STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 56

Wiskundige problemen bij het grondslagenonderzoek van de fysica.

incompl.

C.G.G. van Herk.

1962

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Wiskundige Problemen bij het Grondslagenonderzoek van de Fysica

> Considérée sous ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même.
>
> FOURIER

I. INLEIDING

§ 1 Formele Opmerkingen

(a) Aard onderwerp

Uit de titel blijkt, dat vragen aan de orde komen - welke precies is niet duidelijk -, waar behalve de Fysica ook de Wiskunde (niet alleen als hulpmiddel) en de Wijsbegeerte (vanwege de grondslagen) bij betrokken zijn. Deze vragen worden hoofdzakelijk van de wiskundige kant bekeken. Overigens is het doel een theorie van de natuurverschijnselen, opgebouwd op intuïtief duidelijke grondbegrippen en evidente axioma's. Uiteraard wordt dit doel niet bereikt.

Voor zover thans is te overzien ligt dit niet aan een tekort aan gegevens: verschillende axioma's stellen zeer scherpe wiskundige eisen, en er schijnt daarnaast maar een klein aantal werkhypothesen nodig te zijn om de theorie volledig te specificeren (bovendien zijn deze werkhypothesen zeer algemeen: ze bestaan nooit uit willekeurige specialisaties van modellen). Toch blijft de theorie door grote wiskundige moeilijkheden, tot enkele fragmenten beperkt; overigens zijn deze groot genoeg om met de tegenwoordige theoretische Natuurkunde duidelijke verschillen te vertonen (wat bij het afwijkende uitgangspunt niet verwonderlijk is). Natuurlijk kan het doel zonder meer onbereikbaar zijn (en mijn embryonale theorie dus fysische onzin); op het ogenblik is dit (door de wiskundige moeilijkheden) niet uit te maken.

Het wijsgerige element geeft aan de beschouwingen een zeer persoonlijk karakter. Het is een van de charmes van de Wijsbegeerte daar ruimte voor te laten. Wat ook meebrengt dat in de Wijsbegeerte de persoon van de onderzoeker niet achter zijn werk hoeft schuil te gaan.

(b) Concentrische behandeling

De uiteenzetting gebeurt min of meer concentrisch. Verschillende gezichtspunten zijn nl. moeilijk lineair te ordenen zonder het overzicht en het onderlinge verband tekort te doen. Voor de benodigde wiskunde geldt dit nauwelijks (wat niet vanzelf spreekt); wel vallen de stukjes theorie, door de deductieve behandeling, onder sterk uiteenlopende gebieden (Invariantentheorie, Topologie, Functietheorie). De natuurkundige grondbegrippen en axioma's zijn nl. zeer heterogeen (als in de Euclidische Meetkunde), wat weer een heterogene wiskundige problematiek ten gevolge heeft. - Een en ander brengt een zeker gebrek aan systematiek met zich mee.

Er wordt met algemene wijsgerige beschouwingen begonnen; natuurfilosofische detailkwesties komen later aan de orde.

(c) Literatuur

Naar literatuur wordt soms uit de tweede hand verwezen, en dikwijls in het geheel niet. Gevolg van onvoldoende belezenheid en van zó persoonlijke problemen dat daarover geen literatuur te verwachten is (correcties hoogst welkom!). Het weinig bevredigende van veel natuurfilosofische literatuur stimuleerde niet tot verdere kennisneming. Er is bijna altijd een zekere eenzijdigheid, zowel bij wiskundigen als bij fysici en filosofen. - Het boek van H. WEYL, Philosophy of Mathematics and Natural Science, 1949, moet ik uitdrukkelijk uitzonderen (al bevat ook dit m.i. onaanvaardbare opvattingen). Wat verouderd, maar altijd nog goed leesbaar is O.HOLDER, Die mathematische Methode, 1924. De positivistische literatuur is zonder meer eenzijdig, wat uit het vervolg moge blijken.

(d) Omvang onderwerp

Het is duidelijk dat mijn onderwerp zeer uitgebreid is. Een verwijt van (onvermijdelijke) oppervlakkigheid zou dan ook zeer redelijk zijn. Ik wil mij, wat deze omvang betreft, trachten te rechtvaardigen, en zie daarbij af van alle verdere hachelijke kanten die de stof bovendien nog aankleven.

De beste rechtvaardiging ligt vermoedelijk in de werkelijkheid van de problematiek. Het is waar dat positivisten het blote bestaan, en dus ook de fysische zin hiervan zullen bestrijden. Op mijn beurt zal ik het positivisme vrij uitvoerig (en misschien vinnig) critiseren. Alles wat hierover, objectief bekeken, te zeggen valt zou daarom zijn, dat zich hier wijsgerige meningsverschillen voordoen die alleen door voortgezet onderzoek kunnen worden opgehelderd. De noodzaak van verder onderzoek zal telkens aan de dag komen: de grondslagen van de Theoretische Fysica zijn immers nog in de hoogste mate onbevredigend (critiek die nader wordt toegelicht).

De grote invloed van het wijsgerig uitgangspunt op de formulering van een axiomatische theorie maakt het, bij voldoende specificatie, in beginsel mogelijk het uitgangspunt te toetsen (wat in concreto verre van eenvoudig zal zijn). Men zou van <u>wijsgerige</u> modellen van de verschijnselen kunnen spreken, in tegenstelling tot de gebruikelijke <u>empirische</u>. De eerste hebben voor dat bij iedere volgende specificatie uit veel minder denkbare voortzettingen hoeft te worden gekozen (het aantal preferente voortzettingen is nog weer kleiner (vgl. 1^a, werkhypothesen)). Daarmee zou dan een deel van de Metafysica een experimenteel controleerbaar vak worden. Een gezichtspunt dat stellig een behandeling van wijsgerige kwesties billijkt. Kennelijk verschilt deze Metafysica (zij het niet in alles) van die van HEGEL en veel anderen.

De uitgebreidheid van de stof is een natuurlijk gevolg van de axiomatische methode: deze maakt het onderwerp tot een <u>eenheid</u>, met een wiskundige en een natuurfilosofische kant. Ook de heterogene wiskundige problematiek werkt de omvang sterk in de hand. Beperkende omstandigheden zijn: (1) dat er op het ogenblik weinig feitelijks te zeggen valt, (2) de nodige Wijsbegeerte vrij summier kan worden afgedaan. Bovendien brengt de splitsing van de Wetenschap het onderwerp op de grens van 3 vakgebieden, waardoor het meer lijkt dan het in werkelijkheid is.

Was onze kennis van de Wiskunde beter, dan zou de stof vermoedelijk onafzienbaar zijn; nu is deze meer een programma dan een serie resultaten. Ik meen dat dit op zichzelf geen bezwaar vormt tegen de gevolgde axiomatische methode.

(e) Splitsing Wetenschap

Er werd al gezinspeeld op de bezwaren, aan een vergaande splitsing van de Wetenschap verbonden, bezwaren die bij het onderhavige onderwerp sterker voelbaar moeten zijn dan bij problemen op een beperkter terrein.

Zo is het b.v. (in het algemeen) niet onverschillig of beschouwingen over de ruimte afkomstig zijn van een wiskundige, een fysicus of een filosoof (om van de fysioloog maar te zwijgen). Dit kan zo ver gaan dat het moeite kost aan een wiskundige duidelijk te maken, dat een punt nog iets anders is als een greep coördinaten[1]. Toch is er meer dan een paar millennia over punten gesproken, vóór de coördinatenmeetkunde werd uitgevonden, en is het nog altijd discutabel of aan ieder punt van een lijn (en zelfs aan een abstract punt van een lineair continuum) eeneenduidig een getal kan worden toegevoegd. Dat de formalisering een eindstadium voorstelt van een lange ontwikkeling wordt wel eens vergeten. HILBERT heeft in zijn <u>Grundlagen der Geometrie</u> aan de aanschouwing een behoorlijke plaats ingeruimd, en met de onderscheiding van 5 axiomagroepen m.i. blijk gegeven van een veel juistere opvatting van de problemen, die het wiskundig beschouwen van de ruimte met zich meebrengt.

---

1) <u>Ruimte</u> en <u>tijd</u> zijn hier (voorlopig) gekenmerkt door de eigenschap dat de <u>waarnemingen</u> van natuurverschijnselen (niet de verschijnselen zelf) zich daarin afspelen (de subjectiviteit van ruimte en tijd komt nog nader aan de orde). De wiskundige uitbreidingen van dit ruimtebegrip worden (zo nodig) als <u>abstracte ruimten</u> (FRÉCHET) aangeduid. Dit zijn dus willekeurige logische denkbaarheden; de ruimte waarin wij de verschijnselen projecteren is dat uitdrukkelijk <u>niet</u>.

In het algemeen zijn de schotjes tussen de Wetenschappen kunstmatig en van weinig theoretisch belang (voorbeelden: Theoretische Fysica en Wijsbegeerte, Wiskunde en Wijsbegeerte (speciaal Logica), Kennisleer en Metafysica). Verschillende probleemcomplexen respecteren de officiële grenzen dan ook niet.

Voor de Natuurwetenschappen geldt dit zelfs in hoge mate. Daarom zal ik onder Natuurkunde (Fysica) de leer verstaan van de natuurverschijnselen zonder beperkingen, en deze alleen scheiden in Experimentele en Theoretische Fysica. Alles wat "werkelijk" is en ruimte inneemt (de tijdelijkheid is hier geen criterium) behoort tot de Natuur en valt dan onder de Fysica. Tegelijk is dit een (voorlopige) scheiding tussen fysische entiteiten en bewustzijnsverschijnselen; de laatste missen het attribuut van ruimtelijkheid (PLATO, DESCARTES, SPINOZA). De indeling van de Natuurkunde in engere zin in een leer van geluid, warmte, enz. (dus voornamelijk naar zekere waarnemingskwaliteiten) is nu gelukkig achterhaald, maar MACH heeft er in zijn Mechanik (4^e^ dr., 1901, p.529) nog even critiek op geoefend.

De gegeven definitie van Natuurkunde houdt evenwel meer in dan een triviale afspraak, zodra men hieraan de voorstelling verbindt van altijd en overal geldige natuurwetten. De opvattingen van N.BOHR over de Biologie maken op dit punt een nadere toelichting nodig[1]. BOHR neemt voor levende wezens een afzonderlijk geval van complementariteit aan. Deze zouden zich dan volgens eigen principes kunnen gedragen, wat via een indeterministische Biologie op zichzelf al (d.w.z. afgezien van fysische overwegingen) een deterministische Fysica (ook in engere zin) onmogelijk zou maken.

----

1) N.BOHR, Licht und Leben, Naturw. 21 (1933), p.245-250.

§ 2 Ontologie

(a) Verband met Kennistheorie

Metafysica, of met een meer gebruikelijke (en juistere) term Ontologie (leer van het Zijnde), is die tak van Wijsbegeerte die zich bezighoudt met de aard van de werkelijkheid, en in het bijzonder met het verband tussen stoffelijke en geestelijke verschijnselen[1]. Hoewel Kennistheorie en Ontologie in hun doel verschillen, is een onderlinge afgrenzing niet goed uitvoerbaar; immers, beschouwingen over algemene eigenschappen van de kennis rekent men tot het eerste gebied, die over het object van de kennis tot het tweede.

Om 3 redenen begin ik mijn wijsgerige opmerkingen bij de Ontologie. Een ervan is een didactische, en opzichzelf al afdoende. Men kan nl. wel Ontologie behandelen zonder kennistheoretische voorkennis, maar het omgekeerde vergt merkbare moeite, alsof het niet de natuurlijke weg is. HEYMANS deed zowel het een als het ander[2]; maar in zijn Gesetze und Elemente brengt hij de lezer al op de eerste bladzijde in moeilijkheden door zijn (m.i. bij voorbaat tot mislukking gedoemde) poging het begrip kennis te definiëren: "irgend etwas erkennen, heisst, Vorstellungen haben, welche mit diesem Etwas übereinstimmen, und welche als mit demselben übereinstimmend gedacht werden". Zonder de mérites van deze zin te willen loochenen heb ik hiertegen toch een ontologisch bezwaar, gevolg van het woord übereinstimmen.

Laat het iets, het object van de kennis, niet tot mijn

----

1) De naam Metafysica voor de Eerste Filosofie van ARISTOTELES is afkomstig van een uitgever, die dit geschrift achter de Fysica (μετὰ τὰ φυσικά) plaatste. Sinds BOETHIUS duidde de term de studie aan van datgene, wat "achter" de verschijnselen ligt.

2) G.HEYMANS, Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, 3e ed., 1915;
id., Einführung in die Metaphysik, 2e ed., 1911.

bewustzijnsinhoud behoren (wat dikwijls het geval zal zijn; immers, ik ben niet zozeer in mijn persoonlijke belevenissen geïnteresseerd als wel in de oorzaken daarvan, die buiten mijn bewustzijn liggen). Het is dan moeilijk in te zien hoe, anders dan in bijzondere gevallen, overeenstemming van mijn voorstellingen met dit iets bestaanbaar is. Als het iets, het object van mijn voorstellingen, toevallig tot de belevenissen van een ander denkend en voelend wezen behoort, is overeenstemming denkbaar, in alle andere gevallen is deze onmogelijk. Immers, alleen van bewuste ervaringen kunnen wij ons adequate voorstellingen maken, en zelfs dat nog, zoals ieder weet, in slechts zeer beperkte mate. Wat weet een domoor van de gedachten van een genie, wat weet een man van de gevoelens van een vrouw?

Van niet-bewuste entiteiten is echter alleen indirecte, relatieve kennis mogelijk. Had HEYMANS entsprechen in plaats van übereinstimmen geschreven, dan was het bezwaar wel niet opgeheven, maar toch veel kleiner geweest. De enige misschien nog mogelijke voorstellingen van een onbewust iets zouden relaties, hetzij met kenbare dingen, hetzij onderling tussen overigens onkenbare entiteiten, kunnen zijn (en ook dat zal altijd hypothetisch blijven). Daarmee komt men echter tot ontologische denkbeelden die meer scholing vereisen dan van beginners (waarvoor het boek van HEYMANS in de eerste plaats bestemd was) mag worden verwacht. - Het heeft er iets van, dat kennistheoretische problemen een zekere wijsgerige rijpheid vergen. Ik meen ook dat het vooral de twijfel is aan het naïeve wereldbeeld (waar wij allen bij aanvangen), die ons tot de eigenlijke Wijsbegeerte drijft, - dus een ontologische kwestie -, en dat de portée van de kennistheoretische problemen beter te vatten is als men de realiteit van zekere ontologische moeilijkheden reeds heeft ondervonden.

De tweede reden om bij de Ontologie te beginnen is een historische, en in de grond dezelfde als de didactische: de Ontologie is ouder (en in zeker opzicht eenvoudiger) dan de Kennistheorie. Eerst nadat men de juistheid van de zintuigelijke kennis was gaan betwijfelen, wat op zijn laatst bij PARMENIDES (ca. 540-450 v. Chr.) plaats vond, kwam de behoefte op, zich in de kennis als zodanig te verdiepen. Met een bepaalde bedoeling ga ik hier wat nader op in.

De eerste Griekse wijsgeren hadden grote natuurkundige belangstelling. Zij zochten naar het onveranderlijke, het "wezenlijke" in de "dingen". Meestal werd dit gevonden in één of meer oerstoffen, zoals water, vuur, enz., vermoedelijk naar het voorbeeld van een Oosterse elementenleer (het water van THALES b.v. doet al heel weinig Grieks aan).

Volgens ANAXIMANDER (ca. 610-545 v. Chr.), - een geweldig denker, die bij het symmetrieprincipe opnieuw ter sprake komt -, was de oerstof het ἄπειρον, het oneindige, of, volgens een interpretatie van TEICHMULLER en TANNERY, het qualitatief onbepaalde, of misschien zelfs beide. In elk geval dus een abstract begrip, wat voor de natuurfilosofische speculatie een grote stap vooruit betekende.

Het is wel zeker, dat het optreden van PARMENIDES van Elea een keerpunt is geweest in de Griekse Wijsbegeerte. Want de wijsgeren na hem, zoals ZENO, EMPEDOKLES, ANAXAGORAS en DEMOCRITUS, hebben zich allen, - de een meer, de ander minder -, beziggehouden met vragen betreffende de waarnemingen en de kennis, waar vóór PARMENIDES nauwelijks iets van is te merken. Zijn leer moet wel een grote indruk hebben gemaakt. De overgebleven stukken daarvan zijn echter zeer duister (misschien alleen voor zijn leerlingen bestemd), en ook het oordeel van de historici over de reacties op zijn leer loopt sterk uiteen. Terwijl de meesten van hen PARMENIDES als de grondlegger van de Idealistische Wijsbegeerte (§ 3) beschouwen (o.a. vanwege zijn invloed op PLATO, die grote eerbied voor hem had), heeft BURNET hem de Vader van het Materialisme genoemd, omdat de (stellig materialistische) Atomistiek voortkwam uit critiek op de denkbeelden van de Eleaat over het Zijnde[1]. Het gelijk zou aan beide kanten kunnen liggen. In

---

1) J.BURNET, Early Greek Philosophy, 3e ed., 1920, voorrede

elk geval heeft een soortgelijke situatie zich in onze tijd werkelijk voorgedaan: zowel uiterst linkse als uiterst rechtse denkers (en anderen) hebben zich op HEGEL beroepen. En daarom is het misschien ook niet uitgesloten dat de Grieken zelf al verschillend over de leer van PARMENIDES hebben gedacht, omdat ook zij deze, om de een of andere reden, niet goed hebben begrepen.

Tegenover de pogingen van zijn voorgangers, de verschijnselen langs speculatieve weg te verklaren, stelde PARMENIDES dat alleen het Zijnde werkelijk is. Het Zijnde was onveranderlijk (een mening die ook HEGEL deelde, en HEYMANS tot zijn, - voor mij niet te begrijpen -, waardering voor de fysische behoudsprincipes bracht), en dus konden de veranderlijke dingen daar niet toe behoren. Toch suggereert de term Zijnde (τὸ ὄν), dat dit al het bestaande omvat. Hoe valt dit te rijmen?

Over de interpretatie van het Zijnde bestaat geen eenstemmigheid, zelfs niet over de vraag of het ruimte innam. Er staat nl. alleen dat het Zijnde op een bol gelijkt (σφαίρης ἐναλίγκιον, B 8,43), wat overdrachtelijk bedoeld kan zijn. Gelukkig is het niet nodig hierop in te gaan.

Duidelijker lijken de zinnen: "want hetzelfde is denken en zijn" (B 5), en "want denken en dat waarover het denken gaat, is hetzelfde, want ge zult het denken niet aantreffen zonder het zijnde, waarin het uitgesproken ligt (B 8,34-36)[1]. Over het zijnde was dus "kennis" mogelijk. Voor ervaringsfeiten gold dit niet: PARMENIDES had kennelijk iets aan te merken op ons weten daaromtrent, wat impliceert dat de "kennis" van het Zijnde tot een bepaald soort kennis behoorde (en vooral: tot een hoger soort). Een extreem idealistische voorstelling, vermoedelijk een gevolg van het niet onderscheiden van waarheid en werkelijkheid. Een waarheid is niet aan tijd gebonden, geldt "eeuwig". Men kan zich voorstellen dat dit tot de opvatting leidde dat ware kennis aangaande de veranderlijke Natuur uitgesloten is.

----

1) Vertaling Prof. OLDEWELT, Philosophia I (1947), p.45-46.

Het leerdicht van PARMENIDES bestaat uit twee delen: het een handelt over de weg tot Waarheid (ἀλήθεια), het ander over de "mening" (δόξα) van stervelingen. Nu is er bij PLATO (en bij ARISTOTELES, die hierin de opvatting van PLATO volgt), een tegenstelling (ik volg even Prof.BETH[1]) tussen redelijke kennis (ἐπιστήμη) en andere kennis, dus kennis gegrond op ondervinding, overlevering of gezag, welke laatste eveneens wordt aangeduid door δόξα. De splitsing van de kennis bij PARMENIDES heeft dus een parallel bij PLATO, en het ligt voor de hand om aan te nemen dat δόξα bij beiden hetzelfde betekent. Doet men dit, dan wordt de vertaling van ἀλήθεια door <u>rationele kennis</u> (ENRIQUES, zie BETH l.c.), en niet door <u>waarheid</u> zonder meer, vanzelf plausibel.

Welke voorstelling wij ons ook van de denkbeelden van PARMENIDES mogen maken, het is duidelijk dat zijn tegenstelling van ἀλήθεια en δόξα een ontologische achtergrond heeft. De δόξα was op zijn allerbest maar halve kennis, en dat moet aan het object ervan hebben gelegen, d.w.z. aan de natuurverschijnselen. PARMENIDES heeft het ontologische raadsel van het bestaan niet opgehelderd, integendeel, hij heeft het gecompliceerder gemaakt door het te koppelen aan een zienswijze over waarheid en werkelijkheid, die onvermijdelijk verdere kennistheoretische problemen moest oproepen. Dit is alles wat ik over de leer van PARMENIDES durf te zeggen; voor mijn doel, - het verkrijgen van enig inzicht in de natuurkundige denkbeelden van PLATO -, is het voldoende.

Het is zeer waarschijnlijk dat de ten tijde van PARMENIDES (onder invloed van de Geneeskunde) opkomende belangstelling voor fysiologische kwesties, - en daarmee voor het waarnemingsproces -, de twijfel aan de zintuigelijke kennis en de behoefte aan kennistheoretisch inzicht heeft versterkt (of in het leven geroepen). Het is daarom zeer wel denkbaar, dat juist deze dingen PARMENIDES tot zijn leer hebben gebracht.

----

1) E.W. BETH, De Wijsbegeerte der Wiskunde van PARMENIDES tot BOLZANO, 1944, p.13

Ruimte en Tijd worden als onafhankelijke ("klassieke") begrippen aangenomen; wiskundig is de ruimte dan een (driedimensionale) Euclidische ruimte E^3.

Voor willekeurig variabele t kan een ruimtetijdstip $p=p\ (x_i, t)$ door 4 coördinaten x_i $(i=1,2,3)$, t, op een "wereldassenstelsel" X^4 worden betrokken; voor vaste t gaat X^4 (per definitie) in een Cartesisch assenstelsel X^3 over. Het vervangen van X^4 door een ander wereldassenstelsel $\overline{X}^4$ bewerkt een coördinatentransformatie

$$(1) \qquad x_i = e_i + e_{ik}\overline{x}_k \ , \quad (i=1,2,3), \quad t = \overline{t};$$

(de tijdcoördinaat dus onveranderd gelaten; transformatie geeft nl. toch geen afzonderlijke wiskundige problemen).

De sommatieconventie van EINSTEIN wordt in zo verre gevolgd, dat over dubbel optredende indices van 1 tot en met 3 wordt gesommeerd. De matrix $\|e_{ik}\|$ is orthogonaal (Euclidiciteit); als regel worden alleen eigenlijk orthogonale matrices $(|e_{ik}|=+1)$ beschouwd, die aan draaiïngen van $\overline{X}^4$ t.o.v. X^4 beantwoorden, en oneigenlijk orthogonale matrices $(|e_{ik}|= -1)$ (met een draaiïng plus spiegeling overeenkomend) dus uitgesloten.

De transformaties (1) bepalen voor variabele t een uitbreiding Γ_t van de "GALILEI-NEWTONgroep" der eenparige bewegingen van Cartesische assenstelsels t.o.v. elkaar. Voor vaste $t=\tau$ gaat de groep Γ_t over in een deler Γ_τ die correspondeert met de "groep van de bewegingen" (translaties, rotaties; de gelijkvormigheidstransformaties uitgesloten) van een figuur in E^3 t.o.v. zichzelf (de meetkundige terminologie is hier verwarrend: bij deze "bewegingen" speelt de tijd geen rol). Γ_τ is een 6-ledige LIEsegroep, Γ_t een "oneindige" groep; de transformaties van Γ_τ hangen af van 6 willekeurige constanten e_i, e_{ii}; die van Γ_t van 6 willekeurige functies e_i, e_{ii} van t; de grootheden e_i bepalen de relatieve translaties van de oorsprongen van X^4 en $\overline{X}^4$, de grootheden e_{ii} de relatieve draaiïngen van de assen.

Zij nu een veld bepaald door r onafhankelijke scalairen $\varphi_1 \ldots \varphi_2$, dus door r <u>invarianten</u>

$$\varphi_\nu(x_i,t) = \bar{\varphi}_\nu(\bar{x}_i,\bar{t}), \qquad (\nu=1,2,\ldots r)$$

voor Γ_τ resp. voor Γ_t. Dan bezitten deze beide groepen <u>differentiaalinvarianten</u> van $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r)$ (resp. door $I_1,I_2,\ldots$ en $K_1,K_2,\ldots$ aangeduid). D.w.z. er zijn differentiaaloperatoren F (veeltermen in $\partial/\partial x_i$ en $\partial/\partial t$) waarvoor

$$F(\varphi) = \bar{F}(\bar{\varphi})$$

(F kan op een willekeurig aantal scalairen uit φ werken; wiskundig is het voldoende de invarianten van één (dus willekeurige) scalair φ_i te kennen; deze wordt in het vervolg door φ zonder meer aangeduid). Bekende voorbeelden leveren

$$(2) \qquad F_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad F_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 .$$

Voor Γ_τ zijn deze diff. invarianten gemakkelijk op te sommen; de operator $\partial/\partial t$ speelt dan wegens t=const. geen rol, en men heeft alleen die van de operatoren $\partial/\partial x_i$ na te gaan. Wegens

$$\partial/\partial x_i = e_{ik}\, \partial/\partial \bar{x}_k , \quad \text{(zowel voor } \Gamma_\tau \text{ als } \Gamma_t)$$

ondergaat $\partial/\partial x_i$ eenzelfde transformatie als ("is cogrediënt met") de vector $y_i = e_{ik}\bar{y}_k$ onder invloed van een transformatie uit de (eigenlijk) orthogonale groep Γ_o.

Voor differentiaties van hogere orde is de situatie iets minder eenvoudig. Omdat een product van operatoren $\partial/\partial x_i$ dezelfde regels van commutativiteit en associativiteit volgt als gelden voor een product van vectorcomponenten y_i, is de transformatie van de operator

$$\partial^{\alpha+\beta+\gamma}/\partial x_1^\alpha\, \partial x_2^\beta\, \partial x_3^\gamma , \quad (\alpha+\beta+\gamma=n),$$

cogrediënt met die van het product

$$t_{\alpha,\beta,\gamma} = y_1^{\alpha}\ y_2^{\beta}\ y_3^{\gamma},$$

dus met een tensorcomponent van de n^e trap; $t_{\alpha,\beta,\gamma}$ is feitelijk een verkorte notatie voor

$$(3) \qquad t_{\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha \text{ maal}},\ \underbrace{2,\dots,2}_{\beta \text{ maal}},\ \underbrace{3,\dots,3}_{\gamma \text{ maal}}} \ .$$

Men kan dus alle differentiaalinvarianten I_k eeneenduidig afbeelden op "algebraïsche"draaiïngsinvarianten (d.w.z. invarianten voor Γ_0), n.l. op die welke veeltermen zijn in componenten van vectoren $x=(x_i)$, $y=(y_i)$, $z=(z_i)$, tensoren van de 2^e trap $t=(t_{i,j})$, $u=(u_{i,j})$, $v=(v_{i,j})$ (onverkorte notatie, dus niet volgens (3)), componenten van tensoren van de $3^e \dots n^e$ trap. De structuur van deze algebraïsche invarianten (en daarmee van de differentiaalinvarianten I) is volledig opgehelderd.

Voor een overzicht kan men zich het eenvoudigst beperken tot de algebraïsch-onafhankelijke invarianten. Iedere invariant van de eigenlijk-orthog. groep Γ_0^+ is nl. te splitsen in een z.g. even invariant (voor de volle orthogonale groep Γ_0, dus ook invariant voor spiegelingen), en een oneven invariant (voor Γ_0^+, maar niet voor Γ_0; bij een spiegeling krijgt deze een factor -1). (Zie b.v. H. WEYL, The classical groups, 1946, p.53). Het quadraat van een oneven invariant is echter noodzakelijk even; voor de onafhankelijke invarianten kan men zich daarom tot even invarianten beperken.

Een voorbeeld van een oneven invariant levert b.v. de uit 3 vectoren x,y,z gevormde "haakfactor"

$$[x,y,z] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

De even invarianten laten zich in inwendige producten van vectorcomponenten uitdrukken (of zich daarop eeneenduidig afbeelden); zo is

$$[x,y,z]^2 = \begin{vmatrix} (x_i x_i), & (y_i x_i), & (z_i x_i) \\ (x_i y_i), & (y_i y_i), & (z_i y_i) \\ (x_i z_i), & (y_i z_i), & (z_i z_i) \end{vmatrix}$$

volgens de productregel voor determinanten.

De onafhankelijke <u>even</u> invarianten (en deze vormen dus een volledig systeem) kan men eeneenduidig afbeelden op graphen. Met gebruik van een practische, maar chemisch onwezenlijke en zelfs onzinnige nomenclatuur wordt dan een graph beschouwd als de structuurformule van een molecuul, opgebouw uit eindig veel atomen met gegeven (geheel verzadigde) valenties. Daarbij beantwoordt

(a) aan ieder n-waardig atoom een afzonderlijke tensor van de n^e trap,

(b) aan iedere binding een sommatie over een index i, welke index optreedt (en alleen optreedt) bij de beide tensoren die aan de bij de binding betrokken atomen beantwoorden.

(c) Verder is het mogelijk dat 2 valenties van één atoom aan elkaar gebonden zijn, of dat tussen 2 atomen meer dan één binding bestaat.

(d) Een nulwaardig atoom, dus een scalaar φ, is zelf een invariant, maar kan geen deel van een andere homogene en irreducibele invariant uitmaken.

Van de invarianten (2) zijn de bijbehorende graphen aldus

$F_1 \sim$  , $F_2 \sim$.

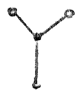
Men krijgt een stel onafhankelijke invarianten I_1 door voor iedere differentiatie-orde $n \geq 2$ te nemen één centraal n-waardig atoom, en hiervan de valenties te verzadigen met de radicalen

Aldus is er één invariant I van hoogste orde 1, nl. $I_1(1) \sim$; voor de hoogste orde 2 zijn er 5 invarianten, nl.

$I_1(2) \sim$; $I_2(2) \sim$; $I_3(2) \sim$;

$I_4(2) \sim$; $I_5(2) \sim$.

Voor de hoogste orde n=3 komen er 10 invarianten bij:

$I_1(3) \sim$  ,------ $I_{10}(3) \sim$ 

en voor willekeurige $n > 2$ zijn er $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ invarianten.

======

Conventies

(U) verwijst naar de uitgebreide syllabus.

Onder Natuurkunde (Fysica) wordt Natuurwetenschap in het algemeen verstaan, deze wordt onderscheiden in Experimentele en Theoretische Natuurkunde.

Een punt (in de ruimte) wordt aangegeven door x, een tijdstip door t, een ruimtetijdstip ("wereldpunt") door p=(x,t). De verzamelingen van alle punten, tijdstippen en ruimtetijdstippen worden aangeduid door X=(x), T=(t) en P=(p). Een Cartesisch assenstelsel op een tijdstip t wordt door $X_3=X_3(t)$ aangegeven; alle X_3 worden rechtsdraaiend genomen. Een eendimensionaal continuum van ruimtetijdstippen heet wereldlijn.

Een draaiing $\mathcal{P}$ heeft uitsluitend betrekking op een X_3; $\mathcal{P}$ wordt bepaald door (a) de richting van de (door de oorsprong van X_3 gedachte) draaiingsas, d.w.z. door de hoeken α, β, γ welke deze met de positieve halve assen maakt (met de normering $\alpha < \pi/2 \cup \alpha=\pi/2,\ \beta < \pi/2 \cup \alpha=\beta=\pi/2,\ \gamma=0$), (b) door de grootte van de draaiing in positieve zin (omdat de hoeken α, β, γ bij de draaiing niet veranderen is steeds $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}=I$). De stand van het gedraaide stelsel $\mathcal{P}X_3$ is dus alleen t.o.v. X_3 bepaald, en het is in het geval t=t' mogelijk dat 2 draaiingen $\mathcal{P}$, op verschillende stelsels $X_3(t)$, $X_3'(t')$ uitgevoerd, asrichtingen hebben die in de ruimte niet parallel zijn.

Het begrip gelijkgeplaatst (homothetisch) heeft een ruimere betekenis dan in de Meetkunde. Hiervoor zal het volgende gelden:

(a) het heeft uitsluitend betrekking op de plaats van 2 figuren (puntverzamelingen) A en A' t.o.v. een stelsel $X_3(t)$ resp. $X_3'(t')$(waarbij $t \neq t'$ mogelijk is);

(b) de positieve halve assen van X_3 en X_3' kunnen naar believen geacht worden homothetisch te zijn;

(c) is dit met deze halve assen het geval, dan is ieder tweetal punten $x=(x_i)$, $x'=(x_i')$ dan en alleen dan homothetisch als $x_i=x_i'$ (i=1,2,3);

(d) twee figuren A en A' zijn dan en alleen dan homothetisch, als ze uit homothetische punten zijn opgebouwd.

§ 1. Ruimte en Tijd

Er wordt uitgegaan van de klassieke voorstellingen over ruimte en tijd: de ruimte is een Euclidische R_3, de tijd "absoluut". Met dit laatste wordt hier het volgende bedoeld.

(a) De tijd is een eendimensionaal open continuum.

(b) Tussen ieder paar verschillende tijdstippen t_1 en t_2 bestaat een orderelatie (wat al uit (a) volgt), die door de term later wordt uitgedrukt. Maar terwijl op een rechte lijn de beide richtingen, die wij kunnen onderscheiden, voor ons denken gelijkwaardig zijn, is dit met de relatie later en zijn negatie vroeger niet het geval. Er bestaat hiertussen een evident verschil, dat zich (vermoedelijk) niet verder laat karakteriseren. In het begrip later steekt dus nog een afzonderlijk primitief begrip, - voorlopig zonder consequenties voor ons wereldbeeld-, dat in dit opzicht volledig vergelijkbaar is met het begrip rechtsdraaiend assenstelsel (voor verband met Tweede Hoofdwet, en idealistische interpretatie: zie (U)).

(c) Er geldt een congruentieaxioma, dat aan ieder drietal tijdstippen t_1, t_2, t_3 (met $t_1 < t_2$) eenduidig een tijdstip t_4 ($t_3 < t_4$) toevoegt, zodanig dat de intervallen (t_1, t_2) en (t_3, t_4) gelijk zijn. De tijd is dan in de toekomst oneindig.

Een soortgelijk axioma eist voor $t_2 < t_1$ een t_4 zó dat $t_4 < t_3$ en $(t_2, t_1) = (t_4, t_3)$, wat oneindigheid in het verleden impliceert.

In de z.g. bewegingszin hebben wij een vermogen tot het doen van zuiver ruimtelijke waarnemingen (dus b.v. niet met tastindrukken gemengd). Behalve indrukken van afstanden en richtingen (hypothese van RIEHL-HEYMANS [1]) levert deze zin ons waarnemingen over snelheden (waarmee wij bewegingen uitvoeren). Van al onze waarnemingskwaliteiten zijn dit de meest abstracte en "immateriële". Opmerkelijk is dat de bewegingswaarnemingen ook de enige zijn die (zelfs in quantitatief opzicht) niet afhankelijk zijn, in normale gevallen, van omstandigheden "buiten" ons, maar alleen van onze wil.

---

1). G. HEYMANS, Gesetze u. Elemente d.wissenschaftlichen Denkens, 3e druk 1915, p.219.

Alle andere waarnemingen worden door het bewustzijn meer of minder scherp in ruimte en tijd gelocaliseerd. Het ruimtelijk karakter is secundair (d.w.z. voor de waarneming niet wezenlijk) en dikwijls heel vaag (vandaar de zeer oude onderscheiding, - de termen alleen zijn van Locke -, in primaire en secundaire eigenschappen). Met name is de visuele ruimteopvatting secundair (zeker in de eerste betekenis van dit woord, en eigenlijk in beide betekenissen). - Een blindgeborene kan meetkunde leren. Een nieuwe bril geeft de eerste dagen moeilijkheden (b.v. bij het aflopen van een trap): de aanpassing van de nieuwe gezichtsindrukken aan het ruimteschema is nog niet voltooid. Sterk astigmaten, die cirkels steeds als cirkels hadden opgevat, interpreteerden deze na correctie van hun brekingsfout als ellipsen, en leerden eerst geleidelijk de "ware" vorm te herkennen [2]. Lijders aan aangeboren cataract gedroegen zich de eerste tijd na operatie nog geheel als blinden: zij moesten leren, hun gezichtsindrukken ruimtelijk te interpreteren [3].

Ik geef hiervan de interpretatie door de Idealistische Wijsbegeerte. Ruimte en tijd zijn dan dingen die wij ons voorstellen, hun eigenschappen worden door ons gedacht. Het zijn wat KANT "aanschouwingsvormen van onze geest" heeft genoemd (met welke term hij overigens bitter weinig verklaarde): ons bewustzijn is zó ingericht dat het in termen van ruimte en tijd moet denken, waar het de waarnemingen betreft. Op zichzelf zijn ruimte en tijd geen natuurkundige werkelijkheden, maar aspecten, vormen om met KANT te spreken, die krachtens de aard van ons waarnemingsvermogen aan alle verschijnselen eigen zijn. Wij kunnen dan ook ruimte en tijd scherp onderscheiden van de verschijnselen zelf, waar ze geen deel aan hebben noch door worden beïnvloed.

----

2) Ibid.p.210. HEYMANS verwijst naar J.v.d. BORG, Statistische en andere bijdragen tot de kennis van het astigmatisme, 1905, p.103-113.

3) Ibid.p.208.

Directe metingen van klassieke coördinaten zijn dus onmogelijk; het denkbeeld van GAUSS en RIEMANN, langs experimentele weg iets over de Meetkunde te leren, is onaanvaardbaar. Wat men aldus te weten komt zijn nooit eigenschappen van de ruimte of de tijd zelf, maar van veranderlijke fysische objecten, zoals "vaste lichamen" en "lichtstralen", waar niets exacts over te zeggen valt. Wat uiteraard heel iets anders is.

Een empirische weerlegging van de klassieke voorstellingen is dan ook niet mogelijk. A fortiori staat de (immers veel minder gepreciseerde) subjectivistische opvatting van ruimte en tijd buiten het natuurkundig onderzoek. Trouwens, ook de empirische begrippen van de fysici dragen (als alle begrippen) een subjectief karakter (voor de "objectiviteit" van waarnemingen, in die zin dat de observaties van verschillende waarnemers onderling kunnen corresponderen, vgl.§ 3).

Wat in de Relativiteitstheorie ruimte en tijd wordt genoemd heeft met de klassieke voorstellingen weinig meer dan de naam gemeen. Het verschil is zó groot dat andere termen voor de nieuwe begrippen (hun fysische juistheid even in het midden latend, zie (U)) passender waren geweest. - Overigens is een hinderlijke verandering van betekenis bij een ingeburgerde terminologie tegenwoordig een veel voorkomend verschijnsel. Bij Amerikaanse wijsgeren als JAMES en DEWEY betekent waar iets, dat daar naar Europese opvattingen werkelijk niets mee heeft uit te staan; de inhoud van dit begrip "is explained, and explained away".

Met dit al blijft de tegenwerping, dat een experimentator met de "schimmige" klassieke coördinaten niets beginnen kan, volkomen juist. Alle proefondervindelijke wetten hebben betrekking op experimenteel gedefinieerde afstanden en tijdsverschillen: directe metingen van de overeenkomstige klassieke grootheden zijn immers uitgesloten. Het maakt zelfs voor de Experimentele Natuurkunde feitelijk niets uit, of ruimte en tijd in klassieke zin er "zijn" of "niet zijn" (de empiristische opvatting dat het klassieke schema weerlegbaar, - of reeds weerlegd -, is, valt echter m.i. hiermee niet te verenigen). - Voor de kromming van de ruimte zie (U).

--

Maar geldt de onuitvoerbaarheid ook voor indirecte metingen, gebaseerd op theoretische gegevens (over b.v. vaste voorwerpen of lichtstralen)? A priori laat zich over empirische begrippen niets, dus zeker niets exacts, beweren. Maar dit is zeer wel mogelijk voor aprioristische natuurkundige begrippen, zoals uit het vervolg moge blijken. - Reeds de meting van de tijd is op het aprioristische causaliteitsprincipe gebaseerd: iedere cyclus van een periodiek verschijnsel vergt evenveel tijd (de moeilijkheid van alle tijdmetingen is, een, - overigens willekeurig -, verschijnsel zo nauwkeurig mogelijk periodiek te maken, dus de initiële toestand later zo goed mogelijk te benaderen). - Een Cartesisch assenstelsel, waarop de verschijnselen worden betrokken, heeft zelf geen natuurkundige realiteit. Daarom kan de beweging van een X_3 ten opzichte van de omringende natuur op het beloop van de verschijnselen geen invloed hebben: een ingrijpend axioma a priori.

Hier schijnt een gelegenheid te bestaan (maar ook niet meer dan dat), die de moeite van het uitwerken zeker waard is: de klassieke begrippen over ruimte en tijd spelen een rol in zekere aprioristische axioma's, die belangrijke theoretische informatie bevatten.

§ 2. Gelijkwaardigheid

De beschouwingen van deze paragraaf zijn onvoldoende gepreciseerd en daardoor onexact. Dit neemt niet weg dat ze voor bepaalde kwesties van belang zijn, en zelfs in hun onexacte vorm een vrij radicale wijziging van natuurkundige opvattingen kunnen vergen.

Alle axioma's die nog besproken worden, en die tevens a priori zijn (dus geen inductieve generalisaties), vallen (in zekere zin) onder één gezichtspunt dat ik het equivalentie-axioma noem:

Axioma I. Alle ruimtetijdstippen p zijn voor het natuurbeeld gelijkwaardig [4].

---

4) Bij niet-exacte beweringen wordt een specificatie van de kennistheoretische aard weggelaten.

Volgens een mededeling van ALEXANDER van APHRODISIAS (ca. 200 n.Chr.) komt de voorstelling van de <u>natuurkundige</u> equivalentie van punten reeds bij de Pythagoreeërs voor [5]. Voor zo ver ik zie levert de volgende vertaling niet meer dan een paar moeilijkheden op, half-wiskundige en half-filologische.

"PLATO, en ook de Pythagoreeërs, leerden dat de getallen elementen van de dingen zijn, omdat het hun toescheen dat ~~ten~~ H eerste een element niet samengesteld is, en ~~<verder>~~ H de bouwstenen (πρῶτοι) van de lichamen vlakken zijn (want die zijn eenvoudiger en van nature niet samengesteld). Om dezelfde reden zijn de lijnen bouwstenen van vlakken, en punten die van lijnen. De wiskundigen zelf noemen deze punten symbolen van de eenheid, symbolen die in alle opzichten onsamengesteld zijn en <u>onderling niets op elkaar voor hebben</u> (οὐδὲν πρὸ αὑτῶν ἔχοντα) : de eenheden nu zijn getallen, de getallen vormen dus de bouwstenen van de dingen".

Het staat wel vast dat hier van natuurkundige lichamen en niet van meetkundige figuren sprake is: anders zou niet van <u>elementen van de dingen</u> (ἀρχὰς τῶν ὄντων) worden gesproken. De grondbetekenis <u>grensvlak</u> voor ἐπίπεδον zou de passage vrij onbegrijpelijk maken: er zouden dan maar een beperkt aantal grenspunten overblijven om als "elementen" van een lichaam te fungeren. Niet duidelijk is of de Pythagoreeërs zich de punten binnen een lichaam discreet dachten (als een soort atomen) of als een continuum (vgl. ARISTOTELES, Met.XIV 3, 1090a, 20-25).

Ik kom terug op Axioma I: er zijn geen punten waarin de natuur zich uitzonderlijk gedraagt. Maar wat is uitzonderlijk, wat gelijkwaardig? Er is niet gespecificeerd in <u>welke</u> opzichten gelijkwaardigheid bestaat: daardoor is I onexact. Bij latere axioma's, waarvan de grondgedachte reeds door Axioma I is uitgedrukt, en die daar dus eigenlijk bizondere gevallen van zijn, wordt inderdaad een specificatie gegeven. Het leek daarom niet onjuist, Axioma I (ondanks de onexactheid) als centraal gezichtspunt apart te vermelden.

Men kan geen equivalentie eisen voor "alle" predicaten: deze vormen geen gedefinieerde verzameling. Bovendien is voor

---

5) RITTER-PRELLER, Hist.Philos.Gr., 9e druk, 1913, nr. 76.

bepaalde predicaten gelijkwaardigheid niet mogelijk: een niet-constante veldgrootheid kan b.v. niet in alle punten x maximaal zijn. Daarom wordt de gelijkwaardigheid gepostuleerd voor een beperkt aantal, welomschreven eigenschappen, nl. aan zulke die markante trekken van het natuurbeeld bepalen. Helaas is dit een subjectieve appreciatie. Men kan wel enigszins aanvoelen wat er mee bedoeld wordt (U), maar exact is ook dit niet. Voorbeelden zullen naar ik hoop de bedoeling verduidelijken; voor topologische eigenschappen b.v. is er geen enkele moeilijkheid, maar bij functietheoretische voorwaarden zijn deze er nog wel.

Uit I volgen een aantal andere (onexacte) beweringen die voor de toepassingen toch niet onverschillig zijn.

Axioma II. Alle rechte lijnen zijn voor het natuurbeeld gelijkwaardig.

Immers, gedroeg de natuur zich op een lijn l uitzonderlijk, dan was dit met ten minste één punt x op l het geval, in strijd met I. Om een soortgelijke rede geldt

Axioma III. Alle platte vlakken zijn voor het natuurbeeld gelijkwaardig.

Axioma IV. Alle richtingen zijn voor het natuurbeeld gelijkwaardig.

Immers, richting kan geïdentificeerd worden met een tweedimensionale verzameling van evenwijdige rechten.

Axioma V. Alle Cartesische assenstelsels (hoe ook t.o.v. elkaar bewegend) zijn gelijkwaardig.

Men kan zo voortgaan: er zijn geen uitzonderlijke cirkels, ellipsen, bollen, enz. De informatie die deze axioma's aan een gepreciseerd natuurbeeld verschaffen (zeg: een veld door r onafhankelijke scalairen beschreven; r is natuurlijk voor alle p gelijk, vlg. Axioma I) moet zeer groot zijn.

Ook tegen de kunstmatige tegenstelling van materie en veld levert Axioma I een argument. Dit verschilt van het bezwaar dat MACH tegen de "lichamen" maakte: voor MACH was een lichaam geen afzonderlijk ding, maar een complex van indrukken, die elk apart veranderlijk zijn [6]. De consequen-

---

6) E. MACH, Die Mechanik, 4e druk 1901, p.512.

tie is een extreme veldtheorie, met eliminatie van de mechanische begrippen.

§ 4. Natuurkundige toestanden

Het toestandsbegrip wordt als primitief beschouwd; het begrip kan dus niet worden gedefinieerd, ten hoogste verduidelijkt.

Alle natuurkundige entiteiten worden in ruimte en tijd gedacht. Dan heeft het ook zin de entiteiten te beschouwen, die zich op een tijdstip t in een open ruimtelijk gebied A bevinden. De verzameling van deze entiteiten wordt de <u>toestand</u> C(A,t) in A op het tijdstip t genoemd. Dit begrip omvat dus ook zulke entiteiten die mogelijk door het experimentele onderzoek nog niet zijn ontdekt; het heeft daardoor het voordeel nooit te beperkt (en daardoor schematisch) te zijn.

Een toestand is misschien het best te vergelijken met het Zijnde van PARMENIDES.

Hier worden alleen toestanden beschouwd in open bollen met vaste straal $\rho > 0$. (De waarde van ρ is willekeurig en verder niet van belang). Een dergelijke toestand $\mathbf{s}$ is dan eenduidig bepaald door het middelpunt x en het tijdstip t van optreden; men kan schrijven

(1) $$\cancel{s} = \mathbf{s}(p), \quad p=(x,t).$$ / s

De verzameling $S=(s)=\{s(p)\}_p$, uitgestrekt over alle p, heet de <u>toestandenruimte</u>. De toestand $C(t)=C(X,t)$ heet de toestand in het Heelal op het tijdstip t.

§ 5. Assenstelsels

Om aan coördinaten een natuurkundige zin te geven, is het nodig deze met toestanden s(p) in verband te brengen. Voorlopig zijn de toestanden C en s echter fysische en geen wiskundig bepaalde entiteiten.

<u>(a) Tijdschaal</u>

De tijd t wordt quantitatief vastgelegd door een schaal met vast nulpunt en vast eenheidspunt; dit is mogelijk door

2 na elkaar optredende toestanden in het Heelal met C(0) en C(1) te identificeren.

Dit levert een moeilijkheid in het lang niet ondenkbare geval, dat er <u>in het Heelal niets verandert</u> (locaal is dit niet mogelijk, maar globaal zou dit wel kunnen; althans in een aftelbare, overal dichte verzameling van tijdstippen zou de situatie in het Heelal zich exact kunnen herhalen). In dit geval moet een tijdschaal met behulp van locale situaties worden vastgelegd, wat niet zonder meer gebeuren kan.

<u>(b) Cartesisch assenstelsel</u>

Voor willekeurige vaste t kan een willekeurig punt x worden vastgelegd door een Cartesisch assenstelsel $X_3(t)$; $X_3(t)$ moet dan door de op dat tijdstip verwerkelijkte toestanden worden bepaald. Men kan b.v. door $s(x_1,t)$ het punt x_0 met de oorsprong identificeren, door $s(x_1,t)$ het punt x_1 met (1,0,0) mits de ruimtelijke afstand $\| x_1 - x_0 \| = 1$ is, en door $s(x_2,t)$ het punt x_2 met (0,1,0), mits $\| x_2 - x_0 \| = \| x_2 - x_1 \| = 1$.

Zoals gezegd zijn de toestanden s(p) nog geen quantitatieve begrippen: het aanbrengen van een tijdschaal op een X_3 is alleen een <u>gedacht</u> proces (wat het bezwaar van exacte herhalingen in het Heelal zou opheffen). Wel kan een tweede tijdschaal of een andere $X_3'(t)$ exact ten opzichte van de reeds ingevoerde worden vastgelegd. Een transformatie $t' = \alpha t + \beta$ voert echter niet op verdere problemen en blijft daarom achterwege; de tijd t is dus in alle beschouwingen dezelfde.

<u>(c) Wereldassenstelsel</u>

Kiest men voor ieder tijdstip t een $X_3(t)$, dan wordt een <u>wereldassenstelsel</u> X_4 verkregen waar ieder ruimtetijdstip p=(x,t) op kan worden betrokken.

Terwijl bij gegeven t de keuze van een $X_3(t)$ geheel willekeurig was, is dit met die van $X_4 = \{X_3(t)\}_t$ niet meer het geval. Het heeft nl. zin X_4 zó te kiezen, - en dit zal steeds worden gedaan -, dat de verschijnselen, op X_4 betrokken, <u>continu</u> veranderen. De mogelijkheid daartoe berust op een afzonderlijk axioma, dat later wordt ingevoerd.

Nog later zal X_4 aan de zwaardere conditie worden onderworpen, dat veldgrootheden φ_k $(k=1,2,\dots r)$, op X_4 betrokken, naar t differentieerbaar zijn (wat een nieuw axioma vereist). - Voorlopig is X_4 echter geheel willekeurig.

(d) Locaal assenstelsel

Is X_4 een wereldassenstelsel en $p=(x,t)$ willekeurig, dan kan steeds een Cartesisch assenstelsel $X_3^*(t)$ worden ingevoerd met x als oorsprong. Dit locale stelsel $X_3^*(t)$ is uit $X_3(t)$ te verkrijgen (a) door een translatie van X_3, waardoor de oorsprong in **x** valt, (b) door vervolgens het stelsel aan een rotatie P te onderwerpen. Omdat de translatie nu van geen belang is, wordt

(2) $$X_3^*(t) = P X_3(t)$$

geschreven.

§ 6. Natuurkundige Afstand

(a) Localisatie en vergelijking

Volgens het bovenstaande wordt het object van het natuurkundig onderzoek gevormd door de toestanden $C(A,t)$, of, - feitelijk zonder beperking van de algemeenheid -, door de speciale toestanden $s(p)$. Vermoedelijk zal een fysicus tegen deze voorstelling geen bezwaar maken.

Minder triviaal is de vraag, waarin het onderzoek van dat object dan wel bestaat. Er wordt gesteld dat dit (voor alle natuurwetenschappen) op de twee volgende dingen neerkomt: (1) toestanden $s(p)$ worden in ruimte en tijd gelocaliseerd, (2) toestanden worden op hun meerdere of mindere natuurkundige overeenkomst vergeleken.

Alle natuurkundige metingen komen neer op vergelijkingen. Als b.v. in een proef de wijzervan een instrument een zekere stand inneemt, dan heeft de aflezing ervan op zichzelf voor de experimentator geen enkele waarde. Maar: hij heeft zijn instrument (tevoren of daarna of beide) geijkt, en diezelfde wijzer moest tientallen malen langs de schaal lopen, onder verschillende of ongeveer dezelfde omstandigheden, om inzicht in de werking van het instrument te krijgen, en om aan de aflezing bij de beslissende proef wetenschappelijke waarde te verlenen. De schaal waarlangs de wijzer loopt is eigenlijk maar bijzaak, een hulpmiddel om de waarneming wat te verfijnen. Hoofdzaak is dat de wijzeruitslagen, bij echte proeven en bij ijkingen verkregen, onderling worden vergeleken. - Dit voorbeeld is (natuurlijk) met willekeurig veel andere te vermeerderen.

De natuurkundige vergelijkbaarheid van toestanden is dus het beginsel waar alle inductieve onderzoek op berust. Dikwijls vindt die vergelijking alleen plaats door woordaanduidingen. Maar feitelijk is het intermediair van de taal hierbij overbodig (evenals de schaal); bovendien draagt dit intermediair allerminst tot grotere nauwkeurigheid bij.

Er is dus een dubbele ordeningsmogelijkheid van de toestanden s(p):(1) die in ruimte en tijd, (2) die naar meerdere of mindere overeenkomst van de toestanden zelf. Bij de natuurkundige vergelijking spelen tijd of plaats van de beschouwde toestanden geen rol. Het is deze dubbele ordening, die de specifieke problemen van de Natuurkunde mogelijk maakt.

(b) Georiënteerde toestanden

Aan het natuurkundig vergelijken van twee toestanden

(3) $$s = s(p), \quad s'=s(p'), \qquad p=(x,t), \; p'=(x',t'),$$

is een kleine moeilijkheid verbonden. Wordt s' in verschillende standen vergeleken met een vaste stand van s, dan zal dit tot verschillende resultaten voeren. Als men b.v. de Aarde vergeleek met een exacte copie van zichzelf, zó dat de stand van de copie aan een translatie van het origineel beantwoordde, dan zou dit gelijkheid van alle gelijkgeplaatste delen van de Aarde en van de copie opleveren. Vergeleek men, na van de copie de polen te hebben verwisseld, dan zou deze gelijkheid verdwenen zijn: de delen die eerst homothetisch waren zijn het de tweede maal niet meer.

De standen (oriënteringen) van s', waarvan hier sprake was, ontstaan niet door draaiingen van s' t.o.v. de omringende Natuur, - een toestand laat zich op die wijze niet draaien of verplaatsen -, maar door een andere keuze van een locaal assenstelsel. Dit leidt tot de volgende eenvoudige beschouwing.

Def.I. Onder een georiënteerde toestand $\sigma = \sigma(p, X_3^*)$ wordt de situatie verstaan, die ontstaat door s(p) op een locaal assenstelsel $X_3^*(t)$ te betrekken.

Het vergelijkingsproces (niet het resultaat daarvan!) kan nu eenduidig worden vastgelegd door

Definitie II. Bij het vergelijken van 2 georiënteerde toestanden σ, σ' worden de overeenkomstige positieve halve assen van de locale stelsels $X_3^*, X_3^{*}{}'$ geacht aan elkaar te beantwoorden, anders gezegd: homothetisch te zijn (vandaar dat alle assenstelsels eenzelfde draaiingsrichting moesten hebben).

Na invoering van een wereldassenstelsel X_4 is, volgens (2),

$$X_3^*(t) = P X_3(t), \quad X_3^{*}{}'(t') = P' X_3(t').$$

Een vergelijking van 2 georiënteerde toestanden σ, σ' is dus eenduidig bepaald door de keuze van X_4 en van 2 rotaties P, P'; het resultaat van de vergelijking zal hier ook van afhangen.

Notatie. Voor $\sigma \equiv \sigma(p, P X_3)$ wordt $P^*\sigma \equiv \sigma(p, P^* P X_3)$ geschreven (het teken $\equiv$ wordt hier gebruikt om de identiteit van niet-wiskundige entiteiten aan te duiden).

(c) Afstand $\delta(\sigma, \sigma')$

Hoe moet het resultaat van de natuurkundige vergelijking van σ en σ' worden geformuleerd? Het is in overeenstemming met een intuïtieve opvatting over vergelijken in het algemeen, dit resultaat door één getal uit te drukken: alle vergelijken betreft een meer of minder, ook als een exacte schaal ontbreekt. Ik stel dat overal waar vergeleken kan worden, een afstandsbegrip op zijn plaats is, dat aan de gebruikelijke afstandsrelaties voldoet. Daarmee wordt de dimensie van de verzameling der vergelijkbare entiteiten geheel in het midden gelaten, en er blijft bij het invoeren van een afstand nog een grote mate van vrijheid. Dit voert op het volgende axioma.

Axioma VI (a priori). Voor ieder paar georiënteerde toestanden σ, σ' bestaat er een afstand $\delta(\sigma, \sigma')$ waarvoor geldt

$$(4) \qquad \begin{cases} \delta(\sigma,\sigma) = 0; \quad \delta(\sigma,\sigma') \geq 0; \quad \delta(\sigma,\sigma') = \delta(\sigma',\sigma); \\ \delta(\sigma',\sigma'') \leq \delta(\sigma,\sigma') + \delta(\sigma,\sigma''), \text{ (voor ieder drietal } \sigma,\sigma',\sigma''). \end{cases}$$

$\delta(\sigma,\sigma')$ hangt (uiteraard) af van p, p', X_4, P en P', maar is overigens nog in hoge mate onbepaald.

Met $\delta(\sigma,\sigma')$ is een tweede irreducibel natuurkundig begrip verkregen.

Stelling I. Voor een willekeurige rotatie P^* en voor ieder paar σ, σ' geldt

$$\delta(P^*\sigma, P^*\sigma') = \delta(\sigma,\sigma'). \tag{5}$$

Bewijs. Volgens de definities van draaiing en homothetie van assenstelsels zijn $P^*X_3^*$, $P^*X_3^{*\prime}$ dan en alleen dan homothetisch als ook X_3^*, $X_3^{*\prime}$ dat zijn. Wegens de notatie $P^*\sigma(p,X_3^*) \equiv \sigma(p,P^*X_3^*)$ is dan de vergelijking van $P^*\sigma$, $P^*\sigma'$ identiek met die van σ, σ'.

Door in (5) $P^* = P^{-1}$ te stellen blijkt $\delta(\sigma,\sigma') = \delta(P^{-1}\sigma, P^{-1}\sigma')$, terwijl $P^{-1}\sigma \equiv \sigma(p, IX_3)$. Bij de vergelijking van willekeurige georiënteerde toestanden is het dus mogelijk één locaal assenstelsel X_3^* zó te kiezen, dat de asrichtingen met die van $X_3(t)$ samenvallen. Iedere vergelijking is dus te vervangen door een genormeerde vergelijking waarbij $P=I$. Om accenten te vermijden wordt in het vervolg $P'=I$ genomen, wat uiteraard op hetzelfde neerkomt.

Axioma VII (a priori). Er is een wereldassenstelsel X_4, zó dat $\delta(\sigma,\sigma')$ voor alle p, p' en P een continue functie is van p, p' (d.w.z. van x, x', t, t') en van P. [7]

Stelling II. Het continuïteitsaxioma VII geldt voor ieder wereldassenstelsel $\overline{X}_4$ dat zich continu t.o.v. X_4 beweegt.

Bewijs. Laten de coördinaten $(\overline{x}_i, \overline{t})$ op $\overline{X}_4$ bepaald zijn door

$$\overline{x}_i = e_i(t) + e_{ik}(t)x_k, \quad (i=1,2,3),$$
$$\overline{t} = t,$$

waarbij de matrix (e_{ik}) orthogonaal is, en e_i, e_{ii} continue functies zijn van t (x_i en t zijn de coördinaten met betrekking tot X_4). Worden dan σ, σ' op $(\overline{X}_4, \overline{P})$ betrokken in plaats van op (X_4, P), dan zijn (x_i, t, P) continue functies van $(\overline{x}_i, \overline{t}, \overline{P})$, dus ook $\overline{\delta}(\sigma,\sigma') = \delta(\sigma,\sigma')$ een continue functie van $\overline{p}, \overline{p}', \overline{P}$.

---

7) LEIBNIZ: Natura non facit saltus.

(d) Afstand $d(s,s')$

Van het begin af liet zich vermoeden dat er een afstandsbegrip mogelijk moest zijn dat onafhankelijk is van X_4 en van oriënteringen t.o.v. locale assenstelsels. De natuurkundige afstand werd immers opgevat als een begrip dat alleen afhing van de fysische toestand in de vergeleken bollen. De volgende definitie levert een afstand van de gezochte gedaante.

Definitie III. Als $\sigma = \sigma(p, PX_3)$ en $\sigma' = \sigma(p', IX_3')$ twee oriënteringen zijn van s en s' wordt gesteld

$$d(s,s') \doteq \min_{P^*} \delta(P^*\sigma, \sigma').$$

Stelling III. Voor alle s,s' bestaat $d(s,s')$ en gedraagt zich als een afstand.

Bewijs. (a) Uit het continuïteitsaxioma volgt dat er een P_o^* is, waarvoor het minimum $d(s,s')$ wordt bereikt:

$$(5) \qquad d(s,s') = \delta(P_o^*\sigma, \sigma') \geq 0.$$

Het is denkbaar dat P_o^* niet eenduidig vastligt; op de waarde van $d(s,s')$ heeft dit geen invloed.

(b) Voor $P^*=I$, $p=p'$, $X_3=X_3'$ is $\sigma \equiv \sigma'$ en $\delta(P^*\sigma,\sigma') = \delta(\sigma,\sigma)=0$, zodat ook $d(s,s)=0$.

(c) Uit definitie III, stelling I en (4) volgt

$$d(s,s') = \min_{P^*} \delta(P^*\sigma, \sigma') = \min_{P^*} \delta(\sigma, P^{*-1}\sigma') =$$

$$= \min_{P^*} \delta(\sigma, P^*\sigma') = \min_{P^*} \delta(P^*\sigma', \sigma) = d(s',s).$$

(d) Laten s,s' en s'' en P_1 willekeurig zijn, en $\sigma, \sigma', \sigma''$ oriënteringen van s,s' en s''. Dan is

$$d(s',s'') = \min_{P^*} \delta(P^*\sigma', \sigma'') \leq \min_{P^*} \{\delta(P_1\sigma, P^*\sigma') + \delta(P_1\sigma, \sigma'')\}$$

$$= \min_{P^*} \delta(P_1\sigma, P^*\sigma') + \delta(P_1\sigma, \sigma'').$$

Kies nu P_1 zó dat $\delta(P_1\sigma,\sigma'')$ minimaal wordt; dit levert

$$d(s',s'') \leq \min_{P^*} \delta(P^{*-1}P_1\sigma, \sigma') + d(s,s'') = d(s,s') + d(s,s''),$$

q.e.d.

De gebruikelijke voorwaarden, aan een afstand tussen 2 punten x,y van een ruimte opgelegd, gaan van het bestaan van een gelijkheidsrelatie tussen x en y uit (hoewel dit niet strikt noodzakelijk is). Het is practisch ook voor toestanden in bollen een gelijkheidsrelatie achteraf in te voeren:

Definitie IV. Twee toestanden s en s' zijn dan en alleen dan gelijk (notatie s=s') als d(s,s') = 0.

Hoewel de toestanden s nog steeds niet als wiskundige entiteiten zijn omschreven, is hier toch de notatie s=s' gekozen. Het is nl. denkbaar dat $s(p) = s(p')$, $p \neq p'$; in dit geval wordt van niet-triviale gelijkheid (van toestanden) gesproken. Voor de triviale gelijkheid $s(p) \equiv s(p)$ zal het identiteitsteken worden gereserveerd. Overigens wordt voorlopig niets gepostuleerd over het al of niet voorkomen van niet-triviale gelijkheid. Ook de hierboven geopperde mogelijkheid, dat er rotaties P^* zouden kunnen zijn zodanig dat $\delta(\sigma, P^*\sigma)=0$ wordt voorlopig open gelaten.

Het is duidelijk dat de niet-triviale gelijkheid aan de eigenschappen van de gelijkheidsrelatie, van reflexief, commutatief en transitief te zijn, voldoet.

§ 7. Dimensie van de toestandenruimte

De topologische structuur van de toestandenruimte S moet ingewikkelder zijn dan die van R_4. Indien S nl. topologisch op R_4 kon worden afgebeeld zouden niet alleen niet-triviale exacte herhalingen van toestanden s uitgesloten zijn (wat op zichzelf geen bezwaar zou vormen), maar ook de niet-triviale approximatieve herhalingen (d.w.z. willekeurig scherpe benaderingen van s(p) elders, dus buiten een zekere ruimtelijk - tijdelijke omgeving van p). Dit laatste zou vrijwel zeker met de ervaring in strijd zijn. - Ook als men geen exacte herhalingen toelaat, en daarom b.v. de natuurkundige gelijkheid van verschillende electronen verwerpt, moeten zich toch, bij hun enorme aantal in de Natuur, uiterst scherpe herhalingen van electronen voordoen. In een oneindig Heelal met aftelbaar veel electronen (de Aarde met naaste omgeving mag geen uitzonderingspositie in-nemen in het Heelal, zie Axioma I!) zouden die herhalingen willekeurig scherp moeten zijn.

Dit leidt allereerst tot de vraag of S een dimensie heeft, en zo ja, welke. Het eerste punt is eenvoudig. Door de invoering van een afstand $d(s,s')$ wordt S tot een <u>metrische ruimte</u>. Verder geldt

<u>Stelling IV</u>. S is separabel.

<u>Bewijs</u>. Beschouw de verzameling (p_r) van de ruimtetijdstippen $p_r=(x_r,t_r)$ met rationale coördinaten, betrokken op een zeker wereldassenstelsel X_4. Zij $s_r=s(p_r)$; dan is (p_r) aftelbaar en de verzameling (s_r)(vanwege mogelijke exacte herhalingen van toestanden) ten hoogste aftelbaar.

Aan een willekeurige toestand s beantwoordt dan ten minste één ruimtetijdstip p, zó dat $s=s(p)$; p is noodzakelijk een grenspunt van (p_r). Volgens het continuïteitsaxioma is dan ook $s=s(p)$ een grenspunt van (s_r). Dus ligt (s_r) dicht in S.

Hieruit volgt dat S een dimensie heeft. De bepaling van dim S vereist echter enkele verdere axiomatische gegevens. Bij deze axioma's spelen <u>empirische</u> overwegingen een rol, zoals die van zoëven over approximatieve herhalingen.

<u>Axioma VIII</u> (inductie uit empirie; ook a priori?).

Laten de ruimtetijdstippen p betrokken zijn op een wereldassenstelsel X_4 waarvoor het continuïteitsaxioma geldt (wat in het vervolg steeds stilzwijgend wordt aangenomen). Dan liggen de originelen p van een toestand s geïsoleerd in P. $N_j \leq N(A)$

<u>Opmerking.</u> Kennelijk is dit "<u>axioma van de veranderlijkheid</u>" invariant voor een continue transformatie $X_4 \to X_4'$. Het ~~is (voorlopig) niet uitgesloten dat het~~ aantal originelen N_j van de toestand s_j ($j=1,2,\ldots$) binnen een zekere omgeving A van een ruimtetijdstip p voor $j \to \infty$ ~~on~~begrensd is (verg.(U)).

<u>Toelichting.</u> Een oneindige rij originelen p_k betekent ten minste een aftelbare rij <u>exacte</u> herhalingen $s=s(p_k)$, ($k=1,2,\ldots$)(alles in een zekere 4-dimensionale omgeving van een ruimtetijdstip p).

Een aftelbare rij <u>simultane</u> herhalingen zou een zware eis van <u>fysische</u> <u>homogeniteit</u> inhouden, die slecht met de ervaring is te verenigen; ook Axioma I geeft aanleiding tot moeilijkheden.

Een aftelbare rij <u>successieve</u> herhalingen betekent, dat deze op aftelbaar veel tijdstippen t_k in een eindig interval moeten plaatsvinden. Het is geen beperking van de algemeenheid, de middelpunten x_k van de bollen $s(p_k)$ (of een aftelbare deelverzameling daarvan) in de oorsprong O van X_4 te leggen. Nu rijzen er moeilijkheden met de causaliteit: de toestandsveranderingen in een punt (in casu O) worden bepaald door de toestand in de omgeving ervan. Normeert men nog $s(O,0)=s$, dan volgt uit $s(O,t_k) = s$ dat ook $s(O,t_j+t_k)=s$ voor alle j en k. Is $t=0$ een verdichtingspunt van de tijdstippen t_k (geen beperking algemeenheid!) dan volgt hieruit dat de punten t waarvoor $s(O,t)=s$ dicht op het tijdcontinuum liggen. Volgens het continuïteitsaxioma zou er dan in een omgeving van O in het geheel geen verandering optreden, wat alweer kwalijk met de ervaring en met Axioma VIII verenigbaar is.

Inderdaad is het causaliteitsprincipe uit Axioma VII af te leiden (zie (U)).

<u>Axioma IX</u> (inductie uit empirie)

Zij p_o een willekeurig origineel van een toestand s_o. Voor voldoend kleine ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_o(s_o))$ is dan het gebied (= samenhangende open puntverzameling) $P^*(p_o, \varepsilon)$ van de originelen p, waardoor $s=s(p)$, $d(s,s_o) < \varepsilon$, van begrensde diameter in P.

<u>Toelichting</u>. Ook hier bestaat invariantie voor een continue transformatie $X_4 \to X_4'$. Axioma IX drukt de <u>onbestendigheid</u> van de dingen uit. Er is niet alleen veranderlijkheid in die zin, dat het aantal exacte copieën in een beperkte omgeving beperkt is; maar ook gaan de afwijkingen van een uitgangspunt een zekere maat te boven (de notatie ε is misleidend: ε hoeft niet zeer klein te zijn, de voorwaarde $\varepsilon < \varepsilon_o(s_o)$ was nodig omdat mogelijk $d(s,s_o)$ begrensd kon zijn; beter is $\sup_{(p,p')} d(s,s')=\infty$ afzonderlijk te postuleren).

Partikels (b.v. electronen) hebben dan een eindige levensduur; een termijn wordt echter niet gesteld. Ook voor continua geldt iets dergelijks: men kan een golf op zee een tijd vervolgen; dan wordt hij overspoeld of hij vervlakt, is als individu niet meer terug te vinden. - Axioma IX is in goede overeenstemming met de ervaring. Aprioristische argumenten kan ik er niet voor vinden.

Stelling V. dim $S=4$.

Bewijs. De afstand van 2 ruimtetijdstippen p, p' (op X_4 betrokken) kan men zich zo nodig door

$$\| p-p' \| \doteq \max_{i=1,2,3} (|x_i - x_i'|, |t-t'|)$$

bepaald denken.

Laat $s_0 \varepsilon S$ willekeurig zijn, en

$$S(s_0, \varepsilon) \doteq \{ s \} \lfloor d(s, s_0) < \varepsilon, \ \varepsilon > 0 \rfloor$$

een ε-omgeving van s_0 in S (ε wordt weer voldoende klein genomen, i.e. zó klein dat $S-S(s_0, \varepsilon)$ niet leeg is).

Zij $P(p_0, \varepsilon)$ het origineel van $S(s_0, \varepsilon)$ in P (waarbij een punt s mogelijk verschillende originelen p kan hebben; p_0 is een origineel van s_0). Dan is $S(s_0, \varepsilon)$ een open verzameling en hetzelfde geldt, volgens het continuïteitsaxioma, voor $P(p_0, \varepsilon)$.

Ieder punt p van $P(p_0, \varepsilon)$ heeft een 4-dimensionale omgeving die tot $P(p_0, \varepsilon)$ behoort, met een (4-dimensionale) inhoud $\neq 0$. Volgens het axioma van de onbestendigheid zijn deze omgevingen begrensd; hun aantal is dus ten hoogste aftelbaar. Bijgevolg is $P(p_0, \varepsilon)$ splitsbaar in ten hoogste aftelbaar veel disjuncte 4-dimensionale gebieden:

$$P(p_0, \varepsilon) = \sum_k P_k(p_0, \varepsilon).$$

Volgens Axioma VIII beantwoordt aan $P_0(p_0, \varepsilon)$ voor voldoend kleine ε eeneenduidig een open verzameling $S_0(s_0, \varepsilon)$; wegens de continuïteit is deze afbeelding topologisch, dus $S_0(s_0, \varepsilon)$ 4-dimensionaal. Wegens $S_0(s_0, \varepsilon) \subset S(s_0, \varepsilon)$ is dan $S(s_0, \varepsilon)$ ten minste 4-dimensionaal.

Wegens Axioma VIII en de begrensdheid van $\overline{P}_k(p_0, \varepsilon)$ liggen er in $\overline{P}_k(p_0, \varepsilon)$ slechts eindig veel originelen p van een willekeurige toestand s. Uit de continuïteit van $s(p)$ volgt dan dat $\overline{P}_k(p_0, \varepsilon)$ de som is van ~~ten hoogste~~ veel gesloten gebieden $\overline{P}_{k,l}(p_0, \varepsilon)$ die elk van een willekeurige s ten hoogste één origineel bevatten: +) eindig

$$\overline{P}_k(p_0, \varepsilon) = \sum_l \overline{P}_{k,l}(p_0, \varepsilon).$$

~~+) aftelbaar~~

De gebieden $\bar{P}_{k,l}(p_o, \varepsilon)$ zijn 4-dimensionaal, en hun (topologische) beelden $\bar{S}_{k,l}(s_o, \varepsilon)$ dus ook. Laat $\bar{S}_k(s_o, \varepsilon)$ het beeld van $\bar{P}_k(p_o, \varepsilon)$ zijn; dan is

$$\bar{S}_k(s_o, \varepsilon) = \sum_l \bar{S}_{k,l}(s_o, \varepsilon),$$

en volgens een bekende stelling is $\bar{S}_k(s_o, \varepsilon)$ 4-dimensionaal [8] (het is niet nodig dat de afgesloten verzamelingen $\bar{S}_{k,l}$ disjunct zijn). Dan is ook

$$S_1(s_o, \varepsilon) = \sum_k \bar{S}_k(s_o, \varepsilon)$$

4-dimensionaal, en omdat $S(s_o, \varepsilon) \subset S_1(s_o, \varepsilon)$ is $\dim S(s_o, \varepsilon) \leq 4$, of, volgens het bovenstaande,

$$\dim S(s_o, \varepsilon) = 4.$$

De verzameling S is dus locaal (in de omgeving van ieder punt s_o) 4-dimensionaal; dus is de stelling juist.

Volgens de stelling van MENGER-NOBELING kan S dan in een Euclidische R_9 worden ingebed [9]. Men kan dit zo interpreteren dat het veld (electromagnetisme en gravitatie in de ruimste zin samen) door ten hoogste 9 onafhankelijke veldgrootheden in een ruimtetijdstip kan worden beschreven (zie (U)).

----

8) Zie b.v. HUREWICZ-WALLMAN, Dimension Theory 1948, p.30.

9) Zie b.v. KURATOWSKI, Topologie II, 2e dr., 1952, p.69.