

ZW

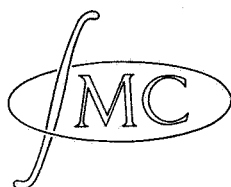
STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

CURSUS BOOLESE ALGEBRA'S

door

Prof. Dr. Ph. Dwinger

(gegeven te 's-Gravenhage)



1962/63

ZW

F1.2,=

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Syllabus cursus Boole'se algebras - 8.10. '62 - Den Haag

Literatuur

R. Sikorski, Boolean algebras (Springer, Verlag, 1960)

Ph. Dwingier, Introduction to Boolean algebras (Physica Verlag, Wurzburg 1961)

J.E. Whitesitt, Boolean algebra and its application (Wesley 1961)

F. E. Hohn, Applied Boolean algebra, Mac Millan (1961)

Geschiedenis:

G. Boole: The Mathematical Analysis of logic (1847). Ontwikkeling sindsdien.
Herleving in 1936/37 door artikelen van Stone.

Verzamelingen algebra:

$$V, \emptyset, A \subset B$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \text{en dual}$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A^c = V$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

Cartesisch product van twee verzamelingen

$$V \text{ en } W. \quad V \times W = \{(x, y) : x \in V, y \in W\}$$

Binaire relatie op een verzameling V

$\stackrel{\text{def}}{=}$ deelverzameling van $V \times V$.

22 oktober 1962

Cartesisch product van twee verzamelingen V en W.

Dit wordt gedefinieerd als: $V \times W = \{(x, y) : x \in V, y \in W\}$.

De definitie kan natuurlijk makkelijk uitgebreid worden tot het Cartesisch product van (eindig) veel verzamelingen.

Soms zullen we ook het cartesisch product van een familie $V_j, j \in I$, van verzamelingen beschouwen, waarbij I oneindig kan zijn. We hebben dan

$\prod_{j \in I} V_j$ is de verzameling van alle functies f , waarbij voor elke $j \in I$, $f(j) \in V_j$.

Binaire relaties

Zij V en W twee verzamelingen. Een binaire relatie R tussen de verzamelingen V en W is een deelverzameling S van $V \times W$.

We schrijven: $xRy \iff (x, y) \in S$.

Een speciaal geval is, als $V=W$. We spreken dan ook wel van een binaire relatie op V .

De bovenstaande definitie is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden tot ternaire relaties etc.

Functies

Zij V en W twee verzamelingen. Een functie f van V in W (voorgesteld door $f : V \rightarrow W$) is een voorschrift dat aan elk element x van V , precies één element y van W toevoegt.

Precieser: f is een binaire relatie tussen V en W , met de eigenschap, dat voor elk element x van V , er precies één element y van W bestaat, zo dat tussen x en y de relatie bestaat.

Notaties. Is y het element, dat door f aan x toegevoegd wordt, dan schrijven we $y = f(x)$.

De functie $f : V \rightarrow W$ wordt "op" genoemd, indien voor elke $y \in W$, er een $x \in V$, bestaat zodanig, dat $y = f(x)$.

Product van twee functies.

Zij $f : V \rightarrow W$, $g : W \rightarrow U$, dan wordt de functie $gf : V \rightarrow U$ gedefinieerd door $(gf)(x) = g(f(x))$.

Inverse van een functie

Zij $f : V \rightarrow W$ een functie die "op" is en éénéénduidig. Het laatste betekent: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

De inverse functie van f is een functie $f^{-1} : W \rightarrow V$, die gedefinieerd wordt door $f(f^{-1}(y)) = y$.

Merk op, dat deze functie f^{-1} inderdaad bestaat.

Identiteitsfunctie

De functie $f : V \rightarrow V$ wordt de identiteitsfunctie op V genoemd indien $f(x) = x$, voor alle $x \in V$.

Deze identiteitsfunctie wordt soms door het symbool 1 voorgesteld.

Zij $f : V \rightarrow V$, "op" en éénéénduidig. Blijkbaar is $f^{-1}f = 1$.

Equivalentierelatie

Zij V een verzameling. Een equivalentierelatie " $\equiv$ " op V is een binaire relatie, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

- 1°. $x \equiv x, \forall x \in V$
- 2°. $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
- 3°. $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$.

Elke equivalentierelatie, induceert een "partitie" van V in restklassen, d.w.z. men kan V verdelen in deelverzamelingen, die paarsgewijze een lege doorsnede hebben en zó dat de vereniging van alle, de hele verzameling V is.

Indien $a \in V$, dan definieren we

$U_a = \{x : x \equiv a, x \in V\}$. De familie $\{U_a, a \in V\}$ is dan de verzameling van restklassen. a heet een representant van U_a , maar het is duidelijk dat $U_a = U_b \iff a \equiv b$ is.

Omgekeerd induceert elke partitie van V een equivalentierelatie op V .

Dit is makkelijk na te gaan.

Gedeeltelijke ordening

Zij V een verzameling. Een gedeeltelijke ordening " $\leq$ " op V is een binaire relatie die voldoet aan de volgende eigenschappen

- 1°. $x \leq x, \forall x \in V$
- 2°. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- 3°. $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Voorbeelden:

- 1°. De gehele getallen onder de gewone ordening
- 2°. De deelverzamelingen van een verzameling V onder $\subset$ (verzameling theoretische insluiting)
- 3°. De gehele positieve getallen, onder $m \leq n \iff m/n$ (m deelbaar op n).

Een keten of lineair geordende verzameling is een gedeeltelijk geordende verzameling, waarvoor geldt: voor elke $x, y \in V$, geldt minstens: $x \leq y$ of $y \leq x$.

Een element z van een gedeeltelijk geordende verzameling, heet een bovengrens van x en y , indien $z \geq x$ en $z \geq y$. Analoog: ondergrens.

Een element heet een eenheidselement van een gedeeltelijk geordende verzameling V , indien het een bovengrens van alle elementen van V is.

Analoog: nulelement.

Notatie: eenheidselement: 1

nulelement : 0 .

Opmerking. Indien er een eenheidselement (nulelement) bestaat, dan is het eenduidig bepaald.

Lattices (tralies)

Zij L een gedeeltelijk geordende verzameling die voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. Elk tweetal elementen a en b heeft een kleinste bovengrens c , d.w.z. $c \geq a, c \geq b$ en $c' \geq a, c' \geq b \Rightarrow c' \geq c$. (Merk op dat c eenduidig bepaald is.)
2. Elk tweetal elementen a en b heeft een grootste ondergrens c^* , d.w.z. $c^* \leq a, c^* \leq b$ en $c'' \leq a, c'' \leq b \Rightarrow c'' \leq c^*$.

L wordt dan een lattice (tralie) genoemd.

Notaties: $c = a \cup b$ of $c = a + b$

$c^* = a \cap b$ of $c = ab$.

Kleinste bovengrens = supremum

Grootste ondergrens = infimum.

Opmerkingen: Alle drie bovenstaande voorbeelden zijn voorbeelden van lattices.

Syllabus cursus Boole'se algebra's

5 november 1961

Voor een lattice gelden de volgende eigenschappen

- | | |
|-----------------------|--------------------|
| (1) $a+b=b+a$ | (1') $ab=ba$ |
| (2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ | (2') $a(bc)=(ab)c$ |
| (3) $a+a=a$ | (3') $aa=a$ |
| (4) $a(a+b)=a$ | (4') $a+ab=a$ |

Bovendien geldt:

- (5) $a \leq b \iff ab=a \iff a+b=b$.

Bewijs

(1) en (1') volgen onmiddellijk uit de definitie van $a+b$ en ab .

We bewijzen (2)

$a+(b+c) \geq a$ en $a+(b+c) \geq b+c$, dus $a+(b+c) \geq b$ en $a+(b+c) \geq c$. Derhalve $a+(b+c) \geq a+b$ en dus $a+(b+c) \geq (a+b)+c$. Op dezelfde wijze volgt, dat $(a+b)+c \geq a+(b+c)$ waaruit (1) volgt.

Het bewijs van (2') is analoog aan dat van (2). (3) en (3') volgen onmiddellijk uit de definities.

Bewijs van (4):

$$a \leq a+b \text{ dus } a(a+b)=a.$$

(4') gaat op dezelfde wijze.

Bewijs van (5)

Als $a \leq b$, dan is natuurlijk $ab=a$ en $a+b=b$. Is $ab=a$, dan is $a \leq b$ enz.

Omgekeerd hebben we het volgende:

Zij L een systeem waarop twee binaire relaties $+$ en $\times$ gedefinieerd zijn, die aan de eigenschappen (1), (1')....(4), (4') voldoen.

Dan is L een lattice onder de binaire relaties $\leq$, die gedefinieerd is door $a \leq b \iff ab=a \iff a+b=b$, waarbij $a+b$ de supremum en ab de infimum van a en b is.

We merken op, dat inderdaad $ab=a \iff a+b=b$. Inderdaad, stel $ab=a$, dan is $a+b=ab+b=b$ volgens (4').

Het is gemakkelijk te bewijzen, gebruik makende van de eigenschappen (1).....(4), (4'), dat $\leq$ een gedeeltelijke ordening is.

We bewijzen slechts dat $a+b$ de supremum is van a en b .

$(a+b)a=a$, dus $a+b \geq a$. Eveneens $a+b \geq b$. Stel $c \geq a$, $c \geq b$, dan is $c+a+b = c+a+c+b=a+b$, dus $c \geq a+b$.

Isotone en homomorphe afbeeldingen

Zij P_1 en P_2 twee gedeeltelijk geordende verzamelingen. Een functie (afbeelding) $f: P_1 \rightarrow P_2$ ("in" of "op") wordt een isotone ("order preserving") afbeelding genoemd, indien

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b).$$

Zij L_1 en L_2 twee lattices. Een functie $f: L_1 \rightarrow L_2$ wordt een homomorphe afbeelding genoemd, indien

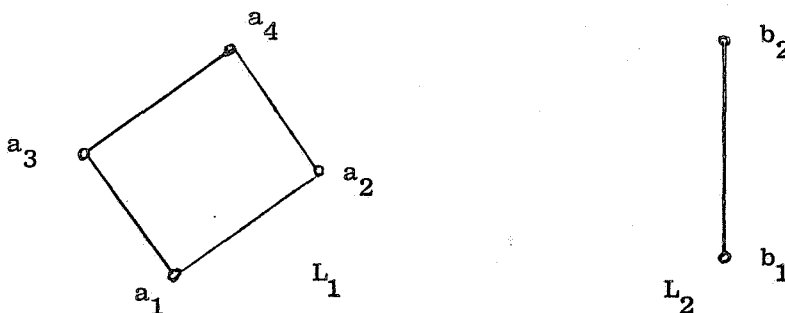
$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)+f(b) & \text{en} \\ f(ab) &= f(a)f(b) & . \end{aligned}$$

Elke homomorphe afbeelding is een isotone afbeelding.

Bewijs: Zij $a \leq b$, dan is $a+b=b$, dus $f(a+b)=f(a)+f(b)=f(b)$. Dus $f(a) \leq f(b)$.

Opmerking

Niet elke isotone afbeelding van een lattice in een ander lattice is een homomorphe afbeelding, hetgeen uit het volgende voorbeeld blijkt:



Zij $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=b_1$ en $f(a_4)=b_2$, f is isotoon, maar $f(a_2+a_3)=b_2$ en $f(a_2)+f(a_3)=b_1$.

Een homomorphe afbeelding $f: L_1 \rightarrow L_2$ wordt een isomorphe afbeelding genoemd, indien f éénéénduidig is, dus $f(a)=f(b) \implies a=b$.

We merken op dat als $f: L_1 \rightarrow L_2$ een isomorphe afbeelding "op" is, dan is $f^{-1}: L_2 \rightarrow L_1$ ook een isomorphe afbeelding.

Ook geldt: Indien $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$ en f is éénéénduidig, dan is f een isomorphe afbeelding.

De volgende terminologie wordt wel gebruikt:

epimorphe afbeelding = homomorphe afbeelding "op"

monomorphe afbeelding = isomorphe afbeelding "in".

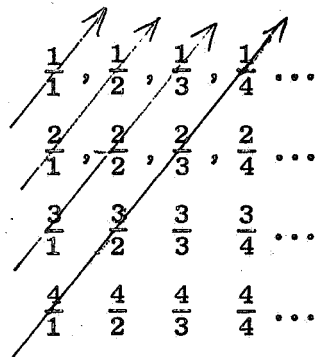
Iets over verzamelingenleer

Twee verzamelingen V_1 en V_2 heten gelijkmachtig ($V_1 \approx V_2$) indien er éénéénduidige functie bestaat, die V_1 op V_2 afbeeldt.

Het is duidelijk, dat de relatie $\approx$, een equivalentie relatie is. Een verzameling heet aftelbaar oneindig, indien hij gelijkmachtig is met de verzameling der natuurlijke getallen.

Elke oneindige deelverzameling der natuurlijke getallen is gelijkmachtig met de gehele verzameling.

De verzameling der rationale getallen is aftelbaar oneindig.



Cursus Boolese algebras

19.11.62

We zullen nu een verzameling beschouwen die niet gelijkmachting is met de verzameling der natuurlijke getallen.

Zij N de verzameling der natuurlijke getallen. We beschouwen nu de verzameling $V = 2^N$, d.i. de verzameling der deelverzamelingen van N .

Elk element van V kan op éénduidige wijze worden voorgesteld door een oneindig aftelbare rij van nullen en enen. Is n.l. X een deelverzameling van N , dan definiëren we deze rij $\{a_n, n=1, 2, \dots\}$ door $a_n = 0$ indien $n \notin X$ en $a_n = 1$ indien $n \in X$.

Stel nu dat V dezelfde machtingheid had als N . Dan kunnen de elementen van V door een aftelbare verzameling $\{a_{ik}, i=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots\}$ worden voorgesteld:

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$$

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$$

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}, \dots, \text{ waarbij elke } a_{ik} = 1 \text{ of } 0.$$

Nu definiëren we een deelverzameling van V door een rij $\{b_k, k=1, 2, \dots\}$, door

$$b_k = 1 \text{ indien } a_{kk} = 0$$

$$b_k = 0 \text{ indien } a_{kk} = 1.$$

Het is duidelijk, dat voor geen waarde van i , de rij $\{a_{ik}\}$ dezelfde is als de rij $\{b_k\}$. Derhalve hebben we een deelverzameling van V geconstrueerd, die niet in het bovenstaande schema van deelverzamelingen van V voorkomt. Derhalve is een tegenspraak verkregen.

We hebben tegelijk aangetoond, dat de verzameling der reële getallen niet aftelbaar is.

We vermelden hier nu twee stellingen, zonder bewijs:

I. Voor elk tweetal verzamelingen, bestaat er altijd een éénduidige afbeelding, die één van beide verzamelingen in (of op) de andere afbeeldt.

II. Stelling van Cantor-Bernstein

Indien elk van een tweetal verzamelingen éénéénduidig in de andere afgebeeld kan worden, dan zijn die twee verzamelingen gelijkmachtig.

Zij V nu een willekeurige verzameling. Het cardinaalgetal $|V|$ van V is één van de verzamelingen, die met V gelijkmachtig is. (Voor elke verzameling V wordt op een bepaalde wijze een met V gelijkmachtige verzameling voor dit doeleinde gekozen; voor een meer axiomatische definitie zie Halmos, Naive set theorie.)

We schrijven ook:

voor elke verzameling V die een eindig aantal elementen bevat, b.v.

$$n, |V| = n$$

$$\text{voor } N, |N| = \aleph_0$$

$$\text{voor de verzameling } R \text{ der reële getallen } |R| = 2^{\aleph_0}.$$

Op grond van de bovengenoemde twee stellingen I en II voeren we nu voor cardinaalgetallen een relatie $\leq$ in.

Zij α en β twee cardinaalgetallen, b.v. $|V| = \alpha$, $|W| = \beta$, dan $\alpha \leq \beta$, indien er een éénéénduidige afbeelding van V in W bestaat.

Het volgt uit bovengenoemde twee stellingen, dat deze relatie een lineaire ordening is.

Zo hebben we b.v. $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$, $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$, dus

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}.$$

Verder:

$$\alpha < 2^\alpha < 2^{2^\alpha} \text{ etc.}$$

Continuum hypothese:

Er bestaat geen cardinaalgetal α , zodat

$$\aleph_0 < \alpha < 2^{\aleph_0}.$$

Gegeneraliseerde continuum hypothese:

Zij α een willekeurig oneindig cardinaalgetal. Er bestaat geen cardinaalgetal β , zodat

$$\alpha < \beta < 2^\alpha.$$

Keuze-axioma (Zermelo)

Zij V_α , $\alpha \in A$ een klasse verzamelingen. Er bestaat een functie f , zodat $f(\alpha) \in V_\alpha$, voor elke $\alpha \in A$.

Equivalente vormen van het keuze-axioma

1) Zij V_α , $\alpha \in A$ een klasse verzamelingen. Het cartesische product $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ bestaat.

2) Lemma van Zorn

Zij P een gedeeltelijk geordende verzameling, zodanig dat elke keten in P naar boven begrensd is. Dan heeft P een maximum element.

Opm. Een maximum element a van P is een element, waarvoor geldt $x \not> a$ voor alle $x \in P$.

Vervolg lattices

Deellattice

Zij L een lattice. Een niet lege deelverzameling L' van L , heet een deellattice van L , indien L' gesloten is onder de lattice operaties.

Dat wil zeggen: Indien x en $y \in L'$, dan $x + y$ en $xy \in L'$.

Stelling.

Zij $h : L \rightarrow L^*$ een homomorphe afbeelding van het lattice L in het lattice L^* . Dan is het beeld $h(L)$ van L een deellattice van L^* .

Bewijs: eenvoudig.

We merken nog even op, dat indien $h : L \rightarrow L^*$ een isomorphe afbeelding "op" is, dan is h^{-1} eveneens isomorph en "op". D.i. weer eenvoudig te bewijzen.

Distributieve lattices

Een lattice is distributief indien de volgende twee eigenschappen gelden:

- 1) $a(b+c) = ab + ac$; 2) $a + bc = (a+b)(a+c)$.

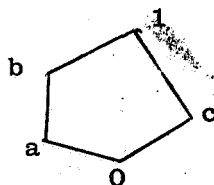
Stelling. (1) en (2) zijn equivalent

Bewijs (1) $\Rightarrow$ (2)

$$(a+b)(a+c) = a(a+c) + b(a+c) = a + ab + bc = a + bc.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) analoog.

Het volgende lattice is niet distributief:



$$b(a+c) \neq ba + bc.$$

Voorbeelden van distributieve lattices:

- 1) Elke keten is distributief.
- 2) Elke 2^V .
- 3) Het lattice van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen van een verzameling V .

Een deelverzameling X van V heet co-eindig, indien het complement van X eindig is. Dit lattice is een deellattice van 2^V .

- 4) Elk deellattice van een distributief lattice is distributief.
- 5) Het lattice der natuurlijke getallen geordend onder $m \leq n \iff m/n$ is distributief.

Complementaire lattices

Een lattice, met een 0 en een 1 heet complementair, indien voor elk element $a \in L$, er een element $\bar{a} \in L$ bestaat, zodat

$$a + \bar{a} = 1 \quad \text{en} \quad a\bar{a} = 0.$$

Cursus Boolese algebras

3.12.62

Volledige lattices

Een lattice L is volledig, indien elke willekeurige (eindige of oneindige) verzameling elementen van L een supremum en een infimum heeft.

Is $\{x_i, i \in I\}$ een verzameling elementen van een volledig lattice L , dan stellen we de supremum voor door $\sum_{i \in I} x_i$ en de infimum door $\prod_{i \in I} x_i$.

Een volledig lattice L heeft uiteraard altijd een 0 en een 1.

Voorbeelden. 1) De keten van reële getallen in het gesloten interval $[0,1]$ is volledig. De keten van reële getallen in $[0,1)$, of $(0,1]$ of $(0,1)$ zijn niet volledig.

2) De lattice $2^{\aleph_0}$ is volledig.

3) De lattice van eindige en co-eindige deelverzamelingen van een oneindige verzameling is niet volledig.

Een lattice L heet σ -volledig indien elke aftelbare verzameling elementen van L , een supremum en een infimum heeft.

De definitie van een α -volledig lattice, waar α een willekeurig cardinaalgetal is, is analoog.

Stelling

Zij P een gedeeltelijk geordende verzameling met een 1, en waarvan elke deelverzameling van elementen een infimum heeft. Dan is P een volledig lattice.

Bewijs. Zij $X = \{x_i : i \in I\}$ een deelverzameling van P . We moeten alleen bewijzen, dat $\sum_{i \in I} x_i$ bestaat.

Zij $Y = \{y : y \geq x_i, \forall i \in I, y \in P\}$.

Y is niet leeg, want $1 \in Y$. Zij $a = \prod_{y \in Y} y$, $y \geq x_i$, voor elke $y \in Y$ en voor elke $i \in I$. Dus $a \geq x_i$ voor elke $i \in I$. Is $a' \geq x_i$, voor elke $i \in I$ dan is $a' \in Y$, dus $a' \geq a$. Dus $\prod_{i \in I} x_i = a$.

We keren nu terug tot distributieve lattices.

Stelling. Complementering is eenduidig in elk distributief lattice.

Bewijs. Zij $a + a' = a + \bar{a} = 1$, en $aa' = a\bar{a} = 0$.

Dan is $a' = 0 + a' = a\bar{a} + a' = (a+a')(\bar{a}+a') = \bar{a} + a'$. Evenzo $\bar{a} = a\bar{a} + \bar{a}$.

Dus $\bar{a} = a'$.

Boolese algebras

Een Boole'se algebra B is een distributief complementair lattice.

Een Boole'se algebra kan ook gedefinieerd worden als een algebraïsch systeem met twee binaire operaties en één unaire operatie en twee elementen 0 en 1, waarvoor de volgende eigenschappen gelden:

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & ab = ba \\ a + (b+c) = (a+b) + c & a(bc) = (ab)c \\ a + a = a & aa = a \\ a(a+b) = a & a + ab = a \\ a(b+c) = ab + ac & a + bc = (a+b)(a+c) \\ a + \bar{a} = 1 & a\bar{a} = 0. \end{array}$$

Verder geldt weer: $a \leq b \iff ab = a \iff a+b = b$.

Enige identiteiten:

- 1) $a + b = a + \bar{a}b$; $ab = a(\bar{a}+b)$
- 2) $a \leq b \iff a\bar{b} = 0 \iff \bar{a} + b = 1$
- 3) $a \leq b \iff \bar{a} \geq \bar{b}$
- 4) $(a+b)^- = \bar{a}\bar{b}$ $(ab)^- = \bar{a} + \bar{b}$ (wetten van de Morgan).

Bewijs.

- 1) $a + b = 1.(a+b) = (a+\bar{a})(a+b) = a + \bar{a}b$.

De andere identiteit is dual.

- 2) $a \leq b \implies a + b = b$ of $b + \bar{a}b = b$ of $\bar{a}b = 0$.
 $\bar{a}b = 0 \implies b + \bar{a}b = b \implies b + a = b \implies a \leq b$.

De rest gaat dual.

- 3) $a \leq b \iff a\bar{b} = 0 \iff \bar{a}\bar{b} = 0 \iff \bar{a} \geq \bar{b}$.
- 4) $a + b + \bar{a}\bar{b} = a + (b+\bar{a})(b+\bar{b}) = 1$
 $(a+b)\bar{a}\bar{b} = 0$ dus $(a+b)^- = \bar{a}\bar{b}$.
 $(ab)^- = (\bar{a}\bar{b})^- = (\bar{a}+\bar{b})^- = \bar{a} + \bar{b}$.

Voorbeelden van Boole'se algebras

- 1) De B.A. van alle deelverzamelingen van een verzameling.
- 2) De B.A. van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen van een verzameling.
- 3) De B.A. van alle eindige sommen (= verenigingen) van intervallen $[\alpha, \beta)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Cursus Boolese algebras

17.12.62

We gaan nog even dieper op voorbeeld 3) in. Elk element van deze B.A. heeft dus de vorm $\sum_{j=1}^n i_j$, waar $i_j = [\alpha_j, \beta_j)$ $0 \leq \alpha_j \leq 1$
 $0 \leq \beta_j \leq 1$.

Het is duidelijk, dat de vereniging van twee elementen weer een eindige som van intervallen $[\alpha, \beta)$ is. Dit is eveneens het geval met de doorsnede van twee elementen, door n.l. de distributieve wet toe te passen en te bedenken dat de doorsnede van twee intervallen $[\alpha, \beta)$ weer een dergelijk interval is. Tenslotte is de verzameling gesloten onder complementneming, hetgeen te zien is door de wet van de Morgan toe te passen.

Verder is het nulelement, de lege verzameling en het eenheidselement, het interval $[0, 1)$. Tenslotte is het niet moeilijk te zien, dat deze B.A. niet volledig is.

Atomen

Een element p van een Boole'se algebra B heet een atoom, indien:

$$1^\circ p \neq 0, \quad 2^\circ a < p \implies a = 0.$$

(Men kan i.p.v. 2° ook zeggen $ap = p$ of 0 voor elke $a \in B$).

De Boolese algebra $2^{\mathcal{X}_0}$, heeft atomen. Evenzo de B.A. van eindige en co-eindige deelverzamelingen van een verzameling. De intervalalgebra (zie boven) heeft echter geen enkel atoom.

Atomaire B.A.'s

Een B.A. B is atomair, indien voor elk element $a \in B$, $a \neq 0$, $\exists p$, p een atoom, zodat $p \leq a$.

De twee eerstgenoemde Boole'se algebras zijn atomair. Er bestaan ook Boole'se algebras met atomen, die echter niet atomair zijn. Zij b.v. B de intervalalgebra van $[0, 1]$ (die dus geen atomen heeft). Zij A de B.A. die uit 2 elementen bestaat. Dan heeft de B.A. $A \times B$, precies 1 atoom, n.l. het element $(1, 0)$.

Stelling

In elke atomaire B.A. is 1 de som van alle atomen.

Bewijs.

Zij $\{p_i, i \in I\}$ de verzameling van alle atomen. Stel $a \geq$ elke p_i , $a < 1$, dan is $\bar{a} \neq 0$. Dus bestaat er een atoom, b.v. p_{i_1} , zodat $p_{i_1} \leq \bar{a}$. Maar ook: $p_{i_1} \leq a$, dus $p_{i_1} \leq \bar{a}a = 0$, maar $p_{i_1} \neq 0$. Dus een contradictie. Derhalve $1 = \sum_{i \in I} p_i$.

We geven hier nog een overzicht van voorbeelden van de verschillende mogelijkheden, die op kunnen treden. Sommige van de onderstaande voorbeelden konden nog niet besproken worden. Hiervoor raadplege men de literatuur (b.v. Dwinger, p.9 e.v.).

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. B.A. van alle deelverzamelingen van een verzameling | atomair en volledig |
| 2. intervalalgebra van $[0,1]$ | geen atomen en niet volledig |
| 3. B.A. van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen van een oneindige verzameling | atomair en niet volledig |
| 4. Het cartesische product van vb.2 en de B.A. $(0,1)$ (2 elementen!) | één atoom en niet volledig |
| 5. B.A. van open reguliere deelverz. van het eenheidsinterval | geen atomen en volledig |
| 6. B.A. van Lebesgue meetbare deelverzamelingen van $[0,1]$, modulo deelverzamelingen van Lebesguemaat 0 | geen atomen en volledig |
| Elke vrij (oneindige) Boole'se algebra | geen atomen en niet volledig |
| 7. B.A. van alle deelverzamelingen van een oneindige verzameling modulo eindige deelverzamelingen | geen atomen en niet volledig |

Deelalgebras

Een deelverzameling A van een Boole'se algebra B heet een deelalgebra van B , indien $1^0 A$ is niet leeg, $2^0 A$ is gesloten onder de Boolese operaties.

De laatste voorwaarde betekent dus:

$$a, b \in A \Rightarrow a+b \text{ en } ab \in A$$

$$a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A.$$

Een deelalgebra is dus zelf ook een B.A. en bevat altijd de elementen 0 en 1.

Het is eenvoudig te zien dat de doorsnede van 2 subalgebras (zelfs van elke familie van deelalgebras) weer een deelalgebra is. Dit geldt echter niet t.a.v. de vereniging van subalgebras! Eenvoudige voorbeelden van deelalgebras zijn 1° de deelalgebra die uit 0 en 1 bestaat, 2° de deelalgebra die met B samenvalt.

Homomorphe afbeelding

Zij A en B Boole'se algebras. Een homomorphe afbeelding (of homomorphisme) van A en B, is een afbeelding $h : A \longrightarrow B$, waarvoor geldt

$$h(a+b) = h(a) + h(b)$$

$$h(ab) = h(a) h(b)$$

$$h(\bar{a}) = (h(a))^{-}$$

We zien, dat $h(1) = h(a+\bar{a}) = h(a) + h(\bar{a}) = h(a) + (h(a))^{-} = 1$. Evenzo $h(0) = 0$.

Verder geldt dat elke homomorphe afbeelding isotoon is, omdat het tevens een lattice homomorphisme is. Dus $a \leq b \implies h(a) \leq h(b)$. Een homomorphe afbeelding heeft een isomorphe afbeelding indien deze ééneenduidig is.

Soms worden de volgende termen nog gebruikt:

epimorphisme = homomorphe afbeelding "op"

monomorphisme = isomorphe afbeelding "in"

Het homomorphe beeld van een B.A. is weer een B.A.

Dit is eenvoudig te zien: $h(a) + h(b) = h(a+b)$, enz.

Opm. I.p.v. de 3 bovengenoemde voorwaarden opdat een afbeelding h een homomorphe afbeelding is, kan men ook eisen:

$$1^{\circ} h(a+b) = h(a) + h(b)$$

$$2^{\circ} h(ab) = h(a) h(b)$$

$$3^{\circ} h(0) = 0$$

$$4^{\circ} h(1) = 1.$$

Kern van een homomorphe afbeelding

Zij $h : A \longrightarrow B$ een homomorphe afbeelding. De kern (kernel) van h is de verzameling $\{ a : h(a) = 0, a \in A \}$.

Idealen

Zij B een B.A. Een ideaal I is een niet lege deelverzameling van B , waarvoor geldt

$$1^{\circ}. a \in I, b \in I \Rightarrow a + b \in I.$$

$$2^{\circ}. a \in I, t \leq a, t \in B \Rightarrow t \in I.$$

Merk op, dat altijd $0 \in I$.

Het ideaal dat slechts uit het nulelement bestaat, heet het nulideaal en wordt met (0) aangeduid.

Het ideaal dat uit alle elementen van B bestaat, heet het eenheidsideaal en wordt ook wel met (1) aangeduid.

Hoofdidealen

Zij a een element van een B.A. B . Dan is klaarblijkelijk de verzameling $\{x : x \leq a, x \in B\}$ een ideaal. Zulk een ideaal wordt een hoofdideaal genoemd en wordt aangeduid met (a) . a wordt de voortbrengende van het hoofdideaal genoemd.

Niet elk ideaal van een B.A. hoeft de hoofdideaal te zijn. B.v. het ideaal bestaande uit de eindige deelverzamelingen van $2^{\mathbb{N}}$ is geen hoofdideaal.

Cursus Boolese algebras

14.1.63

Zij nu $h : B \rightarrow B'$ een homomorphe afbeelding van een Boolese algebra B in een Boolese algebra B' .

Bewering:

De kern van een homomorphe afbeelding is een ideaal.

Bewijs: Zij $h(x) = h(y) = 0$. Dan is $h(x+y) = h(x) + h(y) = 0$. Verder, indien $h(x) = 0$ en $t \leq x$, dan is $h(t) = h(tx) = h(t) h(x) = 0$.

Stelling. Een homomorphe afbeelding is een isomorphe afbeelding dan en slechts dan indien de kern het nulideaal is.

Bewijs: (i) Stel de kern is het nulideaal a en zij $h(x) = h(y)$. Dan is $h(\bar{x}y) = 0$ dus $\bar{x}y = 0$ dus $x \geq y$. Analoog $x \leq y$. Dus $x = y$.

(ii) Stel h is een isomorphe afbeelding. Dan is natuurlijk de kern het nulideaal.

We hebben dus gezien dat met elke homomorphe afbeelding $h : B \rightarrow B'$ (die we van nu af steeds "op" veronderstellen) een ideaal I van B geassocieerd is, die de kern van h is. Nu kunnen we eveneens B in klassen (residue-klassen) verdelen, waardoor op B een equivalentie relaties gedefinieerd wordt.

Voor elk element $x \in B$, zij n.l. $[x] = \{y : h(y) = h(x), y \in B\}$.

De bijbehorende equivalentie relatie is dan gedefinieerd door $x \equiv y \iff h(x) = h(y)$.

We merken op dat $[0] = I = \text{kern van } h$.

We gaan nu omgekeerd van een (willekeurig) ideaal I van B uit en we zullen nu bewijzen, dat er een B.A.B' bestaat en een homomorphe afbeelding $h : B \xrightarrow{\text{op}} B'$, zodanig, dat de kern van h , I is. Tevens zullen we aantonen, dat B' eenduidig (op isomorphismen na) door I bepaald is.

We voeren eerst een nieuw begrip in n.l. het symmetrisch verschil van twee elementen x en y van een B.A.

Dit wordt aangeduid door $x \Delta y$ en gedefinieerd door $x \Delta y = \bar{x}y + x\bar{y}$.

We zien dat $x \Delta x = 0$.

Teneinde bovenstaande bewering te bewijzen voeren we op B een binaire relatie $\equiv$ in, die als volgt gedefinieerd wordt:

$$x \equiv y \iff x \Delta y \in I.$$

We zullen bewijzen dat deze relatie een congruentie relatie is, d.w.z. de relatie voldoet aan de volgende voorwaarden:

1^o. $\equiv$ is een equivalentie relatie

$$2^o. \left. \begin{array}{l} x \equiv y \\ u \equiv v \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} x+u \equiv y+v \text{ en} \\ xu \equiv yv \end{array}$$

$$3^o. x \equiv y \implies \bar{x} \equiv \bar{y}.$$

Bewijs:

1^o. $x \equiv x$, want $x \Delta x = 0 \in I$

$x \equiv y \implies y \equiv x$. Dit volgt onmiddellijk.

Stel $x \equiv y$ en $y \equiv z$, dan moeten we bewijzen: $x \equiv z$.

We beschouwen $(x \Delta y) \Delta (y \Delta z) =$

$$\begin{aligned} & (\bar{x}y + x\bar{y})^-(\bar{y}z + y\bar{z}) + (\bar{x}y + x\bar{y})(\bar{y}z + y\bar{z})^- = \\ & -(x+\bar{y})(\bar{x}+y)(\bar{y}z+y\bar{z}) + (\bar{x}y+x\bar{y})(y+\bar{z})(\bar{y}+z) = \\ & (xy+\bar{x}\bar{y})(\bar{y}z+y\bar{z}) + (\bar{x}y+x\bar{y})(yz+\bar{y}\bar{z}) = \\ & xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} = \\ & \bar{x}z(\bar{y}+y) + x\bar{z}(y+\bar{y}) = \bar{x}z + x\bar{z} = x \Delta z. \end{aligned}$$

Maar nu is $x \Delta y \in I$ en $y \Delta z \in I$ en dus

$$(x \Delta y)^-(y \Delta z) + (x \Delta y)(y \Delta z)^- = (x \Delta y) \Delta (y \Delta z) \in I..$$

Dus $x \Delta z \in I$. Dus $x \equiv z$.

2^o. We zullen eerst het volgende bewijzen:

$$\begin{aligned} x \equiv y & \implies x+u \equiv y+u \quad \forall u \in B \\ (x+u)^-(y+u) + (x+u)(y+u)^- & = \\ \bar{x}u(y+u) + (x+u)(\bar{y}u) & = \bar{x} \bar{u} y + x \bar{y} \bar{u} = \\ (\bar{x}y + x\bar{y})\bar{u} & \in I. \text{ Dus } x+u \equiv y+u. \end{aligned}$$

Stel nu dat $x \equiv y$ en $u \equiv v$. Dan hebben we dus $x+u \equiv y+u$. Maar $u \equiv v$, dus we hebben weer $y+u \equiv y+v$. Dus $x+u \equiv y+v$.

Op dezelfde wijze wordt het tweede deel van 2^0 bewezen.

3^0 . Dit volgt onmiddellijk uit $x \Delta y = \bar{x} \Delta \bar{y}$.

We zien dus dat de binaire relatie " $\equiv$ " de B.A.B in residueklassen verdeelt (omdat $\equiv$ een equivalentierelatie is). We beschouwen nu de verzameling B' van deze klassen. Voor elke $x \in B$, stelle $[x]$ weer de klasse voor waarin x ligt.

Nu definieren we twee binaire en een unaire operatie op B' door:

$$[x] + [y] = [x+y]$$

$$[x][y] = [xy]$$

$$[x]^- = [\bar{x}].$$

Dat deze definities zinvol zijn volgt onmiddellijk uit het feit dat de beschouwde equivalentierelatie een congruentierelatie is (dus uit 2^0 en 3^0 zie boven).

Het is makkelijk in te zien, dat hierdoor B' een B.A. wordt met als nulelement $[0]$ en als eenheidselement $[1]$.

(We wijzen er nog even op dat $[0] = I$, hetgeen makkelijk in te zien is.)

Tenslotte definieren we een afbeelding $h : B \xrightarrow{\text{op}} B'$ die als volgt gedefinieerd wordt

$$h(x) = [x].$$

Bewering h is een homomorphe afbeelding waarvan de kern I is.

We hebben n.l.

$$h(x+y) = [x+y] = [x] + [y] = h(x) + h(y) \quad \text{enz.}$$

Verder:

$$\text{Kern } h = \{x : h(x) = [0]\} = I.$$

We zullen nu tenslotte nog bewijzen, dat B' eenduidig door I bepaald is (op isomorphismen na).

Zij n.l. B^* een B.A. en zij $h^* : B \xrightarrow{\text{op}} B^*$ een homomorphe afbeelding, waarvan de kern I is. Nu is het eenvoudig te zien, dat B^* eveneens iso-

morph is met de algebra van residueklassen van B en deze is isomorph met B.

Opm. De B.A.B' wordt vaak met B/I aangeduid.

Opm. Indien $x \leq y$, dan is natuurlijk $[x] \leq [y]$. Het omgekeerde is niet altijd waar. Wel hebben we:

$$[x] \leq [y] \iff [x][y]^{-1} = [0] \iff$$

$$[x\bar{y}] = [0] \iff x\bar{y} \in I.$$

Samenvattende kunnen we zeggen:

Zij B een B.A. Er is een éénéénduidige correspondentie (op isomorphismen na) tussen de idealen van B en de homomorphe afbeeldingen van B, zodat met elke homomorphe afbeelding van B, dat ideaal van B correspondeert, dat de kern is van de homomorphe afbeelding.

Cursus Boolese algebras

28.1.63

Voortbrenging van idealen

Zij I_1 en I_2 twee idealen van een Boole'se algebra. Met $I_1 \vee I_2$ bedoelen we het kleinste ideaal, dat I_1 en I_2 bevat. Zo'n kleinste ideaal bestaat zeker. Het is n.l. - zoals gemakkelijk te zien is - de verzameling theoretische doorsnede van alle idealen, die I_1 en I_2 bevatten.

Bewering: $I_1 \vee I_2 = \{x : x = u+v, u \in I_1, v \in I_2\}$.

Bewijs: Deze verzameling van elementen x is zeker een ideaal. Immers, indien $x_1 = u_1+v_1$, $x_2 = u_2+v_2$ dan $x_1+x_2 = (u_1+u_2) + (v_1+v_2)$. Tevens hebben we dan indien $t \leq x = u+v$, dan is $t = tu + tv$ en $tu \in I_1$, $tv \in I_2$. Elk ideaal dat I_1 en I_2 bevat moet zeker elk element van de vorm $u+v$, $u \in I_1$, $v \in I_2$ bevatten dus de bovenstaande verzameling is inderdaad het kleinste ideaal, dat I_1 en I_2 bevat.

Priemideal

Zij B een B.A. Een ideaal I van B is een priemideaal indien $1 \notin I$, $xy \in I \Rightarrow$ minstens één van de elementen x en y behoort tot I .

Een ideaal I van B is een maximaal ideaal, indien $J > I$, $J \neq I$, J een ideaal impliceert dat $J = B$.

In elke B.A. is het begrip priemideaal en maximaal ideaal hetzelfde, zoals uit de volgende stelling blijkt. We voeren nog even een notatie in. De B.A., die uit slechts 2 elementen 0 en 1 bestaat, stellen we steeds voor 2.

Stelling.

Zij B een B.A. Zij I een ideaal van B . Dan zijn de volgende voorwaarden gelijkwaardig

- (i) I is een priemideaal
- (ii) Voor elk element $x \in B$, of x of $\bar{x} \in I$
- (iii) I is een maximaal ideaal
- (iv) $A/I \cong \underline{2}$.

Bewijs (i) $\Rightarrow$ (ii) $x\bar{x} = 0 \in I$. Dus minstens x of $\bar{x} \in I$. Stel $x \in I$ en $\bar{x} \in I$. Dan $1 = x + \bar{x} \in I$, dan $B = I$. Tegenspraak.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Stel $I \subset J$, $I \neq J$, $\exists x \in J$, $x \notin I$. Dus $\bar{x} \in I$, dus $\bar{x} \in J$. Dus $1 = x + \bar{x} \in J$. Dus $J = B$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Stel $xy \in I$, $x \notin I$. Beschouw $(x) \cup I = B$. Dan $1 = z + u$, $u \in I$, $z \in x$. Dus $y = yz + yu \in I$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Stel $x \notin I$, $y \notin I$, dan $\bar{x} \in I$, $\bar{y} \in I$ dus $\bar{x}y + x\bar{y} \in I$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Stel $xy \in I$, $x \notin I$, dan $y \in I$.

We herhalen nog even het lemma van Zorn. Zij P een gedeeltelijke geordende verzameling. Indien elke keten in P een bovengrens heeft, dan heeft P een maximaal element.

Grondstelling van priemidealen

Zij B een B.A. Voor elk element $x \neq 0$, bestaat er een priemideaal I , zodanig dat $x \notin I$.

Bewijs. Zij $M = \{ I, x \notin I, \bar{x} \in I, I \text{ een ideaal van } B. M \text{ is niet leeg, want } (\bar{x}) \in M. Het is duidelijk dat indien } I_\gamma, \gamma \in \Gamma \text{ een keten van } M \text{ is, (gedeeltelijk geordend onder verzameling theoretische ordening) dan } \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \text{ is een bovengrens van deze keten, die ook tot } M \text{ behoort. Dus heeft } M \text{ een maximaal element. Zij } K \text{ zulk een maximaal element. We zullen aantonen, dat } K \text{ een priemideaal is. Stel } J \supset K, J \neq K. \text{ Dan } x \in J, \text{ maar ook } \bar{x} \in J, \text{ dus } 1 \in J, \text{ dus } J = B. \}$

Stelling. De verzameling theoretische doorsnede van alle idealen van een Boole'se algebra is het nulideaal.

Het bewijs volgt onmiddellijk uit de voorafgaande stelling.

Definitie. Een verzameling $I_\gamma, \gamma \in \Gamma$ van priemidealen van een Boole'se algebra B , heet een Stone familie, indien $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma = (0)$.

Stelling. Zij S een familie priemidealen van B . Dan zijn de volgende voorwaarden gelijkwaardig.

(i) S is een Stonefamilie

(ii) Indien $x \in B$, $x \neq 0$, $\exists I \in S$, zodat $x \notin I$

(iii) Indien x en $y \in B$, $x \neq y$, $\exists I \in S$, zodat $x \notin I$, $y \in I$.

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii) volgt onmiddellijk.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $xy \neq 0$, $\exists I \in S$, zodat $x\bar{y} \notin I$, dus $\bar{x} + y \in I$, dus $y \in I$,
 $\bar{x} \in I$, $x \notin I$.

(iii) (i) neen voor $y = 0$.

Verzamelingenlichaam

Een klasse F van deelverzamelingen van een verzameling V , heet een (verzamelingenlichaam) indien F gesloten is onder de verzameling theoretische operaties.

Cursus Boole'se algebras

Vraagstukken 1. Elk eigenlijk ideaal kan tot een priemideaal voortgezet worden.

2. In een atomistische Boole'se algebra is 1 de som van alle atomen.

3. Bewijs dat de Boole'se algebra van eindige en co-eindige deelverzamelingen van de oneindige deelverzameling precies één priemideaal heeft, dat geen hoofdideaal is.

4. Een hoofdideaal (a) is precies dan een priemideaal, indien a een atoom is.

We zullen nu de eerste hoofdstelling (Stone) van de representatietheorie bewijzen.

Stelling.

Elke Boole'se algebra is isomorf met een verzamelingenlichaam.

Bewijs.

Zij B een Boole'se algebra. Zij $\mathcal{F}$ een verzameling, die hetzelfde cardinaal-getal heeft als de verzameling der priemidealen van B. We kunnen derhalve de elementen (punten) van $\mathcal{F}$ door p_I voorstellen, waarbij I een priemideaal van B is. Zij B' de Boole'se algebra van alle deelverzamelingen van $\mathcal{F}$. We definiëren nu een afbeelding h van B in B' en we zullen bewijzen dat deze afbeelding een isomorfisme is, waarmee we dan de stelling bewezen hebben. h is als volgt gedefiniëerd

$$h(x) = \{p_I : x \notin I, p_I \in \mathcal{F}\}$$

We bewijzen nu achtereenvolgens

$$(i) \quad h(x+y) = h(x) \cup h(y)$$

Stel $p_I \in h(x+y) \Rightarrow x+y \notin I \Rightarrow$ minstens x of y, stel $x \notin I \Rightarrow p_I \in h(x) \Rightarrow p_I \in h(x) \cup h(y)$.

Stel $p_I \in h(x) \cup h(y) \Rightarrow$ minstens $p_I \in h(x)$ of $p_I \in h(y)$, stel $p_I \in h(x) \Rightarrow x \notin I \Rightarrow x+y \notin I \Rightarrow p_I \in h(x+y)$.

$$(ii) \quad h(xy) = h(x) \cap h(y)$$

$$p_I \in h(xy) \Leftrightarrow xy \notin I \Leftrightarrow x \notin I, y \notin I$$

$$\Leftrightarrow p_I \in h(x), p_I \in h(y) \Leftrightarrow p_I \in h(x) \cap h(y).$$

- (iii) $h(0) = \emptyset$. Dit is triviaal, want elk priemideaal bevat 0.
 (iv) $h(1) = \mathcal{F}$. Dit is ook triviaal, want geen priemideaal bevat 1.

Uit (i) - (iv) volgt dat h een homomorfe afbeelding is (merk op, dat inderdaad volgt dat $h(\bar{x}) = h(x)^{-}$.) Derhalve is het beeld van B een verzamelingenlichaam (een deelalgebra van B'). We moeten nu nog slechts aantonen, dat h een isomorfe afbeelding is. Dit doen we door te bewijzen, dat de kern van h het nulideaal is.

(v) h is een isomorfe afbeelding. Stel $h(x) = \emptyset$. Voor elk element $x \neq 0$, bestaat er een priemideaal I , zodat $x \notin I$ (Grondstelling priemidealen). Hieruit volgt dat $h(x) = \emptyset$ impliceert $x=0$.

Hiermede is de stelling bewezen.

Gereduceerd lichaam

Een verzamelingenlichaam F , van deelverzamelingen van een verzameling $\mathcal{F}$ (kort aangeduid met $(F, \mathcal{F})$) heet gereduceerd, indien voor elk tweetal punten p and $q \in \mathcal{F}$, er een element $X \in F$ bestaat, zodat $p \in X$, $q \notin X$.

Bewering. Het in de bovenstaande stelling geconstrueerde lichaam is gereduceerd.

Bewijs. Stel $p_{I_1} \neq q_{I_2}$. Dan $I_1 \neq I_2$. Dan bestaat er een element $x \in B$, zodat $x \notin I_1$, $x \in I_2$. Derhalve $p_{I_1} \in h(x)$ en $q_{I_2} \notin h(x)$. Dus $X = h(x)$ heeft de gewenste eigenschappen.

Opmerking.

Het is niet moeilijk uit bovengenoemd bewijs (van de hoofdstelling) af te leiden, dat dit bewijs doorgaat ook indien men voor $\mathcal{F}$ niet de verzameling van alle priemidealen neemt, maar slechts een Stone-familie.

Dus:

Elke Boole'se algebra B is isomorf met een verzamelingenlichaam, dat bestaat uit deelverzamelingen van een willekeurige Stone-familie en Priemidealen van B .

Cursus Boole'se algebras

26-2-63

Enige begrippen uit de topologie

Zij X een verzameling (ruimte). Zij $\mathcal{O}$ een verzameling van deelverzamelingen van X die aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. $\mathcal{O}$ is gesloten onder eindig doorsnijding
2. $\mathcal{O}$ is gesloten onder (eindige en oneindige) vereniging
3. $\emptyset \in \mathcal{O}$
4. $X \in \mathcal{O}$.

We zeggen, dat X een topologische structuur bezit (kort: X is een topologische ruimte), die bepaald wordt door $\mathcal{O}$. De elementen van $\mathcal{O}$ worden de open deelverzamelingen van X genoemd.

Aan elke verzameling X kunnen vele topologische structuren verleend worden. De twee "uitersten" zijn:

1. $\mathcal{O} =$ verzameling van alle deelverzamelingen van X (discrete topologie)
2. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ (indiscrete topologie).

Zij X een topologische ruimte. Een basis voor de topologie van X is een verzameling van open deelverzamelingen van X , zodanig dat elke open deelverzameling de vereniging van elementen van de basis is.

Een subbasis is een verzameling van open deelverzamelingen, zodanig dat de verzameling van eindige doorsnijdingen ervan een basis is.

Omgekeerd: elke verzameling van deelverzamelingen, die gesloten is onder eindige doorsnijding kan als basis voor een topologie dienen. Analoog kan elke verzameling van deelverzamelingen als subbasis voor een topologie dienen.

Zij X een topologische ruimte. Een deelverzameling A van X heet gesloten, indien het complement A^c van A open is.

X heet Hausdorff indien aan de volgende voorwaarde is voldaan:

Voor elk tweetal punten p en q bestaan twee open verzamelingen U en V , zodat $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

X heet compact, indien voor elke overdekking van X met open deelverzamelingen, dus $\bigcup_{p \in \Gamma} U_p = X$, er een eindige partiële overdekking bestaat, dus er bestaat een $\Gamma_1 \subset \Gamma$, Γ_1 eindig, zodat $\bigcup_{p \in \Gamma_1} U_p = X$.

Zij X en Y twee topologische ruimten. Een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ heet continu, indien voor elke open deelverzameling U van Y, $f^{-1}(U)$ open is. $f : X \rightarrow Y$ heet een homeomorphe afbeelding, indien f éénéénduidig is en f en f^{-1} continu zijn.

Voorbeeld

Zij X een oneindige verzameling. Zij X^* de verzameling die verkregen wordt door aan X een element p toe te voegen. We definiëren een topologische structuur op X^* door als open verzamelingen te definiëren:

1°. $\emptyset$, 2°. X^* , 3°. elke deelverzameling van X. Elke co-eindige deelverzameling van X^* die p bevat.

Opgaven. 1. Bewijs dat op deze wijze een topologie gedefinieerd is.

2. Bewijs dat X^* Hausdorff is.

3. Bewijs dat X^* compact is.

4. Bewijs dat de open- en gesloten ("clopen") deelverzamelingen de eindige deelverzamelingen van X zijn en de co-eindige deelverzameling van X^* , die p bevatten

5. Bewijs, dat de open- en gesloten deelverzamelingen een basis vormen.

Zij X een topologische ruimte. X heet 0-dimensionaal, indien X een basis bezit van open- en gesloten deelverzamelingen.

Zij (A) de volgende eigenschap:

Voor elk tweetal punten p en q bestaat een open- en gesloten deelverzameling U van X zodat $p \in U$, $q \notin U$.

Opgave. Bewijs dat voor een compacte ruimte X de eigenschap (A) equivalent is met de nuldimensionaal.

Merk op, dat bovenstaand voorbeeld nuldimensionaal is.

Een compacte, nuldimensionale Hausdorffruimte heet een Boole'se ruimte.

Topologische representatie van een Boole'se algebra B.

Zij $S(B)$ de verzameling der priemidealen p_I en $F = \{h(x) : x \in B\}$.

$h(x) = \{p_I, x \notin I, I \text{ priem}\}$. F is een lichaam.

We voorzien $S(B)$ van een topologische structuur door F als basis te nemen.

Stelling. $S(B)$ is Hausdorff, nuldimensionaal, compact.

Bewijs. 1. Hausdorff. Zij $p_{I_1} \neq p_{I_2}$ dus $I_1 \neq I_2$, dus $\exists x, x \in B, x \in I_1, x \notin I_2$, dus $p_{I_1} \notin h(x), p_{I_2} \in h(x)$.

2. Nuldimensionaal. De elementen van F zijn clopen.

3. Compact. Stel $\bigcup_{j \in \Gamma} h(x_j) = S(B)$ en stel $\bigcup_{j \in \Gamma_1} h(x_j) \neq S(B)$ voor elke $\Gamma_1 \subset \Gamma$, Γ_1 eindig. (Merk op, dat we ons beperken kunnen tot bedekkingen met elementen van de basis.)

Dus $\sum_{j \in \Gamma_1} x_j \neq 1$ voor elke eindige $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Dus het ideaal I dat voortgebracht wordt door de verzameling $\{x_j, j \in \Gamma\}$ is eigenlijk. Dus I kan tot een priemideaal I^* voortgezet worden. Dus alle $x_j^* \in I^*$.

Dus $p_{I^*} \notin h(x_j)$ voor alle $j \in \Gamma$. Dus $\bigcup_{j \in \Gamma} h(x_j) \neq S(B)$. Tegenspraak.

Syllabus Boole'se algebras

11.3.63

We hebben dus bewezen, dat $S(B)$ nuldimensionaal, Hausdorff en compact is. De basis voor de topologie van $S(B)$ bestaat uit alle verzamelingen: $\{h(x) : x \in B\}$. We willen nu nog bewijzen, dat elke open- en -gesloten deelverzameling van $S(B)$ een element van de basis is.

Bewijs. Zij dus U een open- en -gesloten deelverzameling van $S(B)$. Dus, $U = \bigcup_{j \in I} h(x_j)$, $x_j \in B$. Maar U is een gesloten deelruimte (zie beneden) van $S(B)$ en dus is U compact. Derhalve bestaat er een eindige deelverzameling $I_1 \subset I$, zo dat $U = \bigcup_{j \in I_1} h(x_j)$. Maar de verzameling $\{h(x_j), j \in I_1\}$ is een lichaam dat isomorph is met B en dus $U = \bigcup_{j \in I_1} h(x_j) = h(\sum_{j \in I_1} x_j)$, waarmee het gestelde bewezen is.

Relatieve topologie

Zij X een topologische ruimte en zij Y een deelverzameling van X . We kunnen dan aan Y een topologie toekennen op een natuurlijke wijze als volgt:

De verzameling van open deelverzamelingen is $\{U \cap Y, U \text{ open in } X\}$. Het is duidelijk dat deze verzameling aan de eisen op blz.27 voldoet. We zeggen, dat Y de relatieve topologie bezit en we spreken over de deelruimte Y van X (met de relatieve topologie). Is Y open (gesloten) in X , dan spreken we over de open (gesloten) deelruimte Y van X .

Het is duidelijk, dat als $\{U_j, j \in I\}$ een basis voor de topologie van X is, dan is $\{U_j \cap Y, j \in I\}$ een basis voor de relatieve topologie van Y .

Stelling. Een deelruimte Y van een Hausdorffruimte X is weer Hausdorff.

Bewijs. Zij $p, q \in Y$. Dan bestaan er twee open deelverzamelingen U_1, U_2 van X , zodanig dat $p \in U_1, q \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Maar dan is ook $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset$. Dus Y is Hausdorff.

Stelling. Een gesloten deelruimte Y van een compacte ruimte X is weer compact.

Bewijs. Zij $U_j, j \in I$ een verzameling open deelverzamelingen van X , zodanig dat $\bigcup_{j \in I} U_j \supset Y$. Nu is $X \cap Y$ open dus $\bigcup_{j \in I} U_j \cup (X \cap Y) = X$.

Maar X is compact, dus er is een eindige deelverzameling $\Gamma_1 \subset \Gamma$, zodat $\bigcup_{j \in \Gamma_1} U_j \cup (X \cap Y) = X$. Derhalve $\bigcup_{j \in \Gamma_1} U_j \supset Y$.

We keren nu terug tot onze beschouwingen over Boole'se ruimten en Boole'se algebras.

Zij dus B een Boole'se algebra. We hebben gezien, dat $S(B)$ een Boole'se ruimte is, zodanig dat B isomorph is met het lichaam van de open- en -gesloten deelverzamelingen van $S(B)$. Dus aan elke Boole'se algebra B is een Boole'se ruimte $S(B)$ (de Stone ruimte of de duale ruimte van B) toegevoegd.

Het is eenvoudig in te zien dat indien B_1 en B_2 isomorphe algebras zijn, dan zijn $S(B_1)$ en $S(B_2)$ homeomorphe ruimten.

Zij nu omgekeerd X een nuldimensionale, compacte Hausdorff ruimte. We kunnen dan aan X een Boole'se ruimte B toevoegen, zodanig dat $S(B)$ homeomorph met X is (dus de Boole'se ruimte van B is precies X).

We nemen n.l. voor B het lichaam van de open- en -gesloten deelverzamelingen van X . We moeten dan nog bewijzen, dat de Stone ruimte van B homeomorph met X is. Daartoe moeten we een afbeelding $f : S(B) \rightarrow X$ construeren die "op" is en homeomorph.

We stellen de punten van $S(B)$ weer voor door p_I , waarbij I een priemideaal van B is. Zij nu I een priemideaal van B , dan is het niet moeilijk in te zien, dat bij een eenduidig bepaald punt q_I van X hoort, zo dat q_I buiten elk element U ligt, dat tot I behoort (U is dus een open- en -gesloten deelverzameling van X). We stellen nu $h(p_I) = q_I$.

Opgave. Bewijs dat h "op" is en een homeomorphe afbeelding.

Het bovenstaande kan nu kort als volgt samengevat worden:

Stelling. Er bestaat een éénééénduidige correspondentie tussen Boole'se algebras en Boole'se ruimten (op isomorphismen en homeomorphismen na).

Idealen

We zullen nu de idealen van een Boole'se algebra B topologisch voorstellen.

We herinneren er nog even aan, dat de idealen van een Boole'se algebra B een lattice vormen, onder verzameling theoretische insluiting, zodat

$$I_1 \vee I_2 = \{ x+y, x \in I_1, y \in I_2 \}$$

$$I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2.$$

Dit lattice zullen we $\mathcal{Y}$ noemen en we merken op, dat $\mathcal{Y}$ zelfs een volledig lattice is.

We hebben dan

$$\bigvee_{f \in \Gamma} I_f = \left\{ \sum_{f \in \Gamma_1} x_f, \Gamma_1 \subset \Gamma, \Gamma_1 \text{ eindig}, x_f \in I_f \right\}$$

$$\bigwedge_{f \in \Gamma} I_f = \bigcap_{f \in \Gamma} I_f.$$

We beelden nu de idealen van B af op de open deelverzamelingen van $S(B)$.

Zij n.l. I een ideaal. Zij $O(I) = \bigcup_{x \in I} h(x)$ (waarbij met h de afbeelding van blz.25 bedoeld is).

Het is duidelijk dat $O(I)$ open is.

Stelling. De afbeelding $I \rightarrow O(I)$ is een isomorfe afbeelding van het lattice $\mathcal{Y}$ op het lattice $\mathcal{O}$ van de open deelverzamelingen.

Opmerking. $\mathcal{O}$ is inderdaad een lattice, zoals gemakkelijk te zien is (onder verzameling theoretische insluiting).

Men heeft $\bigvee_{f \in \Gamma} \sigma_f = \bigcup \sigma_f$ $\bigwedge_{f \in \Gamma} \sigma_f = \left(\bigcap_{f \in \Gamma} \sigma_f \right)^o$,

waarbij voor elke deelverzameling U , U^o de grootste open deelverzameling voorstelt, die in U begrepen is.

Bewijs van de stelling.

(i) Zij $I_1 \subset I_2$, we moeten dan bewijzen, dat $O(I_1) \subset O(I_2)$. Indien $p \in O(I_1)$, dan bestaat er een $x \in B$, zodat $p \in h(x) \subset O(I_1)$. Het is makkelijk te zien, dat $x \in I_1$ dus $x \in I_2$, dus $h(x) \in I_2$, dus $p \in O(I_2)$.

(ii) $O(I_1) = O(I_2)$ dan moeten we bewijzen, dat $I_1 = I_2$, maar dat volgt onmiddellijk uit de definitie.

(iii) Zij $O(I_1) \subset O(I_2)$ dan moeten we bewijzen dat $I_1 \subset I_2$. Ook dit is eenvoudig in te zien.

Opgaven

1. Bewijs dat de hoofdidealen van B met de open- en -gesloten deelverzamelingen van $S(B)$ corresponderen.
2. Bewijs dat de priemidealen met de complementen van de punten van $S(B)$ corresponderen.
3. Bewijs n.a.v. 2. dat elke Hausdorffruimte een T_1 ruimte is (d.w.z. elk punt van is gesloten).

Syllabus Boole'se algebras

25.3.63

We hebben dus gezien, dat de idealen van een Boole'se algebra B in éénéén-duidige correspondentie zijn met de open deelverzamelingen van $S(B)$. Zij nu B een Boole'se algebra en I een ideaal van B . We willen nu de Stone ruimte van B/I bekijken.

Stelling. De Stone ruimte $S(B/I)$ van B/I is $S(B) \sim O(I)$, waarbij $O(I)$ die open deelverzameling van $S(B)$ voorstelt, die correspondeert met I .

Opm. We wijzen erop, dat $S(B) \sim O(I)$ een gesloten deelruimte van $S(B)$ is en derhalve compact, Hausdorff en eveneens nuldimensionaal en derhalve een Boole'se ruimte.

Bewijs. Het is duidelijk, dat indien U en V twee open- en gesloten deelverzamelingen van $S(B)$ zijn, dan zijn $U' = U \cap (S(B) \sim O(I))$ en $V' = V \cap (S(B) \sim O(I))$ open- en gesloten deelverzamelingen van $S(B) \sim O(I)$. Verder hebben we dat $U' = V' \iff (U' \cap V) \cup (U \cap V') \subset O(I)$. Dit betekent dus dat de collectie deelverzamelingen

$$\{ U' : U' = U \cap (S(B) \sim O(I)), U \text{ open- en gesloten in } S(B) \}$$

een verzamelingenlichaam is, dat isomorph is met B/I . Nu is $S(B) \sim O(I)$ compact en we kunnen dus concluderen, dat alle open- en gesloten deelverzamelingen van $S(B) \sim O(I)$ op deze wijze verkregen worden. Hieruit volgt inderdaad dat $S(B) \sim O(I)$ de Stone ruimte is van B/I .

Opmerking. Is omgekeerd X een gesloten deelruimte van $S(B)$, dan bestaat er natuurlijk een ideaal I , zodanig dat X de Stone ruimte van B/I is. I is n.l. dat ideaal van B , dat met $B \sim X$ correspondeert.

We willen ons nu met het topologische beeld van deelalgebras van B bezig houden. Eerst bewijzen we de volgende

Stelling. Een continue afbeelding f van een compacte ruimte X in een Hausdorffruimte Y is gesloten (d.w.z. indien $U \subset X$, U gesloten, dan $f(U)$ gesloten).

Bewijs. Stel U is een niet lege gesloten deelverzameling van X . We mogen aannemen, dat $U \neq X$. We zullen nu bewijzen, dat elk punt $p \in Y \sim f(U)$ ligt

in een open deelverzameling van Y , die zelf weer in $Y \sim f(U)$ bevat is. Zij q een willekeurig punt van $f(U)$. Aangezien Y Hausdorff is, bestaat er een open deelverzameling $V(q)$, zodat $q \in V(q)$ en $p \notin \bigcup V(q)$ (=afsluiting $V(q)$). X is compact en U is gesloten, dus U is een compacte deelruimte van X . Dus is $f(U)$ een compacte deelruimte van Y . Nu is $\bigcup_{q \in f(U)} V(q)$ een overdekking van $f(U)$ en dus bestaan er punten $q_1, q_2, \dots, q_n$ zodanig dat $\bigcup_{q_i \in f(U)} V(q_i)$ een overdekking van $f(U)$ is. Het is nu eenvoudig in te zien, dat $Y \sim (\bigcup_{i=1}^n V(q_i))$ een open deelverzameling is, die p bevat en die in $Y \sim f(U)$ bevat is.

We zullen nu aantonen, dat indien C een deelalgebra van B is, dat $S(C)$ een continu beeld van $S(B)$ is. Eerst bewijzen we enige lemma's.

Lemma 1. Zij B een Boolese algebra en C een deelalgebra van B en zij I een priemideaal van B . Dan is $I \cap C$ een priemideaal van C .

Het bewijs is zeer eenvoudig en wordt aan de lezer overgelaten.

Lemma 2. Zij I een priemideaal van C . Dan bestaat er een priemideaal I^* van B , zodat $I^* \cap C = I$.

Bewijs. Zij I' het ideaal van B , dat voortgebracht wordt door I . Het is duidelijk, dat $I' \cap C = I$. Verder is I' evenals I een eigenlijk ideaal. Derhalve bestaat er een priemideaal I^* van B , zodat $I^* \supset I'$. Nu is blijkbaar, $I^* \cap C \supset I$. Maar $I^* \cap C$ is een priemideaal van C en dus eigenlijk, maar I is maximaal, dus $I^* \cap C = I$.

We bewijzen nu de volgende

Stelling. Zij B een Boole'se algebra en zij C een deelalgebra van B . Dan bestaat er een continue afbeelding $f : S(B) \xrightarrow{\text{op}} S(C)$.

Bewijs. We zullen de priemidealen van B "ordenen" door de punten van $S(B)$. Hetzelfde geldt voor C . We definiëren nu een afbeelding $f : S(B) \rightarrow S(C)$ als volgt.

Voor elk punt $p \in S(B)$, $f(p) \in S(C)$ is bepaald door $I_{f(p)} = I_p \cap C$ (verg. lemma 1). Deze afbeelding is duidelijkerwijze "op" volgens lemma 2. We zullen nu bewijzen, dat f de continue afbeelding is. We kunnen volstaan met te bewijzen, dat voor elke open- en gesloten deelverzameling U van $S(C)$, $f^{-1}(U)$ open- en gesloten in $S(B)$ is. We zullen nu de isomorphe afbeelding van B op het lichaam der open- en gesloten deelverzamelingen van

$S(B)$ door h voorstellen en van C op de open- en gesloten deelverzamelingen van $S(C)$ door h' .

Zij nu $U = h'(x)$, $x \in C$. We beweren nu, dat $h(x) = f^{-1}(U)$. We hebben n.l.

$$p \in h(x) \iff x \notin I_p \iff x \notin I_p \cap C \iff f(p) \in U \implies p \in f^{-1}(U).$$

Hiermede is de stelling bewezen.

We kunnen natuurlijk omgekeerd bewijzen, dat indien $S(B)$ en $S(C)$ de Boole'se ruimten van twee B.A.'s B en C zijn, en $f : S(B) \xrightarrow{\text{op}} S(C)$ is een continue afbeelding, dan is C isomorph met een deelalgebra van B . De deelalgebra van B is de verzameling $\{f^{-1}(U) : U \text{ open- en gesloten in } S(C)\}$.

Verband tussen homomorphe afbeeldingen en continue afbeeldingen.

Zij $h : B \rightleftarrows C$ een homomorphe afbeelding. Dan is $h(B)$ een deelalgebra van C en dus correspondeert hiermee een continue afbeelding f van $S(C)$ op $S(h(B))$ die tegelijk een gesloten ($f = \text{gesloten!}$) deelruimte van $S(B)$ is. Het verband tussen h en f is klaarblijkelijk gegeven door

$$f^{-1}(U) = h(U) = U \cap f(S(h(B)))$$

voor elke open- en gesloten deelverzameling van $S(B)$.

Meer algemeen:

epimorphisme $\longleftrightarrow$ homeomorphe afbeelding in
(hom.afb. op)

monomorphisme $\longleftrightarrow$ continue afbeelding op
(isom.afb. in)

Syllabus Boole'se algebras

8 en 22 april 1963

Als een toepassing van de behandelde theorie zullen we de vrije Boole'se algebras behandelen.

Zij B een Boole'se algebra en E een verzameling voortbrengenden van B .
(Dus B is de kleinste deelalgebra van B die E bevat.)

B is vrij op E , indien voor elke Boole'se algebra C en voor elke afbeelding $h : E \rightarrow C$, h voortgezet kan worden tot een homomorphe afbeelding $h^* : B \rightarrow C$.

Lemma 1. h^* is eenduidig bepaald.

Bewijs. Stel h^* en h^{**} zijn beide voortzettingen van h .

Stel $X = \{x : h^*(x) = h^{**}(x), x \in B\}$. Het is niet moeilijk in te zien, dat $X \supset E$ en dat X een deelalgebra van B is. Derhalve is $X = B$ en dus $h^* = h^{**}$.

Stelling.

Stel B_1 is vrij op E_1 , B_2 vrij op E_2 . Dan geldt: B_1 en B_2 zijn isomorph dan en slechts dan $|E_1| = |E_2|$.

Bewijs.

(i) Stel $|E_1| = |E_2|$. Dus er bestaan 1.1-duidige afbeeldingen

$$\begin{aligned} h_1 : E_1 &\xrightarrow{\text{op}} E_2 \\ h_2 : E_2 &\xrightarrow{\text{op}} E_1, \end{aligned}$$

zodanig dat $h_1 h_2 = h_2 h_1 = 1$.

Nu bestaan er homomorphe voortzettingen h_1^* en h_2^* van h_1 en h_2 zo dat $h_1^* : B_1 \rightarrow B_2$ en $h_2^* : B_2 \rightarrow B_1$. Nu is $h_2^* h_1^* : B_1 \rightarrow B_1$ en $h_2^* h_1^* / E_1 = h_2 h_1$ maar $h_2 h_1 = 1$, dus volgens lemma 1 geldt $h_2^* h_1^* = 1$. Evenzo geldt $h_1^* h_2^* = 1$, derhalve zijn h_1^* en h_2^* isomorphe afbeeldingen "op", en dus zijn B_1 en B_2 isomorph.

(ii) Stel B_1 en B_2 zijn isomorph. In geval B_1 en B_2 oneindig zijn, volgt onmiddellijk dat $|E_1| = |E_2|$, want het cardinaalgetal van een oneindige Boole'se algebra is hetzelfde als dat van een verzameling voortbrengenden (waarom?).

Stel nu, dat $|B_1| = |B_2| =$ eindig en stel $|E_1| = m$, $|E_2| = n$, $m > n$. Er bestaat een afbeelding $h : E_1 \xrightarrow{op} E_2$ die tot een homomorfe afbeelding $h^* : B_1 \rightarrow B_2$ voortgezet kan worden. Maar h^* is niet eeneenduidig, dus $|B_1| > |B_2|$. Tegenspraak.

Uit het bovenstaande theorema volgt, dat indien voor elk cardinaalgetal α , een B.A. bestaat, die vrij is op een verzameling E , $|E| = \alpha$, van voortbrengenden, dan is deze eenduidig bepaald. Duiden we hem aan met B_α , dan is $|B_\alpha| = \alpha$, indien α oneindig is. We zullen straks zien, dat $B_n = 2^{2^n}$, indien $\alpha = n =$ eindig.

De existentie van B_α voor elk cardinaalgetal α wordt bewezen door de duale ruimte van B_α te construeren.

Zij T_a , $a \in A$ een familie topologische ruimten. Beschouw het cartesische product $X = \prod_{a \in A} T_a =$ verzameling van alle functies x op A , zodat voor elke $a \in A$, $f(a) \in T_a$. We topologiseren $X = \prod_{a \in A} T_a$ door een subbasis te definiëren

voor de open deelverzamelingen. Hiervoor nemen we de verzamelingen $\{x : x_a \in U\}$, waarbij U een open deelverzameling van T_a is en $x_a = x(a)$ (dus de a de coördinaat van x). We zien, dat de eindige doorsnijdingen van de elementen van de subbasis een basis voor $X = \prod_{a \in A} T_a$ zijn, en elke open deelverzameling is een vereniging van basiselementen.

Het is eenvoudig in te zien, dat indien elke T_a Hausdorff is dan is het topologische product eveneens Hausdorff. Verder geldt de stelling van Tychonoff (zie Kelley p.143), dat indien elke T_a compact is, dan is ook het topologische product compact.

Cantorruimten

We zullen nu in het vervolg met het symbool 2 de ruimte bestaande uit 2 punten, met de discrete topologie, aanduiden.

Zij nu α een cardinaalgetal; dan beschouwen we het topologische product van α copieën van de ruimte 2 . Deze ruimte noemen we de Cantorruimte, C_α .

Uit het bovenstaande volgt, dat indien we de punten van 2 door 0 en 1 voorstellen, dat de elementen van de subbasis van C_α de verzamelingen

$$\left. \begin{array}{l} \{x : x_a = 1, x \in C_\alpha\} \\ \{x : x_a = 0, x \in C_\alpha\} \\ \text{de lege verzameling } \emptyset \\ \text{de hele ruimte } C_\alpha \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{voor elke } a \in A \\ |A| = \alpha. \end{array}$$

Het is duidelijk, dat elk element van de subbasis open - en gesloten is en derhalve is elk element van de basis eveneens open- en gesloten. Hieruit volgt, dat C_α nul-dimensionaal is. Tevens is C_α Hausdorff en compact (vlms de stelling van Tychonoff). Derhalve is C_α een Stone ruimte.

We merken op dat elke open- en gesloten deelverzameling een element van de basis moet zijn. (Ga dit na, het volgt uit de compactheid van C_α .)

We bewijzen nu de volgende

Stelling.

De Boole'se algebra B van alle open- en gesloten deelverzamelingen van C_α is de vrije Boole'se algebra B_α op α voortbrengenden.

Bewijs. Zij voor elke $a \in A$,

$$a^* = \{x : x_a = 1, x \in C_\alpha\}.$$

Nu is elk element van B een eindige vereniging van eindige doorsnijdingen van elementen a^* en hun complementen. Derhalve is de verzameling

$$E = \{a^* : a \in A\} \text{ een verzameling voortbrengenden en } |E| = \alpha.$$

We zullen bewijzen, dat B vrij op E is.

Zij C een Boole'se algebra. We identificeren C met het lichaam van de open- en gesloten deelverzamelingen van $S(C)$. Zij $h : E \rightarrow C$ een afbeelding van E in C. Nu definiëren we een afbeelding $f : S(C) \rightarrow C$ als volgt:

$$(f(y))_a = 1 \text{ indien } y \in h(a^*)$$

$$(f(y))_a = 0 \text{ indien } y \notin h(a^*).$$

We beweren, dat f een continue afbeelding is. Inderdaad voor elke $a \in A$, geldt $f^{-1}(a^*) = h(a^*)$ en $f^{-1}((a^*)^1) = (h(a^*))^1$. Dus het inverse beeld van een subbasisch element is open- en gesloten. Derhalve is f continu.

Nu is met f een homomorphe afbeelding $h^* : B \rightarrow C$ verbonden, zodanig dat $h^*(U) = f^{-1}U$ voor elke open- en gesloten deelverzameling $U \in C$.

Nu is $h^*(a^*) = f^{-1}(a^*) = h(a^*)$. Derhalve is h^* een voortzetting van h en hiermede is dus bewezen, dat $B_\alpha = B$.

Opmerking. Aangezien C_n discreet is indien n eindig is, volgt hieruit, dat het aantal elementen de vrije Boole'se algebra B_n op een eindig aantal voortbrengenden 2^{2^n} is (het aantal punten van B_n is 2^n en dus het aantal deelverzamelingen 2^{2^n}).

