STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 47

Colloquium meetkunde der getallen.

C.G.Lekkerkerker en P.Mulelender.

1959

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

ZC 47

Colloquium Meetkunde der Getallen.

1958/59

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

MG 1
1958/59

Colloquium Meetkunde der getallen

Inleidende voordracht op 24 oktober 1958
door
Dr C.G. Lekkerkerker

1. In de meetkunde der getallen heeft men in eerste instantie te maken met probleemstellingen van de volgende aard: zijn er gehele getallen $u_1, u_2, \dots, u_n$, niet alle o, die voldoen aan een ongelijkheid $|F(u)|=|F(u_1,u_2,\dots,u_n)|\leq\lambda$, waarbij F een gegeven (homogene) functie van n veranderlijken is en λ een positief getal is. Deze vraag is aequivalent met de vraag of het gebied $K_\lambda = \{x \,|\, |F(x)|\leq \lambda\}$ in de n-dimensionale, cartesische ruimte R_n een roosterpunt $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\neq o$ bevat.

Het historisch belangrijkste geval is dat van een positief definiete kwadratische vorm

$$Q(x) = \sum_i \sum_j a_{ij}x_i x_j \; . \tag{1}$$

Zo'n vorm is te schrijven als som van n kwadraten.

$$Q(x) = (b_{11}x_1+\dots+b_{1n}x_n)^2+\dots+(b_{n1}x_1+\dots+b_{nn}x_n)^2. \tag{2}$$

Verder stelt $Q(x)\leq\lambda$ een ellipsoïde in R_n voor, met middelpunt in o; het is dus een begrensd, convex lichaam, met middelpunt in de oorsprong o (<u>o-symmetrisch</u>). Voor zulke lichamen heeft Minkowski de volgende fundamentele stelling bewezen:

<u>Stelling</u>. Zij K een begrensd, convex, o-symmetrisch lichaam in R_n. Laat K volume $> 2^n$ hebben. Dan bevat K een roosterpunt $u\neq o$.

Past men deze stelling toe op ellipsoïden, dan vindt men dat in het bovenstaande probleem niet-triviaal oplosbaar is $Q(u)\leq 4w_n^{-2/n}D^{1/n}$, waarin $w_n=\pi^{n/2}/\Gamma(1+\frac{n}{2})$ de inhoud van de eenheidsbol in R_n is en D de coëfficiëntendeterminant van de kwadratische vorm Q(x) is.

2. We willen algemeen de homogene functies van graad 1 karakteriseren die tot begrensde, convexe, o-symmetrische lichamen leiden. We gebruiken vectornotatie: x+y, λK, enz. Zij nog eens Q(x)

een positief definiete kwadratische vorm en stellen we $\sqrt{Q(x)}=f(x)$. Dan heeft $f(x)$ de volgende eigenschappen:

1. $f(x) \geqq 0$ en $=0$ alleen als $x=o$
2. $f(-x) = f(x)$ (even)
3. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ als $\lambda > 0$ (homogeen van graad 1)
4. $f(x+y) \leqq f(x) + f(y)$ (driehoeksongelijkheid)
5. $f(x)$ is eindigwaardig.

De eigenschap 4. volgt door $Q(x)$ te schrijven als som van kwadraten, stel $\sum \bar{x}_i^{\,2}$, en de driehoeksongelijkheid voor de gewone, euclidische afstand op te schrijven:

$$\sqrt{\sum(\bar{x}_i+\bar{y}_i)^2} \leqq \sqrt{\sum\bar{x}_i^{\,2}} + \sqrt{\sum\bar{y}_i^{\,2}} .$$

We beschouwen nu algemeen een functie $f(x)$ die aan de eisen 1-5 voldoet. Uit 3-5 volgt dat $f(x)$ begrensd is op de (hyper)kubus: $|x_i| \leqq 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, of wel op de eenheidsbol, en zelfs dat $f(x)$ continu is. Zij nu $K = \{x \mid f(x) \leqq 1\}$. Dan geldt:

a. als $x \in K$, dan ook $-x \in K$
b. als $x \in K$ en $y \in K$, dan ook $\vartheta x+(1-\vartheta)y \in K$ voor $0 \leqq \vartheta \leqq 1$
c. o is inwendig punt van K
d. K is begrensd.

D.w.z. K is een o-symmetrisch, convex, begrensd lichaam met o als inwendig punt. Hierbij is b. een gevolg van 3. en 4., volgt c. uit de begrensdheid van $f(x)$ op de eenheidsbol en berust d. op het feit dat $f(x)$ een positief minimum heeft op de rand van de eenheidsbol (1. en de continuïteit van $f(x)$). Wegens de continuïteit van $f(x)$ is K ook gesloten.

Omgekeerd geldt: als een lichaam K voldoet aan de eisen a-d, dan is er een functie $f(x)$ die voldoet aan 1-5, zodanig dat de verzameling $\{x \mid f(x) \leqq 1\}$ de afsluiting $\bar{K}$ van K is. Om dit in te zien definiëre men $f(x)$ voor $x \neq o$ als volgt:

(3) $$f(x) = \inf \lambda \quad , \text{ met } x \in \lambda K.$$

We noemen een functie $f(x)$ die aan 1-5 voldoet een <u>convexe afstandsfunctie</u> (Minkowskische metriek). Het is duidelijk dat voor verschillende λ de lichamen $\{x \mid f(x) \leqq \lambda\}$ homothetisch zijn. Het volume van zo'n lichaam is gelijk aan λ^n maal het volume van het ijklichaam $K = \{x \mid f(x) \leqq 1\}$. De stelling van Minkowski kan nu ook als volgt uitgedrukt worden:

Stelling. Zij $f(x)$ een convexe afstandsfunctie (op R_n) en zij J het volume van het ijklichaam $\{x \mid f(x) \leq 1\}$. Dan is er een roosterpunt $u \neq o$ met $f(u) \leq \lambda$, als maar $\lambda^n J > 2^n$.

3. Zij weer $f(x)$ een continue afstandsfunctie, behorende bij een lichaam K. Zij λ_1 de kleinste waarde die $f(x)$ aanneemt voor een roosterpunt $u \neq o$ (homogeen minimum). Dan volgt uit de laatste stelling onmiddellijk dat

(4) $$\lambda_1{}^n J \leq 2^n.$$

Deze betrekking kan gegeneraliseerd worden. Zij λ_i het kleinste positieve getal, waarvoor er tenminste i onafhankelijke roosterpunten u zijn met $f(u) \leq \lambda_i$, of wel $u \in \lambda_i \bar{K}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Zulke getallen zijn er, omdat een willekeurig roosterpunt u voor voldoend grote waarden van λ in λK ligt. Het is verder duidelijk dat $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Er geldt nu

(5) $$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n J \leq 2^n .$$

De getallen λ_i heten de successieve minima van K.

De betrekkingen (4) en (5) kunnen niet verscherpt worden. Neemt men b.v. voor K de kubus $|x_i| \leq 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, dan hebben we $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1$ en $J=2^n$. In dit geval is $f(x)=\max_i |x_i|$.

4. We beschouwen roosterstapelingen van o-symmetrische, convexe lichamen. Voor een willekeurig o-symmetrisch, convex lichaam K en een willekeurig roosterpunt u geven we met $K+u$ aan het lichaam dat uit K ontstaat door verplaatsing over de vector u. Onderstel eens dat K met één der lichamen $K+u$ $(u \neq o)$ een punt x gemeen heeft. Dan is dus $x \in K$ en $x \in K+u$, dus $x-u \in K$. Wegens de o-symmetrie van K is ook $u-x \in K$. Wegens de convexiteit van K is dan

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}(u-x) = \tfrac{1}{2}u \in K, \text{ dus } u \in 2K.$$

Als omgekeerd $u \in 2K$, dan is $\frac{1}{2}u \in K$ en ook $-\frac{1}{2}u \in K$, dus $\frac{1}{2}u \in K+u$.

We merken verder op: als K met géén der lichamen $K+u$ een punt gemeen heeft, dan hebben ook de lichamen $K+u$ twee aan twee géén punt gemeen, m.a.w. dan is het stelsel lichamen $\{K+u\}$ "gestapeld". We hebben hiermee gevonden: het stelsel lichamen $\{K+u\}$ is dan en slechts dan gestapeld, als het lichaam $2K$ geen roosterpunt $u \neq o$ bevat. Dit betekent ook dat $\frac{1}{2}\lambda_1$ de bovenste grens is van de getallen $\lambda > 0$, waarvoor $\{\lambda K+u\}$ een stapeling is.

5. Naast de stapelingen kunnen we ook overdekkingen beschouwen. Zij weer K een o-symmetrisch, convex lichaam en onderstel dat de ruimte R_n overdekt wordt door de lichamen $K+u$ (u een roosterpunt). Zij x een willekeurig punt. Dan is er een roosterpunt u met $x \in K+u$, dus $x-u \in K$. Voor de bijbehorende afstandsfunctie $f(x)$ betekent dit dat bij elk punt $x \in R_n$ een punt x' bestaat, zodanig dat

$$f(x') \leqq 1 \text{ en } x_i' \equiv x_i \pmod 1 \quad \text{voor } i=1,2,\ldots,n \;.$$

Als omgekeerd deze eigenschap geldt, dan geven de lichamen $K+u$ een overdekking van de ruimte.

We verstaan nu onder het inhomogene minimum van een gegeven convexe afstandsfunctie $f(x)$ het kleinste getal $\sigma_0 > 0$ met de volgende eigenschap: bij elk punt $x \in R_n$ bestaat een punt x' met

$$(6) \qquad f(x') \leqq \sigma_0 \text{ en } x_i' \equiv x_i \pmod 1 \text{ voor } i=1,2,\ldots,n \;.$$

Dit getal σ_0 is tevens de onderste grens van de getallen $\sigma > 0$, waarvoor de ruimte overdekt wordt door de lichamen $\sigma K+u$.

6. Voor de grootheid σ_0 geldt een soort analogon van de stelling van Minkowski, en wel in het bijzonder een analogon van de ongelijkheid (4). We hebben nl.

$$(7) \qquad \sigma_0{}^n J \geqq 1.$$

Maar we zijn doorgaans meer geïnteresseerd in bovengrenzen voor σ_0. Zo'n bovengrens wordt b.v. geleverd door de volgende relatie van Jarník:

$$(8) \qquad \sigma_0 \leqq \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n) \;.$$

Het eenvoudigste geval, waaraan we deze relatie kunnen illustreren, is dat alle λ_i gelijk aan 1 zijn en dat een stelsel van n onafhankelijke roosterpunten in $\overline{K}$ gegeven wordt door de punten $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ met $e^{(i)}=(\delta_{1i},\delta_{2i},\ldots,\delta_{ni})$; in dat geval bevat $\overline{K}$ de kubus $|x_i| \leqq 1/n$ $(i=1,2,\ldots,n)$ en dus $\frac{n}{2}\overline{K}$ een kubus met ribbelengte 1 en ribben evenwijdig aan de coördinaatassen.

Uit (8) kan men onder gebruikmaking van (5) een bovengrens voor σ_0 afleiden, die alleen van J en het homogene minimum λ_1 afhangt. En wel volgt uit (5), (8) en de triviale ongelijkheden $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ dat

$$(9) \qquad \sigma_0 \leqq \left\{ 1+(n-1)(\lambda_1/2)^n J \right\} . \ (2/\lambda_1)^{n-1} J^{-1} = (2/\lambda_1)^{n-1} J^{-1} + \frac{n-1}{2} \lambda_1 .$$

Men merke op dat de uitdrukking $(\lambda_1/2)^n J$ hoogstens 1 is, wegens (4). Formule (9) weerspiegelt het feit dat het inhomogene minimum des te groter is, naarmate het homogene minimum λ_1 kleiner is.

Hlawka weet (9) te verscherpen tot

$$(10) \qquad \sigma_0 \leqq \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cdot \left\{ \left[(2/\lambda_1)^n J^{-1} \right] + 1 \right\} .$$

De bewijsmethode bestaat in het toepassen van de stelling van Minkowski op een geschikt gekozen convex lichaam in R_{n+1}.

<u>Colloquium Meetkunde der getallen</u>

h.Ar.C.

1. Stelling van Minkowski.

Is K een begrensd, gesloten, O-symmetrisch, convex lichaam in de R^n met volume $V(K) \geqslant 2^n$, dan bevat K minstens één roosterpunt ongelijk O.

<u>Bewijs</u> (Birkhoff): Geval $V(K)=2^n$ volgt uit $V(K) > 2^n$. Beschouw $\frac{1}{2}K$. Dit wordt door de roostervlakken in eindig aantal deellichamen verdeeld, die door translatie in een roosterkubus overgebracht kunnen worden. De som van de volumina van de verplaatste deellichamen is groter dan het volume van de roosterkubus, zodat er een punt is dat in twee deellichamen zit. Dit beantwoordt aan twee punten x en y in $\frac{1}{2}K$ met gehele coördinatenverschillen.

Algemeen geldt dus:

<u>Stelling van Blichfeldt</u>: Is M willekeurige verzameling met $V(M) > 1$, dan zijn er twee punten met gehele coördinatenverschillen.

In K liggen dan 2x en 2y. Wegens symmetrie ook -2y. Wegens convexiteit ook $\frac{2x-2y}{2} = x-y$, een roosterpunt ongelijk O. q.e.d.

2. Stelling van Mordell-Van der Corput.

Is M Jordanmeetbare verzameling in R^n met $V(M) > k_1 k_2 \ldots k_n$ $(k_i > 0)$ en heeft M de eigenschap dat als (u_i) en (u_i') in M dan $\left(\frac{u_i - u_i'}{k_i}\right) \in N$, dan bevat N roosterpunt naast O.

<u>Bewijs</u>: t natuurlijk getal. A_t is aantal punten in M van de vorm $\left(\frac{k_i u_i}{t}\right)$, u_i geheel. Dan: $\frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{t^n} A_t \to V(M)$ dus o.d.d. $A_t > t^n$. De beschouwde roosterpunten (u_i) behoren tot maximaal t^n restklassen mod. t. Dus zijn er minstens twee punten (u_i) en (u_i') met $u_i - u_i'$ geheel, ongelijk O. Daar $\left(\frac{k_i u_i}{t}\right)$ en $\left(\frac{k_i u_i'}{t}\right)$ tot M behoren, is $\left(\frac{u_i - u_i'}{t}\right)$ punt van N. q.e.d.

<u>Opmerking</u>. N begrensd, gesloten, dan mag $V(M) \geqslant k_1 k_2 \ldots k_n$.

$k_i = 2$, N=M geeft Minkowski.

3. Methode van Remak.

<u>Bewijs</u> van de stelling van Blichfeldt: Voor $x \in R^n$ wordt gedefinieerd:

$\varphi(x) = \sum_u \chi_M (x+u)$ waarbij u het rooster doorloopt. Dan is:
(E=eenheidskubus) $\int_E \varphi(x)dx = \int_E \sum_u \chi_M (x+u)dx = \int_{R^n} \chi_M(x)dx = V(M) > 1$,

dus er is een x met $\varphi(x) > 1$, dus $\varphi(x)$ minstens gelijk aan 2. Er zijn dus u_1 en u_2 met $\chi(x+u_1)=\chi(x+u_2)=1$. Dus in M twee punten met gehele coördinatenverschillen. q.e.d.

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 12 december 1958

door

M. Kuyk-Zuidema

We gaan uit van de volgende veronderstellingen:

R_n zij de n-dimensionale euclidische ruimte.
R zij een rooster, gedefinieerd in R_n.
De determinant van R zij 1.
$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ zij een roosterpunt $\neq 0$.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zij een willekeurig punt in R_n.
$f(x)$, een functie gedefinieerd in R_n zij de afstandsfunctie van een lichaam K: $\{ x \mid f(x) \leq 1 \}$.
K zij begrensd, convex, symmetrisch om O.
Volume van K zij J.
$a + K$ is de verzameling van alle punten $a+x$ met x K
λK is de verzameling van alle punten λx met $x \in K$.

Inhomogeen Minimum.

Def.I. x is een willekeurig punt uit R_n.
Beschouw de verzameling $x + \sigma k$, waarvoor geldt:
$x + \sigma k$ bevat minstens één roosterpunt.
Het kleinste positieve getal σ, dat deze eigenschap heeft heet het inhomogene minimum σ_0.

Def.II. x is een willekeurig punt uit R_n.
$x' \equiv x \pmod 1$.
$x' \in \sigma k$.
Het kleinste positieve getal σ met deze eigenschap is σ_0.

Def.III. x is een willekeurig punt uit R_n.
Beschouw alle punten x', welke door roostertranslatie van R uit x ontstaan

$$E(x) = \min_{x'} f(x')$$

$$\sigma_0 = \sup_x E(x) .$$

Bewering: Deze definities zijn aequivalent.

Successieve Minima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Definitie. λ_i is het kleinste positieve getal, waarvoor $\lambda_i K$ minstens i onafhankelijke roosterpunten $u', \ldots U^i$ bevat.

Stelling. $\frac{1}{2}\lambda_n \leq \sigma_o \leq \frac{1}{2}\ (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \leq \frac{n}{2}\ \lambda_n$.

Bewijs. a) Zij $b = (b_1, \ldots, b_n)$ een punt van K, zó dat b_n maximaal is.
Beschouw het punt $-\frac{1}{2}\lambda_n \cdot b$, een punt in $\frac{1}{2}\lambda_n \cdot K$.
Beschouw de verzameling $-\frac{1}{2}\lambda_n b + \sigma K$.
Deze moet een roosterpunt g bevatten: $g \in \frac{1}{2}\lambda_n b + \sigma K$, d.w.z. bij g is een punt $z \in K$, zodanig, dat

$$g = -\frac{1}{2}\lambda_n b + \sigma . z$$

dan $\quad g \in (\frac{1}{2}\lambda_n + \sigma)K$.

Veronderstel, dat $\frac{1}{2}\lambda_n > \sigma_o$

dan is $\quad g \in \lambda K$ met $\lambda < \lambda_n$

dan is $\quad g_n = 0 = \frac{1}{2}\lambda_n\ b_n + \sigma . z_n$

gevolg: $\quad z_n < b_n \qquad$ tegenspraak.

b) De punten $O, u', u^2, \ldots, u^n$ vormen een basis.
Een punt $x \in R_n$ is als volgt te schrijven:

$$x = m_1 u' + \ldots + m_n u^n. \qquad m_i \text{ willekeurig.}$$

Bij deze m_i zijn gehele getallen g_i te vinden, waarvoor geldt:

$$m_i = g_i - t_i \text{ met } |t_i| \leq \frac{1}{2}.$$

Het punt $a = g_1 u' + \ldots + g_n u^n$ is een roosterpunt $\in x + \sigma K$

$$a = x + t_1 u' + \ldots + t_n u^n$$

$$a - x = t_1 u' + \ldots + t_n u^n \in \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)K .$$

σ_o is het kleinste positieve getal σ, waarvoor nog geldt $(a-x) \in \sigma K$ dus $\sigma_o \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

c) $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \leq \frac{1}{2}(\lambda_n + \ldots + \lambda_n) = \frac{n}{2} \cdot \lambda_n$

q.e.d.

<u>Stelling.</u> $\sigma_0 \leq (\frac{2}{\lambda_1})^{n-1} J^{-1} \left\{ 1+(n-1)(\frac{\lambda_1}{2})^n J \right\}.$

<u>Bewijs.</u> $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$

$$\sigma_0 \leq \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n) \qquad (1)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n J \leq 2^n. \qquad (2)$$

De ongelijkheid (1) blijft geldig, als de $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ zo ongunstig mogelijk gekozen worden: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-1}$.
In dit geval wordt (3): $\lambda_1^{n-1} \cdot \lambda_n \cdot J \leq 2^n$

$$\lambda_n \cdot J \leq \frac{2^n}{\lambda_1^{n-1}},$$

en (2): $\sigma_0 \leq \frac{1}{2}(n-1)\ \lambda_1 + \lambda_n \leq$

$$\leq \tfrac{1}{2}(n-1)\ \lambda_1 + \frac{2^n}{J(\lambda_1)^{n-1}}$$

$$= (\frac{2}{\lambda_1})^{n-1} J^{-1}. \left\{1 + (n-1)(\frac{\lambda_1}{2})^n J \right\}$$

q.e.d.

<u>Stelling.</u> $\sigma_0 \leq \frac{1}{2}\lambda_1 \left\{ \left[(\frac{2}{\lambda_1})^n J^{-1} \right] + 1 \right\}.$

<u>Bewijs.</u> Schrijf $(\frac{2}{\lambda_1})^n J^{-1} = v.$

Schrijf $\{v\} = [v] + 1$,
dan geldt $[v] \leq v < \{v\}$.
<u>Hulpstelling</u>: $\sigma_0 \leq \frac{1}{2}\lambda_1 \cdot v^{1/n} \cdot \{v\}^{1-1/n}$.
<u>Bewijs hulpstelling</u>: Schrijf $[v] = l$, dan is $\{v\} = l+1$.

Voer in $\lambda = \left\{ \frac{2^n}{J(l+1)} \right\}^{1/n}$

Dan is $\lambda < \lambda_1$, want

$$\lambda = \left\{ \frac{2^n}{J\{v\}} \right\}^{1/n} < \left\{ \frac{2^n}{J.v} \right\}^{1/n} = \left\{ \frac{2^n}{J.2^n} J\ \lambda_1^n \right\}^{1/n} = \lambda_1 .$$

We gaan over van R_n op R_{n+1}:

$u = (u_1,\ldots,u_n)$ is een roosterpunt uit R_n.

Neem u_{n+1}= geheel getal, onafhankelijk van $u_1,\ldots,u_n$.

Definitie. Noem $(u_1,\dots,u_n,u_{n+1})$ een roosterpunt uit R_{n+1}.
Punt $x=(x_1,\dots,x_n)$ uit R_n geven we aan in vectornotatie.
Punt X uit R_{n+1} geven we aan door x,x_{n+1}, waarin dan $x\in R_n$.
Neem een willekeurig punt $P\in R_n$, met vector p.
Beschouw de cylinder Z(K), welke als volgt gedefinieerd is:

$$f\left(\frac{2x_{n+1}}{l+1}\cdot p-x\right)\leq\lambda;\quad |x_{n+1}|\leq l+1.$$

Volume van de cylinder is: $\lambda^n . J\times 2(l+1) = 2^{n+1}$.
Dus Z(K) bevat een roosterpunt $u,u_{n+1}\neq 0\in R_{n+1}$.

Twee mogelijkheden: 1) u,u_{n+1} is een inwendig roosterpunt.
2) u,u_{n+1} is een roosterpunt op de rand van Z(K)

1) u,u_{n+1} inwendig roosterpunt, dus

$$f\left(\frac{2u_{n+1}}{l+1}\cdot p-u\right)<\lambda;\quad |u_{n+1}|<l+1$$

Bewering: $u_{n+1}\neq 0$,
anders is $f(u)<\lambda<\lambda_1$, in tegenspraak met de definitie van λ_1.
Zonder beperking van de algemeenheid kunnen we $u_{n+1}>0$ nemen.
Verder is u_{n+1} geheel, dus

$$u_{n+1}\geq 1.$$

Neem aan, dat $\min_{p'} f(p')$ juist in punt P aangenomen wordt (zie def.III), d.w.z. $f(p)\leq f(p-u)$.

$$f(p)\leq f(p-u) = f\left(p-\frac{2u_{n+1}}{l+1}p+\frac{2u_{n+1}}{l+1}\cdot p-u\right)<$$

$$<\left|1-\frac{2u_{n+1}}{l+1}\right|\cdot f(p)+\lambda\leq\frac{l-1}{l+1}f(p)+\lambda.$$

$$f(p)\leq\tfrac{1}{2}(l+1)\cdot\lambda \qquad (1)$$

2) $u,\ u_{n+1}$ op de rand van Z(K).
Beschouw dan de cylinder $\frac{1}{2}Z(K)$.
De ruimte R_{n+1} wordt nu overdekt door de cylinders $\frac{1}{2}Z(K)+u,u_{n+1}$, waarin u_1u_{n+1} een willekeurig roosterpunt voorstelt.
Dus ook het punt $0,\frac{1}{2}$ wordt overdekt.

Dat betekent dat er een u, u_{n+1} is met:

$$f\left(\frac{2(u_{n+1}-\frac{1}{2})}{l+1}\cdot p-u\right)\leq \tfrac{1}{2}\lambda \ , \ \left|u_{n+1}-\tfrac{1}{2}\right|\leq \tfrac{1}{2}(l+1).$$

Weer geldt $(u_{n+1}-\frac{1}{2})\neq 0$.
Zonder beperking van de algemeenheid mogen we $2u_{n+1}-1 \geq 1$ stellen. Dan vinden we:

$$f(p)\leq f(p-u)\leq \frac{1}{l+1} f(p) + \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$f(p)\leq \tfrac{1}{2}\lambda(l+1) \qquad . \qquad (1)$$

Dus in beide gevallen vinden we hetzelfde resultaat (1).
Nu is $\sigma_o = \sup_p E(p)$.
Voor alle punten $p \in R_n$ geldt de betrekking (1).
Dus ook voor σ_o .

$$\sigma_o \leq \tfrac{1}{2}\lambda\,(l+1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{2^n}{J(l+1)}\right\}^{1/n}(l+1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2^n}{J\lambda_1^{\,n}}\right)^{1/n}(l+1)^{1-1/n}\lambda_1^{1/n} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda_1 . v^{1/n} . \{v\}^{1-1/n} \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Gevolg</u>: $\sigma_o \leq \frac{1}{2}\lambda_1 \cdot v^{1/n}\{v\}^{1-1/n} < \frac{1}{2}\lambda_1\{v\} =$

$$= \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cdot \left\{\left[\frac{2^n}{J\lambda_1^{\,n}}\right]+1\right\}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 23 januari 1959 door

Mej. E. Dobber

2e stelling van Minkowski

K is een begrensd, gesloten, o-symmetrisch convex lichaam in R_n.
f(x) is een continue afstandsfunctie, behorende bij K, d.w.z.
$F(x) = \min \lambda$ met $x \in \lambda K$, of $K = \{ x \mid F(x) \leq 1 \}$.

Zij λ_i het kleinste positieve getal λ, zodat λR i onafhankelijke roosterpunten bevat.
λ_i heet het i-de successieve minimum van K.
Nu geldt, als J het volume van K is:

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n J \leq 2^n.$$

Er wordt een coordinaten-transformatie toegepast van de gedaante:

$x_i' = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 \ldots t_{in}x_n$, waarbij t_{ij} gehele getallen zijn en $\det(t_{ij}) = \pm 1$,

dan is $x_i = s_{i1}x_1' + s_{i2}x_2' \ldots + s_{in}x_n'$, waarbij s_{ij} ook gehele getallen zijn, omdat $\det(t_{ij}) = \pm 1$.

Dus roosterpunten in het ene stelsel geven roosterpunten in het andere stelsel en omgekeerd. Nu is het mogelijk de transformatie van bovenstaand type toe te passen zodat n lineair onafhankelijke roosterpunten $u^{(1)} \ldots u^{(n)}$ nieuwe coordinaten van het type $(u_{i1}', u_{i2}' \ldots u_{ii}', 0, 0 \ldots 0)$ hebben. Daarom nemen we aan, dat de roosterpunten die de successieve minima geven de coordinaten

$u^{(i)} = (u_{i1}, u_{i2} \ldots u_{i,i}, 0, \ldots 0)$ hebben.

<u>Lemma 1</u>: Als u een roosterpunt is, en $F(u) < \lambda_J$, dan is $u_J = u_{J+1} \ldots = u_n = 0$.

<u>Gevolg</u>: Als $x'' - x'$ roosterpunt is, en $F(x') < \frac{1}{2}\lambda_J$ en $F(x'') < \frac{1}{2}\lambda_J$, dan is $x_i' = x_i''$ voor $J \leq i \leq n$.

We definieren: $W_o(\lambda) = \lambda K$.

$W_J(\lambda)$ is de verzameling $(\{x_1\}, \ldots \{x_J\}, x_{J+1} \ldots x_n)$ waarbij $(x_1 x_2 \ldots x_n) \lambda K$. $\{x_i\} = x_i - [x_i]$.

Noem volume van $W_J(\lambda)$ $V_J(\lambda)$.

Als nu $\lambda \geqslant \lambda'$ geldt: $\lambda K \supset \lambda' K$, dus

$$V_J(\lambda) - V_J(\lambda') \leqslant (\lambda^n - \lambda'^n) J .$$

Dus $V_J(\lambda)$ vermeerdert continu met λ.

$W_n(\lambda)$ ligt geheel in de eenheidskubus, dus $V_n(\lambda) \leqslant 1$ (voor alle λ).

Lemma 2: $V_n(\lambda) = V_J(\lambda)$ als $\lambda \leqslant \frac{1}{2}\lambda_{J+1}$ $(J < n)$.

Lemma 3: Laat S een lichaam zijn binnen de J dimensionale kubus $0 \leqslant x_i < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant J)$ en S' de verzameling punten $(\{b_i + x_i\})$ $(1 \leqslant i \leqslant J)$, waarbij $(b_1 \ldots b_J)$ vast is en $(x_1 \ldots x_J) \in S$.

Dan is het volume van S gelijk aan het volume van S'.

Lemma 4:

$$V_J(\lambda) \geqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^{n-J} V_J(\lambda') \text{ als } \lambda \geqslant \lambda'.$$

Conclusie:

$$V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_1) = V_0(\tfrac{1}{2}\lambda_1) = (\tfrac{1}{2}\lambda_1)^n J$$

$$V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_2) \geqslant \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1} V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_1)$$

$$V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_3) \geqslant \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{n-2} V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_2).$$

$$\vdots$$

$$V_n(\tfrac{1}{2}\lambda_n) \geqslant 2^{-n} \lambda_1 \ldots \lambda_n J,$$

dus

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n J \leqslant 2^n.$$

Opmerkingen: 1. $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ldots \leqslant \lambda_n$ dus $(\lambda_1)^n J \leqslant 2^n$.

Dit volgt ook uit de eerste stelling van Minkowski. En omgekeerd volgt de eerste stelling van Minkowski ook uit de tweede.

2. Het product $\lambda_1 \ldots \lambda_n J$ heeft ook een onderste grens, n.l. $\frac{2^n}{n!}$.

Dus $\frac{2^n}{n!} \leqslant \lambda_1 \ldots \lambda_n J \leqslant 2^n$.

Het lichaam bevat het polyeder, dat het convexe omhulsel is van de 2n punten $\pm \frac{1}{\lambda_i} u^{(i)}$.

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 6 februari 1959 door

Prof.Dr P. Mullender

I. Roosters

Definitie. Onder een m-dimensionaal homogeen rooster in de n-dimensionale ruimte R_n van de punten $x=(x_1,\dots,x_n)$ verstaan we een puntverzameling Λ met de volgende eigenschappen:

I. $x \in \Lambda$, $y \in \Lambda \Rightarrow x-y \in \Lambda$

II. Λ heeft geen verdichtingspunt

III. Λ bevat m punten, doch niet meer dan m, die tezamen met de oorsprong $O=(0,\dots,0)$ een lineair onafhankelijk systeem vormen; d.w.z. Λ bevat m punten $x^{(1)},\dots,x^{(m)}$, zodanig, dat de betrekking

$$a_1x^{(1)}+\dots+a_mx^{(m)}=0$$

alleen geldt voor reële getallen $a_1,\dots,a_m$, als $a_1=\dots=a_m=0$, terwijl voor ieder punt x van Λ geldt

$$x = a_1x^{(1)}+\dots+a_mx^{(m)}$$

met reële getallen $a_1,\dots,a_m$ (die blijkbaar ondubbelzinnig bepaald zijn door de keuze van het punt x).

Onder een m-dimensionaal (inhomogeen) rooster verstaan we een puntverzameling Λ, die door een translatie $x'=x+\bar{x}$ ($\bar{x}$ een geschikt te kiezen vast punt) uit een m-dimensionaal homogeen rooster wordt verkregen.

Bovenstaande definitie is aequivalent met de definitie van een m-dimensionaal homogeen rooster als de verzameling van alle punten x, die voldoen aan een betrekking

$$x = u_1y^{(1)}+\dots+u_my^{(m)}$$

met gehele getallen $u_1,\dots,u_m$, waarbij $y^{(1)},\dots,y^{(m)}$ vaste punten zijn met een coördinatenmatrix van de rang m.

M.a.w.: Ieder homogeen m-dimensionaal rooster Λ bevat m punten $y^{(1)},\dots,y^{(m)}$ met de eigenschap, dat een punt x uit R_n dan en slechts dan tot Λ behoort als

$$x = u_1 y^{(1)} + \ldots + u_m y^{(m)} \qquad (1)$$

met gehele getallen $u_1, \ldots, u_m$.

De punten $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ vormen tezamen met O een lineair onafhankelijk systeem en men noemt ze een basis van Λ. (De getallen $u_1, \ldots, u_m$ zijn ondubbelzinnig bepaald bij gegeven $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ en gegeven punt x dat aan (1) voldoet).

Stelling 1. Als $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ een basis van een m-dimensionaal, homogeen rooster Λ vormen, dan geldt hetzelfde van de punten $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$, dan en slechts dan als voor $\mu = 1, \ldots, m$

$$z^{(\mu)} = u_{\mu\lambda}\, y^{(\lambda)} \qquad (\text{lees } \sum_{\lambda=1}^{m} u_{\mu\lambda}\, y^{(\lambda)})$$

met gehele $u_{\mu\lambda}$, waarvoor geldt $\det(u_{\mu\lambda}) = \pm 1$.

Voor iedere basis $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ van een m-dimensionaal homogeen rooster Λ is de som der kwadraten der minoren van de m^{de} rang van de coördinatenmatrix van $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ hetzelfde getal (naar men m.b.v. stelling 1 kan bewijzen). De vierkantswortel uit dit getal noemt men de determinant van Λ en duidt men aan met $d(\Lambda)$. Men kan bewijzen dat $d(\Lambda)$ gelijk is aan de inhoud van het parallelotoop gevormd door de punten

$$a_1 y^{(1)} + \ldots + a_m y^{(m)}$$

met

$$g_1 \leq a_1 < g_1 + 1, \ldots, g_m \leq a_m < g_m + 1,$$

waarbij $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ een basis van Λ voorstellen en $g_1, \ldots, g_m$ willekeurig gekozen constante getallen zijn. Kiest men $g_1, \ldots, g_m$ geheel dan heet het parallelotoop een roostercel van Λ (behorende bij de basis $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$). Men ziet onmiddellijk, dat de verzameling van alle roostercellen van Λ behorende bij een zelfde basis van Λ precies één maal de m-dimensionale lineaire ruimte L, waarin Λ ligt, overdekt.

II. Afstandsfuncties in straallichamen

In het vervolg noemen wij een functie f(x), die gedefinieerd is voor alle punten x van R_n een afstandsfunctie, indien

I. $f(x)$ is continu
II. $f(tx) = |t|\, f(x)$ voor iedere reële t en ieder punt x
III. $f(x) \geqq 0$.

Is $f(x)$ een afstandsfunctie, dan noemen we de verzameling van alle punten x, die voldoen aan

$$f(x-x_0) \leqq c,$$

waarbij x_0 een vast punt en c een vast getal voorstelt, een straallichaam (behorende bij de afstandsfunctie $f(x)$) met radius c en centrum x_0. We zullen dit straallichaam aanduiden met $K_f(x_0;c)$.

Het is duidelijk dat alle straallichamen behorende bij een zelfde afstandsfunctie homothetisch zijn.

Stelling 2. Het centrum van een straallichaam is een inwendig punt van dat straallichaam.

Stelling 3. Elk straallichaam behorende bij de afstandsfunctie $f(x)$ is dan en slechts dan begrensd als $f(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

We noemen de straallichamen, behorende bij de afstandsfunctie $f(x)$ convex, indien $f(x)$ ook nog voldoet aan de voorwaarde

IV. $f(x) + f(y) \geqq f(x+y)$ voor alle punten x en y.

We houden ons het meest bezig met de straallichamen met centrum 0 en radius 1. Kortheidshalve schrijven we daarom $K_f(0;1)=K_f=K$.

III. Het "homogene probleem"

Definitie. We noemen een homogeen rooster Λ K_f-toelaatbaar of K-toelaatbaar (als we slechts over één afstandsfunctie $f(x)$ spreken), indien behalve de oorsprong geen enkel punt van Λ inwendig punt van K is.

Opmerking. Meestal passen we deze definitie toe op een n-dimensionaal rooster, maar we kunnen haar ook toepassen op roosters van lagere dimensie.

Stellen we

$$\inf_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \neq y}} f(x-y) = s_f(\Lambda) = s(\Lambda)$$

dan is de voorwaarde voor K-toelaatbaarheid van Λ aequivalent met de eis

$$s(\Lambda) \geqq 1.$$

In deze vorm kunnen we de voorwaarde ook onmiddellijk op inhomogene roosters toepassen en derhalve ook voor zulke roosters van K-toelaatbaarheid spreken.

Het is mogelijk dat er geen n-dimensionale K_f-toelaatbare roosters bestaan. In dat geval kunnen we met Mahler de straallichamen behorende bij de afstandsfuncties f(x) straallichamen van het infiniete type noemen. Uiteraard zijn we meer geïnteresseerd in het geval dat er wel n-dimensionale K_f-toelaatbare roosters zijn. We noemen de straallichamen behorende bij f(x) dan van het finiete type.

Beschouwt men in het laatste geval de verzameling van alle n-dimensionale K-toelaatbare roosters, dan kan men vragen naar de ondergrens van de determinanten van die roosters. We duiden die ondergrens aan met $\Delta(K)$.

<u>Stelling 4</u>. $\Delta(K) > 0$.

Men noemt $\Delta(K)$ de critische determinant van K en een K-toelaatbaar rooster Λ met $d(\Lambda) = \Delta(K)$ noemt men een critisch rooster van het straallichaam K.

Mahler bewijst nu de fundamentele

<u>Stelling 5</u>. Ieder straallichaam K_f van het finiete type bezit een critisch rooster.

Uit de gegeven definities volgt dat ieder n-dimensionaal homogeen rooster Λ met $d(\Lambda) < \Delta(K)$ behalve de oorsprong minstens één inwendig punt van K bevat. M.a.w., voor een dergelijk rooster Λ kan worden voldaan aan de voorwaarden

$$x \in \Lambda, \; x \neq 0, \; f(x) < 1. \tag{2}$$

Uit de stelling van Mahler volgt dan dat er (indien K_f van het finiete type is) een rooster $\bar{\Lambda}$ bestaat met $d(\bar{\Lambda}) = \Delta(K)$, waarvoor <u>niet</u> aan de voorwaarden (2) kan worden voldaan.

Deze uitspraken zijn aequivalent met de uitspraak, dat voor ieder rooster Λ^* met $d(\Lambda^*)=1$ kan worden voldaan aan de voorwaarden

$$x \in \Lambda^*, \; x \neq 0, \; f(x) < c \tag{3}$$

indien $c > \dfrac{1}{\{\Delta(K)\}^{\frac{1}{n}}}$ en dat er een rooster $\bar{\Lambda}^*$ met $d(\bar{\Lambda}^*)=1$ bestaat, zodanig, dat niet aan de voorwaarden (3) kan worden voldaan als $c = \dfrac{1}{\{\Delta(K)\}^{\frac{1}{n}}}$.

Definieert men c_f dus als de ondergrens van de getallen c, waarvoor geldt dat aan (3) kan worden voldaan voor alle roosters Λ^* met $d(\Lambda^*)=1$, dan geldt

$$c_f = \frac{1}{\{\Delta(K)\}^{\frac{1}{n}}} .$$

Men kan natuurlijk ook zeggen: c_f is de ondergrens van de getallen c, waarvoor geldt dat voor ieder rooster Λ kan worden voldaan aan de voorwaarden

$$x \in \Lambda, \quad x \neq 0, \quad f(x) < c\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}} . \qquad (4)$$

IV. Verband met "roosterstapeling"

Indien f(x) ook voldoet aan de voorwaarde IV (de driehoeksongelijkheid) en een n-dimensionaal rooster Λ is K_f-toelaatbaar, dan volgt onmiddellijk dat de straallichamen

$$K_f(x;\tfrac{1}{2}) \text{ met } x \in \Lambda$$

geen inwendige punten gemeen hebben.

Aangezien een critisch rooster $\bar{\Lambda}$ bij inkrimping niet meer K-toelaatbaar is volgt verder dat de straallichamen

$$K_f(x;c) \text{ met } x \in \bar{\Lambda} \quad (\bar{\Lambda} \text{ critisch rooster van } K)$$

dan en slechts dan geen inwendige punten gemeen hebben als $c \leqq \frac{1}{2}$.

Noemt men het volume van K_f bijv. V(K), dan wordt van iedere roostercel van Λ door de lichamen (5) een volume $\frac{1}{2^n}V(K)$ in beslag genomen. Men noemt daarom

$$\delta_\Lambda = \frac{\frac{1}{2^n}V(K)}{d(\Lambda)}$$

de stapelingsdichtheid van de straallichamen (5).

Uit het voorgaande volgt nu dat de grootste waarde die δ kan bereiken gelijk is aan

$$\delta = \frac{V(K)}{2^n \Delta(K)} . \tag{6}$$

De stelling van Minkowski kan men nu aldus formuleren:

$$\delta \leqq 1.$$

V. Het "inhomogene probleem"

We stellen voor ieder punt p van R_n

$$\inf_{x \in \Lambda} f(x-p) = a(p,\Lambda) \tag{7}$$

en kunnen dit de f-afstand van p tot het rooster Λ noemen. Neem aan dat Λ n-dimensionaal is, dan stellen we

$$\sup_{p \in R_n} a(p,\Lambda) = w_f(\Lambda) = w(\Lambda) . \tag{8}$$

Uit de definities volgt dat voor ieder punt p van R_n kan worden voldaan aan de voorwaarden

$$f(x-p) \leqq c, \; x \in \Lambda, \text{ indien } c \geqq w_f(\Lambda) . \tag{9}$$

M.a.w. de straallichamen $K_f(x,c)$ met $x \in \Lambda$ overdekken de gehele ruimte.

Definitie. We noemen Λ een K-overdekkingsrooster, indien de straalichamen

$$K_f(x,1) \text{ met } x \in \Lambda$$

de ruimte R_n geheel overdekken.

Blijkbaar is dit dan en slechts dan het geval, indien $w_f(\Lambda) \leqq 1$.

We kunnen nu vragen naar de ondergrens van de determinanten van de roosters die geen K-overdekkingsroosters zijn. Noem die ondergrens A(K). We kunnen ook vragen naar de bovengrens van de determinanten van de K-overdekkingsroosters. Noem die bovengrens B(K).

Vraag. Geldt voor ieder straallichaam van het finiete type

$$A(K) > 0 \text{ en } B(K) < \infty \;\; ?$$

De vraag naar de waarde van $A(K)$ komt overeen met die naar het "inhomogene minimum".

Immers uit de definitie van $A(K)$ volgt, dat indien $d(\Lambda) < A(K)$, dan voor ieder punt p van R_n voldaan kan worden aan

$$f(x-p) < 1, \ x \in \Lambda.$$

Dus, als $c < \frac{1}{A(K)^{\frac{1}{n}}}$, dan kan voor ieder punt p van R_n en ieder rooster Λ^* met $d(\Lambda^*)=1$ voldaan worden aan

$$f(x-p) < 1, \ x \in \Lambda^*,$$

doch als $c < \frac{1}{A(K)^{\frac{1}{n}}}$, dan kan dit niet meer voor ieder rooster Λ^* met $d(\Lambda^*) = 1$ en ieder punt p van R_n.

De vraag naar de waarde van $B(K)$ voert naar de vraag naar de kleinste overdekkingsgraad, indien we onder de overdekkingsgraad van het systeem straallichamen

$$K_f(x,1) \text{ met } x \in \Lambda$$

verstaan de waarde van

$$\frac{V(K)}{d(\Lambda)} \quad (\Lambda = \text{K-overdekkingsrooster}) .$$

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 20 februari 1959

door

S. Toenbreker

$f(x)$ is een convexe afstandsfunctie.
K is convex lichaam: $K=\{X \mid f(X) \leqslant 1\}$.
$J = V(K)$.
Def.: M_h is de verzameling van alle roosterpunten, wier laatste $n-h+1$ coördinaten $x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n$ relatief priem zijn.
Def.: $a_h = f(\delta_{h1}, \ldots, \delta_{hn})$, waarbij $\delta_{hh}=1$ en $\delta_{hk}=0$ voor $h \neq k$.
Def.: $f(X)$ heet gereduceerd, als voor elke $h=1,2,\ldots,n$ en voor alle roosterpunten (X) in M_h geldt: $f(X) \geqslant a_h$.
Stelling: Voor gereduceerde functies $f(X)$ geldt:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \frac{2^n}{J} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}.$$

Bewijs: Volgens de 2^e stelling van Minkowski bestaan er n lineair onafhankelijke roosterpunten $(P^1), \ldots, (P^n)$, zodat als $S_h = f(P^h)$, dan $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_n$ en $S_1 S_2 \ldots S_n \leqslant \frac{2^n}{J}$ en $f(X) \geqslant S_h$ voor alle roosterpunten, die lineair onafhankelijk zijn van $(P^1), \ldots, (P^{h-1})$.
(P^1) behoort tot M_1, dus $a_1 \leqslant S_1$.
Stel $m-1$ positieve constanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ bestaan, zodat $a_h \leqslant \gamma_h S_h$ $(h=1,2,\ldots,m-1)$. I.h.b. $\gamma_1 = 1$.
We zoeken γ_m, met $a_m \leqslant \gamma_m S_m$.
$(P^1), \ldots, (P^m)$ zijn lineair onafhankelijk, dus er is minstens één punt, stel (P^i), waarvan de laatste $n-m+1$ coördinaten $P^i_m, \ldots, P^i_n$ niet alle nul zijn.
Dus G.G.D. $(P^i_m, \ldots, P^i_n) = d_m \neq 0$.
Stel $d_m = 1$. Dan behoort (P^i) tot M_m. Dus $a_m \leqslant S_i$, dus $a_m \leqslant S_m$.
Stel $d_m \geqslant 2$. Dan kunnen we $m-1$ gehele getallen $g_1, \ldots, g_{m-1}$ vinden, zodat $P^i_h + g_h \equiv 0 \pmod{d_m}$ en $|g_h| \leqslant \frac{1}{2} d_m$.
Dan stelt:

$$\left(\frac{P^i_1+g_1}{d_m}, \ldots, \frac{P^i_{m-1}+g_{m-1}}{d_m}, \frac{P^i_m}{d_m}, \ldots, \frac{P^i_n}{d_m}\right) = \frac{1}{d_m}\left\{\sum_{h=1}^{m-1} g_h \cdot (e^h) + (P^i)\right\}$$

een roosterpunt van M_m voor.

Dus: $a_m \leq \frac{1}{d_m}\left\{\sum_{h=1}^{m-1} |g_h| a_h + S_i\right\} \leq \frac{1}{2}\left\{\sum_{h=1}^{m-1} \gamma_h S_h + S_m\right\} \leq$

$$\leq \frac{\gamma_1+\ldots+\gamma_{m-1}+1}{2} S_m .$$

Neem $\gamma_m = \max\left(1, \frac{\gamma_1+\ldots+\gamma_{m-1}+1}{2}\right)$. Dan $a_m \leq \gamma_m S_m$.

Door volledige inductie vinden we: $\gamma_h = (\frac{3}{2})^{h-2}$ $h=2,3,\ldots,n$.
Dan:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leq (\tfrac{3}{2})^{1+2+\ldots+n-2} S_1 \ldots S_n \leq \frac{2^n}{J} (\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} .$$

Zij $F(x) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k$ een positief definiete kwadratische vorm in de n variabelen $x_1,\ldots,x_n$. Dan stelt $\sqrt{F(x)} = f(x)$ een convexe afstandsfunctie voor.

Def.: F(x) heet gereduceerd, als f(x) gereduceerd is.
Uit de definitie volgt: $F(x) \geq a_{hh}$ als X behoort tot M_h.

Stelling: Iedere positief definiete kwadratische vorm in n variabelen is te reduceren door een unimodulaire substitutie: X=U Y.

Stelling: Voor gereduceerde positief definiete kwadratische vormen $F(x) = \sum_{h_1 h=1}^{n} a_{hk} x_h x_k$ met determinant D geldt:

$$a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \leq 2^{2n} (\tfrac{3}{2})^{(n-1)(n-2)} \frac{\{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)\}^2}{\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^{2n}} D$$

Def.: De verzameling Λ, van alle punten $X = u_1 X^1 + \ldots + u_n X^n$, met $u_1,\ldots,u_n$ geheel, heet een homogeen rooster, als de determinant $d(\Lambda) = \det.(X^1,\ldots,X^n) \neq 0$.

$X^1,\ldots,X^n$ heet een basis van Λ.

Stelling: $A^1,\ldots,A^n$ vormt dan en slechts dan een basis van Λ, als voor $i=1,2,\ldots,n$ $A^i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} X^k$, u_{ik} geheel en $\det(u_{ik}) = \pm 1$.

Deze voorwaarde is aequivalent met de eis: $\det(A^1,\ldots,A^n) = \pm d(\Lambda)$.
Def.: $|X| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Def.: Zij $A = (A^1,\ldots,A^n)$ de matrix van de basispunten $A^1,\ldots,A^n$ van Λ, dan heet de basis $A^1,\ldots,A^n$ van Λ gereduceerd, als $|Ax|^2 = F(X)$ een gereduceerde positief definieite kwadratische vorm in de n variabelen $x_1 \ldots x_n$ voorstelt.

Stelling: Ieder rooster Λ in R_n heeft een gereduceerde basis

$$(A^1),\ldots,(A^n).$$

Stelling: Is $A^1,\ldots,A^n$ een gereduceerde basis van Λ , dan geldt: $|A^1| \,\ldots\ldots\, |A^n| \leq \gamma_n d(\Lambda)$.

Def.: Een oneindige rij roosters $\Lambda_1, \Lambda_2,\ldots$ heet begrensd, als er twee positieve constanten c_1 en c_2 bestaan, zodat: $d(\Lambda_r) \leqslant c_1$ en $|X| \geqslant c_2$ voor alle $X \neq 0$ in Λ_r $r=1,2,\ldots$.

Def.: Een oneindige rij roosters $\Lambda_1, \Lambda_2,\ldots$ heet convergent met als limiet het rooster Λ , als er gereduceerde bases $Y^1_{(r)},\ldots,Y^n_{(r)}$ van Λ_r bestaan $r=1,2,\ldots$ en een basis $Y^1,\ldots,Y^n$ van Λ , zodat $\lim\limits_{r\to\infty} |Y^g_{(r)} - Y^g| = 0$ $g=1,2,\ldots,n$.

Stelling: Iedere begrensde oneindige rij roosters bevat een convergente oneindige deelrij.

$F(X)$ continue afstandsfunctie.
$K = \{ X \mid F(X) \leq 1 \}$ heet straallichaam.

Def.: Het rooster Λ heet K-toelaatbaar, als Λ geen ander inwendig punt van K bevat dan O.
Def.: Straallichaam K heet van het eindige type, als er minstens één K-toelaatbaar rooster bestaat.
Def.: Is K straallichaam van het eindige type, dan verstaan we onder de determinant van K, $\Delta(K)$: de onderste grens van de determinanten der K-toelaatbare roosters.
Def.: Λ heet kritisch rooster van K, als het K-toelaatbaar is en $d(\Lambda)= \Lambda(K)$.

Stelling: Ieder straallichaam van het eindige type bezit een kritisch rooster.

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 27 februari 1959

door

P.J. v.d. Laarschot

$X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ roosterpunt.

$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$, u_j geheel, a_{ij} reëel, determinant 1.

Beschouw $S = |x_1| + \ldots + |x_n|$ voor alle $u \neq 0$.

$M(P)$ onderste grens van $P = |x_1 \ldots\ldots x_n|$ voor alle $u \neq 0$.

Stelling: $M(P) \leq \frac{n!}{n^n}$.

Bewijs:

$K = \{ X \mid S \leq 1 \}$

$H = \{ X \mid P^{\frac{1}{n}} \leq 1 \}$

$|x_1 \ldots x_n| \leq \left\{ \frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{n} \right\}^n \longrightarrow nK \subseteq H \longrightarrow$

$\Delta(H) \geq \Delta(nK) = n^n \, \Delta(K)$.

Minkowski geeft: $\Delta(K) \geq \frac{V(K)}{2^n}$

$V(K) = \frac{2^n}{n!}$

Dus $\Delta(H) \geq \frac{n^n}{n!} \longrightarrow M(P) \leq \frac{n!}{n^n}$.

Stelling:

$K = \{ X \mid F(X) \leq 1 \}$

$H = \{ X \mid G(X) \leq 1 \}$

Stel, dat voor elk $(m+1)$-tal punten $X, X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$ $(m > 1)$ met $G(X^{(r)} - X)$ $\frac{b_m}{m}$ $r = 1, 2, \ldots m$ geldt:

$F(X^{(r)} - X^{(s)}) \leq 1$ voor zeker paar (r, s), $r \neq s$.

Dan geldt: $\Delta(K) \geq \frac{V(H)}{m-1} \, \frac{b_m^n}{m^n}$.

Bewijs:

Λ willekeurig rooster, $d(\Lambda)=1$.

Voer α in zó, dat $V(\alpha H)=m-1$ $\quad (\alpha^n = \frac{m-1}{V(H)})$

Blichfeldt levert:

Er bestaat een X met $X^{(r)}-X \in \alpha H \quad r=1,\dots,m$

Dus $G(X-X^{(r)}) \leqslant \alpha \quad r=1,\dots,m$

Dus $F(X^{(r)}-X^{(s)}) \leqslant \frac{m\alpha}{b_m}$ voor zeker paar (r,s), $r\neq s$

$X^{(r)}-X^{(s)} \in \Lambda$

Dus $\Delta(\frac{m\alpha}{b_m}K) \geqslant 1 \rightarrow \Delta(K) \geqslant (\frac{b_m}{m\alpha})^n = \frac{V(H)}{m-1}\,\frac{b_m^n}{m^n}$.

Hulpstelling:

$z_1 < z_2 < \dots < z_m \quad (m>1)$

Dan geldt: $\sum_{r=1}^{m} |z_r| > \frac{1}{2}\sqrt{e}\,(m-\frac{1}{2}-\log 2)\left\{\prod_{1\leqslant r<s\leqslant m}|z_r-z_s|\right\}^{\frac{2}{m(m-1)}}$.

Neem i.h.b.

$F(X) = |x_1 \dots x_n|^{\frac{1}{n}}$

$G(X) = |x_1|+\dots+|x_n|$

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i^{(r)}| \geqslant n\left\{\prod_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}|x_i-x_i^{(r)}|\right\}^{\frac{1}{n}} ;$$

wegens de hulpstelling geldt de voorwaarde van de stelling met

$$b_m > n\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{e}(m-\tfrac{1}{2}-\log r)\left\{\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant m}|x_i^{(r)}-x_i^{(s)}|\right\}^{\frac{2}{mn(m-1)}}$$

Voor zeker paar (r,s) geldt dan:

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}|x_i^{(r)}-x_i^{(s)}|\right\}^{\frac{1}{n}} < \frac{b_m}{\frac{1}{2}n\sqrt{e}(m-\frac{1}{2}-\log r)} \leqslant 1 \longrightarrow$$

$$\Delta(K) \geqslant \frac{V(H)}{m-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}n\sqrt{e}(m-\frac{1}{2}-\log r)}{m}\right\}^n \quad m=2,3,\dots\dots \longrightarrow$$

$$\Delta(K) \geqslant \frac{V(H)2^{-n}n^n e^{\frac{1}{2}n-1}}{(n+1)(\frac{1}{2}+\log 2)} \qquad (n \text{ groot}) .$$

Beschouw $G(X) \leqslant 1$

$$\text{Dan} \quad \Delta(K) \geqslant \frac{n^n e^{\frac{1}{2}n-1}}{(n+1)!(\frac{1}{2}+\log 2)} \longrightarrow$$

$$M(P) \leqslant \frac{(n+1)!(\frac{1}{2}+\log 2)}{n^n\, e^{\frac{1}{2}n-1}} .$$

Hulpstelling:

$$\sum_{r=1}^{m} z_r^2 \geq m(m-1)\left\{1.2^2.\ldots.m^m\right\}^{\frac{-2}{m(m-1)}}\left\{\prod_{\substack{r\neq s\\ r,s=1}}^{m}(z_r-z_s)^2\right\}^{\frac{2}{m(m-1)}}$$

$$G_m \overset{def}{=} 1.2^2.\ldots\ldots m^m$$

Dan geldt: $\log G_m \sim \frac{m(m-1)}{2}(\log m-\frac{1}{2})\qquad (m\to\infty)$

Beschouw:

$$G(X) = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

$$F(X) = |x_1\ldots\ldots x_n|^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{(r)})^2} \leq \frac{b_m}{m}\qquad (r=1,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{(r)})^2 \leq \frac{b_m^2}{m^2} \longrightarrow$$

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{(r)})^2 \leq \frac{b_m^2}{m}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}(x_i-x_i^{(r)})^2 \geq n\left\{\prod_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}(x_i-x_i^{(r)})^2\right\}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow$$

$$\frac{b_m^2}{m} \geq n(m-1)m\, G_m^{\frac{-2}{m(m-1)}}\left\{\prod_{i=1}^{n}\prod_{r\neq s}(x_i^{(r)}-x_i^{(s)})^2\right\}^{\frac{2}{mn(m-1)}}$$

Voor zekere (r,s): $\left\{\prod_{i=1}^{n}|x_i^{(r)}-x_i^{(s)}|\right\}^{\frac{1}{n}} \leq 1 \longrightarrow$

$$b_m^2 \leq m^2 n(m-1)G_m^{\frac{-2}{m(m-1)}}$$

Dus $\Delta(K) \geq \frac{V(H)}{m-1}\, n^{\frac{n}{2}}(m-1)^{\frac{n}{2}}\, G_m^{\frac{-n}{m(m-1)}}\qquad (m=2,3,\ldots)$

$$\Delta(K) \geq \frac{V(H)n^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n}{4}-1}}{(\frac{n}{2}-1)}\qquad (n \text{ groot})$$

Beschouw: $|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2 \leq 1$

Dan $V(H) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$

Dus $\Delta(K) \geq \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n}{4}-1}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)}$

$$M(P) \leq \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)}{\pi^{\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n}{4}-1}}$$

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 20 maart 1959 door

J. van Galen

Een methode van Mordell

Stelling 1. Indien $X_1, \ldots, X_n$ lineaire vormen zijn in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$, met reële coëfficienten en det.1, dan zij

$$K(X) = \inf. |X_1 \ldots X_n|$$

voor alle gehele $x_1, \ldots, x_n$, niet alle nul.
Stel

$$K = \sup.\ K(X)$$

voor alle dergelijke stelsels van n lineaire vormen met det.1.

Indien $X'_1, \ldots, X'_{n-1}$ lineaire vormen zijn in $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, met reële coëfficienten en det.1, dan zij

$$K'(X') = \inf. |X'_1 \ldots X'_{n-1}| |X'_1 + \ldots + X'_{n-1}|$$

voor alle gehele $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, niet alle nul.
Stel

$$K' = \sup. K'(X')$$

voor alle dergelijke stelsels van n-1 lineaire vormen met det.1.

We bewijzen:

$$K^{n-2} \leqq K'^{n-1} .$$

Hulpstelling (lemma van Hermite). Zijn de constanten $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}$ geheel, met g.g.d. =d, dan is het mogelijk een determinant te vormen met gehele coëfficienten en waarde d, waarvan $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}$ de eerste rij is.

Stelling 2. Zij $g(x_1, \ldots, x_n)$ een positief-definiete kwadratische vorm in n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ met det.1. Het minimum van g zij M(g).

Voor alle mogelijke g zij de bovengrens der minima M(g) gelijk aan een van n afhankelijke grootheid γ_n (constante van Hermite).

Bewezen wordt:

$$\gamma_n^{n-2} \leqq \gamma_{n-1}^{n-1}.$$

De gevolgde bewijsmethode van Mordell van het beschouwen van een n-1 dimensionaal deelrooster blijkt gegeneraliseerd te kunnen worden (zoals door J.V. Armitage is geschied).

Colloquium Meetkunde der Getallen

17 april 1959

Voordracht door J. van Galen

Generalisatie van een methode van Mordell

J.V. Armitage publiceerde ') een generalisatie van Mordell's methode.

In het volgende geven we een meetkundige behandeling van deze generalisatie, die bovendien tot een nog algemener resultaat voert. Daarbij worden ook enige lacunes in de redenering van Armitage aan het licht gebracht, die ons genoopt hebben een extra voorwaarde te stellen.

Enige afspraken betreffende de notatie:

X,Y,U en V stellen n-dimensionale vectoren $(X_1, \dots, X_n)$ voor, punten dus in een n-dimensionale ruimte. U en V enkel gehele waarden.

Met A en L bedoelen we $n \times n$ matrices met determinanten resp. det A en det L, beide $\neq 0$. $\tilde{A}$ is de gespiegelde reciproke van A.

Het rooster dat we verkrijgen doordat

$$X = L \, . \, U$$

met vaste L en U variabel, noemen we Λ. De determinant van Λ is

$$d(\Lambda) = \det L.$$

$\tilde{\Lambda}$ heet het geadjungeerde rooster van Λ, indien het gegeven is door

$$Y = \tilde{L} \, . \, V = V \, . \, L^{-1}$$

met variabele V. Klaarblijkelijk hebben we dan

$$d(\tilde{\Lambda}) = |\det \tilde{L}| = |\det L|^{-1} = d(\Lambda)^{-1}.$$

A zij de affiene lineaire transformatie van de n-dimensionale ruimte der punten X, gegeven door

$$X' = A \, . \, X \, .$$

Dat de transformatie $\widetilde{A}$ - de geadjungeerde van A - het rooster $\widetilde{\Lambda}'$ met Λ' geadjungeerd doet blijven, blijke aldus:

$$X' = A \,.\, L \,.\, U$$

$$Y' = \widetilde{A} \,.\, V \,.\, L^{-1} = V \,.\, L^{-1} \,.\, A^{-1} = \widetilde{A \,.\, L} \,.\, V \,.$$

We kunnen ook schrijven:

$$\Lambda' = A \,.\, \Lambda$$

$$\widetilde{\Lambda}' = \widetilde{A} \,.\, \widetilde{\Lambda} \,.$$

<u>Stelling.</u> Laten gegeven zijn twee afstandsfuncties $F(X)$ en $G(X)$ van de straallichamen K_F resp. K_G, beide van het finiete type '').

We veronderstellen:

1°. Indien A een automorfie is van K_F, dan is $\widetilde{A}$ een automorfie van K_G.

2°. Er gaat een rechte R door de oorsprong O, zodanig dat K_F slechts een segment van R van eindige lengte 2h bevat; ook is ieder punt X van de n-dimensionale X-ruimte, waarvoor $F(X)\neq 0$, te transformeren in een punt van R door een automorfie van K_F.

3°. Als $F(X)=0$ voor een punt X van Λ, dan geldt voor het minimum $G(\widetilde{\Lambda})$ van $G(Y)$ voor alle punten Y van $\widetilde{\Lambda}$: $G(\Lambda) = 0$.

Zij verder S de n-1-dimensionale lineaire ruimte door O, loodrecht op R, en zij K_{GS} de doorsnede van K_G met S.

Dan bewijzen we:

$$\Delta(K_F) \,.\, \Delta(K_{GS})^n \leq h^n \,.\, \Delta(K_G)^{n-1} \,,$$

indien $\Delta(K)$ voorstelt de determinant van het straallichaam K.

Dit resultaat sluit in zich de in het voorgaande colloquium bewezen twee ongelijkheden betreffende de grootheden die aldaar gedefiniëerd zijn:

$$K^{n-2} \leq K'^{\,n-1}$$

en

$$\gamma_n^{n-2} \leq \gamma_{n-1}^{n-1} \,.$$

') J.V. Armitage: "On a method of Mordell in the Geometry of Numbers" - Mathematika, vol.2 part 1, june 1955 no.3.

'') K. Mahler, zie Proc.Royal Soc.(A)187 (1946), 151-187.

Colloquium Meetkunde der Getallen

15 mei 1959

Voordracht door M. van der Meer

Een stelling van Tchebotareff

Zij $F(X)$ de volgende afstandsfunctie:

$$F(X) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = |x_1x_2\ldots.x_n|^{\frac{1}{n}}$$

en K_F het straallichaam bepaald door de ongelijkheid:

$$F(X) \leqq 1.$$

Een homogeen rooster Λ heet K_F-toelaatbaar als $F(X) \geqq 1$ voor ieder punt X van Λ, ongelijk aan 0.

Homogeen probleem: Gevraagd, de ondergrens $\Delta(K_F)$ van de determinanten van de K_F-toelaatbare homogene roosters.

Een (inhomogeen) rooster Λ zouden we inhomogeen K_F-toelaatbaar kunnen noemen, als K_F geen enkel punt van Λ als inwendig punt bevat. Dus als:

$$\inf_{X\in\Lambda} F(X) \geqq 1.$$

Inhomogeen probleem: Gevraagd de ondergrens $A(K_F)$ van de determinanten van de inhomogeen K_F-toelaatbare roosters.

Resultaten:

Tchebotareff: $A(K_F) \geqq 2^{\frac{n}{2}}$

Mordell: $A(K_F) \geqq 2^{\frac{n}{2}}(1+(\sqrt{2}-1)^n)$.

Vermoeden van Minkowski (bewezen voor n=2 en n=3): $A(K_F) \geqq 2^n$.

Omwerking van de stelling van Tchebotareff:

Zij Λ een (inhomogeen) rooster met determinant

$$d(\Lambda) = 1,$$

en

$$M = \inf_{X\in\Lambda} F(X),$$

dan is te bewijzen:

$$M < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

We kiezen een positief getal $\varepsilon < \frac{1}{18n}$.

Er is zeker een punt P_0 van Λ, zodanig dat:

$$M < F(P_o) < \frac{M}{1-\varepsilon} .$$

Door een translatie kunnen we P_o laten overgaan in O, en O in $-P_o=C$.

We hebben dan een homogeen rooster Λ met determinant $d(\Lambda)=1$, en een straallichaam $K_F(C,M)$ met centrum in C en radius M, dat geen punt van Λ als inwendig punt bevat.

Door een volgende transformatie laten we C overgaan in het punt $E(=1,1,\ldots,1)$.

Daardoor gaat het rooster Λ over in een rooster Λ_o met determinant:

$$d(\Lambda_o) = \frac{1}{F(C)^n} ,$$

en het straallichaam $K_F(C,M)$ in $K_F(E,M_o)$, als we $M_o = \frac{M}{F(C)}$ stellen. Dit straallichaam bevat geen punt van Λ_o als inwendig punt. We bewijzen nu, dat hieruit volgt, dat de determinant van dit rooster minstens $(\sqrt{2})^n$, resp. $(\sqrt{2})^n \cdot (1+\sqrt{2}-1)^n)$ is.

Voor n=2 bewijzen we zelfs: $d(\Lambda_o) \gtrsim 4$.

Colloquium Meetkunde der Getallen

23 oktober 1959

Voordracht door M. van der Meer

Mordell's verscherping van de stelling van Tchebotareff

Zij $F(X)$ de afstandsfunctie:

$$F(X) = F(x_1,x_2,\dots,x_n) = |x_1x_2\dots x_n|^{\frac{1}{n}}$$

en K_F het straallichaam bepaald door

$$F(X) \leqq 1.$$

A. Een homogeen rooster Λ noemen we K_F-toelaatbaar, als K_F geen enkel punt van Λ, uitgezonderd 0, als inwendig punt bevat.
Probleem: Bepaal de ondergrens $\Delta(K_F)$ van de determinanten van de K_F-toelaatbare roosters.

B. Een inhomogeen rooster Λ noemen we inhomogeen-K_F-toelaatbaar, als K_F geen enkel punt van Λ als inwendig punt bevat, dus als $\inf\limits_{X\in\Lambda} F(X) \geqq 1$.
Probleem: Bepaal de ondergrens $A(K_F)$ van de determinanten van de inhomogeen-K_F-toelaatbare roosters.

Tchebotareff bewijst, dat

$$A(K_F) \geqq \sqrt{2}^n.$$

Daartoe vormt hij het probleem als volgt om:
Neem een (inhomogeen) rooster Λ met determinant

$$d(\Lambda) = 1.$$

Zij:
$$\inf_{X\in\Lambda} F(X) = M.$$

Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een punt P_0 te vinden, zodanig dat

$$M \leqq F(P_0) < \frac{M}{1-\varepsilon}.$$

(1) We voeren een automorfie uit, waardoor het lichaam niet verandert, echter P_0 overgaat in het punt P_0' op de lijn $x_1=x_2=\dots=x_n$. Hierbij gaat Λ over in Λ', maar

$$d(\Lambda') = d(\Lambda) = 1.$$

(2) Nu voeren we een translatie uit, waarbij P_o' in O, en O in $-P_o'=C$ komt. Dan hebben we een homogeen rooster Λ'' met determinant $d(\Lambda'')=d(\Lambda')=1$, en een straallichaam $K_F(C,M)$ met middelpunt C en radius M, dat geen punt van Λ'' als inwendig punt bevat.

(3) Nu laten we nog door een vermenigvuldiging met $\frac{1}{F(C)}$ t.o.v.O het punt C overgaan in $E(1,1,\dots,1)$.

Nu hebben we een homogeen rooster Λ^* met determinant

$d(\Lambda^*) = \frac{1}{F(C)^n}$,

en een straallichaam $K_F(E,\frac{M}{F(C)}) = K_F(E,M_o)$

$$1 - \varepsilon < M_o \leq 1.$$

Dit straallichaam bevat geen punt $X \in \Lambda^*$ als inwendig punt.

Evenmin bevat het straallichaam $K_F(E',M_o)$ een punt $X \in \Lambda^*$ als inwendig punt $(E'=(-1,-1,\dots,-1))$.

Algemeen: de straallichamen $K_F(\frac{1}{m}E, \frac{M_o}{m})$ bevatten geen punt $X \in \Lambda^*$ als inwendig punt ($m=1,2,\dots$ en $-1,-2,\dots$).

Met de stelling van Minkowski bewijst Tchebotareff nu verder dat $d(\Lambda) > 2^{\frac{n}{2}}$ is, dus dat

$$A(K_F) \geqq 2^{\frac{n}{2}} \text{ is.}$$

Dit resultaat is verscherpt door Mordell, door niet de stelling van Minkowski toe te passen, maar een hulpstelling, die in wezen neerkomt op toepassing van de stelling van Blichfeldt:

Hebben we een lichaam K met volume $V > \Delta$, dan bevat de verzameling der "verschilpunten", d.w.z.

$$K'(X \mid x_\nu = y_\nu - z_\nu , \quad Y \in K,\ Z \in K)$$

een punt ongelijk O van ieder homogeen rooster Λ met determinant $d(\Lambda) \leqq \Delta$.

Als lichaam K nemen wij de verzameling van de punten, die voldoen aan één van de volgende ongelijkheden:

$$|x_\nu| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \ ; \quad |x_\nu - 1| \leq \tfrac{1}{2}(2-\sqrt{2}).$$

Het volume van dit lichaam is:

$$\sqrt{2}^n(1+(\sqrt{2}-1)^n).$$

We tonen aan dat de bijbehorende verzameling van "verschilpunten" geen roosterpunt als inwendig punt bevat.

Dus is: $d(\Lambda) > \sqrt{2}^n(1+(\sqrt{2}-1)^n)$ en

$$A(K_F) \geq \sqrt{2}^n(1+(\sqrt{2}-1)^n).$$

Door i.p.v. de "kubus" $|x_\nu - 1| \leq \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$ andere lichamen te nemen, kunnen we nog tot iets scherpere resultaten komen.

De behandelde meetkundige interpretatie van de methode van Tchebotareff kan ook worden gebruikt in het homogene geval:

$F(X)$ en K_F definiëren we als boven.

Nu nemen we een rooster Λ met determinant $d(\Lambda)=1$.

Er is een punt $P_0 \neq 0$ in Λ, zodanig, dat

$$M \leq F(P_0) < \frac{M}{1-\varepsilon},$$

met

$$M = \inf_{\substack{X \in \Lambda \\ X \neq 0}} F(X).$$

(1) Eerst voeren we nu weer een automorfie uit, waardoor het punt P_0 overgaat in een punt P_0' op $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

(2) De boven uitgevoerde translatie is nu overbodig.

(3) We vermenigvuldigen nog met $\frac{1}{F(P_0')}$ t.o.v. O, waardoor het punt P_0' overgaat in het punt $E(1,1,\ldots,1)$.

Nu hebben we weer een homogeen rooster Λ^* met determinant $d(\Lambda^*) = \frac{1}{F(P_0')^n}$,

en een straallichaam $K_F(0, \frac{M}{F(P_0')}) = K_F(0,M_0)$.

O en E zijn nu roosterpunten, maar dan ook E' en mE en mE' $(m=1,2,\ldots)$.

$K_F(0,M_0)$ bevat slechts O als roosterpunt. Evenzo $K_F(E,M_0)$ slechts E, algemeen $K_F(mE,M_0)$ slechts mE.

We krijgen zo een aaneenschakeling van straallichamen, die slechts roosterpunten bevatten op de lijn $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Voor $n=2$ overdekt deze rij straallichamen een strook aan weerszijden van de lijn door O en E, waarin geen roosterpunten voorkomen buiten deze lijn.

Op meetkundige wijze komen we dan gemakkelijk tot het bekende resultaat $\Delta(K_F) \geq \sqrt{5}$, en wel zo, dat $d(\Lambda) = \sqrt{5}$ of $d(\Lambda) \geq 2\sqrt{2}$ voor een toelaatbaar rooster.

Voor $n=3$ komen we op analoge wijze tot het bekende resultaat van Davenport: $\Delta(K_F) \geqq 7$.

Voor een roosterpunt (a,b,c) buiten de lijn door O en E geldt:

$$|(a-m)(b-m)(c-m)| \geqslant 1-\varepsilon \quad \text{voor alle } m,$$

omdat het in geen enkel straallichaam ligt.

De afstand van dit punt tot de lijn door O en E is de vierkantswortel uit $\frac{1}{3}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$.

Om de lijn door O en E is nu een cylinder te konstrueren, die geheel binnen de straallichamen ligt en dus geen roosterpunt bevat. De straal van deze cylinder $r \geqq \sqrt{\frac{14-10\varepsilon}{3}}$, waaruit volgt, dat

$$\Delta(K_F) \geqq 7.$$

Colloquium Meetkunde der getallen

Voordracht op 6 november 1959

door

Dr C.G. Lekkerkerker

De inhomogene determinant en de overdekkingsconstante van een lichaam

1. Zij M een verzameling in R_n en Y het fundamentele rooster. We gebruiken vectornotatie. We beschouwen homogene roosters

$$\Lambda = AY = \{Au \mid u \in Y\}$$

en inhomogene roosters

$$\Gamma = \Lambda + z = \{Au+z \mid u \in Y\} ,$$

waarbij z een willekeurig punt in R_n en A een willekeurige niet-singuliere $n \times n$-matrix is. Deze roosters hebben determinant

$$d(\Gamma) = d(\Lambda) = |\det A| .$$

We noemen het homogene rooster Λ toegelaten voor M, als Λ geen punt $\neq 0$ van M bevat; het inhomogene rooster Γ heet toegelaten voor M als Γ geen punt van M bevat.

Op p.18 is gedefinieerd de determinant van M:

(1) $\Delta(M) = \inf d(\Lambda)$ $[\Lambda$ toegelaten voor $M]$
(∞, als géén Λ toegelaten is voor M).

Vervolgens is op p.22-24 bewezen dat, als M een sterlichaam en $\Delta(M)$ eindig is, een kritiek rooster bestaat, d.i. een toegelaten rooster Λ met determinant $d(\Lambda) = \Delta(M)$. Hieronder voeren we twee "inhomogene" grootheden in die te vergelijken zijn met (1). Ons doel is onder meer ook daarvoor de kwestie van het bestaan van "kritieke" roosters te behandelen.

Definitie. Een rooster Λ heet overdekkingsrooster van M als R_n overdekt wordt door de lichamen $M+x$, $x \in \Lambda$.

Daar Λ symmetrisch t.o.v. O is, zijn de volgende beweringen aequivalent:

1. Λ is overd. rooster van M.
2. elk punt z behoort tot een der lichamen $M-x$, $x \in \Lambda$.
3. voor elk punt z is $\Gamma = \Lambda + z$ niet toegelaten voor M.

Dan zijn ook aequivalent:

1'. Λ is geen overd.rooster van M

3'. voor geschikte z is $\Gamma = \Lambda + z$ toegelaten voor M.

We definiëren nu de inhomogene determinant

(2) $\Delta'(M) = \inf d(\Gamma)$ [Γ toegelaten voor M]
$= \inf d(\Lambda)$ [Λ geen overd.rooster van M]
(∞ als géén Γ toegelaten is voor M),

alsook de overdekkingsconstante

(3) $C(M) = \sup d(\Lambda)$ [Λ overd. rooster van M]
(0 als er géén overdekkingsrooster is).

2. Bovenstaande grootheden hangen nauw samen met twee typen minima, die we echter alleen definiëren in het geval van sterlichamen. We definiëren eerst, voor een willekeurige verzameling M en een willekeurig rooster Λ, het inhomogene minimum

(4) $\mu(M, \Lambda) = \inf \mu$ [$\mu > 0$, Λ overd.rooster van μM].

Zij nu $S : f(x) \leqq 1$ een sterlichaam ($f(x)$ een continue afstandsfunctie, zie p.17 bovenaan). Het lichaam S is gesloten, en het inwendige van S wordt gegeven door $S_0 : f(x) < 1$. We merken op dat het gebruikelijk is om een homogeeen, resp. inhomogeen rooster toegelaten voor S te noemen, als het toegelaten is voor het inwendige S_0 van S (voor andere verzamelingen dan sterlichamen is een dergelijke definitie niet erg zinvol meer; vgl. [1]). Daar 0 inwendig punt is van S, zijn er overd. roosters. Dus $\mu(S, \Lambda)$ is eindig. Als $\mu > \mu(S, \Lambda)$, dan geldt voor elk punt $z \in R_n$ dat $\Lambda + z$ een punt in μS heeft, i.e. dat $\inf f(x-z) \leqq \mu$ [$x \in \Lambda$]. Dit geldt niet meer voor elk punt z als $\mu < \mu(S, \Lambda)$. We hebben dus

(5) $$\mu(S, \Lambda) = \sup_{z \in R_n} \inf_{x \in \Lambda} f(x-z).$$

Over deze uitdrukking valt het volgende op te merken. De functie $F(z) = \inf f(x-z)$ [$x \in \Lambda$] is periodiek mod Λ en semi-continu naar boven. Dus in (5) mogen we "sup" vervangen door "max". Het is niet altijd waar dat bij elke z een $x \in \Lambda$ bestaat met $f(x-z) \leqq \mu(S, \Lambda)$; Inkeri [2] geeft als voorbeeld hiervoor $f(x) = \sqrt{|x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2|}$.

Vervolgens variëren we Λ. We definiëren:

(6) $$\underline{\mu}(S) = \inf_{d(\Lambda)=1} \mu(S, \Lambda) \; ; \qquad \bar{\mu}(S) = \sup_{d(\Lambda)=1} \mu(S, \Lambda).$$

Voor de grootheid $\bar{\mu}(S)$, het absolute inhomogene minimum, is in een speciaal geval een schatting afgeleid op pp.31-36. Uit de gegeven definities kan men door homogeniteitsoverwegingen afleiden (vgl. p.21):

(7) $\underline{\mu}(S) = C(S)^{-1/n}$, $\bar{\mu}(S) = \Delta'(S)^{-1/n}$.

Deze formules zijn te vergelijken met

$$\lambda(S) = \Delta(S)^{-1/n},$$

waarin het absolute homogene minimum $\lambda(S)$ gedefinieerd is door

$$\lambda(S) = \sup_{d(\Lambda)=1} \lambda(S, \Lambda), \quad \text{met} \quad \lambda(S, \Lambda) = \inf_{x\neq 0, x\in\Lambda} f(x) =$$

$$\inf \lambda \quad [\lambda > 0, \ \lambda \text{ niet toegelaten voor } \lambda S].$$

In een speciale zin zijn $\lambda(S)$ en $\bar{\mu}(S)$ continu, in afhankelijkheid van S (zie [3] en [4]). We gaan hier niet op in.

3. We formuleren nog eens enige eerder behandelde resultaten die we straks nodig hebben. Op pp.3 en 9 zijn gedefinieerde de <u>successieve minima</u> λ_i $(1 \leq i \leq n)$ van een 0-symmetrisch, convex lichaam K t.o.v. het rooster Y. Algemener kunnen we invoeren, voor $i=1,2,\ldots,n$,

$$\lambda_i(K, \Lambda) = \min \lambda \quad [\lambda K \text{ bevat tenminste } i \text{ onafhankelijke punten van } \Lambda].$$

Een eenvoudige relatie van Jarník [5] luidt:

(8) $\frac{1}{2}\lambda_n(K, \Lambda) \leq \mu(K, \Lambda) \leq \frac{1}{2}\sum \lambda_i(K, \Lambda) \leq \frac{n}{2}\lambda_n(K, \Lambda)$.

Dit is bewezen op p.9 voor $\Lambda = Y$, en volgt voor het algemene geval door een affiene transformatie.

We hebben verder een ondergrens voor het product der successieve minima, nl.

(9) $n!\prod \lambda_i(K, \Lambda) \geq 2^n d(\Lambda)/V(K)$.

Voor $\Lambda = Y$ is dit bewezen op p.14, onderaan.

Tenslotte herinneren we aan het selectielemma van Mahler [3] (zie 3^e stelling op p.24), hetwelk we aldus uitspreken:

<u>Lemma</u>. Laten c_1 en c_2 twee positieve constanten zijn. Dan is de verzameling der roosters Λ, die toegelaten zijn voor de bol $|x| < c_1$ en determinant $d(\Lambda) \leq c_2$ hebben, compact.

We merken nog even op dat de essentiële stap in het bewijs, berustend op reductie van definiete kwadratische vormen, is dat de roosters Λ een basis in een vaste bol $|x| \leq c_3$ hebben. Uit het lemma en het feit dat de verzameling der roosters Λ, toegelaten voor een sterlichaam S, gesloten is, volgt dat een sterlichaam van eindig type een kritiek rooster bezit (p.24).

Opmerking. Ook de verzameling der inhomogene roosters, toegelaten voor S, is gesloten. D.w.z. als $\Gamma_r \to \Gamma$ en Γ_r toegelaten, dan ook Γ. Anders gezegd: de functie $\mu(S, \Lambda, z) = \inf f(x-z)$ $[x \in \Lambda]$ is semi-continu naar boven in Λ en z (want "$\Lambda + z$ toegelaten" houdt in dat $\mu(S, \Lambda, z) \geqq 1$).

4. We behandelen enige eigenschappen van de overdekkingsconstante C(M). Allereerst geldt

Stelling 1. Voor elke $\mathcal{L}$-meetbare verzameling M is $C(M) \leqq V(M)$.

Bewijs. Om triviale redenen mogen we onderstellen dat er overdekkingsroosters zijn en dat V(M) eindig is. Zij Λ een overdekkingsrooster van M en F een fundamentaalcel van Λ. Daar F overdekt wordt door de verzamelingen M+x, $x \in \Lambda$, geldt

$$F = \bigcup_{x \in \Lambda} \{(M+x) \cap F\} .$$

De verzamelingen rechts zijn meetbaar. Dus is

$$d(\Lambda) = V(F) \leqq \sum_{x \in \Lambda} V((M+x) \cap F) = \sum_{x \in \Lambda} V(M \cap (F+x)).$$

De verzamelingen $M \cap (F+x)$ zijn ook meetbaar, en bevat in M. Dus is $d(\Lambda) \leqq V(M)$. Uit de willekeurigheid van Λ volgt dan de stelling.

Bovenstaand bewijs is afkomstig van Bambah [4]. Het belang van de stelling is vooral dat hij een analogon is van de stelling van Minkowski: $\Delta(K) \geqq V(\frac{1}{2}K)$. Merk op, dat nu geen convexiteit of symmetrie nodig is. Het kan gebeuren dat C(M) eindig is en V(M) oneindig; dit is bewezen voor het sterlichaam $|x_1 x_2| \leqq 1$ (vgl.stelling van Morimoto; [6], Kap.VI § 2). In geval van convexe lichamen is het quotiënt V(M)/C(M) begrensd.

Over kritieke roosters spreekt zich uit

Stelling 2. Een begrensde, gesloten verzameling M, met O als inwendig punt, heeft een maximaal overdekkingsrooster.

Bewijs. Zij B een bol om O die M bevat.

Uit de onderstellingen volgt dat C(M) eindig en positief is. Krachtens definitie is er dan een rij overdekkingsroosters Λ_r ($r=1,2,\ldots$) van M, zodanig dat

(10) $\frac{1}{2}C(M) < d(\Lambda_r) \leqq C(M)$, $\quad d(\Lambda_r) \to C(M)$ als $r \to \infty$.

Voor deze roosters is uiteraard $\mu(M, \Lambda_r) \leq 1$, dus ook $\mu(B,\Lambda_r) \leq 1$. Toepassing van Jarník's relatie (8), met K=B, leert dan dat $\lambda_n(B,\Lambda_r) \leq 2$ $(r=1,2,\ldots)$. Wegens (9) is dus

$$2^{n-1}n!\ \lambda_1(B,\Lambda_r) \geq 2^n d(\Lambda_r)/V(B);$$

wegens (10) betekent dit dat er een constante $c_1 > 0$ is met

$$(11)\qquad \lambda_1(B,\Lambda_r) \geq c_1 \qquad (r=1,2,\ldots).$$

De roosters Λ_r voldoen dus aan de voorwaarden voor Λ in het lemma van Mahler, met deze c_1 en $c_2=C(M)$. Dan bevat de rij $\{\Lambda_r\}$ een deelrij, die convergeert, stel naar een rooster Λ . We beweren dat Λ een maximaal overdekkingsrooster is.

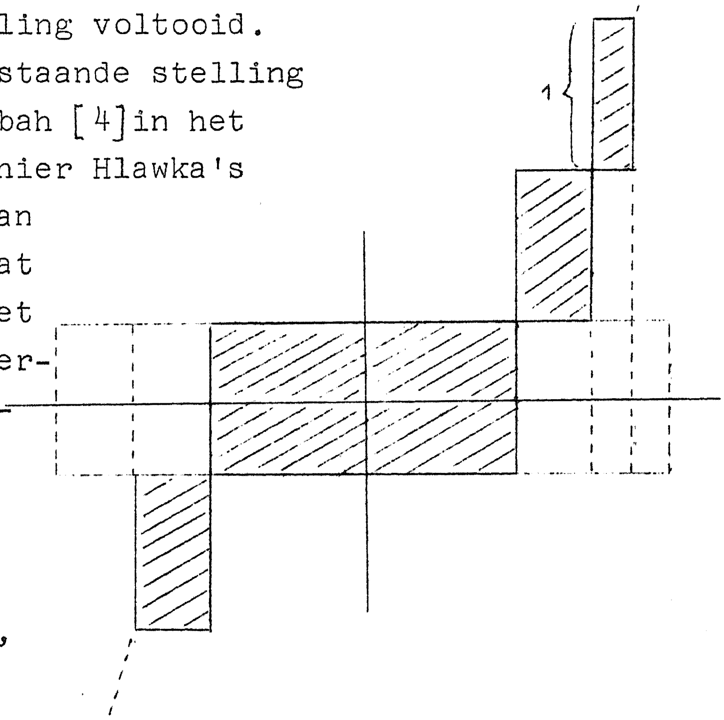
We mogen onderstellen dat reeds de rij $\{\Lambda_r\}$ convergeert naar Λ . Wegens (10) is alvast $d(\Lambda)=C(M)$. Zij nu z een willekeurig punt. Er zijn punten $x^1,x^2,\ldots,x^r,\ldots$ met

$$x^r \in \Lambda_r\ ,\quad z \in M+x^r \quad (r=1,2,\ldots).$$

Daar M begrensd is, is ook de rij $\{x^r\}$ begrensd.

Zij nu $\Lambda_r=A_rY$, met $A_r \to A$, dan is $x^r=A_ru^r$, met slechts eindig veel mogelijkheden voor u^r. Dus een limietpunt x van de rij $\{x^r\}$ is van de vorm Au, d.w.z. behoort tot Λ . Daar M gesloten is, is ook $z \in M+x$. Daarmee is bewezen, dat Λ een overdekkingsrooster is, en het bewijs van de stelling voltooid.

Hlawka [7] bewees bovenstaande stelling voor convexe lichamen, en Bambah [4] in het algemenere geval. Wij hebben hier Hlawka's methode gevolgd. Bambah laat aan het volgende voorbeeld zien dat de begrensdheidsvoorwaarde niet mag worden weggelaten: M de vereniging van de gesloten rechthoeken M_o, M_r, $-M_r$ $(r \geq 1)$, waarbij



$$M_o\ :\ |x_1| \leq \tfrac{1}{4},\ |x_2| \leq \tfrac{1}{2}$$

$$M_r\ :\ \tfrac{1}{2}(1-2^{-r}) \leq x_1 \leq \tfrac{1}{2}(1-2^{-r-1}),$$

$$r-\tfrac{1}{2} \leq x_2 \leq r+\tfrac{1}{2}\ .$$

In dit voorbeeld is $C(M)=1$ en wordt door de lichamen $M+(0,m)$ (m geheel) juist de open strook $|x_1| < \frac{1}{2}$ overdekt.

Wèl kan men, als M niet begrensd en $C(M)$ eindig is, een rij maximale overdekkingsroosters van begrensde delen van M nemen, en zo een rooster Λ construeren, zodanig dat $d(\Lambda)=C(M)$ en de niet door $M+\Lambda$ overdekte punten een verzameling van de maat 0 vormen.

5. We gaan nu de inhomogene determinant $\Delta'(M)$ bestuderen. Als M begrensd is, dan is zeker $\Delta'(M)=0$. Macbeath [8] bewijst zelfs

Stelling 3. Zij M een verzameling in R_n en laat bij elke $\varepsilon>0$ een strook T, begrensd door evenwijdige hypervlakken, bestaan, zodanig, dat $M\setminus T$ $\mathcal{L}$-maat $<\varepsilon$ heeft. Dan is $\Delta'(M)=0$.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$ gegeven en laat het deel van M buiten de strook $|x_1| \leqq R$, $\mathcal{L}$-maat $<\frac{1}{3}\varepsilon$ hebben. We beschouwen het rooster Λ met basis

$$\left\{ 4Re^1,\ \tfrac{\varepsilon}{4R}e^2, e^3, \ldots, e^n \right\} \qquad (e^i=(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})).$$

Zij F de fundamentaalcel van Λ, gegeven door

$$|x_1| \leqq 2R\ ,\quad |x_2| \leqq \frac{\varepsilon}{8R}\ ,\quad |x_i| \leqq \frac{1}{2} \quad (i=3,4,\ldots,n).$$

Zij verder F_1 het deel van F buiten de strook $|x_1| \leqq R$, F_2 het deel van F_1, overdekt door de verzamelingen $M+x$, $x \in \Lambda$. Dan is

$$d(\Lambda)=\varepsilon\ ,\ V(F_1) = \frac{1}{2}\varepsilon\ ,\ F_2 \text{ meetbaar en } V(F_2) < \frac{1}{3}\varepsilon\ .$$

Dus F_2 valt niet samen met F_1. Nemen we nu een punt $z \in F_1\setminus F_2$, dan heeft het inhomogene rooster $\Lambda+z$ geen punt in M. Daar $d(\Lambda)=\varepsilon$ en ε willekeurig was, volgt hieruit de bewering.

We kennen reeds een voorbeeld in R_n, waarbij $\Delta'(M)$ een eindige, positieve waarde heeft, nl. het sterlichaam S: $|x_1x_2\ldots x_n| \leqq 1$. Daarvoor is $\Delta'(S) \geqq \sqrt{2^n}$ (zie pp.32 en 34). Anderzijds is $\Delta'(S)$ eindig, omdat het inhomogene rooster Γ der punten x met

$$x_i = 2u_i+1 \quad (u_i \text{ geheel, } i=1,2,\ldots,n)$$

toegelaten is; daar het determinant 2^n heeft, is dus $\Delta'(S) \leqq 2^n$. In het geval $n=2$ is $\Delta'(S)=4$, en zijn bovendien alle minimale toegelaten inhomogene roosters bekend: het bovenstaande rooster Γ en alle roosters die daaruit ontstaan door een automorfie van S.

Men kan gemakkelijk een sterlichaam T in R_2 aangeven, waarvoor $\Delta'(T)$ eindig en positief is en er geen minimale toegelaten roosters zijn. Swinnterton-Dyer [9] geeft als voorbeeld

(12) $$T : |x_1x_2| \leq 1 + \frac{1}{x_1^2+x_2^2} .$$

Het bevat het sterlichaam $S : |x_1x_2| \leq 1$ in zijn inwendige. Als $r \geq 1$ is, dan is het inhomogene rooster Γ_r der punten

$$x = ((2u_1+1)(r+\tfrac{1}{r}),\ (2u_2+1)\tfrac{1}{r})$$

zeker toegelaten voor T. Want voor $u_1=u_2=0$ is $x_1x_2=1+r^{-2}$ en $x_1^2+x_2^2 > r^2$, dus $x \notin T$, en voor de overige punten x van Γ_r is $|x_1x_2| > 3$ en $x_1^2+x_2^2 > 1$, dus evenzo $x \notin T$. Verder is

$$d(\Gamma_r) = 4(1+r^{-2}) \to 4 \quad \text{als } r \to \infty .$$

Hieruit en uit de genoemde eigenschappen van S volgt dat $\Delta'(T)=4$ en dat er geen minimale toegelaten Γ zijn.

Men kan een eigenschap van de gewenste aard krijgen als men aan M een aantal tamelijk stringente voorwaarden oplegt. Als M een willekeurige, niet-lege, open verzameling is, dan verstaan we onder de buitenrand van M de afsluiting van de verzameling der punten x, die randpunt zijn van M en tevens randpunt van de doorsnee van M en het segment ox. Er geldt nu (zie [9])

Stelling 4. Zij M een onbegrensd, open gebied en onderstel

1^o. op elke rechte door een punt van de buitenrand R van M ligt een punt van M.

2^o. M is automorf, d.w.z. laat een groep van automorfieën A toe, zodanig dat bij elk punt $x \in M$ een automorfie A bestaat, waarvoor Ax in een vaste bol $|z| \leq \rho$ ligt.

Dan is $\Delta'(M)$ niet nul, en als $\Delta'(M)$ eindig is, is er een minimaal toegelaten inhomogeen rooster (met een punt in R).

Bewijs (schets). Allereerst kan men uit de voorwaarde 1^o en de voorwaarde dat M open is, door compactheidsoverwegingen, afleiden dat er een getal $\delta > 0$ bestaat met de volgende eigenschap: elke rechte door een punt $x \in R$ met $|x| \leq \rho$ bevat een lijnsegment ter lengte δ, dat geheel tot M behoort.

Vervolgens kan men bewijzen dat $\Delta'(M)=\inf d(\Gamma)$, genomen over de toegelaten roosters Γ die voor elke $\varepsilon > 0$ een punt x bevatten met

$$x = \lambda y, \quad 1 \leq \lambda \leq 1+\varepsilon , \quad y \in R.$$

Wegens 2^o. mogen we hierbij nog eisen $|y| \leq \rho$.

Bovenstaande roosters bepalen homogene roosters die toegelaten zijn voor de bol $|x| \leq \delta$. Dus is $\Delta'(M)$ niet 0. Zij nu $\Delta'(M)$ eindig en $\{\varepsilon_r\}$ een nulrij. Dan bestaat een rij toegelaten inhomogene roosters $\Gamma_r = \Lambda_r + x^r$, zodanig dat

1) Λ_r is toegelaten voor $|x| \leq \delta$ en $d(\Gamma_r) = d(\Lambda_r) \to \Delta'(M)$

2) $x^r = \lambda_r y^r$ met $1 \leq \lambda_r \leq 1 + \varepsilon_r$, $|y^r| \leq \rho$.

Op de rij $\{\Lambda_r\}$ passen we het selectielemma van Mahler toe. Ook geldt dat een deelrij van $\{x^r\}$ convergeert. Dit voert ons tot een inhomogeen rooster $\Gamma = \Lambda + x$, met determinant $d(\Gamma) = \Delta'(M)$, dat toegelaten is voor M, terwijl $x \in R$. Daarmee is de stelling bewezen.

6. We geven nog een toepassing van Jarník's relatie (8), met $\Lambda = Y$, en wel een bewijs van de stelling van Kronecker. In het eenvoudigste geval zegt deze stelling: als θ een irrationaal getal is, dan liggen de getallen van de vorm $u_1\theta - u_2$ overal dicht op de getallenrechte. Algemener geldt

Stelling 5. Laten m en q natuurlijke getallen zijn, en zij n=m+q. Laten verder gegeven zijn q homogene lineaire vormen

$$L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{im}x_m \quad (i=1,2,\ldots,q).$$

Onderstel dat de n vormen $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, L_q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ onafhankelijk zijn over de ring der gehele getallen.

Dan bestaat bij elk getal $\varepsilon > 0$ en elk stelsel van q reële getallen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ een roosterpunt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, zodanig dat

$$(13) \qquad |L_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) - \beta_i - u_{m+i}| < \varepsilon \quad (i=1,2,\ldots,q).$$

Bewijs. Zij ε_1 een positief getal $< \varepsilon/n$ en zij r een nader te kiezen groot positief getal. Zij P het parallelotoop, bepaald door

$$(14) \quad \begin{cases} |x_j| \leq r & (j=1,2,\ldots,m) \\ |L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - x_{m+i}| \leq \varepsilon_1 & (i=1,2,\ldots,q) \end{cases}$$

De n vormen $L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - x_{m+i}$, x_j zijn kennelijk onafhankelijk. Dus is P begrensd, convex en 0-symmetrisch, met 0 als inwendig punt.

Laten we eerst eens aannemen dat P bij **geschikte keuze van r een stelsel van n onaf**hankelijke roosterpunten bevat. Dan is $\lambda_n(P) \leq 1$. Wegens (8) dus $\mu(P) \leq \frac{1}{2}n < n$. Dus Y is overdekkingsrooster van nP. Dus bij elk punt

$$z = (0,0,\ldots,0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$$

bestaat een roosterpunt u met $z+u \in nP$. Dan is

$$|L_i(u_1,u_2,\ldots,u_m) - \beta_i - u_{m+i}|$$

$$= |L_i(z_1+u_1,\ldots,z_m+u_m)-z_{m+i}-u_{m+i}| \leq n\,\varepsilon_1 < \varepsilon \quad (i=1,2,\ldots,q).$$

We bewijzen tenslotte bovenstaande aanname, met een redenering, in ander verband toegepast door Wenkow [10 , lemma 1] . De q vormen $M_i(x)=L_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)-x_{m+i}$ zijn onafhankelijk, en krachtens de voorwaarden van de stelling is géén lineaire combinatie $\sum n_i M_i(x)$ (n_i geheel, niet alle 0) een vorm met gehele coëfficiënten. We kiezen nog m-1 vormen $M_{q+1}(x),\ldots,M_{n-1}(x)$, zodanig dat ook het totale stelsel de zojuist genoemde eigenschappen bezit. Bij een willekeurige gehele vorm $M_0(x)$ bestaat dan een positief getal $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, zó dat het parallelotoop

$$|M_i(x)| < \varepsilon_0 \quad (i=0,1,\ldots,n-1)$$

geen roosterpunt $u \neq 0$ bevat. Kiezen we een roosterpunt $u \neq 0$ in de strook $|M_i(x)| < \varepsilon_0$ $(i=1,2,\ldots,q)$, dan is dus zeker $M_0(u) \neq 0$.

Door dit herhaaldelijk toe te passen, steeds met geschikte ε_0, vinden we een rij roosterpunten $u^1,u^2,\ldots,u^n$ in de strook $|M_i(x)| < \varepsilon_1$ $(i=1,2,\ldots,q)$, opvolgend buiten de vlakken

$$x_1 = 0, \quad \begin{vmatrix} u_{11} & x_1 \\ u_{21} & x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & x_1 \\ u_{21} & u_{22} & x_2 \\ u_{31} & u_{32} & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{enz.}$$

(hierbij zijn $u_{1i},u_{2i},\ldots,u_{ni}$ de coördinaten van u^i). Dan zijn de u^i onafhankelijk. Voor geschikte r liggen ze in het parallelotoop (14). Daarmee is de aanname bewezen, en het bewijs van de stelling voltooid.

Gewoonlijk wordt stelling 5 ruimer geformuleerd (zie [6], Kap.VII, § 2). Men laat dan de onafhankelijkheidsvoorwaarde voor de vormen L_i weg, maar eist dat $\sum n_i\beta_i$ een geheel getal is telkens als $\sum n_i L_i$ een vorm met gehele coëfficiënten is. Deze vorm van de stelling kan gemakkelijk tot de vorige teruggebracht worden.

Literatuur

[1] C.A. Rogers, The reduction of star sets, Phil.Trans. Royal Soc. London A 245, 59-93 (1952)

[2] K. Inkeri, Non-homogeneous binary quadratic forms, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim 1949, 216-224

[3] K. Mahler, On lattice points in n-dimensional star bodies. I. Existence theorems, Proc.Royal Soc. London A 187, 151-187 (1946)

[4] R.P. Bambah, On lattice coverings, Proc.Nat.Inst.Sciences India 19, 447-459 (1953)

[5] V. Jarník, Zwei Bemerkungen zur Geometrie der Zahlen, Věstník Královské České Společnosti Nauk. Třída Matem.-Prirodověd. 1941, 12 pp. (1941)

[6] J.F. Koksma, Diophantische Approximationen, Springer 1936

[7] E. Hlawka, Ausfüllung und Ueberdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatshefte Math.53, 81-131 (1949)

[8] A.M. Macbeath, The finite-volume theorem for non-homogeneous lattices, Proc.Cambridge Phil.Soc.47, 627-628 (1951)

[9] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Inhomogeneous lattices, Proc.Cambridge Phil.Soc.50, 20-25 (1954)

[10] B.A. Wenkow, O priwedenii polozjiteljnych kwadratitsjnych form, Izwestija Akad. Nauk SSSR 4, 37-52 (1940).