STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 48

Cursus Hilbertruimten.

Eindhoven 1958/59.

N.G.de Bruijn.

1959

Cursus Hilbertruimten

door

Prof.dr N.G. de Bruijn

1958-1959

Litteratuur: F. Riesz et B.Sz.Nagy, Leçons d'Analyse fonctionelle, 2me ed., Budapest 1953.
P.R. Halmos, Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, New York 1951.
A.C. Zaanen, Linear Analysis, Amsterdam, Groningen 1953.
B.Sz.Nagy, Spektraldarstellung linearer transformationen des Hilbertschen Raumes, Berlin 1942.

1. Lineaire ruimten.

Def.1.1. Een lineaire ruimte is een additieve abelse groep R waarbij voor elke $f \in R$ en elk complex getal λ een scalair product $\lambda f \in R$ is gedefinieerd, zodanig dat

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g \ , \ (\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f \ , \ \lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f \ , \ 1\cdot f=f.$$

Gevolgen: $0\cdot f = 0$ (het nulelement van R), $(-1)\cdot f = -f$.

Def.1.2. Het begrip reële lineaire ruimte is analoog gedefinieerd, met als enige verschil dat "complex getal" veranderd wordt in "reëel getal".

Opmerking 1.1. Elke (complexe) lineaire ruimte is ook als reële lineaire ruimte op te vatten door het gebruik van scalaire producten λf te beperken tot reële waarden van λ.

Opmerking 1.2. Bij ruimten met eindige dimensie wordt door de onder opm.1 genoemde operatie de dimensie verdubbeld. Het begrip "dimensie" wordt als volgt ingevoerd: Een basis voor een (complexe) lineaire ruimte R is een stel elementen $f_1,\dots,f_n \in R$ zo dat elke $f \in R$ te schrijven is als $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n$ (λ's complex). (Niet elke lineaire ruimte heeft een eindige basis). Is er een eindige basis, dan is er ook een basis met minimaal aantal elementen; deze basiselementen zijn dan automatisch lineair onafhankelijk (d.w.z. $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n=0$ met complexe λ's impliceert

$\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$). Het aantal elementen is voor alle lineair onafhankelijke bases hetzelfde, en dit aantal heet de dimensie van de ruimte.

Is $f_1,\ldots,f_n$ een lineair onafhankelijke basis voor R, dan is $f_1, if_1, f_2, if_2, \ldots, f_n, if_n$ een lineair onafhankelijke basis voor de als reële lineaire ruimte opgevatte ruimte (in dat geval wordt het begrip lineaire onafhankelijkheid anders geïnterpreteerd, nl. als volgt: $g_1,\ldots,g_k$ heet lineair onafhankelijk als $\lambda_1 g_1+\ldots+\lambda_k g_k=0$, met reële λ's impliceert $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$).

Opmerking 1.3. Zonder meer heeft het geen zin om in een complexe lineaire ruimte over reële vectoren te spreken. Men zou dit wel kunnen gaan doen, door bijv. een lineair onafhankelijke basis te kiezen en dan alle reële lineaire combinaties daarvan reëel te noemen.

2. Ruimten met inwendig product (IP-ruimten)

Def.2.1. Een IP-ruimte is een (complexe) lineaire ruimte R waarbij aan elk paar $f \in R$, $g \in R$ een complex getal is toegevoegd, dat we met (f,g) aanduiden, en dat de volgende eigenschappen heeft:

$$(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g) \;, \quad (\lambda f,g) = \lambda(f,g)$$

$$(f,g) = \overline{(g,f)} \;, \quad (f,f) > 0 \text{ als } f \neq 0.$$

($\overline{(g,f)}$ betekent de complex geconjugeerde van (g,f)).

Gevolgen: $(f,\lambda g) = \bar{\lambda}(f,g)$; $(f,g_1+g_2) = (f,g_1)+(f,g_2)$, $(f,0)=(0,g)=0$, $(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k, \sum_{h=1}^{m}\mu_h g_h) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}\lambda_k \bar{\mu}_h (f_k,g_h)$.

Def.2.2. $\sqrt{(f,f)}$ heet de norm of lengte van f, en wordt met $\|f\|$ aangeduid.

Stelling 2.1. $\|\lambda f\| = |\lambda|\cdot\|f\|$.

Def.2.3. $f \perp g$ of $g \perp f$ betekent $(f,g)=0$ (dus $(g,f)=0$).

Def.2.4. f en g heten evenredig als er een $h \in R$ is, en complexe getallen λ en μ, zó dat $f=\lambda h$, $g=\mu h$.

Voorbeelden van IP-ruimten. Voorbeeld 2.1. Zij n een vast natuurlijk getal, en zij R de verzameling van alle rijtjes van n complexe getallen $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Door optelling en scalaire vermenigvuldiging te definiëren met

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + (\beta_1,\ldots,\beta_n) = (\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = (\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_n) ,$$

wordt R een lineaire ruimte. Door het inwendig product van $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ en $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ te definiëren door $\alpha_1\bar{\beta}_1+\ldots+\alpha_n\bar{\beta}_n$, wordt R een IP-ruimte.

Voorbeeld 2.2. Zij R de verzameling van alle continue complexe functies op het gesloten interval $[0,1]$. $f=g+h$ betekent $f(x)=g(x)+h(x)$ $(0\leq x\leq 1)$, en $f=\lambda g$ betekent $f(x)=\lambda g(x)$ $(0\leq x\leq 1)$. Hiermee is R een lineaire ruimte (tegelijk is dit een voorbeeld van een lineaire ruimte zonder eindige basis). Wanneer men verder (f,g) definieert door

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,$$

dan wordt R een IP-ruimte. Merk op dat $(f,f)=\int_0^1 |f(x)|^2 dx > 0$ is, tenzij f identiek nul is, dus het nulelement van R is.

Wanneer we "continu" bijv. vervangen door Riemann-integreerbaar, dan hebben we geen IP-ruimte meer, want dan kan $(f,f)=0$ zijn zonder dat f identiek nul is.

Opmerking 2.1. Men kan ook het begrip reële IP-ruimte definiëren, als een reële lineaire ruimte met een inwendig product (f,g) dat voor alle f en g reëel uitvalt, en aan de in def.2.1 genoemde eigenschappen voldoet. Als voorbeelden kunnen we de bovengenoemde voorbeelden 2.1 en 2.2 nemen, met beperking tot reële rijtjes en reële λ's. Voorbeeld 1 wordt dan het bekende geval van de n-dimensionale euclidische meetkunde, waarbij nu $\|f\|$ werkelijk de lengte van de vector f wordt.

Opmerking 2.2. Wanneer men echter een complexe IP-ruimte R als reële lineaire ruimte opvat (zie opm.1.1) wordt het nooit een reële IP-ruimte (tenzij R slechts uit het nulelement bestaat). Is nl. $f\in R$, $f\neq 0$, dan is $if\in R$, $(if,f)=i(f,f)\neq 0$, dus (if,f) niet reëel.

Van nu af aan spreken we weer over een (complexe) IP-ruimte R.

Stelling 2.2. Is $f\in R$, $g\in R$ dan is $|(f,g)| \leq \|f\|\cdot\|g\|$ (ongelijkheid van Schwarz).
En $|(f,g)| = \|f\|\cdot\|g\|$ geldt dan en slechts dan als f en g evenredig zijn.

Bewijs. Voor f=0 zijn beide uitspraken juist (elke g is met 0 evenredig). We onderstellen nu $f\neq 0$, dus $\|f\|\neq 0$. Zij λ een complexe variabele. Dan is

$$\|\lambda f-g\|^2=(\lambda f-g,\lambda f-g)=\lambda\bar{\lambda}(f,f)-\lambda(f,g)-\bar{\lambda}(g,f)+(g,g)=$$
$$=\left(\lambda\|f\|-\frac{(g,f)}{\|f\|}\right)\cdot\left(\bar{\lambda}\|f\|-\frac{(f,g)}{\|f\|}\right)+\frac{\|g\|^2\|f\|^2-|(f,g)|^2}{\|f\|^2}.$$

Kies nu $\lambda=(g,f)/\|f\|^2$. Dan blijkt dat

$$\|g\|^2\,\|f\|^2-|(f,g)|^2=\|f\|^2\,\|\lambda f-g\|^2\geq 0\ ,$$

en het gelijkteken geldt slechts als $g=\lambda f$. Dan zijn f en g evenredig. En steeds wanneer f en g evenredig zijn is $|(f,g)|=\|f\|\cdot\|g\|$, want als $f=\alpha h$, $g=\beta h$, dan is $|(f,g)|=|\alpha\bar{\beta}(h,h)|=$ $=|\alpha|\,\|h\|\cdot|\beta|\,\|h\|=\|f\|\cdot\|g\|$.

Opmerking 2.3. Passen we st.2.2 toe op voorbeeld 2.1, dan vinden we

$$|\Sigma_1^n\alpha_k\bar{\beta}_k|^2\leq\Sigma_1^n|\alpha_k|^2\cdot\Sigma_1^n|\beta_k|^2.$$

Stelling 2.3. $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$; $\|f-g\|\geq\big|\|f\|-\|g\|\big|$. In beide gevallen geldt het gelijkteken dan en slechts dan als $f=\lambda g$ met $\lambda\geq 0$ of als g=0.

Bewijs. $\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)=$
$=\|f\|^2+2\,\mathrm{Re}(f,g)+\|g\|^2\leq\|f\|^2+2\|f\|\,\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2$.
Het gelijkteken treedt op als $\mathrm{Re}(f,g)=\|f\|\cdot\|g\|$. Dus $|(f,g)|\geq$ $\geq\|f\|\cdot\|g\|$, en uit st.2.2 volgt nu dat $|(f,g)|=\|f\|\cdot\|g\|$, dus dat f en g evenredig zijn. Bovendien blijkt uit $\mathrm{Re}(f,g)=\|f\|\cdot\|g\|$ en $|(f,g)|=\|f\|\cdot\|g\|$, dat $(f,g)=\|f\|\cdot\|g\|$. Zij $f=\alpha h$, $g=\beta h$, $h\neq 0$, dan vinden we $\alpha\bar{\beta}\|h\|^2=|\alpha|\cdot\|h\|\cdot|\beta|\cdot\|h\|$, dus $\alpha\bar{\beta}\geq 0$. Is $\beta\neq 0$, dan blijkt dat $\alpha=\lambda\beta$ met $\lambda\geq 0$. Hiermee zijn de uitspraken over $\|f+g\|$ bewezen.

We hebben nu verder

$$\|f\|=\|(f-g)+g\|\leq\|f-g\|+\|g\|\ ,$$
$$\|g\|=\|(g-f)+f\|\leq\|g-f\|+\|f\|=\|f-g\|+\|f\|\ ,$$

zodat $\|f-g\|$ zowel $\geq\|f\|-\|g\|$ als $\geq\|g\|-\|f\|$ is. Het is dus $\geq\big|\|f\|-\|g\|\big|$. Treedt het gelijkteken op en is bijv. $\|f\|\geq\|g\|$, dan is $\|f\|=\|f-g\|+\|g\|$, dus g=0 of $f-g=\mu g$, $\mu\geq 0$.
Dus $f=\lambda g$, $\lambda\geq 0$. Als $\|f\|<\|g\|$, komen we tot de conclusie dat f=0 of $g=\lambda f$, $\lambda\geq 0$, en dat komt weer op hetzelfde neer.

Def. 2.5. Een deelverzameling L van R heet een lineaire deelruimte als voor alle $f \in L$, $g \in L$ en alle complexe λ, μ geldt $\lambda f + \mu g \in L$. L is (met de reeds in R bestaande definitie van inwendig product) een IP-ruimte.

Def.2.6. Is Q een deelverzameling van R, dan is $L_e(Q)$ de collectie van alle eindige sommen van de vorm $\Sigma_{i=1}^{N} \lambda_i q_i$ ($N=1,2,\ldots, q_i \in Q$, λ_i complex).

Stelling 2.4. $L_e(Q)$ is een lineaire deelruimte. Als Q zelf reeds een lineaire deelruimte is dan is $L_e(Q)=Q$.

Def.2.7. Een deelverzameling Q van R heet een orthonormaalsysteem als $\|q\|=1$ voor alle $q \in Q$, $(q_1,q_2)=0$ voor alle $q_1,q_2 \in Q$.

Een orthonormaalsysteem heet maximaal als het niet een echt deel is van een groter orthogonaalsysteem. M.a.w.: als er geen $f \in R$ is met $f \neq 0$, $f \perp q$ voor alle $q \in Q$. (Anders zou $f/\|f\|$ aan Q kunnen worden toegevoegd).

Stelling 2.5. Er bestaat een maximaal orthonormaalsysteem.

Bewijs. Berust op het z.g. keuzepostulaat. Gemakkelijker toepasbaar is het daarmee equivalente Lemma van Zorn: Heeft in een partieel geordende verzameling Σ elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens in Σ, dan bevat Σ een maximaal element.

Voor de elementen van Σ nemen we de orthonormaalsystemen van R, en de ordening wordt door de inclusierelatie gegeven. Van elke lineair geordende collectie van orthonormaalsystemen is de vereniging weer een orthonormaalsysteem, en dit kan als bovengrens fungeren.

Opmerking 2.4. Dit bewijs is niet constructief. We zullen echter later zien, dat in het practisch zo belangrijke separabele geval een constructief bewijs gegeven kan worden.

Stelling 2.6. Zij Q een orthonormaalsysteem in R, en $f \in R$. Dan zijn er hoogstens aftelbaar vele $q \in Q$ met $(f,q) \neq 0$, en we hebben

$$\sum_{q \in Q}^{*} |(f,q)|^2 \leq \|f\|^2 \quad . \quad \text{(Ongelijkheid van Bessel).}$$

(Het sterretje geeft aan dat de termen die nul zijn moeten worden weggelaten, zodat er een som van hoogstens aftelbaar vele termen ontstaat). De getallen (f,q) heten de Fouriercoefficienten van f (t.o.v. Q).

Bewijs. Laat $\{q_1,\ldots,q_n\}$ een eindige deelverzameling van Q zijn. Dan is, als $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ complexe getallen zijn,

$$\| f - \Sigma_1^n \alpha_k q_k \|^2 = (f - \Sigma_{k=1}^n \alpha_k q_k,\ f - \Sigma_{h=1}^n \alpha_h q_h) =$$

$$= \| f \|^2 - \Sigma_{h=1}^n \overline{\alpha_h}(f,q_h) - \Sigma_{k=1}^n \alpha_k (q_k,f) + \Sigma_{h=1}^n | \alpha_h |^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \Sigma_{h=1}^n |(f,q_h)|^2 + \Sigma_{h=1}^n |(f,q_h) - \alpha_h|^2 .$$

Nemen we $\alpha_h=(f,q_h)$, en bedenken we dat het eerste lid ≥ 0 is, dan vinden we

$$\Sigma_{h=1}^n |(f,q_h)|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Laat N een natuurlijk getal $\geq \|f\|^2$ zijn. Dan concluderen we: hoogstens N van de $|(f,q)|$'s zijn ≥ 1, hoogstens 4N ervan zijn $\geq \frac{1}{2}$, hoogstens 16N zijn $\geq \frac{1}{4}$, enz. Dit levert een aftelling van de van 0 verschillende (f,q)'s. Vervolgens: was $\Sigma^* |(f,q)|^2 > \|f\|^2$, dan zou er reeds een partiële som van Σ^* groter dan $\|f\|^2$ zijn, in strijd met wat we boven vonden.

Opmerking 2.5. Zonder bewijs en zonder voorbeelden vermelden we: Het gelijkteken in de ongelijkheid van Bessel behoeft niet te gelden. Het geldt zeker niet voor alle f als Q niet maximaal is (kies bijv. voor f een element van een groter orthonormaalsysteem). Als Q wel maximaal is en R een eindige dimensie heeft, geldt het gelijkteken wèl voor alle f, en ook als Q maximaal is en R een Hilbertruimte is. Bij andere R kan het echter gebeuren dat Q en f zo te kiezen zijn, dat Q maximaal is en niettemin het teken $<$ geldt.

Stelling 2.7. Zij $(q_1,\ldots,q_n)$ een eindig orthonormaalsysteem in R, en zij $f \in R$. Beschouw $\|f - \Sigma_{k=1}^n \alpha_k q_k\|$ als functie van de complexe variabelen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Deze functie is strikt minimaal als $\alpha_1=(f,q_1),\ldots,\alpha_n=(f,q_n)$.

Bewijs. Volgt direct uit de in het begin van het bewijs van de vorige stelling afgeleide identiteit. Het minimum bedraagt $\{\|f\|^2 - \Sigma_1^n |(f,q_h)|^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Def.2.8. Zij φ een afbeelding van R_1 in R_2, waarbij R_1 en R_2 IP-ruimten zijn. φ heet een isometrische afbeelding, als voor alle $f,g \in R_1$ en alle complexe λ, μ geldt

$$\varphi(\lambda f+\mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g),$$
$$(\varphi(f), \varphi(g)) = (f,g).$$

R_1 en R_2 heten <u>isometrisch</u> als er een eeneenduidige isometrische afbeelding van R_1 <u>op</u> R_2 bestaat.

<u>Opmerking 2.6.</u> Een isometrische afbeelding van R_1 in R_2 is automatisch eeneenduidig. Uit $\varphi(f)=\varphi(g)$ volgt nl. $\varphi(f-g)=0$, dus $0=(\varphi(f-g), \varphi(f-g))=(f-g,f-g)=0$, dus $f=g$.

3. <u>Topologie in een IP-ruimte</u>

In deze paragraaf is R weer steeds een IP-ruimte.

<u>Stelling 3.1.</u> Als we de <u>afstand</u> van $f \in R$ tot $g \in R$ definiëren door $f-g$, dan wordt R een metrische ruimte.

<u>Bewijs.</u> $\|f-g\| > 0$ als $f \neq g$, en $\|f-f\| = 0$ (def.2.1 en def.2.2). En stelling 2.3 garandeert de driehoeksongelijkheid: $\|f-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\|$, aangezien $f-g=(f-h)+(h-g)$.

De vóór stelling 3.5 uitgedrukte eigenschappen berusten uitsluitend op het feit dat R een metrische ruimte is.

<u>Def.3.1.</u> Zij S een deel van R. De <u>afsluiting</u> van S (notatie $\overline{S}$) is dan de verzameling van alle $f \in R$ met de volgende eigenschap: bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $g \in S$ met $\|g-f\| < \varepsilon$.

<u>Stelling 3.2.</u> 1°. $S \subset \overline{S}$; 2°. $S_1 \subset S$, dan $\overline{S}_1 \subset \overline{S}$; 3°. $\overline{\overline{S}}=\overline{S}$ ($\overline{\overline{S}}$ betekent de afsluiting van $\overline{S}$).

<u>Bewijs.</u> 1° en 2° zijn triviaal, alsmede $\overline{\overline{S}} \supset \overline{S}$ bij 3°. We tonen nu aan dat $\overline{\overline{S}} \subset \overline{S}$. Zij $f \in \overline{\overline{S}}$, $\varepsilon > 0$. Er is een $g \in \overline{S}$ met $\|g-f\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Bij g is nu een $h \in S$ te vinden met $\|g-h\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Wegens de driehoeksongelijkheid is nu $\|f-h\| < \varepsilon$. Daar ε willekeurig was, blijkt dat $f \in \overline{S}$.

<u>Def.3.2.</u> S heet <u>gesloten</u> als $S=\overline{S}$.

S heet <u>open</u> als het complement van S (notatie $R \setminus S$) gesloten is.

<u>Stelling 3.3.</u> S is dan en slechts dan open als er bij elke $f \in S$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat elke g met $\|g-f\| < \varepsilon$ in S ligt.

<u>Bewijs.</u> De in de stelling genoemde voorwaarde kan ook als volgt worden uitgedrukt: als $f \in S$, dan is het niet waar dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $g \in R \setminus S$ bestaat met $\|g-f\| < \varepsilon$. M.a.w. als $f \in S$, dan ligt f niet in $\overline{R \setminus S}$. Dus $\overline{R \setminus S} \subset R \setminus S$, dus $R \setminus S$ is gesloten.

Def.3.3. Zij $S_1 \subset S_2 \subset R$. S_1 heet dicht in S_2, als $S_2 \subset \overline{S}_1$. M.a.w. elke $f \in S_2$ kan met iedere gewenste graad van nauwkeurigheid door elementen van S_1 worden benaderd.

Def.3.4. Zij $S \subset R$. S heet separabel als er een hoogstens aftelbare deelverzameling $T \subset S$ bestaat die dicht ligt in S.

Stelling 3.4. Zij $S_1 \subset S_2 \subset R$, en S_2 separabel. Dan is S_1 separabel.

Bewijs. Zij $T \subset S_2$, T dicht in S_2. Kies bij elke n $(n = 1,2,...)$ en elke $t \in T$ een element $s_{tn} \in S_1$ met $\|s_{tn}-t\| < n^{-1}$, als er zo een s_{tn} bestaat. Zo niet, dan kiezen we geen s_{tn}. De verzameling van alle gekozen s_{tn}'s noemen we T_1. T_1 is hoogstens aftelbaar, en $T_1 \subset S_1$. We laten zien dat T_1 dicht in S_1 ligt. Zij $f \in S_1$, $\varepsilon > 0$. Kies $n > 2\varepsilon^{-1}$. Kies een $t \in T$ met $\|t-f\| < n^{-1}$. Bij deze t en n is er een s_{tn} gekozen. Er was immers minstens één candidaat, nl. f. Nu is $\|s_{tn}-f\| \leq \|s_{tn}-t\| + \|t-f\| < 2n^{-1} < \varepsilon$, en $s_{tn} \in T_1$.

Opmerking 3.1. Sommige van de hier aangegeven begrippen zijn niet slechts afhankelijk van S doch ook van R. We beschouwen eens twee metrische ruimten R_1 en R_2, met doorsnede R_3. Voor $f,g \in R_3$ zij de afstand van f tot g t.o.v. R_1 dezelfde als t.o.v. R_3.

Is $S \in R_3$, dan is de afsluiting van S t.o.v. R_1 niet noodzakelijk dezelfde als de afsluiting t.o.v. R_2.

Voorbeeld 3.1. Zij R_2 de IP-ruimte van de continue functies op $[0,1]$ (voorbeeld 2.2), en zij R_1 de deelruimte bestaande uit alle polynomen op $[0,1]$. Bij elke $f \in R_2$ en elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $p \in R_1$ met $|p(x)-f(x)| < \varepsilon$ $(0 \leq x \leq 1)$ volgens de approximatiestelling van Weierstrass. Dus $\|p-f\| < \varepsilon$. R_1 ligt dus dicht in R_2. De afsluiting van R_1 t.o.v. R_2 is dus R_2, en de afsluiting van R_1 t.o.v. R_1 is R_1 zelf. R_1 is gesloten in R_1, doch niet in R_2. N.B. Voor opm. 3.2 zie p. HR 9.

Voorbeeld 3.2. Neem voor R_2 een tweedimensionale IP-ruimte, en voor R_1 een ééndimensionale deelruimte. Neem $S=R_1$. R_1 is open in R_1, doch niet in R_2.

Opmerking 3.3. De begrippen "S_1 dicht in S_2" en "S separabel" zijn kennelijk onafhankelijk van R.

Opmerking 3.4. Is $S \subset R_1 \subset R_2$, en S open t.o.v. R_2, dan is S open t.o.v. R_1. Is S gesloten t.o.v. R_2, dan is S gesloten t.o.v. R_1.

Stelling 3.5. De uitdrukking $\lambda f+\mu g$ is een continue functie van λ, μ, f, g. En (f,g) is een continue functie van f en g.

Bewijs. Zij $f_0, g_0 \in R$, λ_0, μ_0 complex. Zij $\varepsilon > 0$. Als nu $\|f-f_0\| < \delta$, $\|g-g_0\| < \delta$, $|\lambda-\lambda_0| < \delta$, $|\mu-\mu_0| < \delta$, dan is

$\|\lambda f+\mu g - (\lambda_0 f_0+\mu_0 g_0)\| \leq |\lambda-\lambda_0|\,\|f\| + |\lambda_0|\,\|f-f_0\|$ + (idem met μ en g) $< \delta(\|f_0\|+\delta) + \delta|\lambda_0| + \delta(\|g_0\|+\delta) + \delta|\mu_0|$.

We kunnen dit $< \varepsilon$ maken door een δ te kiezen met

$$0<\delta<1,\ \delta<\{\|f_0\| + \|g_0\| + |\lambda_0| + |\mu_0| + 2\}^{-1}\varepsilon.$$

Verder is voor $\|f-f_0\|<\delta$, $\|g-g_0\|<\delta$:

$$|(f,g)-(f_0,g_0)| = |(f-f_0,g-g_0) + (f-f_0,g_0) + (f_0,g-g_0)| \leq$$

$\leq \delta^2 + \|g_0\|\,\delta + \|f_0\|\,\delta$. Kies nu $0<\delta<1$ en $\delta<(1+\|g_0\|+\|f_0\|)^{-1}\varepsilon$.

Def.3.5. Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij elementen van R, en ook $f \in R$. We zeggen dat $\lim f_n = f$, of $f_n \to f$, als $\|f_n - f\| \to 0$.

Stelling 3.6. Is $f_n \to f$, $g_n \to g$, $\lambda_n \to \lambda$, $\mu_n \to \mu$, dan is

$$\lambda_n f_n + \mu_n g_n \to \lambda f + \mu g, \quad (f_n, g_n) \to (f,g).$$

Bewijs. Volgt direct uit st.3.5.

Opmerking 3.2. Neem R_1, R_2, R_3 weer volgens opm. 3.1. Is $S \subset R_3$, S open in R_1, dan behoeft S niet open te zijn in R_2.

4. Zwakke IP-ruimten

We zullen vaak ruimten tegenkomen die aan de eisen van def.2.1 voldoen, met als enige tekortkoming dat slechts $(f,f) \geq 0$ geldt en niet steeds $(f,f) > 0$ voor alle $f \neq 0$. We kunnen dan steeds daaruit een IP-ruimte maken door een operatie die we samentrekking zullen noemen, en die eigenlijk betekent dat we restklassen vormen modulo de deelruimte der f met $(f,f)=0$, of dat we twee elementen steeds identificeren als het verschil de norm nul heeft.

Definitie 4.1. Een lineaire ruimte R heet een zwakke IP-ruimte als er een inwendig product is gedefinieerd dat voldoet aan

$$(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g), \quad (\lambda f,g) = \lambda(f,g)$$
$$(f,g) = \overline{(g,f)}, \quad (f,f) \geq 0.$$

Met $\|f\|$ bedoelen we weer $(f,f)^{\frac{1}{2}}$.

Stelling 4.1. In een zwakke IP-ruimte geldt $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, $|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\|f-g\| \geq \big|\|f\| - \|g\|\big|$.

Bewijs: zie st.2.2 en st.2.3. De uitspraken over de gevallen waarin het gelijkteken geldt, komen echter te vervallen.

Stelling 4.2. $f_1 \in R$ en $f_2 \in R$ heten equivalent als $\|f_1-f_2\| = 0$. Deze equivalentierelatie is reflexief, symmetrisch en transitief.

Bewijs. 1°. $\|f-f\| = \|0\| = 0$. 2°. Uit $\|f_1-f_2\| = 0$ volgt $\|f_2-f_1\| = 0$. 3°. Uit $\|f_1-f_2\| = 0$ en $\|f_2-f_3\| = 0$ volgt $\|f_1-f_3\| = 0$ wegens stelling 4.1 $(f_1-f_3=(f_1-f_2)+(f_2-f_3))$.

Definitie 4.2. Zij R^s de collectie van alle equivalentieklassen bij de in st. 4.2 uitgedrukte equivalentie. Zij $\varphi_1 \in R^s$, $\varphi_2 \in R^s$. Kies $f_1 \in \varphi_1$, $f_2 \in \varphi_2$. Onder $\varphi_1 + \varphi_2$ resp. $\lambda\varphi_1$ verstaan we de klassen waartoe f_1+f_2 resp. λf_1 behoren. Onder (φ_1, φ_2) verstaan we (f_1,f_2). Deze definities zijn toelaatbaar wegens:

Stelling 4.3. $\varphi_1 + \varphi_2$, $\lambda\varphi_1$ en (φ_1, φ_2) hangen niet van de speciale keuzen van f_1 en f_2 af.

Bewijs. Kies ook $f_1' \in \varphi_1$, $f_2' \in \varphi_2$. Dan is $\|(f_1'+f_2')-(f_1+f_2)\| \leq \leq \|f_1'-f_1\| + \|f_2'-f_2\| = 0$, dus $f_1'+f_2'$ en f_1+f_2 behoren tot dezelfde klasse. En $\|\lambda f_1' - \lambda f_1\| = |\lambda| \cdot \|f_1'-f_1\| = 0$, dus $\lambda f_1'$ en λf_1 behoren tot dezelfde klasse. Tenslotte is $|(f_1',f_2')-(f_1,f_2)| =$

$= |(f_1',f_2'-f_2) + (f_1'-f_1,f_2)| \leq \|f_1'\| \cdot \|f_2'-f_2\| + \|f_1'-f_1\| \cdot \|f_2\| = 0.$

Stelling 4.4. R^s is een IP-ruimte.
Bewijs. We bewijzen slechts dat $(\varphi,\varphi) > 0$ $(\varphi \neq 0)$. Het is duidelijk dat $(\varphi,\varphi) \geq 0$. Als $(\varphi,\varphi)=0$, en als $f \in \varphi$, dan is $(f,f)=0$, dus $\|f-0\| = 0$. Dus $0 \in \varphi$, zodat φ de nulklasse is.
Definitie 4.3. R^s heet de samentrekking van R.

5. Hilbertruimten

Def.5.1. Een rij $f_1,f_2,f_3,\ldots$ van elementen van een IP-ruimte R heet een fundamentaalrij, als er bij elke $\varepsilon > 0$ een N is te vinden zó dat

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \text{ voor alle } n > N,\ m > N.$$

De rij heet convergent als er een $f \in R$ is met $f_n \to f$ (dus $\|f-f_n\| \to 0$). Een convergente rij heeft slechts één limiet.

Stelling 5.1. Elke convergente rij is een fundamentaalrij.
Def.5.2. R heet volledig als elke fundamentaalrij convergeert.
Def.5.3. Een volledige IP-ruimte heet een Hilbertruimte.
Voorbeeld 5.1. Zij S een willekeurige verzameling, en H_S de collectie van alle complexe functies f op S met de eigenschap dat f(s) voor hoogstens aftelbaar vele $s \in S$ van nul verschilt, terwijl $\Sigma^* |f(s)|^2$ convergeert (vgl. st.2.6).

Is nu $f \in H_S$, $g \in H_S$, dan is ook $\lambda f + \mu g \in H_S$, want

$$\Sigma^* |\lambda f(s) + \mu g(s)|^2 \leq 2|\lambda|^2 \Sigma^* |f(s)|^2 + 2|\mu|^2 \Sigma^* |g(s)|^2$$

(gebruik $|\alpha + \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2$). En bovendien is $\Sigma^* f(s)\overline{g(s)}$ absoluut convergent, want voor elke partiële som geldt

$$\{\Sigma_{j=1}^{k} |f(s_j)g(s_j)|\}^2 \leq \Sigma^* |f(s)|^2 \cdot \Sigma^* |g(s)|^2$$

(zie opm.2.3). Het is nu gemakkelijk in te zien dat door de definitie

$$(f,g) = \Sigma^* f(s)\,\overline{g(s)}\ ,\ \text{dus } \|f\|^2 = \Sigma^* |f(s)|^2\ ,$$

H_S een IP-ruimte wordt. We bewijzen nu dat H_S volledig is.

Zij $f_1, f_2, \ldots$ een fundamentaalrij. Dus $\|f_n - f_m\|^2 < \varepsilon$ als $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$, dus

$$\Sigma^* |f_n(s) - f_m(s)|^2 < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon)).$$

Hierin is s de sommatievariabele. Kiezen we een speciale $s_o \in S$, dan blijkt door beperking tot de term met $s=s_o$ dat

$$|f_n(s_o) - f_m(s_o)|^2 < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon)).$$

Dus de rij $f_1(s_o)$, $f_2(s_o)$,... is een fundamentaalrij van complexe getallen, en derhalve convergent. Noem de limiet $f(s_o)$. Door dit voor elke s_o te doen, is f als functie op S gedefinieerd. We laten zien dat $f \in H_S$. Zij $\{s_1,\ldots,s_k\}$ een eindig deel van S. Dan is

$$\Sigma_1^k \ |f_n(s_j) - f_m(s_j)|^2 < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon)).$$

Houd $s_1,\ldots,s_k$, n en ε vast, en laat $m \to \infty$. Dan blijkt

$$\Sigma_1^k \ |f_n(s_j) - f(s_j)|^2 \leq \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon)).$$

Kies een ε en een $n > N(\varepsilon)$. Dan is

$$\Sigma^* |f_n(s) - f(s)|^2 \leq \varepsilon,$$

omdat dit voor elke eindige deelsom geldt (dat er hoogstens aftelbaar veel termen $\neq 0$ zijn blijkt als in st.2.6). Dus $f_n - f \in H_S$, en derhalve $f \in H_S$. Verder is $\|f-f_n\|^2 \leq \varepsilon$. Dit geldt voor elke ε mits $n > N(\varepsilon)$. We concluderen dat $f_n \to f$. De fundamentaalrij is dus convergent.

Opm.5.1. Als S eindig is (aantal elementen n), is H_S de in voorbeeld 2.1 beschouwde ruimte.

Opm.5.2. In het bijzonder interesseren we ons voor het geval dat S aftelbaar is. Als S de verzameling der natuurlijke getallen is, stellen we H_S door H_o voor. De Hilbertruimte H_o bestaat dus uit alle rijen van complexe getallen $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ met $\Sigma|\alpha_j|^2 < \infty$.

H_o is bijzonder belangrijk omdat, naar later blijken zal, elke separabele Hilbertruimte met H_o isometrisch is (zie def. 2.8).

Opm.5.3. Nemen we een willekeurige S, dan is in H_S de volgende lineaire deelruimte R van bijzonder belang: Zij R_S de collectie van alle complexe functies f op S met de eigenschap dat f(s) voor hoogstens eindig vele $s \in S$ van nul verschilt. Als S niet eindig is, is R_S dus een echt deel van H_S. R_S is een IP-ruimte (zie def.2.5), maar is niet volledig als S niet eindig is. Elke f uit H_S is nl. gemakkelijk als limiet te schrijven van een rij $f_1, f_2, \ldots$ ($f_k \in R_S$). Deze rij is een fundamentaalrij in R_S, maar heeft geen limiet in R_S als f buiten R_S gekozen is.

R_S ligt dicht in H_S, en daaruit volgt (st.6.3) dat H_S de z.g. completering van R_S is.

6. Completering van een IP-ruimte tot Hilbertruimte

In een IP-ruimte R behoeft niet elke fundamentaalrij een limiet te hebben. Het zal echter blijken dat we R kunnen vergroten tot een ruimte waarin zulks wel het geval is. Wanneer we deze uitbreiding "zo zuinig mogelijk" nemen, zal blijken dat zij eenduidig bepaald is op isometrie na.

De situatie is te vergelijken met uitbreidingsoperaties in de algebra. Wanneer we een integriteitsgebied I hebben (zoals dat der gehele getallen) dan kunnen we dat uitbreiden tot een groter integriteitsgebied K, waarin de deling steeds mogelijk is (dus een lichaam). K is zo zuinig mogelijk, als er geen lichaam K_1 is dat I omvat en een echt deel van K is. Een dergelijke K heet een quotientenlichaam van I. Zijn K en K' quotientenlichamen van I, dan is er een isomorfie tussen K en K' die I elementsgewijs invariant laat. Bovendien geldt: ligt I in een lichaam K_o, dan is er binnen K_o steeds precies één quotientenlichaam van I.

Het ging hier om completering t.o.v. de deling, die in I niet steeds mogelijk was. Een volkomen analoge situatie ontstaat bij een IP-ruimte, waarin het "nemen van de limiet van een fundamentaalrij" niet steeds mogelijk is.

Def.6.1. Een Hilbertruimte H heet een completering van de IP-ruimte R, als $R \subset H$, en als er geen Hilbertruimte H_1 bestaat met $R \subset H_1 \subset H$, $H_1 \neq H$. (De notatie $R \subset H$ betekent hier dat R een lineaire deelruimte van de IP-ruimte H is, in de zin van def. 2.5).

Is reeds bekend dat R in een Hilbertruimte H ligt, dan is er gemakkelijk een completering aan te geven:

Stelling 6.1. Is R een deelruimte van de Hilbertruimte H, en $\overline{R}$ de afsluiting van R t.o.v. H, dan is $\overline{R}$ een completering van R.

Bewijs. $\overline{R}$ bestaat precies uit alle $f \in H$ die als limiet van een rij van elementen van R geschreven kunnen worden (zie def. 3.1). Daaruit volgt gemakkelijk (vgl. st.3.6) dat $\overline{R}$ een lineaire deelruimte van H is. We laten nu zien dat $\overline{R}$ volledig is. Is $f_1, f_2, \ldots$ een fundamentaalrij in $\overline{R}$, dan is het een fundamentaalrij in H, dus er is een $f \in H$ met $f_n \to f$. Daar $f_n \in \overline{R}$, zien we dat $f \in \overline{\overline{R}} = \overline{R}$.

Onderstel vervolgens $R \subset H_1 \subset \overline{R}$, H_1 een Hilbertruimte. Zij $f \in \overline{R}$, dan is daarbij een rij $f_1, f_2, \ldots$ met $f_n \in R$, $f_n \to f$. Deze rij is een fundamentaalrij, ligt reeds in H_1, en heeft dus een limiet in H_1. Dus $f \in H_1$. Derhalve is $H_1 = \overline{R}$.

Stelling 6.2. Is R een IP-ruimte, H een Hilbertruimte, en $R \subset H$, dan zijn de uitspraken "R gesloten t.o.v. H" en "R volledig" gelijkwaardig.

Bewijs. Uit st.6.1. Is R gesloten t.o.v. H, dan is $R = \overline{R}$. $\overline{R}$ is volledig, dus R ook.

Is R volledig, dan is R een Hilbertruimte. Noem die even H_1. Dan is $R \subset H_1 \subset \overline{R}$, waaruit volgt $H_1 = \overline{R}$. Dus $R = \overline{R}$.

Stelling 6.3. Zij R een IP-ruimte. H is dan en slechts dan een completering van R als H een Hilbertruimte is waarin R dicht ligt.

Bewijs. Is $R \subset H$, R dicht in H, dan is $\overline{R} = H$, dus H is een completering (st.6.1). Zij nu $R \subset H$, en H een completering van R. $\overline{R}$ is een Hilbertruimte. Noem die even H_1. Daar $R \subset H_1 \subset H$, vinden we $H_1 = H$, dus $\overline{R} = H$.

Stelling 6.4. Is $R \subset H$ (R een IP-ruimte, H een Hilbertruimte), dan is er slechts één completering H_1 van R met $R \subset H_1 \subset H$, nl. $H_1 = \overline{R}$ (afsluiting van R in H).

Bewijs. Dat $\overline{R}$ een completering is, staat al in st.6.1. Zij verder H_1 een willekeurige completering, $R \subset H_1 \subset H$. Dus $\overline{R} \subset \overline{H}_1$ ($\overline{H}_1$ is de afsluiting van H_1 in H), zodat $\overline{R} \subset H_1$ (st.6.2). R ligt dicht in H_1 (st.6.3), zodat $\overline{R} \supset H_1$. Dus $\overline{R} = H_1$.

Tot nu toe onderstelden we dat R in een Hilbertruimte lag. We laten nu dit gegeven vallen, en willen niettemin de existentie van een completering aantonen.

Stelling 6.5. Elke IP-ruimte R bezit een completering.
Bewijs. We zullen construeren: een Hilbertruimte H met een deelruimte L dicht in H, en een isometrie tussen L en R. H is dus een completering van L, en daaruit volgt direct een completering van R, nl. de ruimte die ontstaat door in H alle elementen van L te vervangen door de corresponderende elementen van R en hetzelfde te doen in alle relaties $f+g=h$, $\lambda f=g$, $(f,g)=\alpha$ (voor zover die elementen uit L bevatten). Dit komt dus alleen op naamsverandering neer.

Zij K de collectie van alle fundamentaalrijen uit R. De som van twee fundamentaalrijen $(f_1,f_2,\ldots)$ en $(g_1,g_2,\ldots)$ $(f_i\in R,\ g_i\in R)$ definiëren we door $(f_1+g_1,f_2+g_2,\ldots)$, en het scalaire product $\lambda(f_1,f_2,\ldots)$ door $(\lambda f_1,\lambda f_2,\ldots)$. Het inwendige product dezer fundamentaalrijen definiëren we als $\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)$. Deze limiet bestaat, want uit

$$|(f_n,g_n)-(f_m,g_m)| \leq \|g_n\|\cdot\|f_n-f_m\| + \|f_m\|\cdot\|g_n-g_m\|$$

volgt gemakkelijk dat de rij $(f_1,g_1),(f_2,g_2),\ldots$ een fundamentaalrij van complexe getallen is. Het is nu niet moeilijk te bewijzen dat K een zwakke IP-ruimte is.

Zij $H=K^s$ (de samentrekking van K, zie def. 4.3). Bij deze samentrekking worden de naar nul convergente fundamentaalrijen tot het nulelement van H samengetrokken). Dus H is een IP-ruimte. Het element van H dat bij de samentrekking uit een $\varphi\in K$ ontstaat, noteren we door φ^s.

Voordat we de volledigheid van H aantonen geven we eerst L aan. Voor $f\in R$ zij φ_f de fundamentaalrij $(f,f,\ldots)$. Schrijf $(\varphi_f)^s=h_f$. De collectie van alle h_f's noemen we L. L is een lineaire deelruimte van H, en de afbeelding $f\to h_f$ van R op L is een isometrie $((h_f,h_g)=\lim(f,g)=(f,g))$.

L ligt dicht in H. Zij nl. $h\in H$, $h=\varphi^s$, $\varphi=(f_1,f_2,\ldots)\in K$, en zij $\varepsilon>0$. Kies $N(\varepsilon)$ zó dat $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ voor $n>N(\varepsilon)$, $m>N(\varepsilon)$. Kies een $m>N(\varepsilon)$ en stel $f_m=g$. Dan is

$$\| h-h_g \|^2 = \lim_{n \to \infty} (f_n-g, f_n-g),$$

en daar $\|f_n-g\| < \varepsilon$ is voor $n > N(\varepsilon)$, is deze limiet $\leq \varepsilon^2$. Dus $\|h-h_g\| \leq \varepsilon$, terwijl $h_g \in L$. L ligt dus dicht in H.

Tenslotte laten we zien dat H volledig is. Zij $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots$ een fundamentaalrij uit H. Kies bij $h^{(n)}$ een $f^{(n)} \in R$, zó dat

$$\| h^{(n)} - h_{f^{(n)}} \| < \frac{1}{n}$$

(dit kan, daar L dicht in H ligt). Nu is ook $h_{f^{(1)}}, h_{f^{(2)}}, \ldots$ een fundamentaalrij, en het is voldoende aan te tonen dat deze nieuwe rij een limiet heeft ($h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots$ heeft dan dezelfde limiet).

Wegens de isometrie tussen R en L geldt $\|h_f - h_g\| = \|f-g\|$. We concluderen dat $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots)$ een fundamentaalrij in R is. Noem die φ, en zij $h = \varphi^3$. Nu is

$$\|h-h_{f^{(n)}}\|^2 = \lim_{m \to \infty} \| f^{(m)} - f^{(n)} \|^2,$$

en dit is $< \varepsilon$ als n voldoend groot is. Dus $h_{f^{(n)}} \to h$, q.e.d.

<u>Stelling 6.6</u>. De completering van R is op isometrie na eenduidig bepaald. M.a.w. als $R_1 \subset H_1$, $R_2 \subset H_2$, H_1 en H_2 Hilbertruimten, R_1 dicht in H_1, R_2 dicht in H_2, en R_1 isometrisch met R_2, dan kan die isometrie tussen R_1 en R_2 tot een isometrie tussen H_1 en H_2 worden voortgezet.

<u>Bewijs</u>. Is $h_1 \in H_1$, dan is daarbij een rij elementen uit R_1 te vinden die naar h_1 convergeert. Dit is een fundamentaalrij in R_1. Daarmee correspondeert (via de isometrie) een fundamentaalrij uit R_2. Daar H_2 volledig is, convergeert deze naar een element h_2 van H_2. Een tweede rij uit R_1 die eveneens naar h_1 convergeert levert ons dezelfde h_2 op (dit is in te zien door de beide rijen tot één rij te mengen). We hebben zo een afbeelding van H_1 in H_2. Daar elke fundamentaalrij uit R_2 hierbij aan de beurt komt, is het een afbeelding van H_1 op H_2. Dat het een isometrie is volgt direct uit st.3.6. Dat deze een voortzetting van de gegeven isometrie tussen R_1 en R_2 is, is direct in te zien door fundamentaalrijen (f,f,f,...) te bekijken.

7. Kwadratisch integreerbare functies op een maatruimte

Stelling 7.1. De in voorbeeld 2.2 genoemde IP-ruimte R der continue functies op $[0,1]$ is niet volledig.

Bewijs. Zij $f(x)$ gedefinieerd door $f(x)=1$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, $f(x)= = 0$ $(\frac{1}{2} < x \leq 1)$, zodat f niet tot R behoort. Er is echter een rij functies $f_n \in R$ aan te geven met de eigenschap dat $\int_0^1 |f(x)-f_n(x)|^2\, dx \to 0$. Daaruit blijkt dat $f_1, f_2, \ldots$ een fundamentaalrij in R is. Had deze een limiet $g \in R$, dan zou $\int_0^1 |f-g|^2\, dx=0$ zijn, wat onmogelijk is: Is $g(\frac{1}{2}) \neq 0$, dan is er een $a > \frac{1}{2}$ te vinden met $\int_{\frac{1}{2}}^a |f-g|^2\, dx > 0$; is $g(\frac{1}{2}) \neq 1$ dan is er een analoog resultaat met een $b < \frac{1}{2}$.

Opmerking 7.1. Wanneer men i.p.v. continue met Riemann-integreerbare functies werkt (waartoe echter nog moet worden samengetrokken door z.g. "nulfuncties" met nul te identificeren), dan kan men op analoge wijze de onvolledigheid laten zien. Enerzijds kan dat gebeuren door een onbegrensde f te kiezen met $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$, bijv. $f(x)=x^{-1/3}$; anderzijds door een begrensde f te kiezen die niet Riemann-integreerbaar doch wel Lebesgue-integreerbaar is.

Opmerking 7.2. Met behulp van Lebesgue-integralen komt men echter wèl tot een Hilbertruimte. Vooruitlopend op het resultaat beschrijven we even de situatie: $L_2([0,1])$ is de collectie van alle meetbare functies f op $[0,1]$ die de eigenschap hebben dat $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$. We definiëren (f,g) door $\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Deze L_2 is geen IP-ruimte, want (f,f) kan $=0$ zijn zonder dat $f=0$ is. $(f,f)=0$ betekent dat $\int_0^1 |f(x)|^2 dx=0$, of dat f bijna overal nul is. Door samentrekking ontstaat een IP-ruimte en dat is in dit geval een Hilbertruimte.

Hetzelfde resultaat kan worden verkregen als we het interval $[0,1]$ (met gewone Lebesgue-maat) vervangen door een willekeurige maatruimte.

Wij zullen echter een geheel zelfstandige weg volgen, waarbij we de resultaten van de maattheorie niet gebruiken: de integralen zullen worden ingevoerd door middel van completering van een IP-ruimte.

Opmerking 7.3. Ter geruststelling kan worden vermeld dat de in st. 7.1 genoemde IP-ruimte dicht ligt in de in het begin van opm. 7.2 genoemde Hilbertruimte.

Definitie 7.1. Zij X een willekeurige verzameling. Een niet-lege collectie Γ van deelverzamelingen van X heet een *semiring* als, voor elk paar $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$, zowel de doorsnede $A \cap B$ als het verschil $A \setminus B$ als een disjuncte som van eindig vele verzamelingen uit Γ kan worden geschreven. (Hetzelfde geldt dan automatisch voor de vereniging $A \cup B$).
Voorbeeld 7.1. $X=(-\infty, \infty)$; Γ bestaat uit 1^o de lege verzameling, en 2^o alle halfopen intervallen $(a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$.
Opmerking 7.4. Def. 6.1 is iets beperkter dan de overeenkomstige in de cursus Lebesgue-integratie (Eindhoven 1957-'58, verder met LE aangeduid, def. 1.1.5), doordat "aftelbaar vele" door "eindig vele" is vervangen. Voor de practijk is def.7.1 echter ruimschoots voldoende.
Definitie 7.2. Een functie μ die aan elke $A \in \Gamma$ een gegeneraliseerd getal $\mu(A)$ (met $0 \leq \mu(A) \leq \infty$) toevoegt, heet een *maat* op Γ, als $\mu(\emptyset)=0$ ($\emptyset$ stelt de lege verzameling voor), en als voor elke disjuncte splitsing $A= \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ $(A \in \Gamma,\ A_i \in \Gamma)$ geldt $\mu(A)=$ $= \Sigma_1^{\infty} \mu(A_i)$. ($\mu$ heet dan totaal-additief).

Definitie 7.3. Voldoen X, Γ en μ aan de eisen van def.7.1 en def.7.2, dan zeggen we dat (X, Γ, μ) een *maatruimte* is.
Voorbeeld 7.2. Zij X een deelinterval van $(-\infty, \infty)$, en Γ de collectie van alle halfopen deelintervallen $(a,b]$ van X, plus de lege verzameling. Zij g een reëele (overal eindige) monotoon nietdalende functie op X, en definiëer μ door $\mu((a,b])=g(b+)-g(a+)$. (Met $g(b+)$ wordt de rechterlimiet van g in b bedoeld). Dan is (X, Γ, μ) een maatruimte (Stieltjesmaatruimte. Zie LE blz.14 en blz.66).
Definitie 7.4. Zij (X, Γ, μ) een maatruimte. Onder een *speciale trapfunctie* verstaan we een functie die een lineaire combinatie (complexe coëfficiënten) van eindig vele χ_{A_i}'s is, waarin slechts A_i's optreden met eindige maat (χ_A is de karakteristieke functie van A: $\chi_A(x)=1$ als $x \in A$, en anders 0). De collectie van alle speciale trapfuncties stellen we door T voor (vgl. LE blz.40, daar werd echter T^* gebruikt i.p.v. T).

Is $t \in T$, $t = \Sigma b_i \chi_{A_i}$ (eindige som), dan definiëren we $\int_X t(x)d\mu = \Sigma b_i \mu(A_i)$. (Gemakkelijk is aan te tonen dat deze definitie onafhankelijk is van de voor t gekozen splitsing in karakteristieke functies, vgl. LE blz.42).

Stelling 7.2. Met de triviale definitie van som en scalair product wordt T een lineaire ruimte. Is verder $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ dan ligt ook $t_1 t_2$ (d.i. de functie die in een punt x de waarde $t_1(x)t_2(x)$ aanneemt) in T. Definiëren we

$$(t_1,t_2) = \int_X t_1(x)\overline{t_2(x)}d\mu ,$$

dan wordt T een zwakke IP-ruimte.

Opmerking 7.5. Het woord"zwakke" mag niet worden weggelaten, want het kan gebeuren dat Γ niet-lege A's bevat met maat 0.

Definitie 7.5. De samentrekking van T noemen we T^S, en de completering van T^S stellen,we door $L_2(X,\Gamma,\mu)$ voor.

Opmerking 7.6. De elementen van deze L_2 zijn abstract gedefinieerd (zie st.6.5), en stellen dus nog geen functies op X voor. Het moeten ook geen functies worden, maar zekere equivalentieklassen van functies (vgl. opm.7.2). We zullen nu dus eerst een equivalentiedefinitie voor functies op X geven.

Definitie 7.6. Zij (X,Γ,μ) een maatruimte. We zeggen dat een deelverzameling S van X de maat 0 heeft (notatie $\mu(S)=0$) als er bij elke $\varepsilon > 0$ een rij $A_1, A_2, \ldots$ $(A_i \in \Gamma)$ is te vinden met

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset S , \qquad \sum_1^{\infty} \mu(A_i) < \varepsilon .$$

Stelling 7.3. Heeft elk van de verzamelingen S_i $(i=1,2,\ldots)$ de maat 0, dan heeft ook de vereniging de maat 0.

Definitie 7.7. Twee op X gedefiniëerde functies f_1 en f_2 heten equivalent als de verzameling van alle x met $f_1(x) \neq f_2(x)$ de maat 0 heeft. (Men zegt dan ook dat $f_1 = f_2$ (p.p.), of dat $f_1 - f_2$ bijna overal nul is). Deze equivalentie-relatie is symmetrisch, reflexief en transitief. De collectie van alle equivalentieklassen stellen we door Φ voor.

Opmerking 7.7. Met de voor de hand liggende definitie van som en scalair product wordt Φ een lineaire ruimte.

Opmerking 7.8. Zijn t_1 en t_2 trapfuncties die worden geïdentificeerd bij de samentrekking van T tot T^S, dan zijn ze ook equivalent in de zin van def.7.7.

We zullen nu $L_2(X, \Gamma, \mu)$ in Φ inbedden.

Stelling 7.4. Is $t_1, t_2, t_3, \ldots$ een fundamentaalrij in T, dan is er een deelrij die voor bijna elke x convergeert. Dit wil zeggen: er zijn natuurlijke getallen $n_1, n_2, \ldots,$ en er is een $S \subset X$ met $\mu(S)=0$ zó dat voor elke $x \in X \setminus S$ de rij $t_{n_1}(x), t_{n_2}(x), \ldots$ convergeert.

Bewijs. Kies n_k zó dat $n_k > n_{k-1}$ (als $k > 1$ is) en zó dat $\|t_m - t_n\| < 2^{-2k}$ is voor alle $m \geq n_k$, $n \geq n_k$. Dit legt de deelrij vast. Gemakshalve nummeren we deze opnieuw: we vervangen t_{n_k} door t_k. Nu is dus $\|t_{k+1} - t_k\| < 2^{-2k}$.

Zij a positief, $t \in T$, $\|t\| < a^2$. Er is een eindig aantal disjuncte $A_i \in \Gamma$ aan te geven op elk waarvan t(x) een constante waarde $\neq 0$ heeft. Op sommige A_i's kan $|t(x)| > a$ zijn, maar daar $\int_X |t(x)|^2 d\mu < a^4$ is, is de som van de maten dezer A_i's kleiner dan a^2. Stel de vereniging dezer A_i's door $U(t;a)$ voor.

Als x zo gekozen is dat $t_1(x), t_2(x), \ldots$ niet convergeert, dan is oneindig vaak $|t_{k+1}(x) - t_k(x)| > 2^{-k}$, dus x ligt in oneindig vele der U_k, waarin $U_k = U(t_{k+1} - t_k; 2^{-k})$. Voor elk natuurlijk getal N geldt dus dat de verzameling der x waarvoor de rij divergeert, kan worden overdekt door de vereniging van $U_N, U_{N+1}, \ldots$. Dit is een vereniging van aftelbaar vele $A_i \in \Gamma$, en de som der maten van deze A_i is $< 2^{-2N} + 2^{-2N-2} + \ldots$. De uitzonderingsverzameling heeft dus de maat 0.

Stelling 7.5. Zij $g \in L_2(X, \Gamma, \mu)$. Kies een rij $s_1, s_2, \ldots$ $(s_i \in T^S)$ met $\|s_i - g\| \to 0$. Kies uit elke s_i een $t_i \in$ T. Kies van $t_1, t_2, \ldots$ een deelrij die voor bijna alle x convergeert, en noem de limiet f(x) (definieer bijv. f(x)=0 als de limiet niet bestaat). Zij φ de equivalentieklasse van f. Dan is φ onafhankelijk van de zoëven gemaakte keuzen. De toevoeging van $g \to \varphi$ is een lineaire een-eenduidige afbeelding van L_2 in Φ. Bij deze afbeelding gaat elke $s \in T^S$ in zijn eigen functieklasse over (nl. in de klasse van t, als t een willekeurig element van s is).

Bewijs. Dat φ niet afhangt van de drie gemaakte keuzen blijkt als volgt. Zij (na het aanbrengen van een nieuwe nummering) $\|s_i - g\| \to 0$, $\|s_i' - g\| \to 0$, $t_i \in s_i$, $t_i' \in s_i'$, $t_i(x) \to f(x)$ (p.p.), $t_i'(x) \to f'(x)$ (p.p.). Noem $s_i - s_i' = s_i''$, $t_i - t_i' = t_i''$. Dan is $\|s_i''\| \to 0$, dus $\int_X |t_i''(x)|^2 d\mu \to 0$ en $t_i''(x) \to f(x) - f'(x)$ (p.p.). Door op een deelrij over te gaan kunnen we bereiken dat

$\|t_i''\| < 2^{-4i}$. Deze rij mengen we met nullen: $t_1'', 0, t_2'', 0, t_3'', \ldots$. Stellen we deze door $v_1, v_2, v_3, \ldots$ voor, dan geldt $\|v_{k+1} - v_k\| < 2^{-2k}$. Volgens het bewijs van st. 7.4 blijkt nu dat $v_k(x)$ bijna overal convergeert. Daaruit volgt dat $t_k''(x)$ bijna overal naar nul convergeert, dus $f(x) = f'(x)$ (p.p.). Dus f en f' liggen in dezelfde klasse.

De lineariteit van de afbeelding $g \to \varphi$ volgt gemakkelijk uit het feit dat $t_i(x) \to f(x)$ (p.p.) en $t_i'(x) \to f'(x)$ (p.p.) impliceren dat $\lambda t_i(x) + \lambda' t_i'(x) \to \lambda f(x) + \lambda' f'(x)$ (p.p.) (st. 7.3).

Het kost enige moeite om de een-eenduidigheid van de afbeelding aan te tonen. Daartoe moeten we laten zien: <u>Is $t_1, t_2, \ldots$ een fundamentaalrij in T, en is $t_i(x) \to 0$ (p.p.), dan is $\|t_i\| \to 0$.</u>

Neem het tegendeel aan. Dan is er een $p > 0$ zodat oneindig vaak $\|t_i\| > p$. Door op een deelrij over te gaan bereiken we dat het voldoende is om een tegenspraak te verkrijgen uit de gegevens: <u>$t_1, t_2, \ldots$ is fundamentaalrij, $\|t_i\| > 1$ (alle i), $t_i(x) \to 0$ (p.p.)</u>.

Door weer op een deelrij over te gaan kunnen we bereiken dat $\|t_1 - t_2\| + \|t_2 - t_3\| + \ldots$ convergeert, vgl. het begin van het bewijs van st.7.4., en door daarvan een beginstuk weg te laten bereiken we een nieuwe rij $t_1, t_2, \ldots$ die voldoet aan

$$\|t_1\| > 1, \quad \|t_1 - t_2\| + \|t_2 - t_3\| + \ldots < \tfrac{1}{2}, \quad t_i(x) \to 0 \quad (\text{p.p.}).$$

Daar t_1 een trapfunctie is, is er een eindige $M > 0$ met $|t_1(x)| \leq M (x \in X)$. En er is een eindige disjuncte som $S = \Sigma_1^m A_j$ $(A_j \in \Gamma)$ zo dat $t_1(x) = 0$ als x buiten S ligt, terwijl $\Sigma_1^m \mu(A_j) = K < \infty$ is. Wegens $\|t_1\| > 1$ is $M > 0$, $K > 0$.

Zij $t_n^* \in T$ gedefinieerd door $t_n^*(x) = \min(|t_1(x)|, \ldots, |t_n(x)|)$. Dan is $M \geq t_n^*(x) \geq t_{n+1}^*(x)$, $t_n^*(x) \to 0$ (p.p.), $t_n^*(x) = 0$ buiten S, en $\|t_n^*\| > \frac{1}{2}$. Dit laatste blijkt als volgt:

$$t_n^*(x) + |t_1(x) - t_2(x)| + \ldots + |t_{n-1}(x) - t_n(x)| \geq |t_1(x)| \quad \text{(alle x)},$$

dus

$$\|t_n^*\| + \|t_1 - t_2\| + \ldots + \|t_{n-1} - t_n\| \geq \|t_1\| .$$

Zij S_n de verzameling van alle $x \in S$ waarvoor $t_n^*(x) < (8K)^{-\frac{1}{2}}$. Dan is

$$\frac{1}{4} < \|t_n^*\|^2 \leq K.(8K)^{-1} + (K - \mu(S_n))\cdot M^2$$

S_n is een disjuncte som van elementen van Γ, onder $\mu(S_n)$ wordt de som van de maten daarvan verstaan). Dus $\mu(S_n) < \mu(S)-(8M^2)^{-1}$.

We hebben $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$. Wegens $t_n^*(x) \to 0$ (p.p.) ligt bijna elke $x \in S$ in één der S_n. Zij $A_1, A_2, \ldots$ een rij ($A_i \in \Gamma$) waarvan de vereniging de uitzonderingspunten bedekt, met $\Sigma\,\mu(A_i) < (8M^2)^{-1}$. Nu wordt de gehele S overdekt door

$$A_1, A_2, \ldots\ ;\quad S_1, S_2 \setminus S_1,\ S_3 \setminus S_2, \ldots\ ,$$

en de som der maten van deze stukken is $< \mu(S)$. Dit is in strijd met het feit dat μ totaal-additief is (tot nu toe werd steeds slechts de additiviteit gebruikt, hier wordt voor het eerst de totaal-additiviteit uitgebuit).

Hiermee is de éénéénduidigheid aangetoond. Tenslotte gaan we na wat er met een $s \in T^s$ gebeurt. s is een klasse van trapfuncties die twee aan twee equivalent zijn in de zin dat het absolute kwadraat van hun verschil de waarde nul heeft (zie def.7.5). Om het beeld van s in Φ te vinden mogen we $s=s_1=s_2=\ldots$ nemen. Zij t een trapfunctie uit s, dan kunnen we de fundamentaalrij $t, t, \ldots$ gebruiken; deze convergeert overal naar t. Het beeld van s is nu de klasse van alle functies f met de eigenschap dat $f(x)=t(x)$ (p.p.). We vinden bovendien (wat ook gemakkelijk direct te bewijzen is):

Als $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ dan is

$$\int |t_1(x) - t_2(x)|^2 d\mu = 0 \Longleftrightarrow t_1(x) - t_2(x) = 0 \quad \text{(p.p.)}.$$

<u>Definitie 7.8</u>. Daar $L_2(X,\Gamma,\mu)$ als completering van T^s toch slechts op isometrie na was gedefinieerd, mogen we aan de elementen ervan nog een concrete betekenis geven: elke $g \in L_2(X,\Gamma,\mu)$ interpreteren we als de in st.7.5 daarmee corresponderende φ. Daardoor is een deelruimte van Φ tot Hilbertruimte gemaakt, waarin T overal dicht ligt.

Opmerking 7.9. Eigenlijk zijn de elementen van T geen elementen van Φ . Voortaan moeten we onder een element van T verstaan: een klasse van functies op X die bijna overal gelijk zijn aan eenzelfde speciale trapfunctie.

Definitie 7.9. Een op X gedefinieerde complexe functie f heet kwadratisch integreerbaar (t.o.v. Γ en μ) als f tot een equivalentieklasse $\varphi \in L_2(X,\Gamma,\mu)$ behoort. Zijn f_1 en f_2 kwadratisch integreerbaar, dan definiëren we de Lebesgue-integraal van $f_1\overline{f}_2$ door $\int_X f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu = (\varphi_1,\varphi_2)$, waarin φ_1,φ_2 de met f_1,f_2 corresponderende klassen zijn. We zullen i.p.v. (φ_1,φ_2) ook wel (f_1,f_2) schrijven (na deze definitie vormen de kwadratisch integreerbare functies een zwakke IP-ruimte).

Opmerking 7.10. Van hieruit kan de theorie van de Lebesgue-integralen geheel worden opgebouwd. Het is echter vervelend dat voor dit doel de ruimte X nog in stukken moet worden geknipt en ook functies in stukken moeten worden gesplitst. Dit zou in mindere mate nodig geweest zijn als we de completering van de metrische ruimte T^s hadden uitgevoerd met de afstandsdefinitie $\int|t|d\mu$ i.p.v. met $(\int|t|^2d\mu)^{\frac{1}{2}}$.

Definitie 7.10. Is $E\subset X$, en is $\chi_E \subset L_2(X,\Gamma,\mu)$, dan heet E meetbaar, en de maat van E definieren we door $\mu(E)=\|\chi_E\|$ (als $E\in\Gamma$, dan stemt dit met de oude definitie overeen). Een disjuncte som van zulke E's wordt ook meetbaar genoemd, en als maat wordt de som van de maten van deze stukken genomen (de maat kan dus oneindig zijn).

Opmerking 7.11. We noemen nog een paar dingen die gemakkelijk af te leiden zijn: 1^o. Is $f_n\in L_2$, $f\in L_2$, $\|f-f_n\|\to 0$, dan is er een deelrij der $f-f_n$ die p.p. convergeert. 2^o. Is $A_i\in\Gamma$, $\Sigma_1^m \mu(A_i)<\infty$, E_j meetbaar, $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset \Sigma_1^m \mu(A_i)$, dan is ook $\lim E_j$ meetbaar. Hieruit volgt dat de meetbare verzamelingen een sigmaring vormen (LE blz.10). 3^o. Is $f\in L_2$, f reëel, a reëel, dan is de verzameling der x met $f(x)>a$ een meetbare verzameling.

8. Orthogonaal complement

Definitie 8.1. Als R en R_1 IP-ruimten zijn, met $R \subset R_1$, dan wordt de verzameling van alle $f \in R_1$ met $f \perp R$ (d.w.z. $f \perp g$ voor alle $g \in R$) het orthogonale complement van R in R_1 genoemd. Notatie $R_1 \ominus R$.

Stelling 8.1. $R_1 \ominus R$ is een lineaire deelruimte van R_1, die gesloten is in R_1.

Bewijs. Uit $f_1 \perp R$, $f_2 \perp R$ volgt direct dat elke lineaire combinatie van f_1 en f_2 loodrecht op R staat.

Zij nu $f_n \in R_1 \ominus R$ $(n=1,2,\ldots)$, $f_n \to f \in R_1$. Voor elke $g \in R$ is $(f_n,g)=0$, dus $(f,g)=0$. Dus $f \perp R$, zodat $f \in R_1 \ominus R$.

Stelling 8.2. Als $\overline{R}$ de afsluiting van R in R_1 is, dan is $R_1 \ominus R = R_1 \ominus \overline{R}$.

Bewijs. Als $f \perp \overline{R}$, dan ook $f \perp R$. Als $f \perp R$, dan is $(f,g)=0$ voor elke $g \in R$, dus ook $(f,g)=0$ voor elke $g \in \overline{R}$.

Stelling 8.3. Als $R \subset R_1$, en R volledig is (dus een Hilbertruimte is), dan is

$$R_1 = R + (R_1 \ominus R) \qquad \text{(directe som), en}$$

$$R_1 \ominus (R_1 \ominus R) = R.$$

Bewijs. Zij $f \in R_1$, en $d = \inf_{g \in R} \|f-g\|$. We kiezen een rij $g_1, g_2, \ldots$ met $g_n \in R$, $\|f-g_n\| \to d$. Op grond van de betrekking

$$\|h_1+h_2\|^2 + \|h_1-h_2\|^2 = 2\|h_1\|^2 + 2\|h_2\|^2$$

voor elementen h_1, h_2 van een IP-ruimte (= formule voor de lengte van een zwaartelijn in een driehoek) geldt

$$\|g_n-g_m\|^2 = 2\|f-g_n\|^2 + 2\|f-g_m\|^2 - \|f-g_n + f-g_m\|^2.$$

Daar $\|f-\tfrac{1}{2}(g_n+g_m)\| \geq d$ is, vinden we dat bij gegeven ε een N kan worden bepaald zó dat voor $n > N$, $m > N$ geldt

$$\|g_n-g_m\|^2 < 2(d+\varepsilon)^2 + 2(d+\varepsilon)^2 - 4d^2 = 8\varepsilon d + 4\varepsilon^2.$$

Bijgevolg is $g_1, g_2, \ldots$ een fundamentaalrij. Daar R volledig is, is er een $g \in R$ met $g_n \to g$. We zien nu dat $\|f-g\| = \lim \|f-g_n\| = d$. We kunnen nu aantonen dat $f-g \perp R$. Zij nl. $h \in R$, dan is voor alle complexe getallen λ

$$\|f-g+\lambda h\|^2 \geq \|f-g\|^2 ,$$

dus $\bar{\lambda}(f-g,h)+\lambda(h,f-g)+|\lambda|^2(h,h) \geq 0$. Door $\lambda=-\varepsilon(f-g,h)$ te kiezen vinden we dat $\varepsilon|(f-g,h)|^2(\varepsilon(h,h)-2)\geq 0$, dus door ervoor te zorgen, dat $\varepsilon>0$, $\varepsilon(h,h)<2$, vinden we dat $(f-g,h)=0$.

We hebben nu aangetoond dat elke $f\in R_1$ te schrijven is als $f=g+(f-g)$ met $g\in R$, $f-g\in R_1\ominus R$. Dit kan maar op één manier. Is nl. ook $f=g'+(f-g')$, $g'\in R$, $f-g'\in R_1\ominus R$, dan is $g-g'=$ $=(f-g')-(f-g)\in R_1\ominus R$, dus $g-g'\perp R$, dus $g-g'\perp g-g'$, dus $g-g'=0$. Nu is bewezen dat R_1 directe som van R en $R_1\ominus R$ is.

De tweede bewering volgt hieruit gemakkelijk. Zij $f\in R_1$, $f\perp(R_1\ominus R)$. We splitsen $f=g+h$, $g\in R$, $h\in(R_1\ominus R)$. Aangezien $g\perp(R_1\ominus R)$, is nu ook $f-g=h\perp(R_1\ominus R)$, dus $h\perp h$, dus $h=0$. Dus $f\in R$. Omgekeerd geldt: als $f\in R$ dan is $f\perp(R_1\ominus R)$.

Opmerking 8.1. Men kan zich afvragen of althans het tweede gedeelte van st.8.3 (dat uit het eerste deel volgde zonder van de volledigheid van R gebruik te maken) ook uit andere veronderstellingen bewezen kan worden. Men kan proberen

1^o. R gesloten in R_1 (als R volledig is, is dit automatisch vervuld), doch dit blijkt niet afdoende te zijn (voorbeeld 8.1). Ook kan men proberen de voorwaarde

2^o. R_1 is een Hilbertruimte.

Als R gesloten is in R_1, dan is R volledig (st.6.2), zodat st. 8.3 kan worden toegepast. Als R niet gesloten is, is $R_1\ominus(R_1\ominus R)\neq R$, want het linkerlid is wèl gesloten (st.8.1). Dus ook 2^o is niet afdoende. Wèl geldt echter, als R_1 een Hilbertruimte is, dat $R_1\ominus(R_1\ominus R)=\bar{R}$, want $R_1\ominus(R_1\ominus\bar{R})=\bar{R}$, aangezien $\bar{R}$ volledig is (st. 6.2), terwijl $R_1\ominus\bar{R}=R_1\ominus R$ (st.8.2).

Voorbeeld 8.1. We beschouwen de numerieke Hilbertruimte H_o (zie opm.5.2). Daarin nemen we de deelruimte R_1 van alle rijen $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ waarin slechts eindig vele α's van nul verschillen (zie opm.5.3). Kies in H_o een element dat buiten R_1 ligt, bijv. $b=(2^{-1},2^{-2},2^{-3},\ldots)$. Neem nu $R=\{f\,|\,f\in R_1,\ (f,b)=0\}$.

R is gesloten in R_1. Want als $f_n\in R$, $f_n\to f$, $f\in R_1$, dan is $(f,b)=\lim(f_n,b)=0$, zodat $f\in R$. We laten vervolgens zien dat $R_1\ominus R=0$ (zodat de uitspraken van st.8.3 niet doorgaan). Zij

$g \in R_1 \ominus R$. Dus $g \in R_1$, zodat g de vorm $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0,0,\ldots)$ heeft. Kies nu $h=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},0,0,\ldots)$ zó dat $(h,b)=0$ (neem $\alpha_{n+1}=-2\alpha_n-2^2\alpha_{n-1}-\ldots-2^n\alpha_1$). Nu is $h \in R_1$ en $(h,b)=0$, dus $h \in R$. Daar $g \in R_1 \ominus R$, is $(g,h)=0$. Wegens de speciale vorm van g en h is $(g,h-g)=0$, zodat nu $(g,g)=0$, dus $g=0$.

9. Orthonormaalsystemen.

We zetten de beschouwingen uit §2 voort (st.2.4 en verder).

Definitie 9.1. Een orthonormaalsysteem Q in een IP-ruimte R heet volledig, als $L_e(Q)$ (zie def.2.6) dicht ligt in R (het woord "volledig" is hier gebruikelijk, ofschoon het niets te maken heeft met het in def.5.2 en verder gehanteerde begrip).

Stelling 9.1. Elk volledig orthonormaalsysteem in een IP-ruimte is maximaal.

Bewijs. 1^o. Zij $Q \subset R$, Q een volledig orthonormaalsysteem. Zij $f \in R$, $f \perp Q$, $\|f\|=1$. Voor alle $g \in L_e(Q)$ is nu $(f,g)=0$, dus $\|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 \geq \|f\|^2=1$. Daar $L_e(Q)$ dicht ligt in R is er bij elke $\varepsilon>0$ een $g \in L_e(Q)$ met $\|f-g\|<\varepsilon$. Dit levert voor $\varepsilon=1$ een tegenspraak op. Dus Q is niet uit te breiden.

Stelling 9.2. In een Hilbertruimte is elk maximaal orthonormaalsysteem volledig. En elk onvolledig orthonormaalsysteem kan tot een volledig worden aangevuld.

Bewijs. Zij Q_1 een orthonormaalsysteem in de Hilbertruimte H. Zij H_1 de afsluiting van $L_e(Q_1)$ in H, dan is H_1 volledig (st. 3.2, 3^o en st. 6.2), en Q_1 is een volledig orthonormaalsysteem in H_1 (want $L_e(Q_1)$ ligt dicht in H_1. Volgens st.8.3 is nu H een directe som: $H=H_1+H_2$ (ook H_2 is een Hilbertruimte, volgens st. 8.1). Is Q_1 niet volledig, dan is $H_1 \neq H$, dus $H_2 \neq 0$. Er is dan een $f \in H_2$, $\|f\|=1$. Daar $f \perp Q_1$ is, concluderen we dat Q_1 niet maximaal is. Daarmee is het eerste deel van de stelling bewezen.

"Kies" in H_2 een maximaal orthonormaalsysteem Q_2 (st.2.5). Nu vormen Q_1 en Q_2 samen een orthonormaalsysteem Q in H. Zij $f \in H$, $f \perp Q$. Splits $f=f_1+f_2$, $f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2$. Dan is $f_1 \perp Q_2$, $f_2 \perp Q_1$. Wegens $f \perp Q$ is $f \perp Q_1$, $f \perp Q_2$, zodat nu ook $f_1 \perp Q_1$, $f_2 \perp Q_2$. Daar Q_1 en Q_2 maximaal zijn in H_1 resp. H_2, is $f_1=f_2=0$, dus $f=0$. Dus Q is maximaal, en derhalve volledig.

Stelling 9.3. Zij Q een orthonormaalsysteem in een IP-ruimte R. Dan zijn de volgende vier voorwaarden onderling equivalent:

(1) Q is volledig.

(2) Is $f \in R$, en zijn $q_1, q_2, \ldots$ de aftelbaar vele elementen van Q met $(f,q_i) \neq 0$, dan is $\Sigma_1^n (f,q_i)q_i \to f$ $(n \to \infty)$.

(3) Is $f \in R$, dan is $\|f\|^2 = \Sigma_{q \in Q} |(f,q)|^2$.

(4) Is $f \in R$, $g \in R$, dan is $(f,g) = \Sigma_{q \in Q} (f,q)\overline{(g,q)}$.

Bewijs. (1) $\to$(2): Kies een $f \in R$ en een $\varepsilon > 0$. Daar Q volledig is, is daarbij een element s van $L_e(Q)$ te vinden dat tot f een afstand $< \varepsilon$ heeft. Laat M het kleinste getal zijn zo dat q_{M+1} niet in deze lineaire combinatie voorkomt. Zij nu $N > M$. Schrijf s nu als lineaire combinatie van een eindig aantal q's, waaronder ook $q_1, \ldots, q_N$ voorkomen (voeg zo nodig nieuwe termen met coefficient 0 toe), maar $q_{N+1}, q_{N+2}, \ldots$ niet. Door nu alle coefficienten te vervangen door de overeenkomstige Fourier-coefficienten, krijgen we $s' = \Sigma_1^N (f,q_i)q_i$ met $\|s'-f\| < \varepsilon$ (st. 2.7). Dit geldt voor alle $N > M$, waarmee nu (2) bewezen is.

(2) $\to$ (1) is triviaal.
(2) $\leftrightarrows$ (3): Volgt direct uit $\|f - \Sigma_1^N (f,q_i)q_i\|^2 = \|f\|^2 - \Sigma_1^N |(f,q_i)|^2$ (zie het bewijs van st.2.6).
(4) $\to$ (3) is triviaal (neem $g=f$). (3) $\to$(4) blijkt door (3) afzonderlijk toe te passen op $f+\lambda g$ en op $f-\lambda g$ en dan het verschil te bekijken:

$$\overline{\lambda}(f,g) + \lambda\overline{(f,g)} = \sum_{q \in Q} (\overline{\lambda}(f,q)\overline{(g,q)} + \lambda(\overline{f,q})(g,q)).$$

Neem nu achtereenvolgens $\lambda = 1$ en $\lambda = i$, enz.

Stelling 9.4. (Riesz-Fischer). Zij H een Hilbertruimte, en Q een volledig orthonormaalsysteem. Als er aan elke $q \in Q$ een complex getal $\alpha(q)$ is toegevoegd zodanig dat $\Sigma_{q \in Q} |\alpha(q)|^2 < \infty$, dan is er een $f \in H$ zó dat voor alle $q \in Q$ geldt $(f,q) = \alpha(q)$.

Bewijs. Laat $q_1, q_2, \ldots$ de hoogstens aftelbaar vele q's zijn met $\alpha(q) \neq 0$.
Neem $f_n = \Sigma_{i=1}^n \alpha(q_i)q_i$. Dan is $f_1, f_2, \ldots$ een fundamentaalrij, want $\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \Sigma_{n+1}^{n+p} |\alpha_i|^2 < \varepsilon$ als n voldoend groot is. Zij f de limiet van deze rij. Dan is $(f,q_k) = \lim_{n \to \infty} (f_n, q_k) = \alpha(q_k)$, want $(f_n, q_k) = \alpha(q_k)$ voor alle $n \geq k$.

Voor een $q \in Q$ die niet onder $q_1, q_2, \ldots$ voorkomt, is $(f,q) = \lim(f_n,q) = 0$, en ook $\alpha(q) = 0$.

Stelling 9.5. Zij Q een volledig orthonormaalsysteem in de Hilbertruimte H. Dan is er een isometrie tussen H en H_Q (zie voorbeeld 5.1), waarbij elke q correspondeert met de op Q gedefinieerde functie die 1 is in q en 0 is in alle andere elementen van Q.

Bewijs. Voeg aan elke $f \in H$ de functie P_f toe, die op Q is gedefinieerd door $P_f(q)=(f,q)$. Uit st.2.6 volgt dat $P_f \in H_Q$. De afbeelding $f \to P_f$ is isometrisch (st.9.3. 4^o). Uit st.9.4 blijkt dat elk element van H_Q minstens één keer als beeld voorkomt, zodat onze afbeelding een isometrie is (vgl. opm.2.6).

We hebben de existentie van een volledig orthonormaalsysteem in een Hilbertruimte bewezen (st.9.2) met behulp van het keuzepostulaat (zie st.2.5). Voor IP-ruimten hebben we het in het geheel niet bewezen. Voor separabele IP-ruimten kunnen we het echter bewijzen, en wel constructief.

Stelling 9.6. Is R een separabele IP-ruimte, dan is er een (eindig of aftelbaar) volledig orthonormaalsysteem. En als F een eindige of aftelbare verzameling is zó dat $L_e(F)$ dicht ligt in R, dan is er een volledig orthonormaalsysteem Q met $L_e(Q)=L_e(F)$.

Bewijs. Zij R separabel, en zij $f_1,f_2,\ldots$ een rij die dicht ligt in R. Laat uit deze rij f_k weg als f_k lineair afhankelijk is van $f_1,\ldots,f_{k-1}$. We houden over een rij $g_1,g_2,\ldots$, met nog de eigenschap dat $L_e(G)$ dicht ligt in R, en $L_e(G)=L_e(F)$ (G stelt de verzameling $\{g_1,g_2,\ldots\}$ voor, F de verzameling $\{f_1,f_2,\ldots\}$).

We gaan nu orthonormaliseren (volgens het z.g. proces van Schmidt):

$$q_1 = g_1/\|g_1\| ;$$

$$h_2 = g_2 - (g_2,q_1)q_1 , \qquad q_2 = h_2/\|h_2\| ;$$

$$h_3 = g_3 - (g_3,q_1)q_1 - (g_3,q_2)q_2 , \qquad q_3 = h_3/\|h_3\| ;$$

Nu is $Q=\{q_1,q_2,\ldots\}$ een orthonormaalsysteem. Voor elke k is

$$L_e(\{g_1,\ldots,g_k\}) = L_e(\{q_1,\ldots,q_k\}),$$

zodat $L_e(Q) = L_e(G) = L_e(F)$. Dus $L_e(Q)$ ligt dicht in R, dus Q is volledig (def.9.1).

Stelling 9.7. De numerieke Hilbertruimte H_0 (zie opm.5.2) is separabel.

Bewijs. In H_0 beschouwen we de deelverzameling F bestaande uit alle $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots)$ met de eigenschap:

Re α_k en Im α_k rationaal ($k=1,2,\ldots$), en slechts eindig vele α_k's $\neq 0$.

Nu is F aftelbaar, en F ligt dicht in H_0.

Stelling 9.8. Is H een separabele Hilbertruimte, dan is H òf eindig-dimensionaal òf isometrisch met H_0.

Bewijs. st.9.6 en st.9.5 (als Q aftelbaar is, zijn H_Q en H_0 isometrisch).

Opmerking 9.1. Het is in een separabele IP-ruimte in het algemeen niet waar dat elk orthonormaalsysteem tot een volledig orthonormaalsysteem kan worden aangevuld (in een Hilbertruimte is dat wèl waar: st.9.2). Neem nl. de R en R_1 uit voorbeeld 8.1, en kies in R een volledig orthonormaalsysteem Q (dit kan wegens st.9.6). In R_1 is er geen enkele vector g met $\|g\|=1$, $g \perp R$. De enige mogelijke "uitbreiding" van Q is dus Q zelf. Maar Q is geen volledig orthonormaalsysteem in R_1, want $\overline{L_e(Q)} \subset \overline{R} = R \neq R_1$.

We geven enkele voorbeelden van ruimten met aftelbare orthonormaalsystemen.

Voorbeeld 9.1. Zij R de ruimte van alle continue functies op $0 \leq x \leq 1$, en laat het inwendige product van f en g gedefinieerd zijn door

$$(f,g) = \int_0^1 m(x)f(x)\overline{g(x)}dx,$$

waarin $m(x)$ een begrensde positieve continue functie is ($m(x)$ mag ook nog wel in een paar punten nul zijn). Zij G de verzameling der functies $1,x,x^2,x^3,\ldots$, zodat $L_e(G)$ de verzameling van alle polynomen is. $L_e(G)$ ligt dicht in R, want bij elke $f \in R$ en elke $\varepsilon > 0$ is een polynoom p te vinden met $|f(x)-p(x)| < \varepsilon$ ($0 \leq x \leq 1$), zodat

$$\|f-p\|^2 = \int_0^1 m(x)\,|f(x)-p(x)|^2dx < \varepsilon^2\int_0^1 m(x)dx.$$

Uit st.9.6 volgt nu dat er een volledig orthonormaalsysteem Q is zó dat elke $q \in Q$ een polynoom is. Uit het bewijs van st. 9.6 is nog af te lezen dat er bij elke gehele $n \geq 0$ precies één

$q \in Q$ is die de graad n heeft.

Voorbeeld 9.2. Zij (X,Γ,μ) een maatruimte (zie def.7.3). Neem aan dat er een aftelbare collectie $A_1, A_2, \ldots$ is ($A_i \in \Gamma$) zo dat er bij elke $A \in \Gamma$ en bij elke $\varepsilon > 0$ een index i bestaat zó dat $A \setminus A_i$ en $A_i \setminus A$ beide een maat $<\varepsilon$ hebben. Dan is $L_2(X)$ separabel, want de met de A_i's opgebouwde trapfuncties liggen dicht in de collectie van alle trapfuncties, en deze ligt weer dicht in $L_2(X)$. Blijkens st.9.6 is er nu in $L_2(X)$ een volledig orthonormaalsysteem dat geheel uit trapfuncties bestaat.

Voorbeeld 9.3. De lineaire combinaties der functies $e^{2\pi nix}$ ($n=0,\pm1,\pm2,\ldots$) liggen dicht in de ruimte R van alle continue functies op $0 \leq x \leq 1$ (met het inwendige product $\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$), en ze vormen een orthonormaalsysteem. Het is dus een volledig orthonormaalsysteem, ook voor de $L_2([0,1])$ die door completering uit R ontstaat.

We zullen st.9.4 toepassen op begrensde lineaire functionalen in een Hilbertruimte.

Definitie 9.2. Een lineaire functionaal L in een IP-ruimte R is een lineaire afbeelding van R in het complexe vlak: voor elke $f \in R$ is $L(f)$ een complex getal, en steeds is $L(\alpha f+\beta g)= = \alpha L(f)+\beta L(g)$.

L heet begrensd als er een getal $M \geq 0$ is zo dat $|L(f)| \leq M\|f\|$ voor alle $f \in R$.

Stelling 9.9. Is L een begrensde lineaire functionaal in een Hilbertruimte H, dan is er een $g \in H$ zó dat $L(f)=(f,g)$ voor alle $f \in H$.

Bewijs. Zij Q een volledig orthonormaalsysteem. Laat $q_1,\ldots,q_n$ een eindig deel van Q zijn. Door $|L(f)| \leq M\|f\|$ toe te passen op $f=\Sigma_1^n \overline{L(q_k)}q_k$, vinden we dat

$$\Sigma_1^n |L(q_k)|^2 \leq M\{\Sigma_1^n |\overline{L(q_k)}|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

dus $\Sigma_1^n |L(q_k)|^2 \leq M^2$. Daar dit voor elk eindig deel van Q geldt, blijkt dat $\Sigma_{q\in Q} |L(q)|^2 < \infty$. Volgens st.9.4 is er nu een $g \in H$ met $(q,g)=L(q)$ voor alle $q \in Q$.

Zij $f \in H$. Kies $\varepsilon > 0$. Dan is er een k, die een lineaire combinatie is van eindig vele q's, met $\|f-k\| < \varepsilon$. Het is duidelijk dat $L(k)=(k,g)$. Verder is

$$|L(f) - L(k)| = |L(f-k)| \leq M\,\varepsilon ,$$

$$|(f,g) - (k,g)| = |(f-k,g)| \leq \varepsilon \|g\| ,$$

dus $|L(f)-(f,g)| \leq \varepsilon\,(M+\|g\|)$. Wegens de willekeur van ε blijkt nu dat $L(f)=(f,g)$.

<u>Opmerking 9.2</u>. We vermelden nog een paar feiten die zonder veel moeite te bewijzen zijn. (1) In een IP-ruimte R is een lineaire functionaal dan en slechts dan begrensd als hij continu is (d.w.z. als $f \to L(f)$ een continue afbeelding is. (2) Als R en R_1 IP-ruimten zijn, $R \subset R_1$, en R dicht in R_1, dan is elke begrensde lineaire functionaal in R op precies één manier tot een begrensde lineaire functionaal in R_1 voort te zetten.

Het is niet moeilijk om voorbeelden van onbegrensde lineaire functionalen in onvolledige IP-ruimten aan te geven. Neem bijv. in de ruimte der continue functies op $[0,1]$ $L(f)=f(\frac{1}{2})$.

In een Hilbertruimte is het minder gemakkelijk om voorbeelden te vinden.

10. De stelling van Banach-Steinhaus.

Definitie 10.1. Een afbeelding T van een lineaire ruimte R in een lineaire ruimte R' heet een lineaire transformatie als $T(\lambda f+\mu g)=\lambda Tf+\mu Tg$ voor alle f,g uit R en alle complexe getallen λ,μ.

Definitie 10.2. Zijn R en R' IP-ruimten (of algemener: genormeerde lineaire ruimten), dan heet de lineaire afbeelding T begrensd als er een getal $M\geq 0$ bestaat met $\|Tf\|\leq M\|f\|$ voor alle f uit R.

Het kleinst-mogelijke getal M wordt de norm van T genoemd. We duiden die met $\|T\|$ aan. Dus $\|T\| = \sup\limits_{\|f\|=1}\|Tf\| = \sup\limits_{\substack{f\in R\\ f\neq 0}}\frac{\|Tf\|}{\|f\|}$.

Voorbeeld 10.1. Nemen we voor R' de ruimte der complexe getallen, dan krijgen we de begrensde lineaire functionalen (uit def.9.2).

Stelling 10.1. De lineaire functionaal T is dan en slechts dan begrensd als zij continu is.

Bewijs. T begrensd, dan is er bij elke ε een δ te vinden zó dat $\|Tf-Tg\|<\varepsilon$ voor alle f,g met $\|f-g\|<\delta$. Men neme $\delta=\varepsilon/\|T\|$.

Is T continu, dan is T in het bijzonder continu in de oorsprong, dus er is een getal δ zó dat $\|f-0\|\leq\delta$ garandeert $\|Tf-0\|\leq 1$. Nu is voor alle g: $\|Tg\| = \delta^{-1}\|g\|\cdot\|T(\frac{\delta g}{\|g\|})\|\leq\delta^{-1}\|g\|$, (pas het voorgaande toe met $f=\delta g/\|g\|$), dus T is begrensd (met norm $\leq\delta^{-1}$).

Stelling 10.2. (Banach-Steinhaus). Laat V een verzameling van begrensde lineaire transformaties van een Hilbertruimte H (of algemener: een Banachruimte) in een lineaire ruimte R' zijn. Neem aan dat er bij elke $f\in H$ een getal $C_f\geq 0$ bestaat zó dat $\|Tf\|\leq C_f$ voor alle $T\in V$. Dan is er een getal $C\geq 0$ zó dat $\|Tf\|\leq C\|f\|$ voor alle $f\in H$, $T\in V$.

M.a.w.: als $\|Tf\|/\|f\|$ bij vaste $T\in V$ begrensd is voor alle f $(f\neq 0)$, en bij vaste f begrensd is voor alle $T\in V$, dan is die uitdrukking begrensd voor alle f en T.

Bewijs. Als er een "bol" B in H is ($B=\{f\,|\,f\in H, \|f-f_0\|\leq r\}$ $(r>0)$) zó dat $\|Tf\|$ begrensd is voor alle $T\in V$, $f\in B$, dan zijn we klaar, want voor alle $g\in H$ is

$$Tg = \|g\|r^{-1}(T(f_0+r\frac{g}{\|g\|}) - T(f_0)).$$

Neem nu aan dat er bij elke bol B en elk getal N een $f \in B$ en een $T \in V$ bestaan met $\|Tf\| > N$. Wegens de continuiteit van die T is er nu een bol $B' \subset B$ zó dat $\|Tf\| > N$ voor alle $f \in B'$.

We gaan nu uit van de eenheidsbol B_1, en kiezen $T_1 \in V$ en $B_2 \subset B_1$ zó dat $\|T_1 f\| > 1$ voor alle $f \in B_2$. Vervolgens een $T_2 \in V$ en een $B_3 \subset B_2$ met $\|T_2 f\| > 2$ voor alle $f \in B_3$, enz. We kunnen er gemakkelijk voor zorgen dat de straal van B_n kleiner is dan n^{-1}. Is f_n het middelpunt van B_n, dan vormen $f_1, f_2, \ldots$ een fundamentaalrij met limiet f. Zij f daarvan de limiet. Wegens $\|f_k - f_n\| \leq n^{-1} (k > n)$ geldt $\|f - f_n\| \leq n^{-1}$, dus $f \in B_n$ voor alle n. Nu is $\|T_n f\| > n$, in strijd met het feit dat $\|T_n f\| \leq C_f$ (alle n).

We geven enkele toepassingen:

Stelling 10.3. Laat V een verzameling van begrensde lineaire transformaties van de Hilbertruimte H in zichzelf zijn. Bij elk paar $f \in H$, $g \in H$ is er een $C_{f,g}$ zó dat $|(Tf,g)| \leq C_{f,g}$ voor alle $T \in V$. Dan is er een C (onafhankelijk van T) zó dat $\|T\| \leq C$ voor alle $T \in V$.

Bewijs. Bij vaste $g \in H$, $T \in V$ is de transformatie $f \to (Tf,g)$ een begrensde lineaire functionaal, want $|(Tf,g)| \leq \|Tf\| \cdot \|g\| \leq \|T\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|$. Volgens st.10.2 (bij elke g afzonderlijk toegepast) is er nu een C_g met $|(Tf,g)| \leq C_g \|f\|$.

We concluderen dat bij vaste f en T de transformatie $g \to (Tf,g)$ een begrensde lineaire functionaal is. Deze geven we met L_{Tf} aan. Zij W de collectie van alle L_{Tf}'s die ontstaan door alle f met $\|f\| \leq 1$ en alle $T \in V$ te nemen. Voor elke g geldt dat $|Lg|$ begrensd is als L de W doorloopt, want $|\overline{(Tf,g)}| \leq C_g \|f\|$. Weer volgens st.10.2 vinden we nu dat $|Lg| \leq C \|g\|$ voor alle $L \in W$, $g \in H$, met een C die niet van L of g afhangt. Dus $|(Tf,g)| \leq C \|f\| \cdot \|g\|$ voor alle $T \in V$, $f \in H$, $g \in H$. We passen dit toe met $g = Tf$:

$$\|Tf\|^2 \leq C \|f\| \cdot \|Tf\|, \quad \text{dus} \quad \|Tf\| \leq C \|f\|.$$

Daar dit voor alle $f \in H$ geldt, is $\|T\| \leq C$.

Een andere toepassing van de stelling van Banach-Steinhaus is op de zwakke convergentie:

Definitie 10.3. Een rij $f_1, f_2, \ldots$ ($f_n \in H$; H is een Hilbertruimte) heet zwak convergent naar $f \in H$, als voor elke $g \in H$ geldt dat $(f_n, g) \to (f,g)$.

Voorbeeld 10.2. Laat $\{q_1, q_2, \ldots\}$ een aftelbaar orthogonaalsysteem in H zijn. Dan convergeert q_n zwak naar 0. Voor elke $g \in H$ is nl. $\Sigma |(g,q_n)|^2 < \infty$ (st.2.6), dus a fortiori $(g,q_n) \to 0$.
Stelling 10.4. Elke zwak convergente rij is begrensd.
Bewijs. We mogen aannemen, dat f=0. De transformatie $g \to (g,f_n)$ is voor elke n een begrensde lineaire functionaal, en bij vaste g is (g,f_n) begrensd (zelfs convergent, maar dat gebruiken we niet). Dus er is een C met $|(f_n,g)| \leq C\|g\|$ voor alle n en alle $g \in H$. Door nu $g=f_n$ te nemen, blijkt dat $\|f_n\| \leq C$.

Als derde toepassing van st.10.2 geven we
Stelling 10.5. (Hellinger en Toeplitz). Laat T een lineaire afbeelding van de Hilbertruimte H in zichzelf zijn, en neem aan dat T hermitisch is, d.w.z. $(Tf,g)=(f,Tg)$ voor alle $f,g \in H$. Dan is T begrensd.
Bewijs. We kunnen het begrip van st.10.3 herhalen. We hebben dan nog maar één T in V. De conclusie van het eerste deel van het bewijs laten we nu niet op de begrensdheid van T rusten, maar op

$$|(Tf,g)| = |(f,Tg)| \leq \|Tg\| \cdot \|f\| = C_g \cdot \|f\| .$$

11. Trigonometrisch momentenprobleem.

Als $\alpha(x)$ voor $0 < x \leq 1$ monotoon niet-dalend en begrensd is, kunnen we in elk geval voor functies $f(x)$ die op $0 \leq x \leq 1$ continu zijn, de Stieltjes-integraal $\int_{(0,1]} f(x)d\alpha(x)$ beschouwen. We kunnen dit op grond van de definitie van Stieltjes doen, maar ook door aansluiting aan voorbeeld 7.2 en def.7.9. De maat van een interval $(a,b]$ $(0 \leq a < b \leq 1)$ bedraagt $\alpha(b+)-\alpha(a+)$. Als f continu is op $[0,1]$, is er (op grond van de uniforme continuiteit) een rij trapfuncties $t_1(x), t_2(x), \ldots$ die uniform naar $f(x)$ convergeert $(0 \leq x \leq 1)$. Daaruit volgt dat deze rij een fundamentaalrij is in de zin van de op deze Stieltjesmaat gebouwde L_2. (Merk daartoe op dat $|t(x)| < \varepsilon$ $(0 \leq x \leq 1)$ impliceert dat $(t,t) \leq \varepsilon^2(\alpha(1+)-\alpha(0+))$; zie st.7.2). Dus $f \in L_2$, en $\int_{(0,1]} f(x)d\alpha(x)$ kan gedefinieerd worden als $(f,1)$(zie def. 7.9; met 1 wordt de functie bedoeld die identiek gelijk aan 1 is, het is dus een trapfunctie).

De getallen $\int_{(0,1]} x^n \, d\alpha(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ worden de Stieltjes-momenten van α genoemd. Het momentenprobleem behelst de vraag of α gevonden kan worden als deze momenten gegeven zijn. Het kan ook voor $(0,\infty]$ en $(-\infty,\infty)$ i.p.v. voor $(0,1]$ worden gesteld. Wij stellen nu de overeenkomstige vraag voor de trigonometrische momenten

$$(11.1) \qquad \mu_n = \int_{(0,1]} e^{2\pi n i x} d\alpha(x) \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

die bij de theorie der unitaire operatoren in een Hilbertruimte optreden.

Stelling 11.1. Laat N een natuurlijk getal zijn, en $\rho_{-N}, \rho_{-N+1},\ldots,\rho_N$ complexe getallen. Verder zij $\alpha(x)$ monotoon niet-dalend en begrensd op $(0,1]$. Dan is

$$(11.2) \qquad \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \mu_{n-m} \rho_n \bar{\rho}_m \geq 0.$$

Bewijs. Het linkerlid bedraagt

$$\int_{(0,1]} \Sigma\Sigma \rho_n \bar{\rho}_m e^{2\pi(n-m)ix} d\alpha(x) = \int_{(0,1]} \left| \sum_{-N}^{N} \rho_n e^{2\pi n i x} \right|^2 d\alpha(x).$$

Dit is dus een inwendig product van een element van L_2 met zichzelf, en derhalve ≥ 0.

We zullen in deze paragraaf laten zien dat ook het omgekeerde van st.11.1 geldt, d.w.z. als de μ_n's getallen zijn met de eigenschap dat (11.2) geldt voor alle N en alle stellen ρ's, dan is er een begrensde monotoon niet-dalende functie $\alpha(x)$ waarvoor (11.1) geldt.

Stelling 11.2. Zij $P(e^{2\pi ix}) = \sum_{-M}^{N} p_k e^{2\pi ikx}$ een trigonometrisch polynoom met $P(e^{2\pi ix}) \geq 0$ voor alle reële x. Dan is er een trigonometrisch polynoom Q(x) zo dat $P(e^{2\pi ix}) = |Q(e^{2\pi ix})|^2$ voor alle reële x.

Bewijs. We mogen aannemen dat $p_N \neq 0$, $p_{-M} \neq 0$. Noem $e^{2\pi ix} = z$, $P(e^{2\pi ix}) = \sum_{-M}^{N} p_k z^k = p_N z^{-M}(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{N+M})$. Daar P(z) reëel is voor $|z|=1$, hebben we

$$P(z) = \overline{P(z)} = \bar{p}_N \bar{z}^{-M}(\bar{z}-\bar{\alpha}_1)\ldots(\bar{z}-\bar{\alpha}_{N+M}) = \bar{p}_N z^{-N}(1-\bar{\alpha}_1 z)\ldots(1-\bar{\alpha}_{N+M} z).$$

We constateren nu dat α_k en $\overline{\alpha_k^{-1}}$ dezelfde multipliciteit hebben als nulpunten van $P(z)$. Daar $P \geq 0$ op de eenheidscirkel, hebben de eventueel op die cirkel gelegen nulpunten een even multipliciteit. Stellen we nu de binnen de cirkel gelegen nulpunten en de helft van de op de cirkel gelegen nulpunten door $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ voor, dan is $N+M=2K$, en

$$P(z) = p_N z^{-M} (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_K)\cdot(z-\overline{\alpha_1^{-1}})\ldots(z-\overline{\alpha_K^{-1}}).$$

Noem nu $Q(z)=(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_K)$. Dan is

$$|Q(z)|^2 = cz^{M-K}\, P(z)$$

met een zekere constante c. Uit het gegeven volgt nu $c \geq 0$, $K=M$.

Definitie 11.1. De lineaire ruimte die bestaat uit alle trigonometrische polynomen worde met R aangeduid. R_r (resp. R_{nn}) betekent de deelverzameling van alle $P \in R$ met $P(e^{2\pi ix})$ reëel (resp. niet-negatief) $(0 \leq x \leq 1)$. Als $P \in R_r$, $Q \in R_r$ betekent $P \geq Q$ dat $P-Q \in R_{nn}$. Dus $P \geq 0$ betekent $P \in R_{nn}$, of $P(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$.

Stelling 11.3. Laat $\mu_n (n=0,\pm 1,\ldots)$ zodanig gegeven zijn dat voor alle N,ρ aan (11.2) is voldaan. Op R wordt de lineaire functionaal L gedefinieerd door

$$L(P) = \sum_{-M}^{N} p_n \mu_n \quad \text{als} \quad P(e^{2\pi ix}) = \sum_{-M}^{N} p_n e^{2\pi inx}.$$

Dan geldt

1°. $L(P) \geq 0$ als $P \geq 0$,
2°. $L(P)$ is reëel als $P \in R_r$,
3°. $L(P) \leq \mu_0 \max\limits_{0 \leq x \leq 1} P(e^{2\pi ix})$ $\quad (P \in R_r)$,
4°. $|L(P)| \leq \mu_0 \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |P(e^{2\pi ix})|$ $\quad (P \in R_r)$.

Bewijs. 1°. Als $P \geq 0$, $z=e^{2\pi ix}$, dan is $P(z)=|Q(z)|^2$ met $Q \in R$ (st.11.2). Dus, als Q de coefficiënten $q_{-K},\ldots,q_K$ heeft:

$$|Q(z)|^2 = \sum_{n=-K}^{K} \sum_{m=-K}^{K} q_n \overline{q}_m\, e^{2\pi i(n-m)x}, \quad L(P) = \sum_{n=-K}^{K} \sum_{m=-K}^{K} q_n \overline{q}_m\, \mu_{n-m},$$

en uit het gegeven betreffende de μ's volgt dat $L(P) \geq 0$.

2°. Als $P \in R_r$, dan $P=P_1-P_2$, $P_1 \geq 0$, $P_2 \geq 0$; nu kan 1° worden toegepast.

3^o. Zij $P \in R_r$, $m = \max P(e^{2\pi ix})$. Dan is $m-P \geq 0$, dus $L(P) \leq mL(1) = m\mu_o$. Merk op dat $\mu_o \geq 0$, want $\mu_o = L(1)$ en $1 \geq 0$.

4^o. Pas 3^o toe op P en op -P.

<u>Stelling 11.4</u>. Zij $P_n \in R_r$, $Q_n \in R_r$ $(n=1,2,\ldots)$, en

$$P_1 \geq P_2 \geq \ldots \geq 0, \qquad Q_1 \geq Q_2 \geq \ldots \geq 0$$

Dan bestaat $\lim(P_n(e^{2\pi ix}) - Q_n(e^{2\pi ix})) = \varphi(x)$ voor elke x, en $\lim L(P_n - Q_n)$ bestaat. Wordt $\varphi(x)$ op dezelfde wijze benaderd door een rij $P_n^* - Q_n^*$, dan vinden we voor $\lim L(P_n^* - Q_n^*)$ weer dezelfde waarde. We duiden die waarde met $L(\varphi)$ aan (als $\varphi \in R_r$ is deze definitie niet in strijd met de bestaande). Als $\varphi(x) \geq 0$ $(0 \leq x \leq 1)$, dan is $L(\varphi) \geq 0$.

<u>Bewijs</u>. $L(P_1) \geq L(P_2) \geq \ldots \geq 0$, dus $\lim L(P_n)$ bestaat. Evenzo bestaat $\lim L(Q_n)$. Laat nu $P_n - Q_n \to \varphi$, $P_n^* - Q_n^* \to \psi$, en $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$. Kies $\varepsilon > 0$, $m > 0$. Zij V_n gedefinieerd door

$$V_n = \{ x \mid P_n(e^{2\pi ix}) + Q_n^*(e^{2\pi ix}) \geq Q_m(e^{2\pi ix}) + P_m^*(e^{2\pi ix}) + \varepsilon \}.$$

Daar P_n, enz. continu zijn, is elke V_n compact. Daar bovendien $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$, is òf V_n leeg op den duur, of er is een x die in alle V_n bevat is. Het laatste geval is uitgesloten, want dan zou

$$\lim_{n\to\infty} (P_n(e^{2\pi ix}) + Q_n^*(e^{2\pi ix}) \geq Q_m(e^{2\pi ix}) + P_m^*(e^{2\pi ix}) + \varepsilon \geq$$
$$\geq \lim_{m\to\infty} (Q_m(e^{2\pi ix}) + P_m^*(e^{2\pi ix}) + \varepsilon$$

zijn, in strijd met het feit dat $\lim(P_n + Q_n^*) \leq \lim(Q_n + P_n^*)$. Dus V_n is leeg op den duur, zodat $P_n + Q_n^* \leq Q_m + P_m^* + \varepsilon$ voor $n > n_o(\varepsilon, m)$, dus $L(P_n - Q_m) \leq L(P_m^* - Q_n^*) + \varepsilon$. Laten we nu eerst $n \to \infty$, dan $m \to \infty$, en daarna $\varepsilon \to 0$, dan blijkt dat $\lim L(P_n - Q_n) \leq \lim L(P_n^* - Q_n^*)$.

Als $\varphi = \psi$, kunnen we φ en ψ verwisselen, en dan komt er het gelijkteken. Door $\varphi = 0$ te nemen, vinden we dat $\psi \geq 0$ impliceert $L(\psi) \geq 0$. Als $\varphi \in R$, dan kunnen we nemen $P_n = \varphi$, $Q_n = 0$, en dus $L(P_n - Q_n) \to L(\varphi)$. Als $\varphi \geq 0$, $P_n - Q_n \to \varphi$.

<u>Stelling 11.5</u>. Zij Φ de verzameling van alle op $(0,1]$ reële functies φ die de eigenschap hebben dat er rijen $P_1, P_2, \ldots$, $Q_1, Q_2, \ldots$ bestaan, in de zin van stelling 11.4, met

$P_n(e^{2\pi ix})-Q_n(e^{2\pi ix}) \to \varphi(x)$ voor alle x. Dan is Φ een reële lineaire ruimte, en daarop is L een lineaire functionaal.

Bewijs. Als $P_n-Q_n \to \varphi$, dan $aP_n-aQ_n \to a\varphi$ $(a>0)$, $|a|Q_n-|a|P_n \to a\varphi$ $(a<0)$. In beide gevallen is gemakkelijk in te zien dat $L(a\varphi)=aL(\varphi)$. Als $P_n-Q_n \to \varphi$, $P_n^*-Q_n^* \to \psi$, dan is $P_n+P_n^*-(Q_n+Q_n^*) \to \varphi+\psi$. En $L(\varphi+\psi)=\lim L(P_n+P_n^*-Q_n-Q_n^*)= =\lim(P_n-Q_n)+\lim(P_n^*-Q_n^*)=L(\varphi)+L(\psi)$.

Stelling 11.6. Zij $0<t\leq 1$, en $\varphi_t(x)=1$ $(0<x\leq t)$, $\varphi_t(x)=0$ $(t<x\leq 1)$. Dan is $\varphi_t \in \Phi$.

Bewijs. Beschouw de functie $\psi_t(x)=1+x-t+[t-x]$ ($[x-t]$ stelt het grootste gehele getal $\leq x-t$ voor). Gemakshalve bekijken we $-\infty<x<\infty$, waarin $\psi_t(x)$ periodiek modulo 1 is. Laat n een natuurlijk getal zijn. Dan is, voor elk natuurlijk getal n:

$$\psi_t(x) < \psi_t(x-2^{-n})+2.2^{-n} < \psi_t(x-2^{-n+1})+2.2^{-n+1} \quad \text{(alle x)}.$$

Er is nu een continue periodieke functie die tussen

$$\psi_t(x-2^{-n})+2.2^{-n} \quad \text{en} \quad \psi_t(x-2^{-n+1})+2.2^{-n+1}$$

ligt. Daar elke continue periodieke functie uniform door trigonometrische polynomen is te approximeren, is er ook een trigonometrisch polynoom P_n te vinden dat tussen die grenzen ligt. Nu geldt $P_1 \geq P_2 \geq \ldots \geq 0$, en $\lim P_n = \psi_t$. Dus $\psi_t \in \Phi$. Aangezien $\varphi_t = \psi_t - \psi_0 - t$, blijkt nu dat $\varphi_t \in \Phi$.

Stelling 11.7. Zij φ_t gedefinieerd als in st.11.6 en $\alpha(t)$ door $\alpha(t)=L(\varphi_t)$ $(0<t\leq 1)$. Dan is α begrensd en monotoon niet-dalend en de μ_n's zijn de trigonometrische momenten van α (zie (11.1)).

Bewijs. Als $0<s<t\leq 1$, dan is $\varphi_s(x) \leq \varphi_t(x)$ voor alle x, dus $L(\varphi_s) \leq L(\varphi_t)$ (st.11.4), dus $\alpha(s) \leq \alpha(t)$. Verder is $0 \leq \alpha(t) \leq \alpha(1)$ $(0<t\leq 1)$, dus α is begrensd.

Elke reële trapfunctie f(x) (opgebouwd met behulp van intervallen (a,b]) is als lineaire combinatie van functies $\varphi_t(x)$ te schrijven, zodat $f \in \Phi$. En aangezien

$$\int_{(0,1]} \varphi_t(x)\, d\alpha(x) = \alpha(t) = L(\varphi_t),$$

zien we dat ook $\int_{(0,1]} f(x)d\alpha(x)=L(f)$ voor elke trapfunctie f. Voor elk reëel trigonometrisch polynoom P is nu dezelfde relatie te bewijzen, want P is in te sluiten tussen trapfuncties f en f+ε. Derhalve is

$$L(f) \leq \int_{(0,1]} P(e^{2\pi ix})d\alpha(x) \leq L(f+\varepsilon)=L(f)+\varepsilon\mu_0.$$

Ook is (st.11.4) $L(f) \leq L(P) \leq L(f+\varepsilon)$. Zo blijkt dat

$$\int_{(0,1]} P(e^{2\pi ix})d\alpha(x) = L(P).$$

In het bijzonder geldt met $P(z)=\vartheta z^n+\bar{\vartheta} z^{-n}$:

$$\int_{(0,1]} (\vartheta e^{2\pi nix}+\bar{\vartheta} e^{-2\pi nix})d\alpha(x)=\vartheta\mu_n+\bar{\vartheta}\mu_{-n}.$$

Door dit met $\vartheta=1$ resp. $\vartheta=i$ toe te passen, vindt men (11.1).

Opmerking 11.1. Ons resultaat is nauw verwant met de volgende stelling van Riesz: Is L een lineaire functionaal op de ruimte van alle continue functies op [0,1], en is er een M zo dat $|L(f)| \leq M$ voor alle continue f met $|f(x)| \leq 1$ $(0 \leq x \leq 1)$, dan is er een functie $\beta(x)$, van begrensde variatie op [0,1], met de eigenschap dat $L(f)=\int_{(0,1]} f(x)d\beta(x)$ voor alle continue functies f.

12. Hulpstellingen betreffende L_2.

We noemen een aantal stellingen over de $L_2(X,\Gamma,\mu)$ (zie def. 7.5, def.7.8 en def.7.9). De bewijzen laten we weg.

Stelling 12.1. Zij $f_n \in L_2$, $f \in L_2$, $\|f_n-f\| \to 0$. Dan is er een deelrij $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ zó dat voor bijna elke x geldt $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$.

Stelling 12.2. Laat f_1, f_2, f_3, f_4 elementen van L_2 zijn, en neem aan dat $f_1(x)\overline{f_2(x)}=f_3(x)\overline{f_4(x)}$ (p.p.). Dan is $(f_1,f_2)=(f_3,f_4)$.

Deze stelling had aan def.7.9 vooraf moeten gaan.

Stelling 12.3. Zij $f \in L_2$, $g \in L_2$, $|f(x)| \leq 1$ (p.p.). Dan is ook $fg \in L_2$ (fg is gedefinieerd door $fg(x)=f(x)g(x)$ $(x \in X)$).

De volgende stellingen hebben betrekking op een Stieltjes-Lebesgue-maatruimte, vastgelegd door een monotoon niet-dalende begrensde functie $\alpha(x)$ op (0,1].

Stelling 12.4. Zij $L_2=L_2((0,1],\alpha)$. Is $g \in L_2$, $0 \leq g(x) \leq 1$ (p.p.), dan is er een $h \in L_2$ met $0 \leq h(x) \leq 1$, $(h(x))^2=g(x)$ (p.p.).

Stelling 12.5. Zij $L_2=L_2((0,1],\alpha)$, $f \in L_2$, $g \in L_2$. Gegeven is dat voor elk niet-negatief trigonometrisch polynoom P (zie st.11.2) geldt dat $(Pf,g) \geq 0$ (Pf is het product van de functies P en f). Dan is $f(x)\overline{g(x)} \geq 0$ (p.p.). En als $(Pf,g)=0$ voor al deze P's, dan is $f(x)g(x)=0$ (p.p.)

13. Unitaire operatoren.

Lineaire transformaties van een Hilbertruimte in zichzelf noemt men vaak operatoren.

Definitie 13.1. Een lineaire afbeelding U van de Hilbertruimte H in zichzelf heet een unitaire operator als het een isometrische afbeelding van H op zichzelf is (vgl. opm.2.6). De isometrie wordt uitgedrukt door $(Uf,Ug)=(f,g)$ (alle f en g uit H).

Voorbeeld 13.1. In $L_2(0,\infty)$ is de afbeelding $f \to g$ met

$$g(x) = f(x-1) \text{ als } x \geq 1$$
$$g(x) = 0 \quad \text{als } 0 \leq x \leq 1$$

een isometrische afbeelding, doch geen unitaire (het beeld is niet de gehele L_2).

Voorbeeld 13.2. Laat φ een reële meetbare functie op $(0,\infty)$ zijn. Definieer de afbeelding $f \to g$ in $L_2(0,\infty)$ door

$$g(x) = f(x)e^{i\varphi(x)} \qquad (0 \leq x < \infty).$$

Deze afbeelding is unitair.

Stelling 13.1. Is U unitair, dan zijn ook $U^2, U^3, \ldots$ unitair. (U^2 stelt de afbeelding $f \to U(Uf)$ voor. En er is precies één unitaire operator V met $UV=VU=I$ (=eenheidsoperator). Deze wordt met U^{-1} aangeduid.

Bewijs. De bewering over $U^2, U^3, \ldots$ is triviaal. Verder is het, wegens de eeneenduidigheid van U, duidelijk dat er precies één afbeelding V van H in zichzelf is die aan $UV=VU=I$ voldoet, en dat V een eeneenduidige afbeelding van H op zichzelf is. V is lineair, want voor alle f,g,α,β is $\alpha f+\beta g=\alpha UVf+\beta UVg=$ $=U(\alpha Vf+\beta Vg)$, dus $V(\alpha f+\beta g)=\alpha Vf+\beta Vg$. En V is isometrisch: $(Vf,Vg)=(U(Vf),U(Vg))=(f,g)$.

Voorbeeld 13.3. Laat X een maatruimte zijn, en φ een ééneénduidige afbeelding van X in zichzelf, zó dat voor elke meetbare verzameling E steeds ook $\varphi(E)$ en $\varphi^{-1}(E)$ meetbaar zijn (φ^{-1} stelt de inverse afbeelding voor, terwijl steeds $\mu(E)=\mu(\varphi(E))=$ $=\mu(\varphi^{-1}(E))$. In $L_2(X)$ definiëren we nu de operator U door

$$(Uf)(x) = f(\varphi(x)) \qquad (x \in X).$$

Dan is weer $Uf \in L_2$, en $(Uf,Ug)=(f,g)$ voor alle $f,g \in L_2$. Want

$$(Uf,Ug) = \int_X f(\varphi(x))\,\overline{g(\varphi(x))}\,d\mu = \int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,d\mu = (f,g).$$

Deze U is dus weer unitair. Gemakkelijk is in te zien dat

$$(U^n f)(x) = f(\varphi^n(x)) \qquad (x \in X,\ n \text{ geheel});$$

hierin is φ^n de n-voudig geïtereerde afbeelding als n positief is, terwijl φ^{-n} hetzelfde betekent als $(\varphi^{-1})^n$.

Voorbeelden van φ's zijn: 1^o. bij $L_2(-\infty,\infty)$: $\varphi(x)=x+1$; 2^o. bij $L_2(-\infty,\infty)$: $\varphi(x)=-x$; 3^o. bij $L_2((0,1])$: $\varphi(x)=x+p-[x+p]$ (p constant); 4^o bij het euclidische vlak: φ = een beweging.

Definitie 13.2. Een unitaire operator U in de Hilbertruimte H heet primitief als er een $f_o \in H$ is zó dat de eindige lineaire combinaties

$$\ldots, U^{-2}f_o, U^{-1}f_o, f_o, Uf_o, U^2f_o, \ldots$$

dicht in H liggen. We zeggen ook wel dat H door f_o en U wordt voortgebracht, of dat H primitief is t.o.v. U.

Voorbeeld 13.4. Laat α een begrensde monotoon niet-dalende functie op (0,1] zijn. Daarmee vormen we de Stieltjes-Lebesgue-maatruimte uit voorbeeld 7.2 (met a=0, b=1, $g=\alpha$). De volgens def.7.5 op deze maatruimte gebaseerde L_2 geven we met $L_2((0,1],\alpha)$ aan. We korten dit even af tot L_2.

Als $f \in L_2$, definieren we Uf door

$$(Uf)(x) = e^{2\pi ix}f(x);$$

volgens st.12.3 is weer $Uf \in L_2$. En $(Uf,Ug)=(f,g)$ (zie st.12.2). Bovendien is $U(L_2)=L_2$, zodat U unitair is. Laat f_o gedefinieerd zijn door $f_o(x)=1$ $(0<x\leq 1)$, dus $f_o \in L_2$. De eindige lineaire combinaties van $\ldots, U^{-1}f_o, f_o, Uf_o, \ldots$ vormen nu de trigonometrische polynomen. Deze liggen dicht in L_2 (zie voorbeeld 9.3).

Uit st.13.2 blijkt dat dit voorbeeld in wezen het meest algemene voorbeeld van een primitieve unitaire operator is.

Stelling 13.2. Als H door f_o en U wordt voortgebracht, dan is er een monotoon niet-dalende begrensde functie $\alpha(x)$ op $0 < x \leq 1$, zó dat er een isometrische afbeelding φ bestaat van H op $L_2((0,1];\alpha)$ (vgl. voorbeeld 13.4), zódanig dat

$$\varphi(f_o)(x) = 1 \quad (\text{p.p.})$$

$$\varphi(U^k f)(x) = e^{2\pi ikx}\varphi(f)(x) \quad (\text{p.p.}) \quad (k=0,\pm1,\dots;f\in H,\ 0<x\leq 1).$$

Bewijs. Noem $(U^k f_o, f_o) = \mu_k$. Dan is er voldaan aan (11.2):

$$\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\mu_{n-m}\rho_n\overline{\rho_m} = \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}(U^n f_o, U^m f_o)\rho_n\overline{\rho_m} = \left\|\sum_{-N}^{N}\rho_n U^n f_o\right\|^2 \geq 0,$$

want $(U^n f_o, U^m f_o) = (U^{-m}U^n f_o, U^{-m}U^m f_o) = (U^{n-m}f_o, f_o) = \mu_{n-m}$ voor alle gehele waarden van n en m.

Volgens st.11.7 is er nu een α zó dat

$$\mu_k = (U^k f_o, f_o) = \int_{(0,1]} e^{2\pi kix}\,d\alpha(x).$$

Laat L_e de deelruimte van H zijn die wordt opgespannen door de $U^k f_o$ $(k=0,\pm1,\dots)$, en R de deelruimte van $L_2 = L_2((0,1],\alpha)$ die door de trigonometrische polynomen wordt gevormd. (Natuurlijk worden niet de polynomen zèlf bedoeld, maar de functieklassen waarin trigonometrische polynomen voorkomen. Twee functies uit een klasse zijn p.p. gelijk. Het kan wel gebeuren dat twee verschillende trigonometrische polynomen p.p. gelijk zijn, hoewel de coefficienten verschillen).

Er is een lineaire afbeelding φ van L_e op R die voldoet aan $\varphi(U^k f_o) = e_k$, waarin e_k de functieklasse is die de functie $e^{2\pi ikx}$ bevat. Daartoe behoeven we slechts aan te tonen dat een lineaire relatie $\sum_{-N}^{N}\alpha_k U^k f_o = 0$ automatisch $\sum_{-N}^{N}\alpha_k e_k = 0$ meebrengt. Inderdaad, want

$$\left\|\sum_{-N}^{N}\alpha_k U^k f_o\right\|^2 = \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\alpha_n\overline{\alpha}_m(U^n f_o, U^m f_o) =$$

$$= \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\alpha_n\overline{\alpha}_m(U^{n-m}f_o, f_o) =$$

$$= \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\alpha_n\overline{\alpha}_m\int_{(0,1]} e^{2\pi(n-m)ix}\,d\alpha(x) =$$

$$= \int_{(0,1]} \left| \sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{2\pi inx} \right|^2 d\alpha(x) =$$

$$= \left\| \sum_{-N}^{N} \alpha_k e_k \right\|^2,$$

zodat $\sum_{-N}^{N} \alpha_k U^k f_o = 0$ en $\sum_{-N}^{N} \alpha_k e_k = 0$ equivalent zijn. Bovendien volgt uit de zojuist afgeleide formule dat φ een isometrie is.

We laten vervolgens zien dat R dicht ligt in L_2. Daartoe bewijzen we eerst dat elke ψ_t (zie bewijs van st.11.6) willekeurig scherp door elementen van $r \in R$ kan worden benaderd, in de zin van kleine $\|r - \psi_t\|$. We bewezen bij st.11.6 dat er bij ψ_t en $\varepsilon > 0$ een $r \in R$ te vinden is met $r > \psi_t$, $\int (r - \psi_t) d\alpha(x) < \varepsilon$, $r(x) < 2$. Daaruit volgt dat $\int (r - \psi_t)^2 d\alpha(x) < 2\varepsilon$. Dus $\psi_t \in \overline{R}$(=afsluiting van R in L_2). Door nu lineaire combinaties van ψ_t's te nemen zien we dat ook elke trapfunctie in $\overline{R}$ ligt (zie het slot van het bewijs van st.11.6; het is duidelijk dat ook elke constante in $\overline{R}$ ligt). Daar L_2 de completering is van de collectie der trapfuncties, blijkt nu dat $\overline{R} = L_2$.

De isometrie φ tussen de IP-ruimten L_e en R kan worden voortgezet tot een isometrie tussen hun completeringen H resp. L_2 (st. 6.6)(dit kan op slechts één manier).

Tenslotte gaan we na wat $\varphi U \varphi^{-1}$ in L_2 uitricht. Als $g \in R$, $\varphi U \varphi^{-1} g = h$, dan is $h(x) = e^{2\pi ix} g(x)$ (p.p.), aangezien dit geldt met $g(x) = e^{2\pi ikx}$, bij elke k. Want $\varphi U \cdot \varphi^{-1} e_k = \varphi U(U^k f_o) = \varphi(U^{k+1} f_o) = e_{k+1}$.

Als $g \in L_2$, dan is er een rij $\{g_n\}$ met $\|g_n - g\| \to 0$, $g_n \in R$. Noem $\varphi U \varphi^{-1} g_n = h_n$, $\varphi U \varphi^{-1} g = h$. Dan is $\|h_n - h\| \to 0$, daar de afbeeldingen φ^{-1}, U, φ isometrieën zijn. Kies nu (volgens st.12.1) een deelrij zodat (met nieuwe nummering) $g_n(x) \to g(x)$ (p.p.), $h_n(x) \to h(x)$ (p.p.). Aangezien $h_n(x) = e^{2\pi ix} g_n(x)$, blijkt nu dat $h(x) = e^{2\pi ix} g(x)$ (p.p.). Nu is st.13.2 volledig bewezen.

Opmerking 13.1. Als H een eindige dimensie n heeft, is dat ook met L_2 het geval. Dan kan men ook tot de in st.13.2 genoemde isometrie komen met behulp van de theorie der unitaire matrices. Laat $\{q_1, \ldots, q_n\}$ een orthonormaalsysteem van eigenvectoren zijn: $Uq_k = \lambda_k q_k$. De eigenwaarden λ_k hebben alle de absolute waarde 1: $\lambda_k = \exp(2\pi i x_k)$ $(0 < x_k \leq 1)$. We hebben $f_o = \sum_1^n (f_o, q_k) q_k$. Aangezien f_o en U de gehele H voortbrengen, blijkt nu dat alle $(f_o, q_k) \neq 0$ zijn en dat alle eigenwaarden enkelvoudig zijn. We beelden nu H isometrisch af op de n-dimensionale numerieke Hilbertruimte H_n uit voorbeeld 2.1:

$$\sum_{1}^{n} \alpha_k q_k \leftrightarrows \left(\frac{\alpha_1}{(f_o,q_1)}, \ldots, \frac{\alpha_n}{(f_o,q_n)}\right).$$

Nu is $f_o \leftrightarrows (1,1,\ldots,1)$, en $U^m f_o \leftrightarrows (e^{2\pi i m x_1},\ldots,e^{2\pi i m x_n})$. Op (0,1] kiezen we nu de functie $\alpha(x)$ die in elk der punten $x_1,\ldots,x_n$ de sprong 1 heeft, doch overigens constant is. Merk op dat in dit geval $f(x)=g(x)$ (p.p.)niets anders wil zeggen dan $f(x_k)=g(x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$. De bijbehorende L_2 wordt dus gevormd door de functies die hoogstens voor $x_1,\ldots,x_n$ van nul verschillen. Deze L_2 is isometrisch met H_n, als we afspreken dat $g \in L_2$ correspondeert met $(g(x_1),\ldots,g(x_n)) \in H_n$. Het effect van U in deze L_2 is inderdaad hetzelfde als vermenigvuldiging met $e^{2\pi i x}$.

<u>Opmerking 13.2.</u> We keren weer terug naar het algemene geval van st.13.2. Laat u een getal zijn $(0 < u \leq 1)$ waar $\alpha(x)$ een sprong maakt. Dan is de functie f, gedefinieerd door $f(x)=0 (x \neq u), f(u)=1$, een element van L_2. Beschouw nl. de trapfunctie t_n, gedefinieerd als karakteristieke functie van $(u-n^{-1},u]$. Deze t_n's vormen een fundamentaalrij, want als $m > n$, dan is $\|t_m-t_n\|^2 = \alpha(u-m^{-1}+)-\alpha(u-n^{-1}+)$, en beide termen naderen tot $\alpha(u-)$ als $m \to \infty$, $n \to \infty$. En voor alle x is $t_n(x) \to f(x)$. Dat f niet het nulelement van L_2 is blijkt uit het feit dat $\|t_n\| = \alpha(u+)-\alpha(u-n^{-1}+) \to \alpha(u+)-\alpha(u-) > 0$ als $n \to \infty$. Dus ook $\|f\| = \alpha(u+)-\alpha(u-)$. (Als u=1, moeten we onder $\alpha(1+)$ gewoon $\alpha(1)$ verstaan).

De functie f is <u>eigenfunctie</u> van U, want volgens st.13.2 is $(Uf)(x)=e^{2\pi i x}f(x)=e^{2\pi i u}f(x)$, dus $Uf=e^{2\pi i u}f$.

<u>Opmerking 13.3.</u> Men denke niet dat de functies $e^{2\pi i n x}$ in L_2 in het algemeen een orthonormaalsysteem vormen. Want f_o en Uf_o behoeven niet loodrecht op elkaar te staan.

We gaan nu naar het niet-primitieve geval.

<u>Definitie 13.3.</u> Laat H een Hilbertruimte zijn met unitaire operator U. Een deel $Q \subset H$ heet een <u>orthogonale U-basis</u> als elke $q \in Q$ van 0 verschilt terwijl voor $q_1 \in Q$, $q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$ en alle gehele getallen m en n geldt dat $(U^n q_1, U^m q_2)=0$. Q heet <u>maximaal</u> als Q geen echt deel van een grotere orthogonale U-basis is.

<u>Stelling 13.3.</u> Als H een Hilbertruimte is met unitaire operator U, dan bestaat er een maximale orthogonale U-basis.

<u>Bewijs.</u> In het algemene geval hebben we het keuze axioma nodig. Het bewijs kan nagenoeg letterlijk van dat van st.2.5 worden overgenomen.

In het geval dat H separabel is kunnen we een constructief bewijs geven. Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij die dicht ligt in H. Zij $f_1 \neq 0$. Vorm de deelruimte H_1 die de afsluiting is van de door $U^m f_1$ ($m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$) opgespannen deelruimte. Neem $K_1 = H \ominus H_1$. Zij m het kleinste getal met $f_m \notin H_1$, en zij g_m de projectie van f_m op K_1 (d.w.z. $g_m \in K_1$, $f_m - g_m \in H_1$). Laat nu g_m en U de Hilbertruimte H_2 voortbrengen. Dan is $H_2 \subset K_1$, want $U^k g_m \perp H_1$ wegens $g_m \perp U^{-k}(H_1)$. Zij $K_2 = K_1 \ominus H_2$. Zij n het kleinste getal met $f_n \notin H_1 + H_2$, en zij g_n de projectie van f_n op K_2, enz. Het is nu niet moeilijk te bewijzen dat de rij die zo ontstaat (waarvan f_1, g_m, g_n de eerste elementen zijn) een maximale orthogonale U-basis vormt.

<u>Stelling 13.4.</u> Als H een Hilbertruimte is met unitaire operator U, dan is H een directe som van deelruimten waarin U primitief is.

<u>Bewijs.</u> Kies een maximale orthogonale U-basis Q. Elke $q \in Q$ brengt een deelruimte H_q voort (=de afsluiting van de deelruimte opgespannen door alle $U^n q$, $n=0,\pm 1,\ldots$). Deze H_q's staan twee aan twee loodrecht op elkaar. Zij H' de afsluiting van de deelruimte die door de H_q's tezamen wordt opgespannen. Dan is H'=H, want anders was er een $f \in H$, $f \neq 0$, $f \perp H_q$ (voor alle q). Dit laatste impliceert $U^k f \perp U^k H_q$, dus $U^k f \perp H_q$. f zou dus aan de U-basis kunnen worden toegevoegd.

Is $h \in H$, en is h_q de projectie van h op H_q, dan is $\sum_{q \in Q} \|h_q\|^2 < \infty$, dus $h_q = 0$ met uitzondering van hoogstens aftelbaar vele q's. Gesommeerd over deze aftelbaar vele, geldt dan $h = \sum_{q \in Q} h_q$. Gemakkelijk blijkt ook dat $(h,h') = \sum_{q \in Q} (h_q, h_q')$.

14. <u>Spectrale multipliciteit.</u>

We hebben in st.13.4 laten zien dat een Hilbertruimte met unitaire operator als directe som van primitieve deelruimten kan worden geschreven, en st.13.2 gaf de werking van U in zo'n primitieve deelruimte volledig aan. Deze splitsing in deelruimten is in het algemeen op vele manieren mogelijk. We willen echter graag een kanonieke voorstelling van H hebben. In het geval dat H separabel is kunnen we iets van dien aard verkrijgen door alle primitieve componenten in eenzelfde $L_2((0,1],\alpha)$ in te bedden.

Stelling 14.1. Laat L_2 en U de in voorbeeld 13.4 genoemde ruimte resp. unitaire operator zijn. Zij H een U-invariante volledige deelruimte van L_2 (d.i. H is een Hilbertruimte, en $Uh \in H$, $U^{-1}h \in H$ voor alle $h \in H$). Dan wordt H voortgebracht (in de zin van def. 13.2) door een $f_1 \in L_2$ zo dat $f_1(x)$ op $(0,1]$ slechts de waarden 0 en 1 aanneemt (m.a.w. f_1 is de karakteristieke functie van een meetbare deelverzameling).

Bewijs. Zij $L_2 \ominus H=K$. Laat $f_0 \in L_2$ gedefinieerd zijn door $f_0(x)=1$ $(0<x\leq 1)$. Nu is $f_0=f_1+f_2$ $(f_1 \in H,\ f_2 \in K)$ volgens st.8.3.

Voor elk trigonometrisch polynoom P geldt dat Pf_1 (d.i. het product van de functies $P(e^{2\pi ix})$ en $f_1(x)$) een lineaire combinatie van de $U^nf_1 (n=0,\pm1,\ldots)$ is, dus $Pf_1 \in H$, dus $(Pf_1,f_2)=0$. Volgens st.12.5 is nu $f_1(x)f_2(x)=0$ (p.p.), dus $f_1(x)\ (1-f_1(x))=0$ (p.p.). Door f_1 nog op een verzameling van de maat 0 van waarde te veranderen, vinden we een f_1 die slechts de waarden 0 en 1 aanneemt.

We tonen nu aan dat de Pf_1's dicht in H liggen. Kies $h\in H$, $\varepsilon > 0$. Daar de Pf_0's dicht in L_2 liggen, is er een P met $\|Pf_0-h\|<\varepsilon$. Elke U^nf_2 staat loodrecht op elke $h' \in H$, want $(U^nf_2,h')=(f_2,U^{-n}h')=0$ (daar $f_2 \perp H$, $U^{-n}h' \in H$). Dus $Pf_2 \perp h'$. In het bijzonder is $Pf_2 \perp Pf_1-h$. Dus

$$\|Pf_1-h\| \leq \|(Pf_1-h) + Pf_2\| = \|Pf_0-h\| < \varepsilon .$$

Daarmee is de gewenste approximatie van h bereikt.

Stelling 14.2. Laat weer L_2 en U de in voorbeeld 13.4 genoemde ruimte resp. unitaire operator zijn, en zij $f_0(x)=1$ $(0<x\leq 1)$. Laat verder H een Hilbertruimte zijn met unitaire operator V, en laat H worden voortgebracht door V en een element f_1 van H. Neem aan dat voor elke veelterm P in u en u^{-1} (d.i. $P(u)=\sum_{-n}^{n} p_k u^k$) geldt dat

$$\|P(V)f_1\|_H \leq \|P(U)f_0\|_{L_2}.$$

Dan bestaat er een isometrische afbeelding φ van H op een deelruimte H' van L_2 zó dat $\varphi(Vh)=U\varphi(h)$ voor alle $h \in H$. H' is U-invariant: $U(H')=U^{-1}(H')=H'$.

<u>Bewijs.</u> We construeren eerst een afbeelding ψ van L_2 in H. Als $f \in L_2$, dan is er een rij P_n's met $P_n(U)f_o \to f$. Blijkens de gegeven ongelijkheid vormen de $P_n(V)f_1$'s nu een fundamentaalrij in H. De limiet ervan noemen we $\psi(f)$. Door van twee verschillende rijen P's een "mengrij" te bekijken zien we dat $\psi(f)$ door f volledig bepaald is. De afbeelding $f \to \psi(f)$ is natuurlijk lineair. Zij is bovendien begrensd, want $\|\psi(f)\| = \lim \|P_n(V)f_1\| \leq \lim \|P_n(U)f_o\| = \|f\|$. Zij is echter in het algemeen niet één-éénduidig, dus in het algemeen niet isometrisch.

We maken vervolgens de afbeelding $f \to L(f)=(\psi(f),f_1)_H$ voor alle $f \in L_2$. Dit is nu een begrensde lineaire functionaal op L_2. Volgens st. 9.9 is er een $g \in L_2$ zó dat $(\psi(f),f_1)_H=(f,g)_{L_2}$ voor alle $f \in L_2$.

Voor elke P geldt nu dat $(P(V)f_1,f_1)_H=(\psi P(U)f_o,f_1)_H=(P(U)f_o,g)_{L_2}$. Als P zo wordt gekozen dat $P(e^{2\pi ix}) \geq 0$ $(0 < x \leq 1)$, dan is $(P(V)f_1,f_1)_H \geq 0$ (we hebben dan immers $P(e^{2\pi ix})=|Q(e^{2\pi ix})|^2= Q(e^{2\pi ix})\overline{Q}(e^{-2\pi ix})$, dus $P(V)=\overline{Q}(V^{-1})Q(V)$, dus $(P(V)f_1,f_1)_H= =(Q(V)f_1,Q(V)f_1)_H \geq 0$). Derhalve geldt dat $(P(e^{2\pi ix})f_o,g)_{L_2} \geq 0$ voor alle niet-negatieve trigonometrische polynomen $P(e^{2\pi ix})$. Volgens st.12.5 is nu $g(x) \geq 0$ (p.p.). We zullen evenzo aantonen dat $g(x) \leq 1$ (p.p.). Met $P(V)=\overline{Q}(V^{-1})Q(V)$ vinden we $(Q(V)f_1,Q(V)f_1)_H= =(Q(U)f_o,Q(U)g)_{L_2}$, en het linkerlid is hoogstens $\|Q(U)f_o\|^2$. Dus $(Q(U)f_o,Q(U)g) \leq (Q(U)f_o,Q(U)f_o)$, zodat $(P(U)f_o,f_o-g)= =(Q(U)f_o, Q(U)(f_o-g)) \geq 0$. Volgens st.12.5 is nu $g(x) \leq 1$ (p.p.).

Volgens st.12.4 is er een $h \in L_2$ met $0 \leq h(x) \leq 1$, $(h(x))^2=g(x)$ (p.p.)

We gaan nu de IP-ruimte R, bestaande uit alle $P(V)f_1$, afbeelden in L_2 door een afbeelding φ, gedefinieerd door:

$$P(V)f_1 \to \varphi(P(V)f_1) \in L_2, \text{ met } \varphi(P(V)f_1)(x)=h(x)P(e^{2\pi ix}).$$

Deze afbeelding is lineair. Zij is ook isometrisch:

$$(\varphi(V^nf_1), \varphi(V^mf_1))_{L_2} = \int h(x)e^{2\pi inx}.h(x)e^{-2\pi imx}d\alpha(x) =$$

$$= \int g(x)e^{2\pi i(n-m)x}d\alpha(x)=(U^{n-m}f_o,g)_{L_2}=(V^{n-m}f_1,f_1)_H=(V^nf_1,V^mf_1)_H.$$

Voorts geldt dat $\varphi(V\cdot V^nf_1)=\varphi(V^{n+1}f_1)=U^{n+1}h=U\varphi(V^nf_1)$.

De isometrische afbeelding φ van de zoëven genoemde IP-ruimte R kan worden voortgezet tot een isometrische afbeelding van H op een volledige deelruimte H' van L_2 (zie st.6.6). De afbeeldingen $h \to \varphi(h)$ en $h \to U^{-1}\varphi(Vh)$ stemmen overeen voor alle $h \in R$; aangezien het isometrieën zijn stemmen ze dus voor alle $h \in H$ overeen. Dus $\varphi(Vh)=U\varphi(h)$ voor alle $h \in H$. Hieruit blijkt tevens dat $U\varphi(h) \in H'$, dus $U(H') \subset H'$. Door h te vervangen door $V^{-1}h$, blijkt dat $\varphi(h)=U\varphi(V^{-1}h)$, dus $U^{-1}\varphi(h)=\varphi(V^{-1}h)$. Dus ook $U^{-1}(H') \subset H'$.

Stelling 14.3. Laat H_k een Hilbertruimte zijn met unitaire operator V_k $(k=1,2,\ldots)$, en laat elke H_k primitief zijn t.o.v. V_k. Dan is er een monotoon niet-dalende begrensde functie $\alpha(x)$ $(0 < x \leq 1)$ zo dat elke H_k in $L_2((0,1],\alpha)$ zodanig kan worden ingebed door een isometrie φ_k dat $\varphi_k(V_k h)=U\varphi_k(h)$ $(h \in H_k)$. Hierin is U weer de operator gegeven door $(Uf)(x)=e^{2\pi ix}f(x)$.

Bewijs. Laat H_k worden voortgebracht door V_k en een element $f_k \in H_k$. Elk scalair veelvoud van f_k (mits $\neq 0$) brengt eveneens H_k voort. Zonder beperking mogen we aannemen dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2_{H_k} < \infty,$$

want dit is te bereiken door de oorspronkelijke f_k's met voldoend kleine getallen te vermenigvuldigen.
Verder mogen we aannemen dat de H_k's los van elkaar staan, zodat we de directe som $H=H_1+H_2+\ldots$ mogen vormen. In H definieren we een unitaire operator V door

$$V \sum_1^{\infty} h_k = \sum_1^{\infty} V_k h_k \qquad \text{als } h_k \in H_k, \ \sum_1^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty .$$

Beschouw nu de volledige deelruimte H' van H die door $f_1+f_2+\ldots=f$ wordt voortgebracht, en construeer volgens st.13.2 de $L_2((0,1],\alpha)$, isometrisch met H', zó dat V in H' correspondeert met de in de stelling genoemde U uit L_2. Nu voldoet elke H_k aan de voorwaarde van st.14.2, want

$$P(V)f= \sum_1^{\infty} P(V_k)f_k, \text{ dus } \|P(V_k)f_k\| \leq \|P(V)f\| = \|P(U)f_o\| ,$$

als weer $f_o(x)=1$ $(0 < x \leq 1)$. Toepassing van st.14.2 levert nu het gestelde.

Beschouw nu een willekeurige separabele Hilbertruimte H met unitaire operator V. Splits H als directe som van aftelbaar vele t.o.v. V primitieve deelruimten: $H=H_1+H_2+\dots$. In elke H_i is nu V een unitaire operator. Volgens st.14.3 is er een $L_2((0,1],\alpha)$ waarin alle H_k's kunnen worden ingebed, zó dat V steeds met U correspondeert (U is de vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$). Het beeld van H_k bij deze inbedding is een U-invariante deelruimte H_k' van L_2, en kan dus volgens st.14.1 worden voortgebracht door een f_k die slechts de waarden 0 en 1 aanneemt.

Zij E_k de verzameling waarop $f_k(x)=1$. Splits E_k in disjuncte stukken $E_{k1},\dots,E_{kk}$, waarin E_{kj} de verzameling van alle x die in E_k en in precies j-1 der $E_1,\dots,E_{k-1}$ voorkomen. Zij $E^{(j)}=\bigcup_{k=j}^{\infty}E_{kj}$. $E^{(j)}$ is dus de verzameling van alle x' en die in minstens j der E_k's voorkomen. Dus $E^{(1)}\supset E^{(2)}\supset\dots$.

Onder $L_2(E,\alpha)$ zullen we, als E een (t.o.v. α) meetbare verzameling is, de deelruimte van $L_2((0,1],\alpha)$ verstaan van alle functies die nul zijn buiten E. Met deze notatie is $H_k'=L_2(E_k,\alpha)$, en dit is de directe som $L_2(E_{k1},\alpha)+\dots+L_2(E_{kk},\alpha)$. Dus H is isometrisch met de directe som $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}L_2(E_{kj},\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}L_2(E_{kj},\alpha)=$ $=\sum_{j=1}^{\infty}L_2(E^{(j)},\alpha)$. We hebben dus:

<u>Stelling 14.4.</u> Als H een separabele Hilbertruimte is met unitaire operator U, dan is er een monotoon niet-dalende begrensde functie $\alpha(x)$, en een rij t.o.v. α meetbare deelverzamelingen $E^{(1)}\supset E^{(2)}\supset\dots$ zó dat H isometrisch is met de directe som $L_2(E^{(1)},\alpha)+L_2(E^{(2)},\alpha)+\dots$, terwijl de directe splitsing $h=h_1+h_2+\dots$ van een $h\in H$ steeds meebrengt dat $Uh=g_1+g_2+\dots$, waarbij $g_j(x)=e^{2\pi ix}h_j(x)$. Men kan eisen dat $E^{(1)}=(0,1]$.

Het bewijs van de laatste toevoeging stellen we even uit. We merken eerst op dat uit st.14.4 direct volgt:

<u>Stelling 14.5.</u> Als H een separabele Hilbertruimte is met unitaire operator U, dan heeft H een nest van primitieve gesloten deelruimten $H^{(1)}\supset H^{(2)}\supset\dots$ zó dat er een met U verwisselbare isometrie bestaat tussen H en de directe som $H^{(1)}+H^{(2)}+\dots$.

Door nu bij $H^{(1)}$ een daarmee isometrische $L_2((0,1],\alpha)$ te construeren en verder st.14.1 toe te passen, zien we dat we in st.14.4 $E^{(1)}=(0,1]$ mogen nemen.

Opmerking 14.1. Het begrip "directe som" in st.14.5 moet natuurlijk weer worden geïnterpreteerd als de collectie van alle rijen $(h^{(1)},h^{(2)},\ldots)$ met $h^{(i)} \in H^{(i)}$ en $\Sigma\|h^{(i)}\|^2 < \infty$. Het is dus niet de somvorming van $H^{(1)},H^{(2)},\ldots$ in H, want de $H^{(i)}$'s hebben elementen gemeen. De werking van U wordt aangegeven door

$$U(h^{(1)},h^{(2)},\ldots) = (Uh^{(1)},Uh^{(2)},\ldots).$$

Opmerking 14.2. De α in st.14.4 is niet eenduidig bepaald door H en U, want α is afkomstig van een speciale keuze van een voortbrengend element (zie st.13.2). De splitsing in st.14.5 is echter wèl eenduidig bepaald op U-isometrie na (zie def.14.1). We zullen dit niet volledig bewijzen, doch geven slechts de sleutel daartoe aan (st.14.6 en st.14.7).

Definitie 14.1. Laat in de Hilbertruimten H_1 en H_2 unitaire operatoren U_1,U_2 gegeven zijn, en laat $U_1h=U_2h$ voor alle h uit een eventuele doorsnede van H_1 en H_2. Er is dan geen bezwaar tegen, U_1 en U_2 door eenzelfde letter U voor te stellen. We zeggen nu dat H_1 en H_2 U-isometrisch zijn als er een met U verwisselbare isometrie tussen H_1 en H_2 bestaat (dus als H_1 door ϑ op H_2 wordt afgebeeld: $\vartheta(Uh) = U(\vartheta(h))$ voor alle h uit H_1).

Stelling 14.6. Als de Hilbertruimte H met unitaire operator U de directe som is van een verzameling van U-invariante deelruimten, die elk in een primitieve ruimte H^* U-isometrisch kunnen worden ingebed, dan kan elke primitieve deelruimte van H U-isometrisch in H^* worden ingebed.

Bewijs. Zij $H=H^{(1)}+H^{(2)}+\ldots$, en laat K een primitieve deelruimte van H zijn. We kunnen H^* en K U-isometrisch inbedden in een $L_2((0,1],\alpha)$ (st.14.3), waarin U de vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$ is. Laat φ resp. ψ de inbedding bewerkstelligen. We hebben $\varphi(H^*) = L_2(E)$, $\psi(K)=L_2(F)$, waarin E en F meetbare verzamelingen zijn (st.14.1). Als nu $F\subset E$, is $\psi(K) \subset \varphi(H^*)$, dus dan is de inbedding geleverd. Neem nu aan dat er een deel $F_1\subset F$ is dat een positieve maat heeft doch dat niets met E gemeen heeft.

We construeren een rij trigonometrische polynomen $\{P_n(e^{2\pi ix})\}$ met $\|P_n - \chi_E\| \to 0$, $|P_n(e^{2\pi ix})| \leq 3$ $(0 < x \leq 1)$ (wanneer P_n aan laatstgenoemde conditie niet voldoet, kunnen we P_n door $P_n\,|P_n|^{-1}\min(|P_n|,2)$ vervangen, en dat weer door een trigonometrisch polynoom approximeren). Nu is duidelijk dat ook $\|(P_n-\chi_E)^2\|\to 0$, en daaruit volgt dat $\|P_n h\|\to 0$ als $h\in L_2(F_1)$ want op F_1 is $P_n-\chi_E=P_n$. Verder is $\|P_n h-h\|\to 0$ als $h\in L_2(E)$. Kies $k\in K$ zó dat $k\neq 0$, $\psi(k)\in L_2(F_1)$. Wegens de U-isometrie geldt nu dat $P_n(U)k\to 0$, $P_n(U)h\to h$ als $h\in H^{(i)}$. Doch als $k=(h^{(1)},h^{(2)},\dots)\neq 0$, dan is $P_n(U)k=(P_n(U)h^{(1)},P_n(U)h^{(2)},\dots)$. Uit $P_n(U)k\to 0$ volgt dus $P_n(U)h^{(i)}\to 0$, en we concluderen dat $h^{(i)}=0$. Dit geldt voor alle i, dus k=0. Contradictie.

Een andere belangrijke stelling is nog:

Stelling 14.7. Laat H een Hilbertruimte zijn met unitaire operator U, en laat H primitief zijn t.o.v. U. Laat H_1 en H_2 U-invariante deelruimten zijn, onderling U-isometrisch. Dan is $H_1=H_2$ (hetgeen nog niet wil zeggen dat de isometrie de identiteit is).

Bewijs. Volgens st.13.2 mogen we aannemen dat $H=L_2((0,1],\alpha)$, en dat U de vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$ is. Volgens st.14.1 zijn er meetbare deelverzamelingen E_1 en E_2 zó dat $H_i=L_2(E_i,\alpha)$ $(i=1,2)$. We dienen te bewijzen dat E_1 en E_2 op een nulverzameling na gelijk zijn. Neem het tegendeel aan, bijv. dat $E_3\subset E_1$, E_3 positieve maat en lege doorsnede met E_2. Kies $k\neq 0$, $k\in L_2(E_3)$. Evenals in het bewijs van st.14.6 construeren we een rij P_n's met $P_n(U)k\to 0$, $P_n(U)h\to h$ voor elke $h\in L_2(E_2)$. Laat h_1 het element uit H_2 zijn dat bij de gegeven isometrie met k (die in $L_2(E_1)$ ligt) correspondeert. Dan is $\|P_n(U)h_1\|=\|P_n(U)k\|\to 0$, in strijd met $P_n(U)h\to h$.

Stelling 14.8. Als twee primitieve Hilbertruimten U-isometrisch in elkaar zijn af te beelden, dan zijn die afbeeldingen automatisch "afbeeldingen op".

Bewijs. We kunnen de gegeven ruimten in eenzelfde primitieve inbedden:

$$H_1\to\varphi(H_1)\subset H,\qquad H_2\to\psi(H_2)\subset H.$$

Volgens het gegeven, in combinatie met st.14.7, zijn $\varphi(H_1)$ en $\psi(H_2)$ deelruimten van elkaar, zodat ze samenvallen.

We geven nu enkele voorbeelden van meervoudige spectra.

Voorbeeld 14.1. In $L_2((0,1])$ levert de verschuiving $x\to x+a$ een unitaire operator op (zie voorbeeld 13.3, 3^o). Alle functies

$e^{2\pi nix}$ zijn eigenfuncties (eigenwaarde $e^{2\pi nia}$), en de gehele L_2 wordt door deze eigenfuncties opgespannen. Als a irrationaal is, zijn er aftelbaar vele enkelvoudige eigenwaarden. Als a rationaal is, zijn er slechts eindig vele, elk met oneindige multipliciteit. Als bijv. $a=\frac{1}{2}$, dan is L_2 U-isometrisch met de directe som van aftelbaar veel copieën van een (primitieve) tweedimensionale ruimte, waarin U de verwisseling der eenheidsvectoren bewerkstelligt.

Voorbeeld 14.2. In $L_2(-\infty, \infty)$ levert de verschuiving $x \to x+1$ een unitaire operator op. Deze heeft geen eigenfuncties. We passen nu de zg. Fourier-Plancherel-transformatie toe (en dat is een isometrie):

$$f(x) \to g(x) = \underset{T \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-T}^{T} f(t)e^{-2\pi itx}dt.$$

De transformatie $f \to Uf$ correspondeert nu met $g(x) \to e^{2\pi ix}g(x)$. De Hilbert-ruimte van alle kwadratisch integreerbare g's is nu de directe som $\sum_{-\infty}^{\infty} L_2((n,n+1])$. In elke term van deze som werkt U als vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$, zodat de termen van deze som U-isometrisch zijn. Elke term is primitief, want $f_0 \equiv 1$ kan als voortbrengend element worden genomen. Gaan we terug naar de oorspronkelijke ruimte, dan zien we dat de n-de term bestaat uit alle functies van de vorm $f(x)=\int_n^{n+1} g(t)e^{2\pi itx}dt$.

15. Functies van een unitaire operator; projecties.

We beschouwen weer steeds een Hilbertruimte H met unitaire operator U. En als we het over een $L_2(\alpha)$ hebben, bedoelen we een $L_2((0,1], \alpha)$ met begrensde monotoon niet-dalende α. En in $L_2(\alpha)$ zullen we steeds met U de vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$ bedoelen. Tenslotte zal $e^{2\pi ix}$ af en toe door u worden voorgesteld.

Volgens st.13.4 is H U-isometrisch met een directe som

$$S = L_2(\alpha_1) + L_2(\alpha_2) + \dots ;$$

deze som behoeft niet aftelbaar te zijn. Is $f_1+f_2+\dots$ een element van deze directe som ($f_j \in L_2(\alpha_i)$), en $P(e^{2\pi ix})$ een trigonometrisch polynoom, dan is

$$P(U)(f_1+f_2+\dots) = g_1+g_2+\dots ; \quad g_j(x)=P(e^{2\pi ix})f_j(x).$$

Het ligt nu voor de hand om aan uitbreidingen te denken.

Definitie 15.1. Als $\varphi(u)$ (voor $|u|=1$) begrensd is, en meetbaar t.o.v. elke α_j die in de directe som S voorkomt, dan is de operator $\varphi(U)$ in S gedefinieerd door

$$\varphi(U)(f_1+f_2+\ldots) = g_1+g_2+\ldots \ ; \quad g_j(x) = \varphi(u)f_j(x).$$

Opmerking 15.1. We moeten even aantonen dat inderdaad $g_1+g_2+\ldots \in S$. Als $|\varphi(u)| \leq M$ ($|u| \leq 1$), $f_j \in L(\alpha_j)$, dan is ook $g_j \in L(\alpha_j)$ (st.12.3). En $\|\varphi f_j\| \leq M\|f_j\|$, zodat $\Sigma\|g_j\|^2 \leq M^2 \Sigma \|f_j\|^2 < \infty$.

Opmerking 15.2. We hebben nog niet het recht te zeggen dat $\varphi(U)$ nu ook in H gedefinieerd is. Als ϑ de U-isometrie van H op S voorstelt, dan is het nog niet bewezen dat de in H met de geconstrueerde $\varphi(U)$ corresponderende operator, nl. $\vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta$, onafhankelijk van ϑ is. En bovendien, als ϑ' een U-isometrie is van H op $S'=L_2(\beta_1)+L_2(\beta_2)+\ldots$, is het zelfs nog niet bewezen dat φ ook meetbaar is t.o.v. alle β's. Als echter φ een P is, is het wèl duidelijk dat $\vartheta^{-1}P(U)\vartheta$ onafhankelijk van ϑ is; het is immers eenvoudig de reeds in H gedefinieerde P(U).

We zullen ons bij het bewijs dat $\vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta$ (waarin ϑ een U-isometrische afbeelding op de een of andere S is) onafhankelijk van ϑ en S is, beperken tot het geval dat de som S hoogstens aftelbaar vele termen heeft, dus separabel is. Het algemene geval laat zich tot het separabele geval terugbrengen door de opmerking dat we voor de berekening van $\vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta f$ toch slechts te maken hebben met de (separabele) deelruimte die door de $U^k f$'s wordt opgespannen.

Stelling 15.1. Laat ϑ een U-isometrische afbeelding zijn van $L_2(\beta)$ in $L_2(\alpha)$. Laat $E \subset (0,1]$, en laat E de maat 0 hebben t.o.v. α. Dan heeft E ook de maat 0 t.o.v. β.

Bewijs. Beschouw $f_0(x) \equiv 1$ als element van $L_2(\beta)$, en zij $f_1 = \vartheta f_0 \in L_2(\alpha)$. Zij $J=(a,b] \subset (0,1]$. We zullen bewijzen dat

$$(1) \qquad \int_J d\beta(x) = \int_J |f_1(x)|^2 d\alpha(x).$$

Zij χ de karakteristieke functie van J. Dan is er een rij $\{P_n\}$ zó dat $|P_n(u)| \leq 2$, $P_n(u) \to \chi(x)$ (alle x). Door ϑ wordt de functie $P_n(u)f_0(x)$ uit $L_2(\beta)$ op $P_n(u)f(x)$ uit $L_2(\alpha)$ afgebeeld. Daar ϑ een isometrie is, geldt $\int |P_n(u)|^2 d\beta(x) = \int |P_n(u)f_1(x)|^2 d\alpha(x)$. Door in beide leden de limietovergang te maken, vinden we (1). We passen daarbij de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie toe (zie LE blz.55): De integranden worden gemajoreerd door $|2f_0|^2$ resp. $|2f_1|^2$, en $2f_0 \in L_2(\alpha)$, $2f_1 \in L_2(\beta)$.

Laat nu E de maat nul hebben t.o.v. α. Laat, voor elke n, W_n een vereniging van aftelbaar vele disjuncte half-open intervallen zijn, en laat χ_n de karakteristieke functie van W_n zijn. Volgens (1) is dan $\mu_\beta(W_n) = \int |\chi_n(x) f_1(x)|^2 d\alpha(x)$. Laat nu $W_n \supset E$, $\mu_\alpha(W_n) \to 0$. Dan is $\chi_n(x) \to 0$ (p.p.(α)), dus, weer volgens de stelling van Lebesgue, $\int |\chi_n(x) f(x)|^2 d\alpha(x) \to 0$. Dus $\mu_\beta(W_n) \to 0$, zodat E ook t.o.v. β de maat nul heeft.

Stelling 15.2. Laat ϑ en ϑ' U-isometrische afbeeldingen zijn van H op directe sommen S resp. S'. Laat φ begrensd zijn en meetbaar t.o.v. elke α_j die in S optreedt. Dan is φ eveneens meetbaar t.o.v. elke β_j die in S' optreedt, en $\vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta h = \vartheta'^{-1}\varphi(U)\vartheta' h$ voor alle $h \in H$.

Bewijs. We veronderstellen dat H separabel is. Zonder veel moeite kan men st.15.1 uitbreiden tot het geval dat een $L_2(\gamma)$ wordt ingebed in een directe som van $L_2(\alpha_j)$'s: als E de maat nul heeft t.o.v. alle α_j's, dan heeft E de maat nul t.o.v. γ (vgl. opm. 15.3).

We passen dit toe op een $L_2(\gamma)$ waarin alle $L_2(\alpha_j)$'s kunnen worden ingebed en die zelf in H, dus in de directe som der $L_2(\alpha_j)$ kan worden ingebed (zie st.14.5). Dus als van E de maat t.o.v. γ nul is, dan ook t.o.v. alle α_j's, en omgekeerd. Hieruit kan men afleiden: als E t.o.v. γ meetbaar is, dan ook t.o.v. alle α_j, en omgekeerd. (Dit gaat a.v.: Elke t.o.v. een maat μ meetbare E is te beschouwen als vereniging van twee disjuncte verzamelingen N en W, waarin $\mu(N)=0$, en W de limiet is van een rij $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$, terwijl elke W_k de vereniging is van aftelbaar vele halfopen intervallen (zie LE,st.1.8.1). Elke dusdanige W is meetbaar t.o.v. alle α's en γ. Laat nu E meetbaar zijn t.o.v. alle α_j. Neem nu $E = W^{(1)} \cup N_1$, waarin N_1 de maat 0 heeft t.o.v. α_1. Splits nu N_1 op dezelfde wijze t.o.v. α_2: $N_1 = W^{(2)} \cup N_2$, enz. Nu is E gelijk aan $W^{(1)} \cup W^{(2)} \cup W_3^{(3)} \cup \ldots$ op een verzameling na, die t.o.v. elke α_j de maat 0 heeft, dus ook t.o.v. γ, q.e.d.).

Uit het zoëven gezegde over E blijkt dat elke φ die meetbaar is t.o.v. alle α_j's, ook meetbaar is t.o.v. γ.

Laat nu $\{P_n\}$ een uniform begrensde rij zijn met $P_n(u) - \varphi(u) \to 0$ (p.p.(γ)). Dan is ook $P_n(u) - \varphi(u) \to 0$ (p.p.(α_j)). Beschouw nu een element $h \in H$, en $\vartheta h=(f_1,f_2,\ldots)$. Dan is $P_n(U)\vartheta h=$ $=(P_n f_1,P_n f_2,\ldots) \to (\varphi f_1, \varphi f_2,\ldots)$ (zie opm.15.3 hieronder).

We hebben dus $P_n(U)\vartheta h \to \varphi(U)\vartheta h$, en daar γ t.o.v. de β's dezelfde rol speelt als t.o.v. de α's, is ook $P_n(U)\vartheta' h \to \varphi(U)\vartheta' h$. Daar ϑ en ϑ' isometrisch zijn, is ook

$$\vartheta^{-1}P_n(U)\vartheta h \to \vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta h, \quad \vartheta'^{-1}P_n(U)\vartheta' h \to \vartheta'^{-1}\varphi(U)\vartheta' h.$$

Daar de linkerleden gelijk zijn, stemmen nu ook de rechterleden overeen.

Opmerking 15.3. In het bovenstaande bewijs is twee keer de stelling van Lebesgue (zie LE,blz.55) toegepast in de volgende vorm: Laat $f=(f_1,f_2,\ldots) \in S$, en laat $g_n(x)$ uniform begrensd zijn ($0 < x \leq 1$, $n=1,2,\ldots$). Veronderstel verder dat $g_n(x)$ meetbaar is t.o.v. elke α_j, en dat $g_n(x) \to 0$ (p.p.(α_j)) voor elke j. Dan is $(g_n f_1, g_n f_2,\ldots) \to 0$. Dit volgt uit de stelling van Lebesgue door $L_2(\alpha_j)$ als $L_2((j-1,j], \alpha_j)$ te interpreteren, zodat we op het gehele interval $(0,\infty)$ een maat hebben. Noemen we deze maatruimte X, dan is $L_2(X)$ precies hetzelfde als S. De norm van f in S is nl.

$$\int_0^1 |f_1|^2\, d\alpha_1(x) + \int_1^2 |f_2|^2 d\alpha_2(x) + \ldots,$$

en dit is de $L_2(X)$-norm van de functie die op $(j-1,j]$ met $f_j(x+j-1)$ overeenstemt.

Definitie 15.2. Een begrensde functie $\varphi(u)$ heet (H,U)-meetbaar als φ meetbaar is t.o.v. alle α's uit een directe som S van $L_2(\alpha)$'s die U-isometrisch is met H. En $\varphi(U)$ is in H gedefinieerd als $\vartheta^{-1}\varphi(U)\vartheta$, waarin ϑ een U-isometrische afbeelding van H op S is (en de laatstgenoemde $\varphi(U)$ de volgens def.15.1 aangegeven operator in S is). Blijkens st.15.2 zijn deze definities onafhankelijk van S en ϑ.

Stelling 15.3. De afbeelding $\varphi \to \varphi(U)$ van de begrensde (H,U)-meetbare functies in de verzameling van alle operatoren van H is een ringisomorfie:

Als $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$, dan $\varphi_1(U) + \varphi_2(U) = \varphi_3(U)$,

Als $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_4$, dan $\varphi_1(U)\varphi_2(U) = \varphi_2(U)\varphi_1(U) = \varphi_4(U)$,

Als λ een complexe constante is, en $\lambda\varphi_1 = \varphi_5$, dan $\lambda\varphi_1(U) = \varphi_5(U)$.

Bovendien geldt voor de norm van $\varphi(U)$ (zie def.10.2): $\|\varphi(U)\| \leq \sup|\varphi(u)|$. Als $\varphi_1(u)=\overline{\varphi_2(u)}$ voor alle u, dan is $(\varphi_1(U)f,g)=(f,\varphi_2(U)g)$ voor alle f,g uit H. In het bijzonder geldt: als $\varphi(u)$ reëel is voor alle u, dan is $\varphi(U)$ hermitisch (zie st.10.5). Is $\varphi(u) \geq 0$ voor alle u, dan is $\varphi(U)$ niet-negatief definiet hermitisch (d.w.z. $(\varphi(U)f,f) \geq 0$ voor alle $f \in H$).

Bewijs. Al deze uitspraken zijn direct in te zien door $\vartheta H=S$ te bekijken (zie def.15.2).

Definitie 15.3. Voor $0 \leq \lambda \leq 1$ is e_λ de op $|u|=1$ gedefinieerde functie, gegeven doordat $e_\lambda(e^{2\pi ix})$ de karakteristieke functie is van $(0,\lambda]$. (Met e_0 wordt de nulfunctie bedoeld). E_λ is de operator $e_\lambda(U)$.

Stelling 15.4. E_λ is de projectie op een deelruimte H_λ, en als $0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1$, dan is $0=H_0 \subset H_\lambda \subset H_\mu \subset H_1=H$.

Bewijs. Daar $e_\lambda(1-e_\lambda)=0$, is $E_\lambda(I-E_\lambda)=0$ (I is de eenheidsoperator). Daar E_λ hermitisch is, is $(E_\lambda f,(I-E_\lambda)g)=$ $=(f,E_\lambda(I-E_\lambda)g)=0$ voor alle f en g. Daar $f=E_\lambda f+(I-E_\lambda)f$, blijkt nu dat $E_\lambda f$ de projectie is van f op $E_\lambda H$. En voor $\lambda \leq \mu$ geldt dat $H_\lambda \subset H_\mu$, hetgeen volgt uit het feit dat $E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda,\mu)}$ (dit laatste op grond van het feit dat de overeenkomstige relatie voor de e_λ, e_μ geldt).

De stelling is ook gemakkelijk in te zien door H als directe som van $L_2(\alpha)$'s te representeren. De operator E_λ heeft tot effect dat van alle functies f(x) de waarden voor $x>\lambda$ door 0 worden vervangen.

Opmerking 15.4. Als een $f_0 \in H$ met U een primitieve deelruimte voortbrengt die U-isometrisch is met $L_2(\alpha)$, zó dat f_0 met de constante functie 1 correspondeert, dan is het niet moeilijk te bewijzen dat $L_2(\alpha)=L_2(\beta)$, waarin $\beta(x)=(E_x f,f)$.
Dit legt α vast, afgezien van een additieve constante en afgezien van de irrelevantie van de waarde van $\alpha(x)$ in een sprongpunt (de maat was immers steeds door $\alpha(x+)$ bepaald). Men kan nog opmerken dat $\beta(x)$ in de sprongpunten een redelijke keuze doet: β is overal rechtscontinu.

De (H,U)-meetbaarheid van φ (zie def.15.2) brengt nu mee dat φ meetbaar is t.o.v. de door $(E_x f,f)$ vastgelegde Stieltjes-Lebesgue-maat, voor elke f. Dit is de eis die gewoonlijk in de literatuur gesteld wordt (zie Riesz-Nagy, Ch.IX nr 126).

En $\varphi(U)$ wordt dan gedefinieerd door

$$(\varphi(U)f,g) = \int \varphi(e^{2\pi ix})d(E_x f,g) \;;$$

het is niet moeilijk in te zien dat dit met onze definitie overeenkomt.

16. Operatoren die niet overal gedefinieerd zijn.

H stelt steeds een Hilbertruimte voor.

We zullen lineaire operatoren beschouwen die slechts op een lineaire deelruimte van H gedefinieerd zijn:

Definitie 16.1. Een lineaire operator T is een lineaire afbeelding van een lineaire deelruimte D_T van H in H. D_T wordt het domein van T genoemd.

Opmerking 16.1. Veelal zullen we de eis stellen dat D_T dicht in H ligt. We eisen niet dat D_T gesloten is.

Opmerking 16.2. Het beeld $T(D_T)$ van D_T bij T wordt de "range" van T genoemd. Het is een deelruimte van H. Dit begrip is echter veel minder belangrijk dan het begrip domein.

Definitie 16.2. T_2 heet een voortzetting van T_1 als $D_{T_1} \subset D_{T_2}$ en $T_1 f = T_2 f$ voor alle f uit D_{T_1}. Notatie $T_1 \subset T_2$.

Definitie 16.3. Is T een lineaire operator, dan heet de verzameling van alle paren $[f,Tf]$ $(f \in D_T)$ de grafiek van T. Dit is een lineaire deelruimte van $H \times H$, d.i. het cartesische product van H met zichzelf. De grafiek van T wordt met G_T aangeduid.

Opmerking 16.3. "T_2 is een voortzetting van T_1" kan nu vertaald worden door $G_{T_1} \subset G_{T_2}$.

Opmerking 16.4. Niet elke lineaire deelruimte van $H \times H$ is een grafiek. De eis die aan zo'n deelruimte gesteld moet worden, is dat die geen enkel paar $[0,g]$ met $g \neq 0$ bevat.

Opmerking 16.5. $H \times H$ is weer een Hilbertruimte; we definiëren het inwendig product door

$$([f_1,f_2],[g_1,g_2]) = (f_1,g_1) + (f_2,g_2).$$

Definitie 16.4. T heet gesloten als G_T een gesloten (= volledige; zie st.6.2) deelruimte van $H \times H$ is.

Dit kan ook als volgt worden geformuleerd: Als $f \in H$, $g \in H$, $f_n \in D_T$ $(n=1,2,\dots)$, $f_n \to f$, $Tf_n \to g$, dan is $f \in D_T$ en $Tf=g$.

Stelling 16.1. Als D_T dicht in H ligt, dan is er geen enkele $g \in H$ zo dat $g \neq 0$ en $[g,0]$ loodrecht op G_T staat.

Bewijs. Het zou betekenen dat $(g,f) = (-0,Tf)$ voor alle $f \in D_T$. Dus g zou loodrecht op D_T staan. Daar D_T dicht in H ligt, volgt hieruit $g=0$.

Stelling 16.2. Als D_T dicht in H ligt, is de verzameling van alle $[f,g]$ met de eigenschap dat $[g,-f]$ loodrecht op G_T staat, weer een grafiek (zie opm.16.4).

Definitie 16.5. De operator waarvan de in st.16.2 genoemde ruimte de grafiek is, heet de geadjungeerde van T, en wordt met T^* aangeduid. Dus

$$G_{T^*} = \{ [f,g] \mid [g,-f] \in (H \times H) \ominus G_T \} .$$

Dus D_{T^*} is de verzameling van alle $f \in H$ waarbij een element $T^*f \in H$ kan worden gevonden zó dat $(Th,f)=(h,T^*f)$ voor alle $h \in D_T$. Deze formule spreekt nl. hetzelfde uit als $[T^*f,-f] \perp [h,Th]$.

Merk op dat T^* slechts gedefinieerd is als D_T dicht in H ligt.

Stelling 16.2. Als D_T dicht in H ligt, dan is T^* gesloten.
Bewijs: St. 8.1 en def. 16.4.
Stelling 16.3. Als D_T dicht in H ligt, en T begrensd is, dan is $D_{T^*}=H$, en T^* begrensd. Bovendien is er precies één T_1 met $D_{T_1}=H$, $T \subset T_1$, T_1 begrensd.
Bewijs. We bewijzen eerst het laatste. Dat er hoogstens één dergelijke T_1 is volgt uit het feit dat zo'n T_1 continu is (st.10.1). We gaan nu een T_1 construeren. Dat T begrensd is, betekent dat er een getal M is, zodanig dat $\|Tf\| \leq M \|f\|$ voor alle $f \in D_T$ (zie def.10.2). Voor elke $g \in H$ is er een rij $\{f_n\}$ met $f_n \to g$, $f_n \in D_T$. Nu is (wegens $\|Tf_n-Tf_m\| \leq M \|f_n-f_m\|$) $\{Tf_n\}$ een fundamentaalrij, en de limiet hangt niet van de keuze der f_n's af. Definieer deze limiet als T_1g, enz.

We vormen nu de geadjungeerde T_1^* van T_1. Deze is overal in H gedefinieerd. Want voor elke $h \in H$ is de afbeelding $f \to (T_1f,h)$ een begrensde lineaire functionaal, zodat er een $g \in H$ is met $(T_1f,h)=(f,g)$ $(f \in H)$ (st.9.9). Dus $g=T_1^* h$. Verder is $\|T_1^* h\|^2=(g,g)=(T_1g,h) \leq M \|g\| \|h\|$, dus $\|T_1^*h\| \leq M\|h\|$. Dus T_1^* is begrensd.

Uit $T \subset T_1$ volgt $T_1^* \subset T^*$. Daar reeds T_1^* de gehele H tot domein heeft, is $T_1^* = T^*$. Hiermee is de stelling bewezen. Overigens blijkt uit st.16.5 dat T_1 gesloten is, dus uit st.16.4 dat $T^{**} = T_1$.

Stelling 16.4. Als D_T dicht ligt in H, en T gesloten is, dan is ook D_{T^*} dicht in H, en $T^{**}=T$.

Bewijs: Was D_{T^*} niet dicht in H, dan was er een $h \neq 0$ te vinden met $h \perp D_{T^*}$, dus $[0,h]$ loodrecht op alle $[T^*f,-f]$, dus $[0,h] \perp G_{T^*}$. Daar G_T en G_{T^*} elkaars orthogonale complement zijn (st.8.3), volgt hieruit dat $[0,h] \in G_T$, dus dat $h=T0=0$ zou zijn.

Daar D_{T^*} dus dicht in H ligt, heeft T^* een geadjungeerde. Daar de betrekking tussen T en T^* nu volkomen symmetrisch is, blijkt dat $T^{**}=T$.

Stelling 16.5. Als $D_T=H$, dan is T^* begrensd.

Bewijs. Dit is een uitbreiding van st.10.5. Bij elke $g \in D_{T^*}$ is $f \to (f,T^*g)$ $(f \in H)$ een begrensde lineaire functionaal. Noem die L_g, en beschouw de collectie van alle L_g's met $g \in D_{T^*}$, $\|g\| =1$. Bij vaste f is $L_g(f)$ begrensd, want $|L_g(f)| = |(Tf,g)| \leq \|Tf\|$. Volgens Banach-Steinhaus (st.10.2) is er een C zó dat $\|(f,T^*g)\| \leq C\|f\|$ voor alle betreffende g en voor alle $f \in H$. Door $f=T^*g$ te nemen vinden we dat $\|T^*g\| \leq C$. Hieruit volgt de begrensdheid van T^*.

Stelling 16.6. Gelden twee van de volgende drie eigenschappen, dan geldt ook de derde:
1^o D_T gesloten, 2^o T gesloten, 3^o T begrensd. (D_T behoeft niet dicht in H te liggen).

Bewijs. Is T begrensd en D_T gesloten, dan garanderen $f_n \to f$ $(f_n \in D_T, f \in H)$ en $Tf_n \to g \in H$ dat $f \in D_T$ en $Tf_n \to Tf$ (T is immers continu), zodat $g=Tf$. Dus T is gesloten.

Zij vervolgens T begrensd en gesloten. Neem een convergente rij $f_n \to f$ $(f_n \in D_T, f \in H)$. Dan is $\{f_n\}$ een fundamentaalrij. Daar T begrensd is, is nu ook $\{Tf_n\}$ een fundamentaalrij. Daar zowel $\{f_n\}$ als $\{Tf_n\}$ convergeren, en T gesloten is, blijkt dat $f \in D_T$. Dus D_T is gesloten.

Zij tenslotte T gesloten en D_T gesloten. We breiden eerst T uit tot T_1, waarin $T_1=TP$; P stelt de projectie-operator voor die H orthogonaal op D_T projecteert. T_1 is dus in de gehele H gedefinieerd. De grafiek van T_1 is de directe som van G_T en de ruimte

$[H \ominus D_T, 0]$; en is dus weer gesloten (vgl. st.8.1). Dus T_1 is gesloten, en kennelijk is $T \subset T_1$. Het is dus voldoende te bewijzen dat T_1 begrensd is. M.a.w. kunnen we ons beperken tot het bijzondere geval "$D_T=H$, T gesloten, dan T begrensd".

Zij dus $D_T=H$, T gesloten. T^* is begrensd (st.16.5) en gesloten (st.16.2), dus D_{T^*} gesloten (volgens het tweede gedeelte van dit bewijs), en dicht in H (st.16.4), dus $D_{T^*}=H$. Volgens st.16.5 is nu T^{**} begrensd. Maar volgens st.16.4 is $T=T^{**}$, dus T is begrensd, q.e.d.

Voorbeeld 16.1. We geven een voorbeeld van een onbegrensde gesloten operator T, waarvan het domein dicht in H ligt(doch, in overeenstemming met st.16.6, niet de gehele H opvult).

Zij H de numerieke Hilbertruimte der rijen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ met $\Sigma\, |\alpha_k|^2 < \infty$, en D_T de deelverzameling bepaald door de conditie $\Sigma\, |\, k\alpha_k|^2 < \infty$. T is op D_T gedefinieerd door

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, \ldots).$$

D_T ligt dicht in H, want elke $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$ ligt in D_T. We zullen nu T^* bepalen. D.w.z. we vragen ons af voor welke β 's en γ's geldt dat

$$((\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots), (\beta_1, \beta_2, \ldots)) = ((\alpha_1, \alpha_2, \ldots), (\gamma_1, \gamma_2, \ldots))$$

geldt voor alle toelaatbare α's. Dus $\alpha_1\, \bar\beta_1 + 2\alpha_2\, \bar\beta_2 + \ldots = \alpha_1\bar\gamma_1 + \alpha_2\bar\gamma_2 + \ldots$ We lezen direct af (door slechts één $\alpha \neq 0$ te nemen) dat $k\beta_k = \gamma_k$. Dus $\Sigma |k\beta_k|^2 < \infty$, $\gamma_k = k\beta_k$. Dit is ook voldoende. We zien nu dat $T^*=T$. T^* is gesloten (st.16.2), dus T is gesloten. Bovendien is T zelfgeadjungeerd (def.16.6) en onbegrensd.

Definitie 16.6. Zij D_T dicht in H, dan heet T hermitisch als $T \subset T^*$. T heet zelfgeadjungeerd (of hypermaximaal) als $T=T^*$.

Opmerking 16.6. In gewone woorden wil $T \subset T^*$ zeggen: voor alle f,g uit D_T is $(Tf,g)=(f,Tg)$. En $T=T^*$ zegt dat bovendien geldt: $g \in H$, $h \in H$, en als $(Tf,g)=(f,h)$ geldt voor alle $f \in D_T$, dan is $g \in D_T$ en $h=Tg$.

Stelling 16.7. Zij T hermitisch. Dan bestaat T^{**}, en die is hermitisch en gesloten.

Bewijs. Daar $T \subset T^*$, is ook $D_T \subset D_{T^*}$, dus D_{T^*} dicht in H. Derhalve heeft T^* weer een geadjungeerde.

Uit $T\subset T^*$ volgt $T^{**}\subset T^*$ (hoe groter de operator, hoe kleiner de geadjungeerde). En T^* is gesloten (st.16.2), dus $D_{T^{**}}$ ligt dicht in H, en $T^{***}=T^*$ (st.16.4). Dus $T^{**}\subset T^*=T^{***}$, zodat T^{**} hermitisch is. Dat T^{**} gesloten is volgt weer uit st.16.2.

Stelling 16.8. Een zelfgeadjungeerde operator T is maximaal hermitisch (heeft geen echte hermitische voortzetting).

Bewijs. Zij $T\subset T_1$, T_1 hermitisch, dus $T\subset T_1\subset T_1^*$. Uit $T\subset T_1$ volgt $T_1^*\subset T^*$. Daar $T=T^*$ is, blijkt dat $T=T_1$.

Voorbeeld 16.2. Zij $H=L_2\,[0,1]$. D_{T_1} is de verzameling van alle continu differentieerbare functies f op $0\leq x\leq 1$; D_{T_2} bestaat uit dezelfde functies, met echter de beperking dat $f(0)=f(1)$. We beschouwen steeds de differentiatie-operator $T_1f=T_2f=if'$.

Zijn f en g continu differentieerbaar, dan is

$$(if',g)=\int_0^1 if'\bar{g}\,dx = i[f(x)\bar{g}(x)]_0^1-\int_0^1 if\,\bar{g}'dx =$$

$$= i[f(x)\bar{g}(x)]_0^1+(f,ig').$$

We lezen hieruit af dat T_2 hermitisch is, doch T_1 niet. We zullen T_2^* bepalen. Daartoe bepalen we alle paren $g,h\in L_2$ met de eigenschap dat $(T_2f,g)=(f,h)$ voor alle $f\in D_{T_2}$. Als dit voor alle $f\in D_{T_2}$ geldt, dan geldt het i.h.b. voor alle f waarvan slechts eindig vele Fouriercoefficienten $\alpha_k=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi kix}dx$ van nul verschillen, want alle trigonometrische polynomen zijn continu differentieerbaar. Zijn de Fouriercoefficienten van g en h resp. β_k en γ_k, dan vinden we de eis

$$\sum_{-\infty}^{\infty}-2\pi k\,\alpha_k\bar{\beta}_k=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k\,\bar{\gamma}_k$$

voor alle α's van het genoemde type. Aan de β's en γ's is de eis gesteld dat $\Sigma|\beta_k|^2<\infty$, $\Sigma|\gamma_k|^2<\infty$. Hieruit volgt dat $\gamma_k=-2\pi k\beta_k$, $\Sigma\,|k\beta_k|^2<\infty$. Het domein van T_2^* bestaat dus uit alle g waarvan de Fouriercoefficienten voldoen aan $\Sigma\,|k\beta_k|^2<\infty$, en het beeld $T_2^*\,g$ van zo'n g is de Fourierreeks met coëfficiënten $\gamma_k=-2\pi k\beta_k$. T_2^* is een voortzetting van T_2, want als f continu differentieerbaar is met $f(0)=f(1)$, dan is $\Sigma|k\alpha_k|^2<\infty$, hetgeen blijkt door de ongelijkheid van Bessel op f' toe te passen. En T_2^* is zelfgeadjungeerd, hetgeen uit voorbeeld 16.1 blijkt.

Opmerking 16.7. De specialisatie van hermitische operatoren tot zelfgeadjungeerde is enigszins analoog aan die van isometrische tot unitaire. De operator U is nl. isometrisch als U in de gehele H gedefinieerd is, en als elke $[g,-Ug]$ in $H \times H$ loodrecht staat op G_U (d.i. op alle $[f,Uf]$). En een isometrische operator U is dan en slechts dan unitair als er geen andere paren $[g,h]$ zijn die loodrecht op G_U staan. (Bewijs: Is U unitair, dan is $U(H)=H$, dus dan is er geen $[0,h]$ (met $h \neq 0$) loodrecht op alle $[f,Uf]$. Aangezien $[g,h] \perp G_U$ impliceert dat $[0,h+Ug] \perp G_U$, volgt eruit dat $h=-Ug$. Is omgekeerd $U(H) \neq H$, dan is $U(H)$ een echte gesloten deelruimte van H (daar U begrensd is), dus er is een $h \neq 0$ met $h \perp U(H)$, dus $[0,h] \perp G_U$, terwijl $h \neq -U0$ is.)

Stelling 16.9. (aanv. v. st. 16.7). Is T hermitisch, dan is $T \subset T^{**}$.

17. De met een hermitische operator verbonden isometrie.

In deze paragraaf is T een gesloten hermitische operator, met domein D_T dicht in H.

Opmerking 17.1. De eis dat T gesloten is, vormt geen ingrijpende beperking, want volgens st.16.7 en st.16.9 is elke hermitische operator (met domein dicht in H) tot een gesloten hermitische operator (nl. T^{**}) voort te zetten.

Verder merken we op dat elke zelfgeadjungeerde operator automatisch gesloten en hermitisch is (st.16, 2^e^ stelling 2). Het omgekeerde blijkt echter onjuist te zijn (zie voorbeeld 17.1 en st. 17.6).

Het is niet moeilijk in te zien dat een gesloten hermitische T dan en slechts dan zelfgeadjungeerd is als T^* hermitisch is.

Definitie 17.1. K_1 en K_2 zijn de deelruimten van H, gedefinieerd door

$$K_1 = \{(T+iI)f \mid f \in D_T\}$$

$$K_2 = \{(T-iI)f \mid f \in D_T\}$$

(I is de eenheidsoperator: $If=f$).

Stelling 17.1. Voor alle $f \in D_T$, $g \in D_T$ is

$$([f,Tf], [g,Tg]) = (f,g) + (Tf,Tg) =$$
$$= ((T+iI)f, (T+iI)g) = ((T-iI)f, (T-iI)g).$$

Opmerking 17.2. Volgens st.17.1 is de afbeelding van G_T in H, gegeven door $[f,Tf] \to (T+iI)f$ isometrisch.

Stelling 17.2. De afbeelding $f \to (T+iI)f$ van D_T op K_1 is eeneenduidig, evenals de afbeelding $f \to (T-iI)f$ van D_T op K_2.

Bewijs. De afbeelding $f \to [f,Tf]$ van D_T op G_T is eeneenduidig. En de afbeelding $[f,Tf] \to (T+iI)f$ van G_T op K_1 is isometrisch, dus eveneens eeneenduidig.

Stelling 17.3. De afbeelding $k \to Vk = (T-iI)(T+iI)^{-1}k$ is een eeneenduidige isometrische afbeelding van K_1 op K_2.

Bewijs. Men kan V beschouwen als QP^{-1}, waarin P en Q de afbeeldingen $[f,Tf] \to (T+iI)f$ resp. $\to (T-iI)f$ zijn. Daar P en Q isometrisch zijn, is V isometrisch (dus eeneenduidig).

Opmerking 17.3. Het verband tussen T en V wordt door de volgende formules weergegeven:

$$f \in D_T, \text{ dan } V(Tf+if) = Tf-if$$

$$k \in K_1, \text{ dan } T(k-Vk) = i(k+Vk).$$

Parametervoorstellingen voor G_V en G_T zijn respectievelijk

$$G_V : [Tf+if,\ Tf-if] \quad (f \in D_T)$$

$$G_T : [k-Vk,\ i(k+Vk)] \quad (k \in K_1)$$

Stelling 17.4. K_1 en K_2 zijn gesloten deelruimten van H.

Bewijs. Volgens opm. 17.2 zijn ze isometrisch met G_T. Daar T gesloten is, is G_T gesloten, dus volledig. Dus K_1 en K_2 zijn volledig, dus gesloten.

Stelling 17.5. Nodig en voldoende opdat de isometrische afbeelding V van K_1 op K_2 tot een unitaire operator kan worden voortgezet, is dat $H \ominus K_1$ en $H \ominus K_2$ dezelfde dimensie hebben. (Hoewel we ook operatoren beschouwen die niet in de gehele H gedefinieerd zijn, blijft "unitaire operator" een isometrische afbeelding van H op zichzelf aanduiden.)

Bewijs. 1°. Nodig. Zij $V \subset U$, U unitair. Als $f \in H \ominus K_1$, dan is $(f,k)=0$ voor alle $k \in K_1$, dus $(Uf,Uk)=0$ voor alle $k \in K_1$, dus $Uf \perp U(K_1)=V(K_1)=K_2$, dus $Uf \in H \ominus K_2$. Is omgekeerd $f \in H$, $Uf \in H \ominus K_2$, dan staat Uf loodrecht op $V(K_1)$, dus op $U(K_1)$, zodat $(Uf,Uk)=0$ voor alle $k \in K_1$, dus $(f,k)=0$ voor alle $k \in K_1$, dus $f \in H \ominus K_1$. Door U wordt $H \ominus K_1$ dus op $H \ominus K_2$ afgebeeld. Daar deze afbeelding isometrisch is, is zij eeneenduidig. Hieruit volgt dat de genoemde ruimten dezelfde dimensie hebben, d.w.z. dat ze volledige orthonormaalsystemen bezitten die onderling gelijkmachtig zijn.

2^o. Voldoende. Laat $H \ominus K_1$ en $H \ominus K_2$ dezelfde dimensie hebben. Dan is er een isometrische afbeelding W van $H \ominus K_1$ op $H \ominus K_2$. H is de directe som van K_1 en $H \ominus K_1$ (st.17.4 en st.8.3). Definieer nu U in H door

$$U(k+h) = Vk + Wh \qquad (k \in K_1,\ h \perp K_1).$$

Deze U is eeneenduidig en isometrisch, dus unitair.

Voorbeeld 17.1. We willen een voorbeeld construeren van een gesloten hermitische operator T waarbij $H \ominus K_1$ en $H \ominus K_2$ verschillend zijn. We nemen H separabel, met volledig orthonormaalsysteem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. We willen bereiken dat $K_1 = H$ en $K_2 = H \ominus \varphi_1$ wordt, en dat V de isometrie wordt, beschreven door $V\varphi_k = \varphi_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$. Als dit zo is, zal er bij elk natuurlijk getal k een $f \in H$ zijn met $Tf+if=2\varphi_k$, $Tf-if=2\varphi_{k+1}$, dus $f=i\varphi_{k+1}-i\varphi_k$, $Tf=\varphi_k+\varphi_{k+1}$. We zullen een gesloten hermitische T definiëren die hieraan voldoet.
Beschouw nu in $H \times H$ de deelruimte R die bestaat uit de eindige lineaire combinaties van de vectoren

$$[i\varphi_{k+1} - i\varphi_k,\ \varphi_k + \varphi_{k+1}] \qquad (k=1,2,\ldots),$$

en zij $\overline{R}$ de afsluiting van R in $H \times H$. We zullen bewijzen dat $\overline{R}$ een grafiek is. Neem aan $[0,h] \in \overline{R}$, $h=\gamma_1\varphi_1+\gamma_2\varphi_2+\ldots$. Bij elke $\varepsilon > 0$ is er nu een stel getallen $c_1, c_2, \ldots$ (vanaf zekere index allemaal nul) te vinden met

$$\left\| \sum_1^n c_k\,(i\varphi_{k+1}-i\varphi_k) \right\| < \varepsilon \ , \quad \left\| \sum_1^n c_k(\varphi_k+\varphi_{k+1}) - h \right\| < \varepsilon \ .$$

Dit impliceert $|c_1| < \varepsilon$, $|c_1-c_2| < \varepsilon$, $|c_2-c_3| < \varepsilon, \ldots$ en $|c_1-\gamma_1| < \varepsilon$, $|c_2+c_1-\gamma_2| < \varepsilon$, $|c_3+c_2-\gamma_3| < \varepsilon, \ldots$. Hieruit leidt men gemakkelijk af dat $|c_k| < k\varepsilon$, $|\gamma_k| < 2k\varepsilon$. Daar ε onafhankelijk van de γ's gekozen kan worden, zien we dat alle γ's nul zijn, dus h=0. Dus $\overline{R}$ is een grafiek. Definieer T door $\overline{R}=G_T$.

T is gesloten, daar $\overline{R}$ gesloten is. Om te laten zien dat D_T dicht in H ligt, is het voldoende aan te tonen dat $\varphi_1 \in \overline{D}_T$ is (want $\varphi_1-\varphi_2, \varphi_2-\varphi_3, \ldots$ liggen er ook in):

$$\left\| \varphi_1 - \sum_1^n \frac{n+1-k}{n}(\varphi_k-\varphi_{k+1}) \right\| = \frac{1}{n}\left\| \sum_2^{n+1} \varphi_k \right\| = n^{-\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Tenslotte tonen we aan dat T hermitisch is. We moeten daartoe bewijzen dat elke $[f,g]$ uit $G_T=\overline{R}$ voldoet aan $[g,-f] \in (H\times H)\ominus\overline{R}$, dus aan $[g,-f]\perp R$. Het is voldoende om dit voor de $[f,g]$ uit R te bewijzen. Daarvoor volgt het uit het feit dat

$$[\varphi_m+\varphi_{m+1},-i\varphi_{m+1}+i\varphi_m]\perp[i\varphi_{k+1}-i\varphi_k,\ \varphi_k+\varphi_{k+1}]$$

voor alle k, m=1,2,..., hetgeen men gemakkelijk narekent.

Dus T is gesloten hermitisch, met domein dicht in H. We bepalen K_1 en K_2. K_1 bevat de vectoren $\varphi_k+\varphi_{k+1}+i\,(i\varphi_{k+1}-i\varphi_k)=2\varphi_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Daar K_1 gesloten is (st.17.4), blijkt dat $K_1=H$. Voor de isometrie V (uit st.17.3) geldt $2V\varphi_k=V(T+iI)(i\varphi_{k+1}-i\varphi_k)=(T-iI)(i\varphi_{k+1}-i\varphi_k)=$ $=\varphi_k+\varphi_{k+1}-i(i\varphi_{k+1}-i\varphi_k)=2\varphi_{k+1}$. Dus K_2 wordt opgespannen door $\varphi_2,\varphi_3,\ldots$, zodat $H\ominus K_2$ de dimensie 1 heeft.

Stelling 17.6. Nodig en voldoende opdat T zelfgeadjungeerd is, is dat $K_1=K_2=H$.

Bewijs. Daar T gesloten en hermitisch is, zijn G_T en G_{T^*} gesloten, en $G_T\subset G_{T^*}$. De stelling volgt nu uit de algemenere uitspraak:

$G_{T^*}\ominus G_T$ is isometrisch met de directe som van $H\ominus K_1$ en $H\ominus K_2$.

Zij $[f,g]\in G_{T^*}\ominus G_T$. Dan is $[f,g]\perp G_T$ en $[g,-f]\perp G_T$. Dus $[f+ig,-i(f+ig)]\perp G_T$, $[f-ig,\ i(f-ig)]\perp G_T$. Bovendien is $[f,g]$ gelijk aan de halve som van deze vectoren. We brengen in $G_{T^*}\ominus G_T$ twee deelruimten aan: M_1, die bestaat uit alle $[h,ih]$ die $\perp G_T$ staan, en M_2 die bestaat uit alle $[h,-ih]$ die $\perp G_T$ staan. $M_1\perp M_2$, want $[h,ih]\perp[h',-ih']$ voor alle h,h'. En elke $[f,g]$ is de som van een vector uit M_1 en een vector uit M_2, zodat $G_{T^*}\ominus G_T$ de directe som M_1+M_2 is.

M_1 bestaat uit alle $[h,ih]$ met $[h,ih]\perp G_T$. De laatste voorwaarde wil zeggen dat $(h,f)+(ih,Tf)=0$ voor alle $f\in D_T$, dus dat $(ih,Tf+if)=0$ voor alle $f\in D_T$, dus dat $h\perp K_1$. Derhalve is

$$M_1=\{\ [h,ih]\ |\ h\in H\ominus K_1\ \},$$
$$M_2=\{\ [h,-ih]\ |\ h\in H\ominus K_2\ \},$$

en de afbeelding $h\to[2^{-\frac{1}{2}}h,\ 2^{-\frac{1}{2}}ih]$ is een isometrie, evenals de overeenkomstige met $-i$ i.p.v. i.

Stelling 17.7. Als U unitair is, en het getal 1 niet tot eigenwaarde heeft, dan is er een zelfgeadjungeerde operator T waarbij de V uit st.17.3 precies U is (dus $K_1=K_2=H$), met $D_T=(I-U)H$, gedefinieerd door $T(I-U)h=i(I+U)h$ $(h \in H)$. Er is voldaan aan $UD_T=D_T$, $TUf=UTf$ voor alle $f \in D_T$, $(T-iI)f=U(T+iI)f$ voor alle $f \in D_T$. Deze zelfgeadjungeerde operator zullen we de bij U behorende zelfgeadjungeerde operator noemen, en met $i(I+U)/(I-U)$ aanduiden.

Bewijs. De verzameling van alle $(I-U)h$ $(h \in H)$ ligt dicht in H. Want een $f \in H$ die loodrecht op alle $(I-U)h$ staat, voldoet aan $0=((I-U)h,f)=(Uh,Uf)-(Uh,f)$, zodat $Uf-f$ loodrecht op alle h staat. Daaruit volgt $Uf-f=0$, dus $f=0$ (daar 1 geen eigenwaarde is).

Uit $(I-U)h_1=(I-U)h_2$ volgt dat $h_1=h_2$ (want 1 is geen eigenwaarde). Derhalve is door de formule $T(I-U)h=i(U+I)h$ op $D_T=(I-U)H$ een lineaire operator gedefinieerd. Deze is zelfgeadjungeerd. Voldoen nl. v en w uit H aan

$$(i(U+I)h,v) =((I-U)h,w) \qquad (\text{alle } h \in H)$$

dan is $(Uh,-iv-iUv)=(Uh,Uw-w)$ (alle $h \in H$), dus $i(I+U)v=(I-U)w$. Dus $v=\frac{1}{2}(I+U)v+\frac{1}{2}(I-U)v=\frac{1}{2}(I-U)(-iw+v)$, zodat $v \in D_T$, en $Tv=\frac{1}{2}i(I+U)(-iw+v)=\frac{1}{2}(I+U)w+\frac{1}{2}(I-U)w=w$. Omgekeerd is gemakkelijk in te zien dat met elke $v \in D_T$, $w=Tv$ aan de gestelde eis is voldaan. Dus T is zelfgeadjungeerd. (Men kan dit ook bewijzen door aan te tonen dat T gesloten en hermitisch is, en dat $K_1=K_2=H$, zodat st.17.6 kan worden toegepast).

De verdere beweringen zijn nagenoeg triviaal. Wegens $U(U-I)h=(U-I)Uh$, $U^{-1}(U-I)h=(U-I)U^{-1}h$, is $UD_T=D_T$. Verder is $K_1=(T+iI)D_T=(i(I+U)+i(I-U))H=H$, $K_2=(T-iI)D_T=(i(I+U)-i(I-U))H=$ $=2iUH=H$, enz.

Stelling 17.8. Laat T gesloten en hermitisch zijn, met domein dicht in H, en $V=(T-iI)(T+iI)^{-1}$ (zie st.17.2). Laat U unitair zijn, en $V \subset U$ (volgens st.17.5 impliceert dit dat $H \ominus K_1$ en $H \ominus K_2$ dezelfde dimensie hebben). Dan is 1 geen eigenwaarde van U, en $i(I+U)/(I-U)$ (zie st.17.7) is een zelfgeadjungeerde voortzetting van T. Als $V=U$, dan is $T=i(I+U)/I-U)$.

Bewijs. Neem even aan dat er een $g \in H$ is met $Ug=g$. Voor elke $f \in D_T$ geldt $Tf-if=V(Tf+if)$, dus $Tf-if=U(Tf+if)$. Vormen we links en rechts het inwendige product met g, dan komt er $(Tf,g)-(if,g)=$ $=(Tf,g) + (if,g)$ (merk op dat $(Uh,g)=(Uh,Ug)=(h,g)$ voor alle h), zodat $(f,g)=0$. Dus g staat loodrecht op D_T, dus $g=0$. Dus 1 is geen eigenwaarde van U.

Als $f \in D_T$, dan is $Tf-if=U(Tf+if)$, dus met $h=Tf+if$ is

$(I-U)h=Tf+if-(Tf-if)=2if$, $i(I+U)h=i(Tf+if)+i(Tf-if)=T(2if)$. Hier staat te lezen dat $i(I+U)/(I-U)$ een voortzetting van T is.

Neem nu aan dat $V=U$. Dan is $D_V=D_U=H$, dus $(T+iI)D_T=H$. We hebben $(I-U)(T+iI)f=(T+iI)f-(T-iI)f=2if$ voor alle $f\in D_T$. Dus $(I-U)(T+iI)D_T=D_T$, dus $(I-U)H=D_T$. En voor elke $h\in H$ is er een $f\in D_T$ met $h=(T+iI)f$, dus $T(I-U)h=T(I-U)(T+iI)f=2iTf=i((T+iI)f+$ $+(T-iI)f)=i(I+U)h$. Inderdaad is dus $T=i(I+U)/(I-U)$.

De berekeningen lijken enigszins gekunsteld. Dat komt doordat we niet onbezorgd met gebroken rationale functies van operatoren durven te rekenen.

<u>Voorbeeld 17.2.</u> Als T gesloten hermitisch is met domein dicht in H, en als $H\ominus K_1$ en $H\ominus K_2$ dezelfde positieve dimensie hebben, dan heeft (zie het bewijs van st.17.5) V verschillende unitaire voortzettingen, dus (st.17.8) dan heeft T verschillende zelfgeadjungeerde voortzettingen. We geven hiervan een voorbeeld.

Zij $H=L_2((0,1])$ (met gewone Lebesgue-maat), $f_0\in H$ het element met $f_0(x)\equiv 1$, en beschouw de unitaire operator U met $(Uf)(x)=e^{2\pi ix}f(x)$. Zij $H_1=H\ominus f_0$. We laten zien dat $(I-U)H_1$ dicht in H ligt. Voldoende is daartoe om te laten zien dat elke $\chi_{a,b}$(= de karakteristieke functie van $(a,b]$) met $0<a<b<1$ door elementen van $(I-U)H_1$ kan worden benaderd. Kies $\varepsilon\,(0<\varepsilon<a)$. Definieer $h(x)=(1-e^{2\pi ix})^{-1}$ op $(a,b]$; $h(x)=0$ op $(\varepsilon,a]$ en op $(b,1]$; $h(x)=$ $=-\varepsilon^{-1}A$ op $(0,\varepsilon]$ (met $A=\int_a^b h(x)dx$). Dan is $(h,f_0)=0$, dus $h\in H_1$. Verder is $(I-U)h-\chi_{a,b}$ een functie, die voor $\varepsilon<x\leq 1$ nul is, en voor $0<x\leq\varepsilon$ gelijk is aan $-\varepsilon^{-1}A(1-e^{2\pi ix})$. Dus

$$\|(I-U)h-\chi_{a,b}\|^2=\varepsilon^{-2}A^2\int_0^\varepsilon|1-e^{2\pi ix}|^2\,dx<C\varepsilon\,,$$

waarin C slechts van a en b afhangt.

We definiëren nu T door $D_T=(I-U)H_1$, $T(I-U)h=i(I+U)h$ $(h\in H_1)$ (merk op dat 1 geen eigenwaarde van U is). Dan is T hermitisch, want het is een restrictie van de zelfgeadjungeerde operator $i(I+U)/(I-U)$. En T is gesloten. Als nl. de rijen $\{(I-U)h_n\}$ en $\{i(I+U)h_n\}$ $(h_n\in H_1)$ beide convergeren, dan convergeren ook de rijen $\{h_n\}$ en $\{Uh_n\}$, naar limieten h resp. k. Daar U begrensd is, is $k=Uh$. Daar H_1 gesloten is, geldt $h\in H_1$. Dus het limietpunt $[(I-U)h,\ i(I+U)h]$ behoort inderdaad tot G_T. Dus T is gesloten. Tenslotte merken we op dat $K_1=(T+iI)D_T$ bestaat uit alle $i(I+U)h+i(I-U)h$ met $h\in H_1$, zodat $K_1=H_1$. En de volgens st.17.3 bij

T behorende operator V is de restrictie van U tot H_1, want voor $h \in H_1$ is $(T-iI)(I-U)h=i(I+U)h-i(I-U)h=2iUh$,
$(T+iI)(I-U)h=i(I+U)h+i(I-U)h=2ih$.

Beschouw het volledige orthonormaalsysteem $\{\varphi_n\}$, met $\varphi_n(x)=e^{2\pi nix}$. Dan is $U\varphi_n=\varphi_{n+1}$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$. H_1 wordt opgespannen door de φ_n met $n=\pm 1,\pm 2,\ldots$, en $D_T=(I-U)H_1$ door $\varphi_1-\varphi_2$, $\varphi_2-\varphi_3,\ldots$ en $\varphi_{-1}-\varphi_0$, $\varphi_{-2}-\varphi_{-1},\ldots$ (dus $\varphi_0-\varphi_1$ ontbreekt hierbij). T is vastgelegd door $T(\varphi_n-\varphi_{n+1})=i(\varphi_n+\varphi_{n+1})$ $(n\neq 0)$, en V is vastgelegd door $V\varphi_n=\varphi_{n+1}$ $(n\neq 0)$. We kiezen nu een getal η $(|\eta|=1)$, en zetten V voort tot U', door de afspraak $U'\varphi_0=\eta\varphi_1$. Nu wordt T voortgezet tot T' door de afspraak $T'(\varphi_0-\eta\varphi_1)=i(\varphi_0+\eta\varphi_1)$.

Definitie 17.2. Laat $Q=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$ een volledig orthonormaalsysteem in H zijn. We definiëren de afbeelding $\Theta=\Theta_Q$ door

$$\Theta\sum\alpha_i\varphi_i=\sum\overline{\alpha}_i\varphi_i .$$

Deze voldoet aan $(\Theta f,\Theta g)=(g,f)$, $\Theta(\alpha f)=\overline{\alpha}\Theta f$.

$f\in H$ heet reëel (t.o.v. Q) als $f=\Theta f$. Een operator T heet reëel (t.o.v. Q) als $\Theta D_T=D_T$, en $\Theta Tf=T\Theta f$ $(f\in D_T)$.

Merk op dat Θ geen lineaire operator is $(\Theta if=-i\Theta f)$.

Stelling 17.9. Als T hermitisch, gesloten en reëel is, dan bestaat er een reële zelfgeadjungeerde voortzetting van T.

Bewijs. $K_1=(T+iI)D_T$, $K_2=(T-iI)D_T$. Daaruit volgt dat $\Theta K_1=(T-iI)\Theta D_T=$ $=(T-iI)D_T=K_2$. Hieruit volgt gemakkelijk dat $\Theta(H\ominus K_1)=H\ominus K_2$, zodat deze ruimten dezelfde dimensie hebben. Volgens st.17.5 heeft nu V een unitaire voortzetting, dus T heeft een zelfgeadjungeerde voortzetting.

We tonen vervolgens aan dat T een reële zelfgeadjungeerde voortzetting heeft. Dat T reëel is betekent dat $\Theta V\Theta V=I$, (want wegens $T-iI=V(T+iI)$ is $(\Theta V)(T+iI)=\Theta(T-iI)=(T+iI)\Theta$) en omgekeerd. We willen dus V zó voortzetten tot een unitaire U, dat $\Theta U\Theta U=I$, (en daarna kan st.17.8 worden toegepast).

We sluiten nu aan bij het bewijs van st.17.5. De ruimten $M_1=H\ominus K_1$ en $M_2=H\ominus K_2$ voldoen aan $\Theta M_1=M_2$. We zoeken een isometrische afbeelding W van M_1 op M_2 met $\Theta W\Theta W=I$. Zij $\psi_1,\psi_2,\ldots$ een volledig orthonormaalsysteem in M_1, dan is $\Theta\psi_1,\Theta\psi_2,\ldots$ er een in M_2. Definieer W door $W(\Sigma\alpha_k\psi_k)=\Sigma\alpha_k\Theta\psi_k$, dan is $(\Theta W)(\Sigma\alpha_k\psi_k)=\Sigma\overline{\alpha}_k\psi_k$, dus $(\Theta W)^2=I$.

Opmerking 17.4. In het geval van st. 17.9 bestaan er (tenzij T reeds zelfgeadjungeerd is) verschillende reële zelfgeadjungeerde voortzettingen. Men kan i.p.v. W nl. even goed nemen $W_1 = \eta W$, met een complex getal η met modulus 1. Als de dimensie van M_1 groter dan 1 is, zijn er nog meer mogelijkheden.

Opmerking 17.5. St. 17.9 kan als volgt worden omgekeerd: bij elke zelfgeadjungeerde T is een volledig orthonormaalsysteem Q te vinden zo dat T reëel is t.o.v. Q. Dit is in te zien door eerst te bewijzen dat er bij elke unitaire operator U een Q te vinden is zodanig dat $\vartheta U \vartheta U = I$. Daartoe representeren we H als directe som van L_2's waarin U de vermenigvuldiging met $e^{2\pi ix}$ voorstelt. Kies nu in elke L_2 een volledig orthonormaalsysteem dat geheel uit reële functies bestaat. Dit legt ϑ vast. Als $g=(\vartheta U)f$, $h=(\vartheta U)g$, dan is $g(x)=\overline{e^{2\pi ix}f(x)}$, en $h(x)=\overline{e^{2\pi ix}g(x)}=e^{-2\pi ix}e^{2\pi ix}f(x)$, dus $\vartheta U \vartheta U = I$.

Bij een gesloten hermitische, doch niet zelfgeadjungeerde, operator T kan niet altijd een Q gevonden worden zodat T reëel is t.o.v. Q. Want zo'n T heeft niet altijd een zelfgeadjungeerde voortzetting; daartoe is de voorwaarde van st.17.5 noodzakelijk.

We komen nu tot de hoofdstelling, die de zelfgeadjungeerde operatoren karakteriseert. Er zijn verschillende formuleringen mogelijk: 1°.aansluitende aan st.13.2 en st.13.4; 2°. aansluitende aan st.14.4; 3°. aansluitende aan de formule bovenaan blz.57. We kiezen de eerstgenoemde weg.

Stelling 17.10. Zij T een zelfgeadjungeerde operator in de Hilbertruimte H. Dan is H isometrisch met een (al dan niet aftelbare) directe som

$$H' = L_2((-\infty, \infty), \beta_1) + L_2((-\infty, \infty), \beta_2) + \dots$$

(waarin de β_j's monotoon niet-dalende begrensde reële functies zijn), zo dat de met T in H' corresponderende operator, die we gemakshalve weer T noemen, voldoet aan:

1°. Zij $h \in H'$, en $h=h_1+h_2+\dots$ de directe splitsing van h. Dan en slechts dan geldt $h \in D_T$ als

$$\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} |x h_j(x)|^2 \, d\beta_j(x) < \infty .$$

2°. Als $h \in D_T$, $Th=g$, $g=g_1+g_2+\dots$, dan is voor elke j

$$g_j(x) = x\, h_j(x) \qquad (\text{p.p.}(\beta_j)).$$

Omgekeerd geldt dat elke operator T met de eigenschappen 1° en 2° zelfgeadjungeerd is.

Bewijs. Zij T zelfgeadjungeerd. De isometrische operator V, die K_1 op K_2 afbeeldt (st.17.3), is unitair (st.17.6). Noem deze V verder U. U heeft 1 niet tot eigenwaarde (st.17.8). Verder is $D_T=(I-U)H$ (st.17.7), en T wordt volledig beschreven door $T(I-U)h=i(I+U)h$ ($h \in H$).

Volgens st.13.2 en st.13.4 is H te representeren als

$$H'' = L_2((0,1],\alpha_1) + L_2((0,1],\alpha_2) + \dots ,$$

zo dat $(Uh_j)(x) = e^{2\pi ix}h_j(x)$ wordt (als $h=h_1+h_2+\dots$ de directe splitsing van een $h \in H$ is). Daar 1 geen eigenwaarde van U is, is elke $\alpha_j(x)$ linkscontinu in $x=1$ (vgl. opm.13.2). Dit betekent dat er niets verloren gaat als we ons tot het open interval (0,1) beperken, dus de $L_2((0,1),\alpha_j)$'s nemen.

Zij $h \in H''$, $h=h_1+h_2+\dots$. Nu is, als $(I-U)h=g$, voldaan aan $g \in D_T$, en $g_j(x)=(1-e^{2\pi ix})h_j(x)$. Dus

$$(1) \qquad \sum_j \int_{(0,1)} |\cot \pi x\; g_j(x)|^2\, d\alpha_j(x) < \infty .$$

Omgekeerd, als g voldoet aan (1) en aan $g \in H''$, dus aan

$$\sum_j \int_{(0,1)} |g_j(x)|^2\, d\alpha_j(x) < \infty ,$$

dan is g van de vorm $(I-U)h$ met $h \in H''$, want

$$\int_{(0,1)} |g_j(x)\;(1-e^{2\pi ix})^{-1}|^2\, d\alpha_j(x) \leq 4 \int_{(0,1)} |\cot \pi x\; g_j(x)|^2 d\alpha_j(x),$$

zodat we $h_j(x)=g_j(x)\;(1-e^{2\pi ix})^{-1}$ kunnen nemen.

Is nu $g \in D_T$, $g=(I-U)h$, dan is $Tg=i(I+U)h=k$, dus

$$k_j(x) = -\cot \pi x . g_j(x).$$

We behoeven nu nog slechts de overgang van (0,1) naar $(-\infty,\infty)$ te maken. Dit komt neer op de substitutie $-\cot \pi x=y$; waardoor (0,1) op $(-\infty,\infty)$ wordt afgebeeld. Aan de functie $g(x) \in L_2((0,1),\alpha)$ voegen we toe de functie $g^*(y) \in L_2((-\infty,\infty),\beta)$, waarin

$g^*(-\cot \pi x)=g(x)$, en waarin $\beta(-\cot \pi x) = \int_{(0,x]} d\alpha(x)$,
zodat steeds

$$\int_{(0,1)} g_1(x)\,\overline{g_2(x)}\,d\alpha(x) = \int_0^\infty g_1^*(y)\,\overline{g_2^*(y)}\,d\beta(y).$$

Dit is bijv. in te zien door voor g_1 en g_2 eerst karakteristieke functies van halfopen intervallen te nemen.

Dat omgekeerd elke T die aan 1^o en 2^o voldoet, automatisch zelfgeadjungeerd is, blijkt uit st.17.7, maar kan ook, met zeer weinig kennis van operatorentheorie, direct worden afgeleid (het is een soort continu analogon van voorbeeld 16.1).

Opmerking 17.6. De begrensdheid van de β's biedt geen wezenlijke beperking. We kunnen altijd van een L_2 met begrensde β overgaan op een L_2 met onbegrensde β, en omgekeerd. Zij nl. $\gamma(x)$ monotoon niet-dalend op $(-\infty,\infty)$, en onbegrensd. Dan is er een positieve continue functie $p(x)$ met $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)^2 d\gamma(x) < \infty$. Definieer nu $\beta(x)$ door $\int_{(-\infty,x]} p(x)^2 d\gamma(x)$. Aan elke $f \in L_2(\gamma)$ voegen we nu toe de $g \in L_2(\beta)$ met $g(x)=f(x)/p(x)$. Is $g_1(x)=f_1(x)/p(x)$, $g_2(x)=f_2(x)/p(x)$ dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\,d\gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,\overline{g_2(x)}\,d\beta(x),$$

zodat de afbeelding een isometrie is. Daar $p(x)$ steeds positief is, treedt de gehele $L_2(\beta)$ als beeld op.

Wordt verder door $f(x) \to xf(x)$ een zelfgeadjungeerde operator beschreven in $L_2(\gamma)$, dan correspondeert die in $L_2(\beta)$ met $f(x)p(x) \to xf(x)p(x)$, dus weer $g(x) \to xg(x)$. Er is nog een aantal details uit te voeren, doch die hebben niets om het lijf.

Opmerking 17.7. We gaan nog even na wat er gebeurt als T begrensd is. Als T hermitisch, gesloten en begrensd is, en D_T dicht in H, dan is (volgens st.16.6) D_T gesloten, dus $D_T=H$. Dus T is in de gehele H gedefinieerd. Daar nu D_T geen uitbreiding meer toelaat, en $T \subset T^*$ is, zien we dat T zelfgeadjungeerd is. Nu kan T in de in st. 17.10 aangegeven vorm worden gerepresenteerd.

Uit het feit dat T begrensd is, laat zich nu gemakkelijk afleiden dat er reële getallen A en B bestaan zó dat alle β's constant zijn buiten het interval $[A,B]$. Derhalve kunnen we in st. 17.10 met een maat over $[A,B]$ i.p.v. over $(-\infty,\infty)$ werken. Omgekeerd is direct duidelijk: als T in deze vorm gerepresenteerd is, met $[A,B]$ i.p.v. $(-\infty,\infty)$, dan is T begrensd, nl.

$\|Tf\| \leq \|f\| \cdot \max(|A|, |B|)$ voor alle f uit H.

18. Compacte hermitische operatoren.

Definitie 18.1. Een operator T in H heet compact (ook wel "volledig continu", "vollstetig") als $D_T=H$ en als de eenheidsbol $\|f\| \leq 1$ door T op een compact deel van H wordt afgebeeld. M.a.w. voor elke rij $\{f_n\}$ $(f_n \in H, \|f_n\| \leq 1)$ heeft de rij $\{Tf_n\}$ een convergente deelrij.

Opmerking 18.1. Elke compacte operator is begrensd. Is nl. T niet begrensd, dan is er een rij $\{f_n\}$ met $\|f_n\| \leq 1$, $\|Tf_n\| \to \infty$, zodat $\{Tf_n\}$ geen convergente deelrij heeft.

Voorbeeld 18.1. We geven eerst een voorbeeld van een compacte verzameling. Laat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ een volledig orthogonaalsysteem zijn, en $a_1, a_2, \ldots$ een bijbehorend stel reële getallen ≥ 0 met $\Sigma\, a_j^2 < \infty$. S zij de verzameling van alle $f \in H$ met de eigenschap dat $|(f,\varphi_j)| \leq a_j$ (alle j). Dan is S compact. Uit elke rij $f_1, f_2, \ldots$ uit S kunnen we nl. een deelrij kiezen $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ zó dat $\lim_{k \to \infty} (f_{n_k}, \varphi_1)$ bestaat. Daaruit weer een deelrij zó dat ook het inwendige product met φ_2 een limiet krijgt, enz. Tenslotte nemen we een z.g. diagonaalrij, en die blijkt gemakkelijk aan de gestelde eis te voldoen.

Voorbeeld 18.2. Zonder bewijs zullen we enkele feiten uit de integraalrekening gebruiken. Laat X een maatruimte zijn. Dan is ook $X \times X$ een maatruimte. De functies op $X \times X$ schrijven we als functies van twee variabelen x en t. Is $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ een volledig orthonormaalsysteem op X, dan vormen de functies $\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_k(t)}$ een volledig orthonormaalsysteem op $X \times X$.

Zij $K(x,t)$ een functie uit $L_2(X \times X)$. Aan elke $f \in L_2(X)$ wordt nu een $g=Tf \in L_2(X)$ toegevoegd volgens de formule

$$g(x) = \int_X K(x,t)\, f(t)\, d\mu_t.$$

Dit is een lineaire transformatie met $D_T=H$, en T is compact. Is nl. $f(x) = \Sigma_k\, \gamma_k\, \varphi_k(x)$, $g(x) = \Sigma_j\, \delta_j\, \varphi_j(x)$, $K(x,t) = \Sigma_j\, \Sigma_k\, \pi_{jk}\, \varphi_j(x)\overline{\varphi_k(t)}$, dan is $\delta_j = \Sigma_k\, \pi_{jk}\, \bar{\gamma}_k$, en $\Sigma_j\, \Sigma_k\, |\pi_{jk}|^2 < \infty$. Noem $\Sigma_k\, |\pi_{jk}|^2 = a_j^2$, dan blijkt dat $|\delta_j| \leq a_j \cdot \|f\|$. Volgens voorb.18.1 wordt nu de bol $\|f\| \leq 1$ door T op een compacte verzameling afgebeeld.

Opmerking 18.2. Als in voorbeeld 18.2 wordt aangenomen dat $K(x,t) = \overline{K(t,x)}$ voor alle x en t, dan is gemakkelijk in te zien dat T hermitisch is (dus zelfgeadjungeerd ,want $D_T=H$).

Stelling 18.1. Als T een compacte hermitische operator in H is, dan is H de directe som van twee Hilbertruimten K en M met de volgende eigenschappen:

1^o $Th = 0$ voor alle $h \in K$.

2^o M bezit een hoogstens aftelbaar volledig orthonormaalsysteem $\phi_1, \phi_2, \ldots$, zó dat elke ϕ_k eigenfunctie van T is, met reële eigenwaarde λ_k, terwijl $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Omgekeerd is elke operator T die de genoemde eigenschappen heeft compact en hermitisch.

Bewijs. Deze stelling kan worden bewezen zonder van de algemene theorie der zelfgeadjungeerde operatoren gebruik te maken (zie bijv. Riesz-Nagy; voor het in voorbeeld 18.2 genoemde geval is het de bekende theorie van Hilbert-Schmidt, die in de meeste boeken over integraalvergelijkingen behandeld wordt). Hier zullen we ons echter op de algemene theorie beroepen.

Zij T compact hermitisch. We representeren T volgens st.17.10. Zij dus $H = \Sigma_j L_2((-\infty, \infty), \rho_j)$. Bij elke $a > 0$ kunnen we de deelruimte H_a beschouwen gegeven door

$$H_a = \Sigma_j L_2((a, \infty), \rho_j).$$

Voor alle $f \in H_a$ geldt $(Tf,f) \geq a(f,f)$. Op grond hiervan tonen we aan dat de dimensie van H_a eindig is. Als nl. de dimensie van H_a oneindig is, dan is er een aftelbaar (misschien onvolledig) orthonormaalsysteem $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Daar T compact is, heeft $\{Tf_n\}$ een convergente deelrij. We mogen aannemen, dat de rij $Tf_1, Tf_2, \ldots$ zelf reeds convergeert, naar een element $g \in H_a$. Wegens de ongelijkheid van Bessel is $(f_n, g) \to 0$. Verder is

$$|(Tf_n, f_n) - (g, f_n)| \leq \|Tf_n - g\| \cdot \|f_n\| \leq \|Tf_n - g\| \to 0,$$

zodat $(Tf_n, f_n) \to 0$. Doch $(Tf_n, f_n) \geq a(f_n, f_n) = a > 0$, zodat we een tegenspraak hebben.

Een $L_2((p,q), \rho)$ heeft slechts dan een eindige dimensie als ρ hoogstens eindig vele sprongpunten heeft, en constant is in elk der deelintervallen waarin (p,q) door die sprongpunten wordt verdeeld.

We zien nu dat van de β_j's hoogstens eindig vele niet constant zijn rechts van a, en bij de eindig vele uitzonderingen is β_j rechts van a een functie van het bovengenoemde type.

We kunnen precies dezelfde redenering volgen met betrekking tot $(-\infty,-a)$. We komen zo tot de eindig-dimensionale ruimte H_{-a}. De directe som van H_a en H_{-a} stellen we door H_a' voor. H_a' wordt door T in zichzelf getransformeerd, en H_a' bevat een orthonormaalsysteem van eigenvectoren, waarvan de eigenwaarden alle in absolute waarde $\geq a$ zijn.

Als $0 < b < a$, dan is $H_a \subset H_b$. En de eigenwaarden van de (eindig vele) in $H_b \ominus H_a$ gelegen eigenvectoren liggen alle in absolute waarde in het interval $[b,a]$. Zij K de ruimte der vectoren die loodrecht op alle H_a's staan. De elementen van K zijn functies die (in elke $L_2(\beta_j)$) slechts in x=0 van nul kunnen verschillen, en worden dus door T geannuleerd. Neem verder $M=H\ominus K$; dit is de afsluiting der vereniging van alle H_a's. De gezamenlijke eigenvectoren van alle H_a's vormen nu een volledig orthonormaalsysteem. Daar er bij elke $a \neq 0$ slechts eindig vele eigenvectoren bij zijn met eigenwaarde buiten $(-a,a)$, zien we dat er, na willekeurige nummering van de eigenvectoren, voldaan is aan $\lambda_k \to 0$.

Dat omgekeerd elke T met de eigenschappen 1^o en 2^o automatisch compact is, komt neer op het volgende feit: de verzameling van alle $\Sigma \lambda_k \gamma_k \psi_k \in M$ met $\Sigma|\gamma_k|^2 \leq 1$ is een compact deel van M. Dit kan op de in voorb.18.1 aangegeven manier worden bewezen.

Errata.

blz. 1. Aanvulling litteratuurlijst:

A.E. Taylor, Introduction to functional analysis, New York 1958.
N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators, New York 1958.
N.J. Achieser und J.M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, Berlin 1958.

blz. 2. Regel 8 v.b.: "heet" moet zijn "heten".

blz. 3. Regel 12 v.b.: in de integrand moet $g(x)$ door $\overline{g(x)}$ worden vervangen.
Regel 23 v.b.: "Voorbeeld 1" moet zijn "voorb. 2.1".

blz. 4. Regel 20 v.b.: "Dus $\|(f,g)| \geq$" moet zijn "Dan is $|(f,g)| \geq$".

blz. 5. Regel 12 v.b.: toevoegen: "met $q_1 \neq q_2$".
Regel 5 v.o.: "(f,g)" moet zijn "(f,q)".

lz. 7. In st. 3.1 moet " $f - g$ " worden vervangen door " $\| f - g \|$ ".

lz. 8. In de 1e zin van het bewijs van st. 3.4 toevoegen: " T aftelbaar".

In de 5e regel van opm. 3.1 moet R_3 (aan het begin van de regel) worden vervangen door R_2.

lz. 10 t.e.m. 16 zijn abusievelijk genummerd 13 t.e.m. 19.

lz. 10. Nà def. 4.1 invoegen: "Een zwakke IP-ruimte behoeft niet steeds een IP-ruimte te zijn. Het omgekeerde is wèl het geval."

lz. 18. In def. 7.1 komt 3 x " A B " voor. Dit moet achtereenvolgens zijn:

" $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B$ ".

lz. 19. In def. 7.6, laatste regel, moet staan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset S$.

lz. 20. In regel 7 v.o.: aan het slot, achter "element van s is" toevoegen: " vgl. opm. 7.8 ".

lz. 22. In 4e regel aan het begin een (plaatsen.

Regel 15 v.o.: vóór "het absolute kwadraat" invoegen "de integraal van".

In regel 7 v.o.: " $t_2(\ )$ " vervangen door " $t_2(x)$ ".

lz. 24. In regel 5 v.o.: " $\Sigma_1^m \mu(A_i)$ " vervangen door $\bigcup_1^m A_i$.

lz. 25. Regel 14 v.o.: Nà "gesloten is in R_1" toevoegen " en R_1 een Hilbertruimte is".

lz. 28. Regel 10 v.b.: "een isometrie is" moet zijn "een isometrie van H <u>op</u> H_Q is".

lz. 30. Regel 6 v.b.: "opgebouwde" moet zijn "rationaal opgebouwde".

In 1e regel v.h. bewijs van st. 9.9 om " $q_1, \ldots, q_n$ " accoladen plaatsen.

lz. 33. In 5e regel v.h. bewijs van st. 10.3: "We concluderen dat bij vaste f en T" vervangen door: "Bij vaste f en T is".

In de daaropvolgende regel het woord "is" schrappen.

lz. 34. In 1e regel v.h. bewijs van st. 10.5: "begrip" vervangen door "bewijs".

lz. 35. Regel 3 v.o.: Nà de formule toevoegen " (de α's zijn dus $\neq 0$) ".

lz. 37. Regel 9 v.o.: " $+\varepsilon$ " moet zijn " $+\varepsilon\mu_0$ ".

Regel 5 v.o.: " $P_n = \varphi$, $Q_n = 0$ " moet zijn " $P_n = \varphi + C$, $Q_n = C$ ($C = \max \varphi(x)$) ".

Regel 4 v.o.: hetzinnetje dat begint met " Als " moet vervallen.

blz. 38. In st. 11.6 moet "$0 < t \leq 1$" worden vervangen door "$0 \leq t \leq 1$". Aan het slot van de volgende regel toevoegen: "En $L(\varphi_t)$ is, als functie van t beschouwd, rechts continu.

In de laatste regel van het bewijs van st. 11.6 "$- t$" vervangen door "$+ t$".

Aan het slot van dit bewijs toevoegen: "We bewijzen nu de rechts-continuïteit. Zij $\varepsilon > 0$. Kies n zo dat $L(P_n) < L(\psi_t) + \varepsilon$. Nu is voor $t' < t + 2^{-n}$: $\psi_t + t - t' < \psi_{t'} < P_n$, dus

$$L(\psi_t) - 2^{-n}L(1) < L(\psi_{t'}) < L(P_n) < L(\psi_t) + \varepsilon .$$

In st. 11.7, 2e regel, na "begrensd" toevoegen "en rechts continu".

blz. 41. Regel 4 v. boven: nà "afbeelding voor" een) plaatsen.

Regel 7 v. boven: nà "Want" toevoegen "$U(L_2) = L_2$ en".

In def. 13.2, 3e regel, "combinaties" moet zijn "combinaties van".

blz. 44. Regel 2 v. boven: Nà "uit voorbeeld 2.1" vervangen door "met metriek

$$((\beta_1,\dots,\beta_n), (\gamma_1,\dots,\gamma_n)) = \Sigma\, |(f_0, q_i)|^2 \beta_i \overline{\gamma_i} ".$$

In regel 6 v. boven: "$x_1,\dots,x_n$ de sprong 1" vervangen door "x_i de sprong $|(f_0, q_i)|^2$".

blz. 47. In regel 1, 3, 5 en 8 v. onderen: h vervangen door w (in regel 8 3 x

blz. 54. Regel 12 v. onder: "W de limiet is" moet zijn "W het complement van de limiet is".

blz. 56. Regel 10 v. onder: "$(E_x f, f)$" moet zijn "$(E_x f_0, f_0)$".

regel 5 v. onder: na "rechtscontinu" toevoegen "en $\beta(x) \downarrow 0$ als $x \downarrow 0$"

blz. 58. Aan st. 16.2 toevoegen: "Omgekeerd geldt: als deze verzameling een grafiek is, dan ligt D_T dicht in H".

Er zijn abusievelijk twee stellingen 16.2 gemaakt. De tweede nummere men 16.2^a.

blz. 59. Regel 3 v. boven: "uit st. 16.5" moet zijn "uit st. 16.6 (1e deel)".

In het bewijs van st. 16.4 komt twee keer G_{T^*} voor. Dit te vervangen door $\hat{G}_{T^*}$, hetgeen de "gekantelde" G_{T^*} voorstelt, d.i. $H \times H \ominus G_T$.

Regel 11 v. onder: "T_f" moet zijn "Tf".

blz. 60. Regel 7 v. onder: nà "geldt:" toevoegen "Als".

blz. 62. Na st. 16.9 toevoegen: "Bewijs. Deze relatie geldt voor elke operator T waarvoor T^{**} bestaat."

blz. 64. Regel 10 v. onder: Bij de somtekens "∞" vervangen door "n".

blz. 65. Aan st. 17.6 na "$K_1 = K_2 = H$" toevoegen "dus dat V unitair is".

blz. 66. Regel 8 v. onder: voor "$I - U)$" een (toevoegen.