v.o.: achter "zo dat" toevoegen: $P_i \supset S_i$ en
Aan het slot van het bewijs van st.1.3.1 toevoegen:
Dat μ^* σ-finiet is, is triviaal.

blz.17 na st.1.4.1 toevoegen: Bewijs: Triviaal.

blz.23: st.1.8.1, regel 3: "voor stijgende rijen" moet zijn "met stijgende rijen".
Het bewijs van st.1.8.1 te vervangen door het volgende:
Bewijs: Zij $E = \Sigma_1^\infty E_i$, $E_i \in \Lambda$, $\mu(E_i) < \infty$. Als n gegeven is, kunnen we bij elke i een $Q_{ni} \in \Omega(\Gamma)$ bepalen zó dat $Q_{ni} \supset E_i$, $\mu(Q_{ni})$ $\mu(E_i)+n^{-1}2^{-i}$ (wegens de definitie van uitwendige maat), dus $\mu(Q_{ni}-E_i) < n^{-1}2^{-i}$. Noem $\Sigma_{i=1}^\infty Q_{ni} = Q_n$, dan is $Q_n \in \Omega(\Gamma)$, $Q_n \supset E$, $\mu(Q_n - E) < n^{-1}$. Zij $Q_1 Q_2 \ldots Q_n = P_n$, dan is P_n $\Omega(\Gamma)$, $P_n \in E$, $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$, $\mu(P_n - E) < n^{-1}$. Hieruit volgt direct dat $\mu(P_n) \rightarrow \mu(E)$

en dat $\mu(\lim P_n - E) = 0$.

blz.24 regel 10 v.o.: $>$ moet zijn $<$.

blz.25 regel 13 v.b. toevoegen: $S = S_1 \times S_2$.

blz.29 st.1.9.5[a] toevoegen: $\sim \alpha\beta \sim \alpha'\beta'$

blz.30 Bewijs van st.1.9.6 vervangen door
Bewijs: $\alpha_1 \times (\alpha_2 \times \alpha_3) \sim \alpha_1 \times (\alpha_2 \alpha_3) \xrightarrow{L} \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \alpha_3)$.

blz.32 regel 4 v.o.: a vervangen door a_i (twee maal);
regel 2.v.o.: De zin die begint met "Bij elke..." vervangen door: Beschouw alle bollen $K_{a,d}$ met $a \in W$, d rationaal, $K_{a,d} \subset V$.

blz.33 regel 12 v.o.: achter "(n+1)-ste cijfer" toevoegen "achter de komma". ε

blz.35 Achter regel 3 v.b. toevoegen "en".
In regels 8,7,6 v.o. moet "open" door "gesloten" worden vervangen.

blz.38 Voorbeeld 3°. Aan het slot van regel 5 toevoegen "$< \varepsilon$". Verder moeten in regels 5,6 en 7 overal de dubbele strepen door enkele worden vervangen. In regel 8 moeten het echter dubbele blijven.

blz.39 St.2.1.3, regel 2: "gelijk" moet zijn "beide convergent".

blz.40 Aan het slot van def.2.2.3 toevoegen: We eisen niet dat de A_i's disjunct zijn.

blz.42 Def.2.2.5, regel 5. Schrappen: "het verschil van"

blz.43 Stelling 2.2.6 is niet geheel correct, en moet vervallen.
St.2.3.2. In het bewijs moet overal m door k worden vervangen; in de tweede regel moet ",$m \geq k$" worden geschrapt.

blz.45 regel 7 v.o. "gemakkelijk" moet zijn "met weinig moeite"

blz.46 regel 12 v.b. De φ moet iets hoger staan.
Regel 3 v.o. Achter "bijna" toevoegen "alle".

blz.47 regel 5 v.b. "$p > i$, $q > i$" moet zijn "$p \geq i$, $q \geq i$".

blz.49 regel 13 v.o. Achter "$s \in T_{\Gamma}^{*}$ " toevoegen "met".
Regel 5 v.o. (en ook verder in de tekst) voor $\int_{x}$ leze men $\int_{X}$.

blz.50 regel 3 van st.2.4.9: achter de d moet een μ staan.

blz.51 regel 18 v.b. Tussen n^{-1} en $f(x)$ moet $<$ staan.

blz.52 regel 3 v.b.: $\leq$ vervangen door $>$.
Regel 6 v.b. vervangen door " $\{ x \mid f(x) \geq a \}$ meetbaar is. Derhalve is ook $\{ x \mid f(x) < a \}$ meetbaar. Pas nu st.2.5.1 toe".
Regel 11 v.o.: "$0 \leq y < \infty$ " moet zijn "$0 < y < \infty$ ".
Onderaan: V_f moet zijn V_f^{*} .

blz.53 regel 13 v.b.: sluithaakje plaatsen achter $X \times R$.

blz.57 regel 2 v.b.: "is absoluut convergent" vervangen door "is een absoluut convergente reeks".

blz.59 regel 9 v.o.: "linkerlid" moet zijn "rechterlid".

blz.60 st.2.7.4. Toevoegen aan het begin van het bewijs: Volgens st.2.3.1 is $\|f\|$ een meetbare functie op $X \times Y$.

blz.61 De regel na de formule in opm.1 vervangen door: "als f meetbaar is en $0 \leq f \leq \infty$, en ook als f meetbaar is, zijn waarden in B heeft en".

blz.62 In st.2.8.1 na "sommeerbaar" toevoegen "en begrensd".
In def.2.8.2, regel 4 moet onder het tweede lim staan $b \to \infty$.
Regel 2 v.o. De bovengrens van de integraal moet ∞ zijn.

blz.65 regel 4 v.o.: Schuine streep vóór y^{p-1} wegschrappen.

blz.68 regel 3 v.b.: g moet zijn g_+ (twee maal).
Regel 7 v.b.: idem.
St.2.10.5 : De woorden "f overal linkscontinu, g overal rechtscontinu" moeten geschrapt worden. In de formule moet tweemaal boven (a,b) een integraalteken worden geplaatst.

blz.70 regel 10 v.b.: In het tweede lid een minteken plaatsen vóór h(x).

blz.73 regel 7 v.b.: Achter "met" toevoegen "$F_i \in \Gamma_i$ en".

blz.75 De in het bewijs van st.3.3.1 gebruikte notatie is niet in overeenstemming met die van st.3.2.3. De E_r uit st. 3.2.3 gaat voor $r=0$ over in de $X-E_0$ uit st.3.2.3.
Regel 5 v.o.: $r < s$ moet zijn $r > s$.

blz.76 regel 2.v.b.: $\underline{\gtrless}$ moet zijn $\leq$.
Regel 12 v.o. $\leq$ moet zijn $\geq$.
Regel 11 v.o. $\geq$ moet zijn $\leq$.
$f_1(x)-p$ moet zijn $f_1(x)+p$.

blz.79 In regel 10 v.b. en in regel 13 v.b. (dat zijn de formules direct boven en onder de zin "We kunnen dit nu weer...") moeten de φ's worden vervangen door ν's.