STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Syllabus

Colloquium "Gelijkverdeling"

o.l.v. Prof.dr. G. Helmberg

(1963/1964)

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam,49,2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

INHOUD

ERRATA

Pagina	regel			
4	7	ε	moet zijn	3ε
5	33	y	"	g
5	34	y	"	g
6	10/12	For every n... of functions f_n	moet zijn	For every pair of neighbourhoods U_n, U_m such that $U_n \supset \bar{U}_m$, let $f_{n,m}$ be a corresponding Urysohn function. Let $\mathfrak{F}$ be the set of all finite products of functions $f_{n,m}$.
8	16	$f(x_n)^2$	moet zijn	$f(x_n)$
9	25	$0 \leq \alpha < \beta$	"	$0 \leq \beta < \alpha$
10	3	$\|\|f\|\| \leq \alpha_n$	"	$\|\|f\|\| < \alpha_n$
10	5	$\alpha_i : X$	"	$\alpha_i - X$
10	7	$\chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) \setminus E_{\alpha_i}(x)$	moet zijn	$\chi_{E_{\alpha_{i-1}} \setminus E_{\alpha_i}}(x)$
12	9	$d_{ij}(X)$	"	$d_{ij}(x)$
13	4	De ingevoegde regels (aangeduid met * □) vervallen.		
13	17	as in index	moet zijn	as index
13	20	$d_{ij}^{(k)}(X)d\mu(X)$	"	$d_{ij}^{(k)}(x)d\mu(x)$
13	laatste regel	n.d.	"	u.d.
14	9, 11, 13	$D^{(k)}(a^{N+1})-D^{(k)}(e)$	"	$D^{(k)}(a^{N+1})-D^{(k)}(a)$
16	2	N,	"	N_o
17	laatste regel	I	"	spoor(I)
20	11	$\varepsilon(\frac{1}{2}-\frac{(N_o-1)N_o}{2N})$,	moet zijn	$\varepsilon(1-\frac{(N_o-1)N_o}{2N})<\varepsilon;$
20	12	vervalt		
26	13	bewijzen dat	moet zijn	bewijzen dat x
27	5	en daar	"	en daar ϕ
29	5	$- I\|$	"	$- I\|\|$

Pagina 29	regel	11	$(D^{(k)}(u_{h+n}\ldots u_h)-I\|$	moet zijn	$(D^{(k)}(u_{h+n}\ldots u_h)-I)\|$
31		19	J.G. van der Corput	"	J.Von Neumann [13]
35	toevoegen:		[13] J.Von Neumann, Egyenletesen Sürü Számsorozatok. Mat.fiz. Lapok 32(1925), 32-40.		
36	regel	6	met(2)	moet zijn	in $[\alpha,\beta[$
39		8	$(0 \leq i \leq k)$	"	$(1 \leq i \leq k)$
40		3	$M(N)$	"	$M(N)^2$
41		2	$=$	"	$\geq$
41		12	$M(N)$	"	$M(N)^2$
41		26	u_n	"	x_n
41		28	u_n		x_n
44		2	$2+ {}^2\log N$	"	$2(1+ {}^2\log N)$
46		11	$e^{2\pi ikx_n}$	"	$e^{2\pi ihx_n}$
46		11	$k\neq 0$	"	$h\neq 0$
46		13/14	$2\pi ik$	"	$2\pi ih$
47		21	$M(N)$	"	$M(N)^2$
47		22	voor de N punten	"	voor de N punten, gevormd uit de eerste N getallen $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ van (78)
73		8	§10	moet zijn	§11
74		24	gelijkverdeling	"	gelijkverdeling mod m

Syllabus colloquium "Gelijkverdeling" o.l.v. Prof.dr. G. Helmberg

§ 1. Uniform distribution modulo 1

Let $\{x_n\}$ be a given sequence of real numbers x_n. For any natural number N and any real numbers α, β $(0 \leq \alpha < \beta \leq 1)$ let $A(\alpha,\beta,N)$ be the number of x_n's with $1 \leq n \leq N$ satisfying $\alpha \leq x_n - [x_n] < \beta$ ($[x_n]$ = greatest integer in x_n):

$$A(\alpha,\beta,N) = \sum_{\substack{x_n - [x_n] \in [\alpha,\beta[\\ 1 \leq n \leq N}} 1$$

Def.1 (Weyl [10]). The sequence $\{x_n\}$ is called uniformly distributed (u.d.) mod 1, if

(1) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} A(\alpha,\beta,N) = \beta - \alpha \quad \text{for all } \alpha,\beta \quad (0 \leq \alpha < \beta \leq 1).$$

This definition may be replaced by an equivalent one concerning the integral of continuous complex-valued functions of period 1 over the unit interval. In order to see this we use the following considerations:

Let $\chi_{[\alpha,\beta[}$ be the characteristic function of the union of all intervals $[k+\alpha, k+\beta[$ (k an integer):

$$\chi_{[\alpha,\beta[}(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k+\alpha, k+\beta[\\ 0 \text{ for } x \notin \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k+\alpha, k+\beta[\end{cases} \qquad (0 \leq \alpha < \beta \leq 1).$$

Then we have $A(\alpha,\beta,N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{[\alpha,\beta[}(x_n)$ and (1) may be rewritten as follows:

(2) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[\alpha,\beta[}(x_n) = \int_0^1 \chi_{[\alpha,\beta[}(x)\,dx \quad \text{for all } \alpha,\beta$$
$$(0 \leq \alpha < \beta \leq 1).$$

Let us, for the moment, call a function f <u>simple</u>, if it is a finite linear combination of characteristic functions $\chi_{[\alpha_i,\beta_i[}$ with real coefficients:

$$f = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \chi_{[\alpha_i, \beta_i[} \ .$$

From (2) we may then conclude

(3) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{for every simple function } f.$$

Let us denote by $\mathcal{R}([0,1])$ and $\mathcal{C}([0,1])$ the set of all real-valued and complex-valued continuous functions with period 1 respectively. For $f \in \mathcal{C}([0,1])$ let $\|f\| = \sup_{0 \leq x < 1} |f(x)|$ be the "norm" of f.

If any $f \in \mathcal{R}([0,1])$ and any real number $\varepsilon > 0$ is given, then, by the definition of the Riemann-integral, there exist simple functions f_1 and f_2 such that

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \text{for all } x \quad \text{and}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \varepsilon \leq \int_0^1 f_1(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 f_2(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Using (3) we obtain

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \varepsilon \leq \int_0^1 f_1(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leq \lim_{N \to \infty} \inf \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

and
$$\lim_{N \to \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(x_n) = \int_0^1 f_2(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \varepsilon \ .$$

From this we conclude

(4) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{for every } f \in \mathcal{R}([0,1]).$$

Since this holds for the real and imaginary parts of any function in $\mathcal{C}([0,1])$ we see that (4) is even true for every function $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Conversely, suppose (4) to be true. Given α, β $(0 \leq \alpha < \beta \leq 1)$ and $\varepsilon > 0$ we may approximate $\chi_{[\alpha,\beta[}$ by functions $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([0,1])$ in such a way that

$$0 \leq f_1(x) \leq \chi_{[\alpha,\beta[}(x) \leq f_2(x) \leq 1 \quad \text{for all } x \text{ and}$$

$$\int_0^1 \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx \leq \varepsilon \ .$$

Then we have

$$(\beta-\alpha)-\varepsilon \leqq \int_0^1 f_2(x)\,dx-\varepsilon \leqq \int_0^1 f_1(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leqq \liminf_{N\to\infty} \frac{A(\alpha,\beta,N)}{N}$$

and

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{A(\alpha,\beta,N)}{N} \leqq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(x_n) = \int_0^1 f_2(x)\,dx \leqq \int_0^1 f_1(x)\,dx +$$

$$+\varepsilon \leqq (\beta-\alpha)+\varepsilon .$$

From this we conclude that (1) is true. Thus, we have proved the following theorem:

<u>Theorem 1</u> (Weyl [10]): The sequence $\{x_n\}$ is u.d. mod 1 iff

$$(4') \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{for every function } f\in \mathcal{C}([0,1]).$$

If the sequence $\{x_n\}$ is u.d. mod 1, then (4') must hold especially for every function $\varphi_k(x) = e^{2i\pi kx}$ (k an integer). Therefore we have

$$(5) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} = \int_0^1 e^{2\pi ikx}dx = \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \\ 0 & \text{for } k\neq 0. \end{cases}$$

Conversely, let $\{x_n\}$ be a sequence having the property that

$$(6) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} = 0 \quad \text{for every natural number } k.$$

Then, replacing i by (-i) and taking in account the trivial case k=0, we obtain (5). We shall call a finite linear combination of the functions φ_k with complex coefficients a <u>trigonometric polynomial</u>. Let any function $f \in \mathcal{C}([0,1])$ be given. By the theorem of <u>Weierstrasz</u> [7] p.121 there exists, for any $\varepsilon > 0$, a trigonometric polynomial φ such that $\| f-\varphi\| < \varepsilon$. Then we have

$$\left| \int_0^1 [f(x)-\varphi(x)]\,dx \right| \leqq \int_0^1 \left| f(x)-\varphi(x)\right| dx \leqq \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} [f(x_n)-\varphi(x_n)] \right| \leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| f(x_n)-\varphi(x_n)\right| \leqq \varepsilon$$

for every natural number N.

Therefore

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| \leq \left|\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(x_n)\right| +$$

$$+\left|\int_0^1 \left[f(x) - \varphi(x)\right] dx\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[f(x_n) - \varphi(x_n)\right]\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(x_n)\right| + 2\varepsilon .$$

Since we assumed (6) and therefore also (5) to be true, (4) holds for all trigonometric polynomials. Therefore, the first term in this chain of inequalities will be smaller than ε for N sufficiently large. By the arbitraryness of ε we obtain (4'). Thus, we have proved the following theorem (Weyl's criterion for uniform distribution mod 1):

Theorem 2 (Weyl [10]). The sequence $\{k_n\}$ is u.d. mod 1 iff

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} = 0 \quad \text{for every natural number } k.$$

§ 2. Compact Hausdorff spaces

If we associate with every real number x the complex number $x^* = e^{2i\pi x}$ and with every function $f \in \mathcal{C}([0,1])$ the function f^* defined on the unit circle in the complex plane by $f^*(x^*) = f(x)$, then f^* is well defined and the $*$-operation constitutes a norm-preserving isomorphism of $\mathcal{C}([0,1])$, regarded as a linear space over the complex number field, onto the linear space of all continuous complex-valued functions on the unit circle. Thus, we could have formulated all concepts and theorems of § 1 for sequences on the unit circle instead of sequences of real numbers. The main topological features of the unit circle that have been implicitly used in the definitions and proofs of the preceeding paragraph may be expressed by saying that the unit circle is a compact Hausdorff space satisfying the second axiom of countability. In what follows we shall investigate the possibilities of defining in a reasonable way sequences that are uniformly distributed in an arbitrary given compact Hausdorff space, satisfying the 2^{nd} axiom of countability. Although this is not the most extreme possible generalization of the concept of uniform distribution it seems to be an important one inasfar as a considerable amount of results on uniform distribution modulo 1 has successfully been carried over to this more general case, thus being available also in other special cases of the underlying space or in situations that are in some way related to the situation in a compact Hausdorff space.

In order to be able to carry over what we have done in § 1 to the present general setup we shall in this paragraph recall some topological definitions and facts used in the sequel [5].

A topological space X is called Hausdorff, if for every pair of disjoint points $x \neq y$ there exist disjoint neighbourhoods of these points. The space X is called compact if every cover of X by open sets admits a finite subcover. The space X is said to satisfy the 2^{nd} axiom of countability if there exists a countable basis of neighbourhoods. As a consequence X is separable, i.e. it contains a countable everywhere dense subset.

A compact Hausdorff space is also normal, i.e. for every closed set A and for every open set U containing A there exists a continuous real-valued function on X such that $0 \leq f(x) \leq 1$ for all $x \in X$ and

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x \in A \\ 0 \text{ for } x \notin U \end{cases} \quad (\text{"Urysohn-function" [9] p.20}).$$

Let $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{R}(x)$ and $\mathcal{R}_+(x)$ respectively be the sets of all complex-valued, real-valued, and non-negative real-valued continuous functions on X. Every function $f \in \mathcal{C}(x)$ is bounded. If the "uniform" norm of f is defined by $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, then $\mathcal{C}(x)$ is a Banachalgebra with respect to this norm, i.e. $\mathcal{C}(x)$ is an algebra (operations being defined pointwise), satisfying the following conditions:

1) $\|f\| \geq 0$ for every $f \in \mathcal{C}(x)$
2) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow$ for $f = 0$
3) $\|\lambda f\| = |\lambda| \; \|f\|$ for every $\lambda \in \mathcal{C}$ and $f \in \mathcal{C}(x)$
4) $\|f+y\| \leq \|f\| + \|y\|$ for every pair $f, y \in \mathcal{C}(x)$
5) $\|fy\| \leq \|f\| \|y\|$ " " " " "
6) If $\{f_n\}$ is a fundamental sequence in $\mathcal{C}(x)$ (i.e.

$\lim_{m,n\to\infty} \| f_n - f_m \| = 0$), then there exists an $f \in \mathcal{C}(X)$ such that $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (i.e. $\lim_{n\to\infty} \| f-f_n \| = 0$). A subset $\mathfrak{A}$ of $\mathcal{C}(X)$ is said to <u>distinguish points</u> if for every pair of disjoint points $x \neq y$ there is a function $f \in \mathfrak{A}$ such that $f(x) \neq f(y)$. The approximation theorem of <u>Stone-Weierstrasz</u> [6] p.32, [5] p.244 says that every subalgebra of $\mathcal{C}(X)$ that distinguishes points, contains the constant functions and with every function also its complex conjugate, is dense in $\mathcal{C}(X)$ (with respect to the uniform norm).

If X is 2^{nd} countable, let $\mathfrak{A} = \{ U_n : n \geq 1 \}$ be a countable neighbourhood basis of open sets U_n. For every n, select a point $x_n \in U_n$ and a corresponding Urysohn-function f_n. Let $\mathcal{F}$ be the set of all finite products of functions f_n. Then $\mathcal{F}$ is a countable family of continuous real-valued functions distinguishing points and the set of all finite linear combinations of functions $\mathcal{F}$ with complex coefficients is a subalgebra of $\mathcal{C}(X)$, satisfying the hypothesis of the Stone-Weierstrasz theorem.

A <u>bounded linear functional</u> on $\mathcal{C}(X)$ is a complex-valued function defined on $\mathcal{C}(X)$, satisfying the following conditions:

1) $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ for all $f,g \in \mathcal{C}(X)$
2) $\phi(\lambda f) = \lambda \phi(f)$ for every $\lambda \in \mathcal{C}$ and $f \in \mathcal{C}(X)$
3) $|\phi(f) \leq K \|f\|$ for every $f \in \mathcal{C}(X)$

where K is a constant independent of f. Especially we may take for K the "<u>norm</u>" of ϕ, defined by

$$\| \phi \| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |\phi(f)| .$$

The linear functional ϕ is called positive if

$$\phi(f) \geq 0 \quad \text{for every } f \in R_+(X).$$

As a consequence, $\phi(f) \leq \phi(g)$ if $f(x) \leq g(x)$ for all $x \in X$. The linear functional is called <u>normed</u>, if $\phi(1) = 1$. As a consequence, a positive, normed, bounded linear functional has norm 1. An example is provided by the Riemann integral on the closed unit interval.

By the theorem of Riesz [2] § 56, every positive bounded linear functional on $\mathcal{C}(X)$ may be represented as an integral, i.e. for every such functional ϕ there exists a regular Borel measure μ on X such that

$$\phi(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x) \quad \text{for all } f \in \mathcal{C}(X) \tag{7}$$

and $\|\phi\| = \mu(X)$. Here the family $\mathcal{B}$ of Borelsets is the smallest family of subsets of X containing all compact sets and together with any two sets E_1, E_2 also their difference $E_1 \setminus E_2$ and together with any countable subfamily $\{E_n : n \geq 1)$ also their Union $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. A Borel measure μ is a not identically vanishing extended real-valued set-function on $\mathcal{B}$ having the following properties

1) $0 \leq \mu(E) \leq \infty$ for all $E \in \mathcal{B}$
2) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ for any sequence of pairwise disjoint sets $E \in \mathcal{B}$
3) $\mu(E) < \infty$ for every compact set $E \in \mathcal{B}$.

The Borel measure μ is called regular, if

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B},\ F \text{ compact},\ F \subset E\} \\ &= \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{B},\ U \text{ open},\ E \subset U\}. \end{aligned}$$

The measure μ is called normed, if $\mu(X) = 1$. (7) constitutes a one-to-one mapping of the set of all positive bounded linear functionals on $\mathcal{C}(X)$ onto the set of all regular Borel measures on X. If X is 2nd countable, every Borel measure on X necessarily has to be regular [2] § 50,51,52.

A real-valued function f on X is called Borel-measurable if the set $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ is a Borelset for every real number α. Clearly, every continuous real-valued function on a compact Hausdorff space is measurable.

We shall call a Borel measurable real-valued function f on X R-integrable with respect to a positive bounded linear functional ϕ

(or the corresponding regular Borel-measure μ), if for every $\varepsilon > 0$ there exist two functions $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(X)$ such that $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ for all $x \in X$ and $\phi(f_2 - f_1) = \int\limits_X [(f_2(x) - f_1(x)] \, d\mu(x) \leq \varepsilon$.

§ 3. Uniform distribution in compact Hausdorff spaces

In this paragraph X will always denote a compact Hausdorff space satisfying the 2^{nd} countability axiom and μ a normed Borel measure on X. The following definitions and theorems then appear as generalizations of those contained in the first paragraph.

Definition 1 (Hlawka [4]). A sequence $\{x_n\}$ in X is called μ-uniformly distributed (u.d.) if

(8)
$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int\limits_X f(x) d\mu(x) \quad \text{for every } f \in \mathcal{C}(X).$$

Theorem 1("Weyl's criterion", Hlawka [4]):

Let $\mathcal{F}$ be a countable subset of $\mathcal{C}(X)$ having the property that finite linear combinations of elements of $\mathcal{F}$ with complex coefficients are dense in $\mathcal{C}(X)$. The sequence $\{x_n\}$ is μ-u.d. iff

(9)
$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \overset{?}{=} \int\limits_X f(x) d\mu(x) \quad \text{for every } f \in \mathcal{F} .$$

Proof: The necessity of (9) is obvious. To see the sufficiency one observes that, given any $f \in \mathcal{C}(x)$ and any $\varepsilon > 0$, there is a finite linear combination φ of elements of $\mathcal{F}$ such that $\| f - \varphi \| \leq \varepsilon$ and that (9) holds also for φ . The further reasoning is exactly the same as in the proof of § 1 theorem 2.

Let $\{x_n\}$ be μ-u.d. in X. If f is any real-valued function, R-integrable with respect to μ , and if $\varepsilon > 0$ is given, let $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(x)$ be chosen such that

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \qquad \text{for all } x \in X \text{ and}$$
$$\int\limits_X [f_2(x) - f_2(x)] \, d\mu(x) \leq \varepsilon .$$

Then, by a similar reasoning as applied in the proof of § 1 theorem 1 to the function $\chi_{[\alpha,\beta[}$, we find that (8) even holds for every R-integrable function on X.

Let us, for a Borelset E, denote by $\overline{E}$ its closure and by E^o its interior (both of them being again Borelsets). Assume that $\mu(\overline{E}\setminus E^o)= = \mu(\overline{E})-\mu(E^o) = 0$, that is, $\mu(E^o) = \mu(E) = \mu(\overline{E})$. Let $\varepsilon > 0$ be given. By the regularity of μ we can find a closed set $A\subset E^o$ and an open set $U\supset\overline{E}$ such that $\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(A)\leq \mu(U)\leq \mu(E) + \varepsilon$. Because of the normality of X there exist Urysohn-functions $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(X)$ such that

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x\in A \\ 0 \text{ for } x\notin E^o \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x\in \overline{E} \\ 0 \text{ for } x\notin U \ . \end{cases}$$

It follows that

$$\chi_A(x)\leq f_1(x)\leq \chi_E(x)\leq f_2(x)\leq\chi_U(x) \qquad \text{for all } x\in X$$

and therefore

$$\mu(E)-\varepsilon \leq \mu(A) \leq \int_X f_1(x)d\mu(x)\leq \mu(E)\leq \int_X f_2(x)d\mu(x)\leq \mu(U)\leq \mu(E)+\varepsilon.$$

Thus, χ_E is R-integrable. Let, for every natural number N, $A(E,N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_E(x_n)$. Then, by the above remark on R-integrable functions, we have

(10) $$\lim_{N\to\infty} \frac{A(E,N)}{N} = \mu(E)$$ for every Borelset E whose boundary is a null set.

Conversely, suppose (10) to be true for a given sequence $\{x_n\}$ in X and let $f\in\mathcal{R}_+(X)$. For any real number $\alpha\geq 0$, let $E_\alpha = \{x: f(x)\geq\alpha\}$. For $0\leq\alpha<\beta$ we have $E^o_\alpha\subset E_\alpha = \overline{E}_\alpha\subset\{x:f(x)>\beta\}\subset E^o_\beta\subset E_\beta = \overline{E}_\beta$. Therefore, the boundary sets $E_\alpha\setminus E^o_\alpha$ on $E_\beta\setminus E^o_\beta$ are disjoint. If $0\leq\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$ is any finite set of real numbers, then necessarily $\sum_{i=1}^{n}\mu(E_{\alpha_i}\setminus E^o_{\alpha_i})<\mu(X)$.

Thus, at most countably many sets E_α can have a boundary of positive measure. Given any $\varepsilon > 0$, we may therefore choose $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \|f\| \leq \alpha_n$ in such a way that $\alpha_i - \alpha_{i-1} < \varepsilon$ and $\mu(E_{\alpha_i} \setminus E^o_{\alpha_i}) = 0$ for $1 \leq i \leq n$. Then we have

$$f(x) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \chi_{E_{\alpha_i} \setminus E_{\alpha_{i+1}}}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\chi_{E_{\alpha_i}}(x) - \chi_{E_{\alpha_{i+1}}}(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_i}}(x) = f_1(x) \leq f(x)$$

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_{\alpha_{i-1}} \setminus E_{\alpha_i}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) - \chi_{E_{\alpha_i}}(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) = f_2(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

for all $x \in X$. Taking into account the validity of (10), we obtain

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) - \varepsilon \leq \int_X f_1(x)\,d\mu(x) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leq \lim_{N \to \infty} \inf \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \quad \text{and}$$

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(x) = \int_X f_2(x)\,d\mu(x) \leq \int_X f(x)\,d\mu(x) + \varepsilon .$$

By the arbitrariness of ε we conclude that (8) is true for all functions $f \in \mathcal{R}_+(X)$. Since every function in $\mathcal{R}(x)$ can be written as the difference of two functions in $\mathcal{R}_+(x)$ and since every function in $\mathcal{C}(X)$ is the linear combination of its real and imaginary part, we see that (8) holds without restriction. Thus we have proved the following theorem:

<u>Theorem 2</u>: The sequence $\{x_n\}$ is μ-u.d. iff

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(E,N)}{N} = \mu(E) \quad \text{for every Borelset } E \text{ whose boundary has measure zero.}$$

Since all sets E_α in the proof just given are closed we see that for the μ-uniform distribution of $\{x_n\}$ is even sufficient that (10) holds for all closed sets whose boundary is a nullset.

§ 4. Uniform distribution in compact groups

In the preceding two paragraphs only topològical and measure-theoretic properties of the space X have been considered. Algebraic properties of the complex unit circle inasfar as they have entered into the considerations of the first paragraph are being taken into account if we require X to be a topological group.

A set X is called a topological group if the following conditions are satisfied:

1) X is an abstract group
2) X is a topological space
3) the mapping of the topological product space $X \otimes X$ onto X that sends (x,y) into $x^{-1}y$ is continuous.

For the purposes of the following considerations X will always be assumed to be a topological group that, as a topological space, is a compact Hausdorff space. Then there exists a unique Borel measure on X called Haar measure, having the following properties:

1) $\mu(xE) = \mu(E)$ for all $x \in X$ and $E \in \mathscr{L}$
2) $\mu(X) = 1$.

As a consequence one sees that $\mu(Ex) = \mu(E^{-1}) = \mu(E)$ for all $E \in \mathscr{L}$ and $\mu(U) > 0$ for every open set U. An example for Haar measure is furnished by Lebesgue measure on the unit interval, considered as a topological group under addition mod 1. Because of the uniqueness of Haar measure μ, uniform distribution of a sequence $\{x_n\}$ in a compact Hausdorff Group is usually understood to mean uniform distribution with respect to μ. Combining (10) with the fact that $\mu(U) > 0$ for any open set U one sees that any u.d. sequence is dense in X.

Weyl's criterion may be given a form particularly suitable for the compact group case because of the possibility of a special choice of the system $\mathcal{Y}$ in (9). In order to be able to formulate the corresponding statement we shall recall some facts about representations [9].

A <u>representation</u> of a topological group X is a continuous algebraic homomorphism D of X onto a multiplicative group $D(X) = \{ D(x) : x \in X \}$ of non-singular square matrices of finite rank n with complex entries, i.e. $D(xy) = D(x).D(y)$ and $D(x^{-1}) = [D(x)]^{-1}$ for all $x,y \in X$. Here the topology in D(X) is the one inherited as a topological subspace of n^2-dimensional Euclidean space. An other way to describe this is to say that all entries $d_{ij}(X)$ $(1 \leq i,j \leq n)$ ought to be continuous complex-valued functions on X. As the continuous image of the compact space X, D(X) has to be compact. Since the determinant det D(x) is a continuous function on D(X) (as well as on X), it has to be bounded, and we see that $|\det D(x)| = 1$ for all $x \in X$.

A representation D is called <u>unitary</u>, if every matrix D(x) is unitary, i.e. (denoting by $S^* = \bar{S}^t$ the complex conjugate of the transposed of the matrix S) $D^*(x) = [D(x)]^{-1} = D(x^{-1})$ for all $x \in X$. Two representations D_1, D_2 are called <u>equivalent</u> if there exists a non-singular square matrix S such that $D_1 = S^{-1}D_2S$ (i.e. $D_1(x) = S^{-1}D_2(x)S$ for all $x \in X$). Every representation of a compact Hausdorff group is equivalent to a unitary one.

A representation D of X is called <u>irreducible</u> if D(X), as a group of linear transformations on an n-dimensional linear space, does not admit any proper invariant subspace. Another way of describing this in the case of a compact group is to say that there does not exist any non-singular square matrix S such that, for every $x \in X$, the matrix $S^{-1}D(x)S$ decomposes in the following way:

$$S^{-1}D(x)S = \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix}$$

where $D_1(x)$ and $D_2(x)$ denote square matrices of fixed rank k and n-k respectively $(1 \leq k \leq n-1)$ and 0 denotes appropriate rectangular zero matrices. Every irreducible representation of a compact abelian Hausdorff group is of rank 1. An example is furnished in the case of the additive group of reals mod 1 by every function $D^{(k)}(x) = \varphi_k(x) = e^{2i\pi kx}$ (k any fixed integer).

A system $\vartheta = \{D^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$ of irreducible representations of X is called complete if every irreducible representation of X is equivalent to at least one of the representations $D^{(\lambda)} \in \vartheta$.

*) By the theorem of Peter-Weyl [8],[9] p.246, there exists a complete system $\vartheta = \{D^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$ of pairwise inequivalent irreducible unitary representations $D^{(\lambda)}$ that distinguishes points, i.e. for every disjoint pair of points $x,y \in X$ there is a $\lambda \in \Lambda$ such that $D^{(\lambda)}(x) \neq D^{(\lambda)}(y)$. If X is 2^{nd} countable, then the index set Λ is countable. Combining this fact with the Stone-Weierstrasz theorem and with the fact that the product of any two entries of any two representations may be written as a finite complex linear combination of entries of some of the representations $D^{(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda)$, we arrive at the conclusion that finite complex linear combinations of the entries of the system ϑ are dense in $\mathcal{C}(X)$ in the uniform norm. Therefore, we may choose the entries of the system ϑ in place of the system φ in (10).

Because of the 2^{nd} countability axiom we may choose $\Lambda = \{0,1,\ldots\}$ as in index set. Let $D^{(o)}$ be the trivial representation characterized by $D^{(o)}(x) = 1$ for all $x \in X$. The importance of the choice of the particular system φ as indicated above stems from the fact that

$$\text{(11)} \qquad \int_X d_{ij}^{(k)}(X)\,d\mu(X) = \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \\ 0 & \text{for } k\neq 0 \end{cases}, \quad 1 \leq i,\ j \leq n_k .$$

If integration of a continuous matrix-valued function D(x) is performed simply by integrating every entry $d_{ij}(x)$, then (11) may be written more conveniently

$$\int_X D^{(k)}(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \\ \mathcal{O} & \text{for } k\neq 0 \end{cases}$$

($\mathcal{O}$ denoting again the zero-matrix). Thus we arrive at the following formulation of Weyl's criterion:

*) A system $\vartheta = \{D^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$ of irreducible representations of X is called complete if every irreducible representation of X is equivalent to at least one of the representations $D^{(\lambda)} \in \vartheta$.

Theorem 1 (Eckmann [1] , Hlawka [3]):

The sequence $\{x_n\}$ in X is n.d. iff

(12) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n) = 0 \quad \text{for all } k \neq 0 .$$

As an application, we quote the following generalization of Weyl's theorem on uniform distribution of the multiples of an irrational number mod 1 [10]. Denote by e the unit element in X.

Theorem 2 (Eckmann [1]):

Let $a \in X$ have the property that $\det \left[D^{(k)}(a)-D^{(k)}(e)\right] \neq 0$ for all $k \neq 0$. Then the sequence $\{a^n\}$ is u.d. in X.

Proof: Let $k \neq 0$ and consider the identity

$$\left[D^{(k)}(a) - D^{(k)}(e) \right] . \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(a^n) = D^{(k)}(a^{N+1}) - D^{(k)}(e).$$

Because of our hypothesis, the matrix $D^{(k)}(a) - D^{(k)}(e)$ is invertible. Thus,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(a^n) = \frac{1}{N} \left[D^{(k)}(a)-D^{(k)}(e)\right]^{-1} . \left[D^{(k)}(a^{N+1})-D^{(k)}(e)\right].$$

The matrix $\left[D^{(k)}(a)-D^{(k)}(e)\right]^{-1}$ being constant, and all entries of the matrix $\left[D^{(k)}(a^{N+1})-D^{(k)}(e)\right]$ being uniformly bounded (i.e. independent of N), we see that (12) holds.

Literature

[1] B. Eckmann: Uber monothetische Gruppen. Commentarii math. Helvet. 16, 249-263 (1943/44).

[2] P.R. Halmos: Measure Theory. Van Nostrand Co., New York 1950.

[3] E. Hlawka: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend. Circ. mat. Palermo 4, 33-47 (1955).

[4] E. Hlawka: Folgen auf kompakten Räumen. Abh.math.Sem. Univ. Hamburg 20, 223-241 (1956).

[5] J.L. Kelley: General Topology. Van Nostrand, New York 1955.

[6] M.A. Naimark: Normed rings. Noordhoff, Groningen 1959.

[7] I.P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen Akademie-Verlag Berlin 1961.

[8] F. Peter und H. Weyl: Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann. 97, 737-755 (1927).

[9] L.S. Pontrjagin: Topologische Gruppen I. B.G. Teubner Leipzig 1957.

[10] H. Weyl: Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77, 313-352 (1916).

§ 5. Goed gelijkverdeelde rijen en uniform gelijkverdeelde stelsels

In deze paragraaf en in de beide volgende is G steeds een compacte groep die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma, en μ de Haar-maat in G. Met $\{ D^{(k)} \mid k=0,1,2,\ldots \}$ geven we aan een volledig stelsel inequivalente irreducibele unitaire representaties, als beschreven in § 4; i.h.b. is $D^{(0)}$ de triviale representatie. De graad van $D^{(k)}$ zullen we r_k noemen

Als $\xi = \{ x_n \}$ een rij is in G, geven we de "verschoven" rij $\{ x_{h+n} \}_{n=1,2,\ldots}$ aan met $\xi^{(h)}$. Literatuuropgaven in §§ 5,6,7 verwijzen naar de literatuurlijst aan het eind van § 7.

Zij $\xi = \{ x_n \}$ gelijkverdeeld in G. Dan is ook iedere verschoven rij $\xi^{(h)}$ gelijkverdeeld. Immers, als $f \in \mathcal{C}(G)$ en $N > h$, dan is

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{h+n}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{h} f(x_{N+n}) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{h} f(x_n).$$

Daar f begrensd is naderen $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{h} f(x_{N+n})$ en $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{h} f(x_n)$ tot 0 voor $N \to \infty$; derhalve is

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_{h+n}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_G f(x) d\mu(x),$$

hetgeen betekent dat $\xi^{(h)}$ gelijkverdeeld is.

Elk der rijen $\xi^{(h)}$ is dus bruikbaar om approximaties door eindige sommen te leveren van integralen $\int_G f(x) d\mu(x)$. Het is echter niet te verwachten dat zij altijd alle <u>even goed</u> bruikbaar zijn.

<u>Definitie 1</u> (Hlawka [4], Petersen [7]). Een rij $\xi = \{ x_n \}$ heet <u>goed gelijkverdeeld</u> in G indien, voor iedere $f \in \mathcal{C}(G)$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{h+n}) = \int_G f(x) d\mu(x),$$

<u>uniform in h</u> (h=0,1,2,...).

M.a.w. ξ is goed gelijkverdeeld indien voor iedere $f \in \mathcal{C}(G)$ en iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 bestaat, zodanig dat voor iedere $N \geq N_0$ en voor alle $h=0,1,2,\ldots$ geldt:

$$(1) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{h+n}) - \int_G f(x)\,d\mu(x) \right| < \varepsilon .$$

Algemener kunnen we definiëren:

Definitie 2 (Hlawka [4]). Een stelsel S van rijen in G heet uniform gelijkverdeeld indien voor iedere $f \in \mathcal{C}(G)$ en iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 bestaat, zodanig dat

$$(2) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_G f(x)\,d\mu(x) \right| < \varepsilon$$

voor iedere $N \geq N_0$ en iedere $\xi = \{x_n\} \in S$.

Een rij ξ is blijkbaar goed gelijkverdeeld in G dan en slechts dan als het stelsel $S = \{ \xi^{(h)} \mid h=0,1,2,\ldots \}$ uniform gelijkverdeeld is. Iedere goed gelijkverdeelde rij is gelijkverdeeld.

Bovenstaande "functie-definities" kunnen natuurlijk weer door gelijkwaardige "verdelings-definities" vervangen worden. Als we schrijven, wanneer $\xi = \{x_n\}$ een rij is in G, E een deelverzameling van G, en N een natuurlijk getal:

$$A(\xi,E,N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_E(x_n) = \sum_{\substack{x_n \in E \\ 1 \leq n \leq N}} 1$$

(cf. § 1), dan kunnen we formuleren:

Stelling 1 (Hlawka [4]). Dan en slechts dan is een stelsel S van rijen in G uniform gelijkverdeeld, indien voor iedere gesloten $E \subset G$, waarvan de rand de maat 0 heeft, geldt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\xi,E,N)}{N} = \mu(E),$$

uniform in $\xi \in S$.

M.a.w. S is dan en slechts dan uniform gelijkverdeeld indien bij iedere gesloten $E \subset G$ waarvan de rand een nulverzameling is, en voor iedere $\varepsilon > 0$, een N_0 bestaat zodanig dat voor alle $N \geq N_0$ en iedere keuze van $\xi \in S$

$$(3) \qquad \left| \frac{A(\xi, E, N)}{N} - \mu(E) \right| < \varepsilon .$$

Het bewijs van deze stelling is een eenvoudige aanpassing van het bewijs van § 3 stelling 2. Evenzo vindt men, door aanpassing van het bewijs van § 4 stelling 1:

Stelling 2 (Criterium van Weyl; Hlawka [4]). Dan en slechts dan is een stelsel S van rijen in G uniform gelijkverdeeld, indien voor iedere $k > 0$ en iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 bestaat, zodanig dat

$$(4) \qquad \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)} (x_n) \right\| < \varepsilon ,$$

voor alle $N \geq N_0$ en alle $\xi = \{x_n\} \in S$.

Opmerking. In het linkerlid van (4) staat de norm van een matrix. We hebben dergelijke uitdrukkingen nog niet gedefinieerd. Iedere definitie is bruikbaar waarbij geldt dat $\|A\|$ klein wordt dan en slechts dan als alle coëfficienten a_{ij} van A klein worden. Waar men een $n \times n$ matrix $A=(a_{ij})$ kan opvatten als punt van de n^2-dimensionale euklidische ruimte ligt de volgende definitie voor de hand:

$$\| A \| = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \text{spoor } (A^{\dagger} A) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Niet alleen heeft dan $\| \;\|$ dan de gebruikelijke eigenschappen van een afstand, bovendien geldt nog:

$$(5) \qquad \| AB \| \leq \|A\| . \|B\|$$

Is A unitair, dan is $\|A\|^2 = \text{spoor } (A^{\dagger}A) = I = n$; i.h.b. geldt dus

(6) $$\| D^{(k)}(c) \| = \sqrt{r_k},$$

voor iedere $c \in G$ en iedere $k \geqslant 0$.

Ieder eindig stelsel van gelijkverdeelde rijen is uiteraard uniform gelijkverdeeld. Een belangrijk voorbeeld van een niet-triviaal uniform gelijkverdeeld stelsel wordt genoemd in de volgende stelling.

Stelling 3 (Hlawka [4]). Zij $\{x_n\}$ gelijkverdeeld in G. Dan is het stelsel S, bestaande uit alle rijen $\{cx_n\}$ en alle rijen $\{x_n c\}$, $c \in G$, uniform gelijkverdeeld in G.

Bewijs

Gebruik makend van (5) en (6) zien we dat

(7) $$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(cx_n) \right\| = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(c)\, D^{(k)}(x_n) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \| D^{(k)}(c) \| . \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n) \right\| = \sqrt{r_k} . \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n) \right\| ;$$

en evenzo is

(8) $$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n c) \right\| \leqslant \sqrt{r_k} . \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n) \right\| .$$

Daar $\{x_n\}$ gelijkverdeeld is worden de rechterleden van (7) en (8) voor $k \geqslant 0$ kleiner dan ε als N groot genoeg is, en zulks onafhankelijk van c.

Als toepassing van dit resultaat behandelen we onderstaande stelling 4. Deze stelling doet een uitspraak over "gewone" gelijkverdeling, maar in het bewijs speelt uniforme gelijkverdeling een essentiele rol. Alvorens de stelling te kunnen formuleren moeten we nogmaals een notatie-afspraak vastleggen (Helmberg [3]).

Als $\xi = \{x_n\}$ en $\eta = \{y_n\}$ twee rijen zijn in G, dan geven we met $\xi \times \eta$ de volgende rij $\{z_n\}$ in G aan:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = x_1 y_1; \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&z_{(k-1)^2+2i-1} = x_k y_i, \qquad i \leq i \leq k; \\
&z_{(k-1)^2+2i} = x_i y_k \;, \qquad 1 \leq i \leq k-1
\end{aligned}
$$

De rij $\xi \times \eta$ bestaat dus uit alle producten $x_i y_j$, op een dergelijke wijze gerangschikt dat de 2k-1 producten $x_i y_j$ met max $(i,j)=k$ de plaatsen genummerd $(k-1)^2+1$ tot en met k^2 krijgen.

<u>Stelling 4</u> (Helmberg[3]). De volgende uitspraken zijn equivalent:

a) $\{x_n\}$ is gelijkverdeeld in G;

b) $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$ is gelijkverdeeld;

c) de deelrij van $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$ die bestaat uit alle $x_i x_j^{-1}$ $(i > j)$ is gelijkverdeeld.

<u>Bewijs</u>

We zullen aantonen: a)$\Rightarrow$c)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$a).

a)$\Rightarrow$c).

Stel $\{x_n\}$ is gelijkverdeeld. Dan is ook de rij $\{x_n^{-1}\}$ gelijkverdeeld, op grond van het criterium van Weyl, daar

$$D^{(k)}(x_n^{-1}) = (D^{(k)}(x_n))^{-1} = (D^{(k)}(x_n))^{\dagger}$$

(de representatie D(k) is immers unitair !) Volgens stelling 3 is dan het stelsel van alle rijen $\{cx_n^{-1}\}$, $c \in G$, uniform gelijkverdeeld. Kiezen we nu een $\varepsilon > 0$ en een $f \in \mathcal{C}(G)$, dan bestaat er dus een N_0 zodanig dat

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(cx_n^{-1}) - \int_G f(x)\, d\mu(x) \right| < \varepsilon \tag{9}$$

voor alle $N \geq N_0$ en alle $c \in G$.

Zij $\{z_n\}$ de deelrij van $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$ genoemd in c). Bij ieder natuurlijk getal N bestaat een (zelfs ondubbelzinnig bepaald) natuurlijk getal N^* zodanig dat

$$\tfrac{1}{2}(N^*-1)\, N^* \leq N < \tfrac{1}{2}N^*(N^*+1).$$

Kiezen we N zo groot dat $N^* > N_0$, dan is

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(z_n) - \int_G f(x)\,d\mu(x) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int_G \{ f(x) - f(z_n) \} d\mu(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \int_G \left| f(x) - f(x_i x_j^{-1}) \right| d\mu(x) +$$

$$+ \sum_{i=N_0+1}^{N^*} \frac{i-1}{N} \left| \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} f(x_i x_j^{-1}) - \int_G f(x)\,d\mu(x) \right| +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} \int_G \left| f(x) - f(x_{N^*+1} x_j^{-1}) \right| d\mu(x),$$

waarbij $M = N - \frac{1}{2}(N^* - 1)N^* < N^*$. Van de drie sommen in het rechterlid schatten we de middelste af m.b.v. (9) en de beide andere door gebruik te maken van het feit dat f begrensd is, zodat altijd $|f(a) - f(b)| \leq 2\|f\|$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \int_G \left| f(x) - f(x_i x_j^{-1}) \right| d\mu(x) \leq \frac{2\|f\|}{N} \cdot \tfrac{1}{2}(N_0 - 1)N_0,$$

hetgeen kleiner wordt dan ε als N groot genoeg is;

$$\sum_{i=N_0+1}^{N^*} \frac{i-1}{N} \left| \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} f(x_i x_j^{-1}) - \int_G f(x)\,d\mu(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{i=N_0+1}^{N^*} (i-1) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{N} \cdot \frac{(N^*-1)N^* - (N_0-1)N_0}{2} \leq \varepsilon \left(\tfrac{1}{2} - \frac{(N_0-1)N_0}{N} \right),$$

en ook dit wordt kleiner dan ε voor grote N; tenslotte

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} \int_G \left| f(x) - f(x_{N^*+1} x_j^{-1}) \right| d\mu(x) \leq \frac{2\|f\| . M}{N} < 4\|f\| . \frac{N^*}{(N^*-1)N^*},$$

daar $M < N^*$ en $\frac{1}{2}(N^* - 1)N^* \leq N$. Daar met N ook N^* naar ∞ gaat is ook deze derde som kleiner dan ε voor grote N, en we hebben aangetoond:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(z_n) - \int_G f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{als N groot genoeg is.}$$

Dit betekent dat $\{z_n\}$ gelijkverdeeld is.

c) $\Rightarrow$ b)

Stel de in c) gedefinieerde rij $\{z_n\}$ is gelijkverdeeld. Dan is ook de rij $\{z_n^{-1}\}$ gelijkverdeeld (cf. het eerste deel van het bewijs) en dus ook de rij $\{y_n\}$ met $y_{2m-1} = z_m$, $y_{2m} = z_m^{-1}$ $(m=1,2,\ldots)$; i.e. de rij

$$x_2x_1^{-1},\ x_1x_2^{-1},\ x_3x_1^{-1},\ x_1x_3^{-1},\ x_3x_2^{-1},\ x_2x_3^{-1},\ x_4x_1^{-1},\ldots \tag{10}$$

Vergelijking met de rij $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$, i.e. met de rij

$$e,\ x_2x_1^{-1},\ x_1x_2^{-1},\ e,\ x_3x_1^{-1},\ x_1x_3^{-1},\ x_3x_2^{-1},\ x_2x_3^{-1},\ e,\ x_4x_1^{-1},\ldots$$

leert dat de laatste uit (10) wordt verkregen door invoeging van het eenheidselement e van G op verschillende plaatsen. Deze plaatsen zijn zo dun gezaaid dat, zoals men gemakkelijk kan nagaan, het gelijkverdeeld-zijn door de invoeging niet wordt verstoord; m.a.w. $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$ is gelijkverdeeld in G.

b) $\Rightarrow$ a).

Stel $\{x_n\} \times \{x_n^{-1}\}$ is gelijkverdeeld in G. Voor iedere $k > 0$ is dan

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n) \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \text{spoor} \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n)\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n)\right)^{\dagger} \right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \text{spoor} \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n)\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_n^{-1})\right) \right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \text{spoor} \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} D^{(k)}(x_i x_j^{-1}) \right\} = 0.$$

Dus $\{x_n\}$ is gelijkverdeeld in G.

In het tweede deel van het bewijs gebruikten we het volgende feit: als $\{x_n\}$ en $\{y_n\}$ gelijkverdeeld zijn in G, dan ook de rij $\{z_n\}$ met $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$ $(n=1,2,\dots)$.

Het omgekeerde is niet waar: als $\{z_n\}$ gelijkverdeeld is in G, en $x_n = z_{2n-1}$, dan is $\{x_n\}$ niet noodzakelijk gelijkverdeeld; zelfs al is $\{z_n\}$ goed gelijkverdeeld. Want zij $\{x_n\}$ een rij in $[0,\frac{1}{2})$ die goed gelijkverdeeld is in dat interval, en $\{y_n\}$ een goed gelijkverdeelde rij in $[\frac{1}{2},1)$. Geen van deze twee rijen is gelijkverdeeld in $[0,1)$; daarentegen is de rij $\{z_n\}$ met $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$ $(n=1,2,\dots)$ goed gelijkverdeeld in $[0,1)$.

<u>Stelling 5.</u> Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een verzameling A van irrationale getallen in $[0,1)$ met maat $\mu(A) > 1-\varepsilon$, zodanig dat het stelsel S van alle rijen $\{n\theta\}$, $\theta \in A$, uniform gelijkverdeeld is modulo 1.

<u>Bewijs</u>.

Voor $k \neq 0$ en irrationale θ is

$$(11) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n\theta} \right| = \left| \frac{1}{N} \frac{e^{2\pi i k N\theta}-1}{e^{2\pi i k\theta}-1} \right| \leq \frac{2}{N} \cdot \left| e^{2\pi i k\theta}-1 \right|^{-1}.$$

Iedere verzameling A van irrationale getallen θ, zodanig dat er voor iedere gehele $k > 0$ een constante $c_k > 0$ bestaat met $\left| e^{2\pi i k\theta}-1 \right| > c_k$ voor alle $\theta \in A$, heeft derhalve de eigenschap dat het stelsel S der rijen $\{n\theta\}$, $\theta \in A$, modulo 1 uniform gelijkverdeeld is.

Zij nu $\varepsilon > 0$ en $k > 1$. Dan is er een $c_k > 0$, zo klein dat de verzameling V_k van alle $x \in [0,1)$ waarvoor

$$\left| e^{2\pi i k x}-1 \right| \leq c_k$$

een Lebesgue-maat $< 2^{-k}\varepsilon$ heeft. Daaruit volgt dat

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon,$$

en de maat van de verzameling A van alle irrationale $\theta \in [0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ is dus $> 1-\varepsilon$. Deze A voldoet aan de genoemde voorwaarde.

Het ligt voor de hand zich af te vragen of misschien het stelsel van alle rijen $\{n\theta\}$, θ irrationaal, uniform gelijkverdeeld is modulo 1. Dit is echter niet het geval; sterker: als A slechts bestaat uit alle gehele veelvouden van één irrationaal getal θ_o, dan is het stelsel S der rijen $\{n\theta\}$, $\theta \in A$, reeds niet uniform gelijkverdeeld modulo 1.

Deze laatste bewering volgt uit het feit dat alle gehele veelvouden van een irrationale θ_o, na reductie modulo 1, overal dicht liggen in $[0,1)$, tezamen met de volgende stelling, die we maar meteen voor compacte groepen uitspreken.

Stelling 6. Als $A \subset G$ de eigenschap heeft dat het stelsel S van alle rijen $\{a^n\}$, $a \in A$, uniform gelijkverdeeld is in G, dan heeft ook $\bar{A}$ die eigenschap.

Bewijs.

Zij $a \in \bar{A}$. Dan is er een rij $\{a_n\}$ van elementen van A met $a_n \to a$ (hier gebruiken we de aanname - zie het begin van deze paragraaf - dat G aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet; maar dit is niet essentieel: als G niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet nemen we, inplaats van een rij, een "net" in A dat naar a convergeert).

Voor willekeurige $f \in C(G)$ en $\varepsilon > 0$ is er een N_o zodanig dat voor alle $N \geq N_o$ en voor alle $x \in A$:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x^n) - \int_G f(y)\, d\mu(y) \right| < \varepsilon .$$

I.h.b. is voor $N \geq N_o$ en voor ieder natuurlijk getal k:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_k^n) - \int_G f(x)\, d\mu(x) \right| < \varepsilon .$$

Voor $k \to \infty$ vinden we, op grond van de continuiteit van de vermenigvuldiging in G en van f:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a^n) - \int_G f(x)\, d\mu(x) \right| \leq \varepsilon .$$

Dus is $\{a^n\}$ gelijkverdeeld in G.

Ook stelling 5 kan gegeneraliseerd worden tot algemenere groepen. In zo'n groep G moet in ieder geval wel tenminste één element a bestaan zodanig dat de rij $\{a^n\}$ gelijkverdeeld is. Dan is $\{a^n\}$ a fortiori overal dicht in G.

Een groep waarin een cyclische ondergroep overal dicht is heet monothetisch. Een monothetische groep is noodzakelijk commutatief (want hij heeft een overal dichte commutatieve ondergroep). De cirkelgroep is een voorbeeld van een monothetische groep, maar niet het enige voorbeeld: iedere samenhangende compacte abelse groep die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet is monothetisch. Algemener (zie bijv. [12] stelling 25.14):

Stelling 7. Een samenhangende compacte abelse groep G is dan en slechts dan monothetisch indien hij een omgevingsbasis heeft, waarvan de machtigheid kleiner of gelijk de machtigheid $\mathfrak{c}$ van het continuum is.

In een monothetische groep spelen de elementen a, zodanig dat $\{a^n\}$ overal dicht ligt, de rol van de irrationale getallen in de additieve groep der reële getallen modulo 1. Er zijn ook veel van zulke elementen: P.R. Halmos en H. Samelson [11] bewezen nl.

Stelling 8. Zij G een samenhangende compacte abelse groep die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Zij Q de verzameling van alle $a \in G$ met de eigenschap dat $\{a^n\}$ overal dicht ligt in G. Dan is Q meetbaar, en wel is $\mu(Q) = 1$.

Ieder dergelijk element a deelt met de irrationale getallen de eigenschap dat het een gelijkverdeelde rij voortbrengt:

Stelling 9. Zij G een compacte monothetische groep, en stel $\{\{a^n\} \mid n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ is dicht in G. Dan is de rij $\{a^n\}$ gelijkverdeeld in G.

Bewijs.

We gebruiken § 4 stelling 2. Daar G abels is heeft iedere irreducibele representatie de graad 1, zodat de voorwaarde van § 4 stelling 2 equivalent is met: $D(a) \neq 1$ voor iedere niet-triviale irreducibele unitaire representatie. En dit is zeker het geval; immers, als $D(a) = 1$, dan is ook $D(a^n) = (D(a))^n = 1$, voor alle gehele n. Daar D continu is, en de a^n overal dicht liggen, is $D(x) = 1$ voor alle $x \in G$; d.w.z. D is triviaal.

De beloofde generalisatie van stelling 5 luidt:

Stelling 10. Zij G een samenhangende compacte abelse groep die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een meetbare $A \subset G$ met $\mu(A) > 1-\varepsilon$, zodanig dat het stelsel S van alle rijen $\{a^n\}$, $a \in A$, uniform gelijkverdeeld is in G.

Bewijs.

Zij Q de verzameling van alle $a \in G$ waarvoor $\{a^n\}$ overal dicht is; $\mu(Q) = 1$ volgens stelling 8.

Als $a \in Q$, dan is $D^{(k)}(a) \neq 1$ voor alle $k > 0$, en daarom

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(a^n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (D^{(k)}(a))^n =$$

$$\frac{1}{N} \cdot D^{(k)}(a) \cdot \frac{D^{(k)}(a^N)-1}{D^{(k)}(a)-1} ,$$

zodat

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(a^n)\right| \leq \frac{2}{N} \cdot \left| D^{(k)}(a)-1 \right|^{-1} .$$

Zij $\{c_k\}$ weer een rij van positieve constanten zodanig dat $\mu(V_k) < 2^{-k}\varepsilon$, waar

$$V_k = \left\{ x \in G \;\middle|\; \left| D^{(k)}(x)-1\right| \leq c_k \right\} .$$

Zo'n rij $\{c_k\}$ bestaat; want als

$$V_{k,m} = \left\{ x \in G \;\middle|\; \left|D^{(k)}(x)-1\right| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

dan is $\bigcap_{m=1}^{\infty} V_{k,m} \subset G \setminus Q$, dus $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} V_{k,m}\right) = 0$, zodat voor zekere m_k

$$\mu\left(\bigcap_{\mu=1}^{m_k} V_{k,m}\right) < 2^{-k}\varepsilon .$$

Neem dan maar $c_k < \frac{1}{m_k}$.

Als nu

$$A = Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k ,$$

dan is $\mu(A) > 1-\varepsilon$, en het stelsel S van alle rijen $\{a^n\}$, $a \in A$, is uniform gelijkverdeeld in G.

Ook ditmaal geldt dat een verzameling A als in stelling 10 niet geheel Q kan zijn. Immers, Q is *overal dicht* in G, daar $\mu(Q) = 1$; daarentegen is A *nergens dicht*. Dit is de inhoud van onderstaande stelling 11. Alvorens deze stelling te kunnen bewijzen moeten we eerst aantonen:

Hulpstelling. Zij G een samenhangende compacte groep, en stel $\{a^n\}$ is gelijkverdeeld in G. Als D een niet-triviale irreducibele unitaire representatie is van G, dan is $D(a) = e^{2\pi i\alpha}$, voor zekere *irrationale* $\alpha \in [0,1)$.

Bewijs.

Daar G abels is, is D van de graad 1, en D(a) is dus een complex getal z met $|z| = 1$, dus van de vorm $e^{2\pi i\alpha}$. We moeten bewijzen dat irrationaal is. Ware dit niet het geval, dan zou

$$V = \{ D(a^n) \,|\, n=1,2,\ldots\} = \{ e^{2\pi i n\alpha} \,|\, n=1,2,\ldots\}$$

een eindige verzameling zijn. Daar de elementen a^n dicht liggen in G volgt: $D(G) \subset \overline{V} = V$; maar met G is D(G) samenhangend, dus D(G) bestaat uit slechts één getal, in tegenspraak met de aanname dat D niet triviaal is.

Stelling 11. Zij G een samenhangende compacte groep, en zij A een deelverzameling van G met de eigenschap dat het stelsel S van alle rijen $\{a^n\}$, $a \in A$, uniform gelijkverdeeld is in G. Dan is A nergens dicht.

Bewijs.

Op grond van stelling 6 kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat A gesloten is in G. We mogen ook aannemen dat A niet leeg is.

Stel D is een niet-triviale irreducibele unitaire representatie van G. Als $x \in G$, dan zij $\varphi(x)$ het getal in $[0,1)$ zodanig dat $D(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$; dan is φ een continue homomorphie van G in de additieve groep der reële getallen modulo 1. Daar G compact is, is φ een open afbeelding.

Als $a \in A$, dan is $\varphi(a)$ irrationaal, volgens de hulpstelling, en alle gehele veelvouden van $\varphi(a)$ behoren tot $\varphi(G)$; daar $\varphi(G)$ bovendien compact is moet $\varphi(G)$ heel $[0,1)$ omvatten. Daar $\varphi(A)$ een leeg inwendige heeft in $[0,1)$ - immers $\varphi(A)$ bestaat uit louter irrationale getallen - en dus ook een leeg inwendige heeft in $\varphi(G)$, en daar open is, moet A een leeg inwendige hebben.

§ 6. Eigenschappen en toepassingen van goed gelijkverdeelde rijen

Zoals we in de vorige paragraaf opmerken is het begrip "goed gelijkverdeeld" te herleiden tot het begrip "uniform gelijkverdeeld stelsel". De eerste twee stellingen uit § 5 impliceren dan ook zonder meer twee stellingen betreffende goed gelijkverdeelde rijen, die we hier overigens niet meer expliciet formuleren.

Een belangrijke eigenschap van goed gelijkverdeelde rijen is de volgende.

Stelling 1. Zij $\xi = \{x_n\}$ goed gelijkverdeeld in G. Voor iedere gesloten $E \subset G$ met positieve maat, waarvan de rand een nulverzameling is, bestaat een natuurlijk getal N met de volgende eigenschap: van N opeenvolgende elementen $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_{h+N}$ uit de rij ξ behoort er altijd tenminste één tot E.

Bewijs.

Uit § 5 stelling 1 volgt, als we in (3) $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu(E) > 0$ kiezen: er is een N_0 zodanig dat voor alle $N \geq N_0$ en voor alle $h \geq 0$

$$\left| \frac{A(\xi^{(h)},E,N)}{N} - \mu(E) \right| < \tfrac{1}{2}\mu(E).$$

Dan volgt:

$$A(\xi^{(h)},E,N) > \tfrac{1}{2}N \,.\, \mu(E) > 0,$$

zodat voor iedere $h \geq 0$ tenminste één der getallen $x_{h+1}, \ldots, x_{h+N}$ tot E moet behoren.

Een voorbeeld van een goed gelijkverdeelde rij, van een type dat in velerlei groepen G voorkomt, wordt geleverd door

<u>Stelling 2</u> (vgl. § 4 stelling 2). Zij $a \in G$. Indien de rij $\{a^n\}$ gelijkverdeeld is in G, dan is hij ook goed gelijkverdeeld in G.

<u>Bewijs</u>.

Stel $\{a^n\}$ is gelijkverdeeld. Volgens § 5 stelling 3 is dan het stelsel van alle rijen $\{ca^n\}$, $c \in G$, uniform gelijkverdeeld. Kiezen we speciaal de elementen $c = a^h$, $h=0,1,2,\ldots$, dan blijkt $\{a^n\}$ goed gelijkverdeeld te zijn.

Een bekende stelling van J.G. van der Corput luidt als volgt: is θ een irrationaal getal, en is $\{x_n\}$ een reële getallenrij met de eigenschap $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1}-x_n) = \theta$, dan is $\{x_n\}$ modulo 1 gelijkverdeeld.

Deze stelling werd op de navolgende wijze door E. Hlawka gegeneraliseerd tot willekeurige compacte groepen:

<u>Stelling 3</u> (Hlawka [4]). Zij $\eta = \{y_n\}$ goed gelijkverdeeld in G, en zij $\xi = \{x_n\}$ een rij in G met de eigenschap

(1) $$\lim_{n \to \infty} y_{n+1}^{-1} x_{n+1} x_n^{-1} y_n = e$$

(e is het eenheidselement van G). Dan is ook ξ goed gelijkverdeeld.

Alvorens deze stelling te bewijzen laten we zien dat hij inderdaad een generalisatie (en zelfs een verscherping) is van genoemde stelling van Van der Corput. Zij dus $\{x_n\}$ een reële getallenrij met $\lim_{n \to \infty} (x_{n+1}-x_n) = \theta$, θ irrationaal. Daar $\{n\theta\}$ modulo 1 gelijkverdeeld is, volgt uit stelling 2 dat $\{n\theta\}$ zelfs goed gelijkverdeeld is modulo 1. Daar $\lim_{n \to \infty} \{-(n+1)\theta + x_{n+1}-x_n+n\theta\} = 0$ volgt uit stelling 3 dat ook $\{x_n\}$ goed gelijkverdeeld is modulo 1. A fortiori is $\{x_n\}$ gelijkverdeeld modulo 1.

<u>Bewijs van stelling 3</u>.

Zij $\varepsilon > 0$ en k een natuurlijk getal. Daar η goed gelijkverdeeld is bestaat er een N_o,

(2) $$N_o > \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1,$$

zodanig dat

(3) $$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(y_{h+n}) \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

voor alle $h \geqslant 0$ en alle $N \geqslant N_o$.

Volgens veronderstelling geldt: $u_n \to 1$, waar $u_n = y_{n+1}^{-1} x_{n+1} x_n^{-1} y_n$. Daar $D^{(k)}$ continu is bestaat er een n_o zodanig dat voor alle $n \geqslant n_o$

(4) $$\left\| D^{(k)}(u_n) - I \right\| < \frac{1}{N_o^2} .$$

Door volledige inductie naar $n \geqslant 0$ volgt voor $h \geqslant n_o$:

(5) $$\left\| D^{(k)}(u_{h+n} u_{h+n-1} \cdots u_h) - I \right\| \leqslant \frac{n+1}{N_o^2} ;$$

als basis voor de inductie dient (4), terwijl de inductiestap als volgt verloopt:

$$\left\| D^{(k)}(u_{h+n+1} u_{h+n} \cdots u_h) - I \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| D^{(k)}(u_{h+n+1})(D^{(k)}(u_{h+n} \cdots u_h) - I \right\| + \left\| D^{(k)}(u_{h+n+1}) - I \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n+1}{N_o^2} + \frac{1}{N_o^2} = \frac{n+2}{N_o^2} .$$

We gebruiken hierbij het feit dat $D^{(k)}(u_{h+n+1})$ unitair is; voor unitaire matrices U en willekeurige matrices A geldt nl.

(6) $$\| UA \| = \| AU \| = \| A \| ;$$

immers $\|UA\|^2 = \text{spoor}(A^\dagger U^\dagger UA) = \text{spoor}(A^\dagger A) = \|A\|^2$, waaruit op zijn beurt volgt: $\| AU \| = \| U^\dagger A^\dagger \| = \| A^\dagger \| = \| A \|$.

Uit (5) en (6) volgt voor $h \geqslant n_o$ en $n \geqslant 1$, aangezien $x_{h+n} = y_{h+n} . u_{h+n-1} u_{h+n-2} \cdots u_n . y_n^{-1} x_n$:

$$\left\| D^{(k)}(x_{h+n}) - D^{(k)}(y_{h+n}) . D^{(k)}(y_h^{-1} x_h) \right\| =$$

$$= \left\| D^{(k)}(y_{h+n})(D^{(k)}(u_{h+n-1} u_{h+n-2} \cdots u_n) - I) D^{(k)}(y_h^{-1} x_h) \right\| =$$

$$= \left\| D^{(k)}(u_{h+n-1} u_{h+n-2} \cdots u_n) - I \right\| \leqslant \frac{n}{N_o^2} .$$

Bijgevolg geldt voor alle $h \geqslant n_o$:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_o} D^{(k)}(x_{h+n}) \right\| \leqslant \frac{1}{N_o^2} \sum_{n=1}^{N_o} n + \left\| \sum_{n=1}^{N_o} D^{(k)}(y_{h+n}) \cdot D^{(k)}(y_h^{-1} x_h) \right\| <$$

$$\leqslant 1 + \left\| \sum_{n=1}^{N_o} D^{(k)}(y_{h+n}) \right\| \leqslant 1 + \tfrac{1}{4} N_o \varepsilon \ ,$$

waarbij de laatste stap berust op (3).

Zij $N_1 = N_1(\varepsilon)$ een natuurlijk getal met

(7) $$N_1 > \max(4\varepsilon^{-1} N_o \sqrt{r_k},\ 8\varepsilon^{-1} n_o \sqrt{r_k}).$$

Als $N \geqslant N_1$, dan zij $H = \left[\frac{N}{N_o}\right]$; voor willekeurige $h \geqslant n_o$ is

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_{h+n}) \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{H-1} \sum_{n=1}^{N_o} D^{(k)}(x_{h+qN_o+n}) \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{H-HN_o} D^{(k)}(x_{h+HN_o+n}) \right\| < \frac{H}{N}\left(1 + \frac{N_o \varepsilon}{4}\right) + \frac{N-HN_o}{N} \cdot \sqrt{r_k} < \frac{1}{N_o} + \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$+ \frac{N_o \sqrt{r_k}}{N_1} < \tfrac{3}{4}\varepsilon \ .$$

(we gebruikten (2) en (7)), terwijl voor $h < n_o$:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_{h+n}) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=h+1}^{n_o} D^{(k)}(x_n) + \frac{1}{N} \sum_{n=n_o+1}^{n_o+N} D^{(k)}(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=N+h+1}^{N+n_o} D^{(k)}(x_n) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n_o - h}{N} \sqrt{r_k} + \tfrac{3}{4}\varepsilon + \frac{n_o - h}{N} \sqrt{r_k} < \frac{2n_o}{N_1} \sqrt{r_k} + \tfrac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon \ ,$$

waarbij we weer van (7) gebruik maakten.

We hebben bewezen: als $N \geqslant N_1$ dan geldt voor alle $h \geqslant 0$:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x_{h+n}) \right\| < \varepsilon \ ;$$

m.a.w. $\{x_n\}$ is goed gelijkverdeeld.

Gevolg 1. Als $\eta = \{y_n\}$ goed gelijkverdeeld is in G, en $\xi = \{x_n\}$ heeft de eigenschap:

$\lim_{n\to\infty} y_n^{-1}x_n = e$, dan is ook ξ goed gelijkverdeeld in G.

Gevolg 2. (Hlawka [4]; Keogh, Lawton en Petersen [6]). Stel in G bestaat een goed gelijkverdeelde rij. Dan kan iedere rij die overal dicht ligt in G zó gerangschikt worden, dat de omgenummerde rij goed gelijkverdeeld is in G.

Bewijs.

Stel $\eta = \{y_n\}$ is goed gelijkverdeeld in G, en $\xi = \{x_n\}$ is overal dicht. Dan bestaat er een deelrij $\zeta = \{z_n\} = \{x_{k_n}\}$ van ξ, zodanig dat $\lim_{n\to\infty} y_n^{-1}z_n = e$ (daar ξ immers overal dicht is). Op grond van gevolg 1 is ζ goed gelijkverdeeld. We gaan nu ζ wijzigen op plaatsen die zo dun gezaaid liggen dat het goed gelijkverdeeld zijn van ζ er niet door wordt beïnvloed, bijv. op alle plaatsen met rangnummer n^3, $n=1,2,\ldots$. Over deze, aftelbaar vele, plaatsen verdelen we de volgende, aftelbaar vele, elementen: alle x_n die nog niet in ζ voorkomen, en alle z_{n^3}. Zo verkrijgen we een rij ζ' die nog steeds goed gelijkverdeeld is, en die tevens een omnummering is van ξ .

Opmerking. Als we in bovenstaand bewijs waren uitgegaan van een (gewoon) gelijkverdeelde rij η , dan was ζ' in ieder geval gelijkverdeeld. Daarmee is een bekende stelling van J.G. van der Corput bewezen (gegeneraliseerd tot compacte groepen):

Stelling 4. In een compacte groep G kan iedere overal dichte rij worden omgenummerd tot een gelijkverdeelde rij.

In een compacte groep bestaan nl. altijd gelijkverdeelde rijen: zelfs zijn bijna alle rijen gelijkverdeeld. Dit zal vermoedelijk wel door een der volgende sprekers worden bewezen.

Probleem: bestaan in iedere compacte groep G goed gelijkverdeelde rijen?

Er zijn rijen die gelijkverdeeld zijn, maar niet goed gelijkverdeeld. Ter staving van deze bewering vermelden we de volgende feiten, zij het zonder bewijs. Ook deze stellingen horen nl. veeleer thuis in een voordracht over "alles of niets" - stellingen.

In H. Weyl [9] (zie ook J.F. Koksma [7] Hoofdstuk VIII st.12) kan men de volgende stelling vinden:

Stelling 5. Zij g een 1-1-duidige afbeelding van de verzameling der natuurlijke getallen in zichzelf. Dan is voor bijna alle $\alpha \in [0,1)$ de rij $\{g(n)\alpha\}$ modulo 1 gelijkverdeeld.

I.h.b. is de rij $\{n!\alpha\}$ voor bijna alle $\alpha \in [0,1)$ modulo 1 gelijkverdeeld, evenals de rij $\{k^n\alpha\}$, k een natuurlijk getal > 1.

Vragen we echter naar goede gelijkverdeling, dan is de situatie radicaal verschillend.

Stelling 6. (Dowidar en Petersen [2]). De verzameling der $\alpha \in [0,1)$ waarvoor de rij $\{n!a\}$ goed gelijkverdeeld is modulo 1, heeft de maat 0.

Stelling 7. (Dowidar en Petersen [2]). Voor geen enkele $\alpha \in [0,1)$ en geen enkel natuurlijk getal k is de rij $\{k^n.\alpha\}$ modulo 1 goed gelijkverdeeld.

Probleem. Is de volgende uitspraak juist: "voor geen enkele $\alpha \in [0,1)$ en geen enkele rationale r is de rij $\{r^n\alpha\}$ modulo 1 goed gelijkverdeeld"? Een foutief bewijs werd gegeven in [6]; in [2] wordt gesignaleerd dat het bewijs in [6] incorrect is, waarna alleen het speciale geval van stelling 7 bewezen wordt.

Bij wijze van toepassing van het begrip goed gelijkverdeeld behandelen we nog de volgende generalisatie door E. Hlawka van een stelling van Fatou over Fourierreeksen (zie bijv. [10] stelling 1.6).

Stelling 8 (Hlawka [4]). Zij f continu op G buiten een nulverzameling, en zij $\int_G |f(x)| d\mu(x) \neq 0$. Zij $\{a_n\}$ een reële getallenrij met

(8) $$0 < a_{n+1} \leq \sigma a_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

voor zekere reële $\sigma > 0$. Indien er een goed gelijkverdeelde rij $\{x_n\}$ bestaat zodanig dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x_n)$ absoluut convergeert, dan convergeert ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Opmerking.

Als bovendien f begrensd is volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(y_n)$ absoluut convergeert voor iedere keuze van de rij $\{y_n\}$.

Bewijs.

Daar de bewering triviaal is als $\sigma < 1$ stellen we $\sigma \geq 1$. Aangezien f bijna overal continu is bestaat er een gesloten $E \subset G$ waarvan de rand de maat 0 heeft, terwijl $\mu(E) > 0$, en een constante c zodanig dat $|f(x)| \geq c$ voor alle $x \in E$.

Volgens stelling 1 is er een N zodanig dat van ieder N-tal opeenvolgende elementen uit de rij $\{x_n\}$ tenminste één in E ligt. Bijgevolg is

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n |f(x_n)| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{qN+n} |f(x_{qN+n})| \geq$$

$$\geq c\sigma^{-N} \sum_{q=0}^{\infty} a_{(q+1)N} ;$$

uit (8) volgt immers dat voor ieder natuurlijk getal M en voor iedere n, $1 \leq n \leq N$,

$$a_{M+n} \geq a_{M+N}\sigma^{n-N} \geq a_{M+N}\sigma^{-N} .$$

Zij $c_1 = 1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{N-1}$; voor iedere $K \geq N$ is

$$\sum_{n=1}^{K} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{q=0}^{K} \sum_{n=1}^{N} a_{(q+1)N+n} \leq a_1 c_1 + \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{(q+1)N}\sigma^n =$$

$$= c_1 (a_1 + \sum_{q=0}^{\infty} a_{(q+1)N}) \leq c_1 (a_1 + \frac{\sigma^N}{c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n |f(x_n)| ;$$

hieruit volgt het beweerde.

§ 7. Matig gelijkverdeelde rijen

De inhoud van deze paragraaf wordt slechts terwille van de volledigheid vermeld. Bewijzen worden achterwege gelaten; ze zijn te vinden in Hlawka [5] .

Definitie 1. Een rij $\xi = \{x_n\}$ in G heet matig gelijkverdeeld indien voor iedere $f \in C(G)$

$$(1) \qquad \lim_{N \to \infty} (\lim_{H \to \infty} \sup \frac{1}{H} \sum_{q=0}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{qN+n}) - \int_G f(x)\, d\mu(x) \right|)=0.$$

Stelling 1. Iedere goed gelijkverdeelde rij is matig gelijkverdeeld; iedere matig gelijkverdeelde rij is gelijkverdeeld.

Het blijkt dat in iedere compacte groep G matig gelijkverdeelde rijen bestaan, en dat zelfs bijna alle rijen in G matig gelijkverdeeld zijn. De motivering voor het definiëren van matige gelijkverdeling is hoofdzakelijk dat voor deze rijen § 4 stelling 3 en § 5 stelling 8 juist blijven:

Stelling 2. Zij $\eta = \{y_n\}$ een matig gelijkverdeelde rij in G, en zij $\xi = \{x_n\}$ een rij met de eigenschap

$$\lim_{n \to \infty} (y_{n+1}^{-1} x_{n+1} x^{-1} y_n) = e.$$

Dan is ook ξ matig gelijkverdeeld (en dus zeker gelijkverdeeld).

Stelling 3. Zij $f \in C(G)$ met $\int_G |f(x)\, d\mu(x) > 0$. Zij $\{a_n\}$ een reële getallenrij met $0 < a_{n+1} \leq a_n$, voor alle n. Als er een matig gelijkverdeelde rij $\xi = \{x_n\}$ in G bestaat zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x_n)$ absoluut convergeert, dan convergeert ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Literatuur

[1] J.G. van der Corput, Diophantische Ungleichungen. I. Zur Gleichverteilung modulo Eins. Acta Math.56 (1931), 373-456.

[2] A.F. Dowidar en G.M. Petersen, The distribution of sequences and summability. Can. Journal of Math.15 (1963), 1-10.

[3] G. Helmberg, Eine Familie von Gleichverteilungskriterien in kompakten Gruppen. Monatsh.f.Math.66 (1961), 417-423.

[4] E. Hlawka, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend.Circ.mat. Palermo 4 (1955), 33-47.

[5] E. Hlawka, Ueber einen Satz von Van der Corput. Archiv der Math. 6 (1955), 115-120.

[6] F.R. Keogh, B. Lawton and G.M. Petersen, Well-distributed sequences 1. Canad. Journal of Math.10 (1958), 572-576.

[7] J.F. Koksma, Diophantische Approximationen. Springer, Berlin, 1936.

[8] G.M. Petersen, Almost convergence and uniformly distributed sequences. Quart. J. Math. (Oxford) 7 (1956), 188-191.

[9] H. Weyl, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77 (1916), 313-352.

[10] A. Zygmund, Trigonometric Series, second edition, Volume I. Cambridge University Press, 1959.

[11] P.R. Halmos en R. Samelson, On monothetic groups. Proc.Nat.Acad. Sci. U.S.A. 28 (1942), 254-258.

[12] E. Hewitt en K.A. Ross, Abstract harmonic analysis I. Springer, Berlin, 1963.

§ 8. Onregelmatigheden der verdeling; Discrepantie e.d.

1; Liggen de $N \geq 1$ getallen

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \text{in } [0,1[\,,$$

en is voor

(2) $$0 \leq \alpha < \beta < 1$$

(3) $A = A(N) = A(\alpha,\beta,N)$ het aantal der getallen (1) met (2),

dan heet

(4) $$R = R(N) = R(\alpha,\beta,N) = A(N) - (\beta-\alpha)N$$

de restterm in de gelijkverdeling der getallen (1). Het getal

$$ND(N) = \sup_{(\alpha,\beta)} \left| A(N) - (\beta-\alpha)N \right|$$

kan een indruk geven van de regelmatigheid dier verdeling. D(N) heet de discrepantie. Voor vele problemen leent zich nog beter de uitdrukking

(6) $$M(N) = \sqrt{\int_0^1 (R(0,x,N))^2 dx}$$

die kennelijk voldoet aan

(7) $$M(N) \leq ND(N)$$

en die men zou kunnen noemen: de middelbare restterm. Haar eigenschappen zijn minder stroef dan die van ND(N).

Neemt men een oneindig voortlopende rij

(8) $$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots$$

dan krijgt men automatisch 3 functies van $N \geq 1$:

(9) $$R(N) = R(\alpha,\beta,N);\ D(N);\ M(N)$$

door bovenstaande definities op de eerste N resten mod 1

(10) $$x_1-[x_1], \ldots, x_N-[x_N]$$

toe te passen.

2. Reeds Weyl bewees:

Voor gelijkverdeling (mod 1) van een rij (8), d.w.z. voor

(11) $$R(N) = o(N) \text{ bij elke vaste } (\alpha,\beta) \text{ met } (2),$$

is nodig en voldoende

(12) $$D(N) \rightarrow 0.$$

Het ligt voor de hand met behulp van D(N) en M(N) quantitatieve uitspraken over de regelmatigheid der verdeling te zoeken.

3. Uit de elementair te bewijzen betrekking

(13) $$\int_0^1 R(0,x)\,dw(x) = N\int_0^1 w(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} w(x_n)$$

volgt voor elke periodieke functie w(t) (periode 1), die op $[0,1]$ de totale variatie T heeft

(14) $$\left| \sum_{n=1}^{N} w(x_n) - N\int_0^1 w(t)\,dt \right| \leqq TND(N),$$

maar ook voor elke zulke functie wier differentiequotienten absoluut $\leqq T^*$ zijn (door toepassing van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz):

(15) $$\left| \sum_{n=1}^{N} w(x_n) - N\int_0^1 w(t)\,dt \right| \leqq T^*M(N).$$

4. Men kan analoog aan (13) ook integralen voor $(R_{0,x})^2$ op elementaire manier becijferen. Bijvoorbeeld

(16) $$(M(N))^2 = \int_0^1 (R^*(u,N))^2du + (R^*(N))^2.$$

Hierin is

(17) $$R^*(u,N) = \sum_{n=1}^{N} P_1(x_n+u),$$

waar

(18) $$P_1(x) = x-[x]-\tfrac{1}{2}$$

het 1^e polynoom van Bernoullli, en $R^*(N) = R^*(0,N)$ is.

5. Reeds sinds lang heeft men quantitatieve vormen van het kriterium van Weyl afgeleid. Een der mooiste stellingen is die van Erdös-Túràn:

Voor elke natuurlijke M is bij elk N-tal (1)

$$\text{(19)} \qquad ND(N) \leqq 150 \left(\frac{N}{M} + \sum_{h=1}^{M} \frac{1}{h} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} \right| \right) .$$

Ik ga op het bewijs en op de meerdimensionale analogie van (19) thans niet in.

Men kan voor M(N) de exacte formule bewijzen

$$\text{(20)} \qquad (M(N))^2 = (R^*(N))^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} \right|^2$$

en die ook generaliseren voor het meerdimensionale probleem. Formule (20) bevat (16).

6. Neemt men voor de N getallen in (1)

$$\text{(21)} \qquad x_n = \frac{n-1}{N}$$

dan is kennelijk

$$ND(N) \leqq 1.$$

Een heel andere vraag is of er oneindige rijen (8) bestaan, zo, dat

$$\text{(22)} \qquad ND(N) \leqq c_1' \qquad (c_1' \text{ vast})$$

voor elke $N \geqq 1$. Mevrouw van Aardenne bewees, dat steeds:

$$\text{(23)} \qquad \text{Lim sup } ND(N) = \infty ,$$

welke rij (8) men ook neemt en Roth toonde later aan:

<u>Voor elk</u> N-<u>tal</u> (1) <u>geldt</u>

(24) $$\sup_{1 \leq M \leq N} MD(M) \geqq c_2' \sqrt{\log N} \qquad (c_2' \text{ vast})$$

en dus voor <u>elke</u> rij (8):

(25) $$ND(N) = \Omega(\sqrt{\log N}) \qquad (N \to \infty).$$

7. Het bewijs van Roth maakt gebruik van het vlak in plaats van van de rechte. Neemt men algemener voor $k \geqq 1$ in de k-dimensionale eenheidskubus

(26) $$E_k : 0 \leqq u_i < 1 \qquad (0 \leqq i \leqq k)$$

een N-tal punten

(27) $$P_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk})$$

en is

(28) $$A(N) = A(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k, \beta_k, N) = A(B,N)$$

het aantal der punten (27) die liggen in de balk

(29) $$B : \alpha_i \leqq u_i < \beta_i \quad \text{met } 0 \leqq \beta_i - \alpha_i < 1 \quad (i=1,2,..,k)$$

dan definieert men de restterm

(30) $$R(N) = R(B,N) = A(N) - (\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_n - \alpha_n) N,$$

de discrepantie D(N) met

(31) $$ND(N) = \sup_{(B)} |R(B,N)|,$$

en de middelbare restterm

(32) $$M(N) = \sqrt{\int_0^1 \ldots \int_0^1 (R(0,x_i,N)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_k}$$

volkomen analoog aan het geval k=1.

In R_k geldt dan voor ieder N-tal (27) volgens Roth:

(33) $$M(N) \gtrless c_k \log^{k-1} N \qquad (c_k \text{ vast}),$$

zodat voor $k \gtrless 2$ geen speciaal N-tal met (22) bestaat, zoals voor k=1. Hoe kan men nu (24) uit (33) (met k=2) afleiden? Neem de N punten in het (xy) vlak met coordinaten $(x_n, \frac{n}{N})$, waar de x_n de getallen (1) zijn. Dan is kennelijk in E_2

(34) $$\begin{cases} R(0,x,0,y,N) = A(0,x,0y,N) - xyN = \\ = A(0,x,[yN]) - xyN = R(0,x,[yN]) + \vartheta \end{cases}$$

met zekere ϑ waarvoor $|\vartheta| \leqq 1$.

Uit (33) en (32) volgt voor minstens één paar (x,y)

(35) $$|R(0,x,0,y,N)| \geqq \sqrt{c_2 \log N}$$

en daarom volgt (24) (neem $M = [yN]$).
Past men dit procédé ook toe op het N-tal (27) door een (k+1)ste coördinaat $\frac{n}{N}$ toe te voegen, dan volgt uit (33) (toegepast voor k+1 in plaats van k):

(36) $$\sup_{1 \leqq M \leqq N} MD(M) \geqq c'_{k+1} (\log N)^{\frac{k}{2}},$$

geldig voor (27) in E_k voor $k \gtrless 1$.

8. Het bewijs van (33) gaat voor $k > 2$ analoog aan dat voor k=2. Roth construeert een functie f(x,y) op E_2, zodanig dat de uitdrukking

(37) $$\left| \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, R(0,x,0,y,N)\, dx\, dy \right| \geqq \varphi(N)$$

niet te klein wordt en de uitdrukking

(38) $$\int_0^1 \int_0^1 f^2\, dx\, dy \leqq \psi(N)$$

niet te groot. Dan geeft toepassing van de ongelijkheid van Cauchy-

Schwarz:

(39) $$\int_0^1\int_0^1 (R(0,x,0,y,N))^2 dx\ dy = \frac{(\varphi(N))^2}{\psi(N)}$$

waaruit dan (33) volgt op grond der gevonden waarden voor φ en ψ, namelijk

(40) $$\varphi(N) \backsim \log N;\quad \psi(N) \backsim \log N$$

9. Houdt men zich aan de discrepantie, dan kan men vragen of voor (24) en (36) de rechterleden nog kunnen worden vergroot. Dit is onbekend. Houdt men zich aan de middelwaarde, dan blijkt uit een stelling van Davenport, dat voor k=2 de formule (33) niet essentieel kan worden verscherpt. Hij geeft voor iedere N een N-tal punten (27) in E_2, zodanig dat

(41) $$M(N) \leqq \bar{c}_2 \log N \qquad (c_2 \text{ vast})$$

een preciese pendant van (33) voor k=2 dus. (In het vervolg kom ik op een soortgelijk voorbeeld terug). Een even mooi resultaat voor $k > 2$ is onbekend.

10. Men kan zich in het geval k=1 afvragen, getallenrijen (8) te vinden die zo regelmatig mogelijk verdeeld zijn. De tot nu toe beste rij is aangegeven door Van der Corput. Hij definieert x_n als volgt: Ontwikkel n in het tweetallig stelsel (de methode gaat ook voor een grondtal > 2):

(42) $$n=2^{h_1}+2^{h_2}+\ldots+2^{h_s} \quad \text{met} \quad h_1 > h_2 > \ldots > h_s \geqq 0$$

en stel

(43) $$x_n = \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{1}{2^{h_\sigma+1}}\ .$$

Ook:

(44) $$\begin{cases} n = a_1 a_2 \ldots a_r & (a_\sigma = 0,1) \\ u_n = 0, a_r a_{r-1} \ldots a_1 \end{cases}$$

De cijfers van n in de tweetallige ontwikkeling lopen dus juist tegengesteld aan de dualen in de breuk die u_n voorstelt.

11. Neem een willekeurige $N \geq 1$ en ontwikkel

(45) $$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_t} \quad (t \geq 1;\ k_1 > k_2 > \ldots > k_t \geq 0).$$

Stelt men

(46) $$m_\tau = 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_{\tau-1}} \quad (1 \leq \tau \leq t), \text{ waar } m_1 = 0$$

betekent, dan wordt het vak

(47) $$0 \leq n \leq N-1 \qquad (N \geq 2)$$

ondubbelzinnig gesplitst in t disjuncte vakken

(48) $$I_\tau = m_\tau \leq x \leq m_{\tau+1} - 1 \qquad (\tau = 1,2,\ldots,t)$$

met lengte (= aantal gehelen $n \in I_\tau$) gelijk 2^{k_τ}.
Elke gehele $n \in I_\tau$ is van de vorm

(49) $$n = m_\tau + \sum_{\sigma=1}^{r} 2^{l_\sigma} \qquad (k_\tau > l_1 > \ldots > l_r \geq 0),$$

waar de laatste som voor r=0 het getal 0 betekent.
Als nu

(50) $$\{x_n\}$$

de door (43) gedefinieerde rij van Van der Corput is, bezien we de N getallen

(51) $$x_o = 0,\ x_1, \ldots, x_{N-1}.$$

Volgens (43) geldt dan voor $n \in I_\tau$ wegens (49) en (46)

(52) $$x_n = \mu_\tau + v_n \text{ met } \mu_1 = 0,\ \mu_\tau = \sum_{\sigma=1}^{\tau-1} \frac{1}{2^{k_\sigma+1}} \quad (\tau \geq 2),$$

$$v_n = \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{1}{2^{l_\sigma+1}}.$$

Kennelijk is

(53) $$0 < \mu_\tau < \frac{1}{2^{k_\tau}} \quad \text{voor } \tau \geq 2,$$

(54) $$v_n = \frac{a_n}{2^{k_\tau}} \text{ met gehele } a_n \geqq 0 \text{ en } < 2^{k_\tau}.$$

Daar voor verschillende waarden van n de bijbehorende x_n verschillend zijn, en er op I_τ juist 2^{k_τ} gehele n liggen, neemt dus in (54) a_n alle waarden tussen 0 en $2^{k_\tau}-1$ juist eenmaal aan. Conclusie: de x_n met $n \in I_\tau$ liggen equidistant op afstanden $\frac{1}{2^{k_\tau}}$ met als kleinste waarde μ_τ.

Zij nu $A'(0,x,N)$ het aantal der getallen (51) met

(53) $$0 \leqq x_n < x$$

en $A_\tau(0,x)$ het aantal dier x_n met $n \in I_\tau$; dan is

(54) $$A'(0,x,N) = \sum_{\tau=1}^{t} A_\tau(0,x).$$

Maar nu is

(55) $$A_\tau(0,x) = \left[(x-\mu_\tau)2^{k_\tau} \right] = x2^{k_\tau} - \mu_\tau 2^{k_\tau} + \vartheta(x,\tau)$$

met

(56) $$0 \leqq \vartheta(x,\tau) < 1 \qquad (\tau \geqq 1),$$

zo

(57) $$[u] \text{ het kleinste gehele getal } \geqq u$$

voorstelt.

Daarom volgt uit (54) en (55) wegens (45) dadelijk

(58) $$A'(0,x,N) = xN - \sum_{\tau=1}^{t} \mu_\tau 2^{k_\tau} + \sum_{\tau=1}^{t} \vartheta(x,\tau)$$

d.w.z. wegens (53) en (55)

(59) $$\left| A'(0,x,N) - xN \right| \leqq t \leqq {}^2\log N.$$

Definieert men $R(0,x,N)$ voor de rij (50) weer op de gebruikelijke wijze dan volgt dus onmiddellijk

(60) $$\left| R(0,x,N) \right| \leqq 1+t \leqq 1+{}^2\log N$$

alsmede

(61) $$ND(N) \leq 2 + {}^{2}\log N$$

12. Men kan zich afvragen of (61) zich voor onze rij essentieel laat verscherpen en inzien dat zulks niet het geval is, door voor x te nemen

(62) $$x = x_N = \sum_{\sigma=1}^{t} \frac{1}{2^{k_\sigma+1}} \quad ;$$

dan wordt wegens (52)

(63) $$x - \mu_\tau = \sum_{\sigma=\tau}^{t} \frac{1}{2^{k_\sigma+1}}$$

en vindt men in (55) kennelijk

$$\vartheta(x,\tau) = \tfrac{1}{2}$$

en dus in (58)

(64) $$A'(0,x,N) - xN = \tfrac{1}{2}t - \sum_{\tau=1}^{t} \mu_\tau\, 2^{k_\tau}.$$

Neemt men N van de speciale vorm

(65) $$N = 2^{a(t-1)} + 2^{a(t-2)} + \ldots + 2^{0},$$

dus $k_\tau = a(t-\tau)$, waar $a \geq 1$ geheel is,

dan vindt men

(66) $$\sum_{\tau=1}^{t} \mu_\tau\, 2^{k_\tau} = \frac{t}{2(2^a-1)} - \vartheta'_{t,a} \quad \text{met } 0 \leq \vartheta'_{t,a} \leq 1 \ .$$

Voor a=1 geeft dit met (64) een kleine $|R(0,x,N)|$, maar voor $a \geq 2$ bewijst dit dat

(67) $$ND(N) = \Omega(\log N).$$

13. Op elementaire manier kunnen we eveneens $R^{*}(N)$ bestuderen. We laten daarbij weer x_N weg, nemen dus de som der getallen (51). Dan is

$$R^{*}(N) = \sum_{n=1}^{N-1} x_n - \tfrac{1}{2}N = \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{n \in I_\tau} x_n - \tfrac{1}{2}N =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{2^{k_\tau}-1} \left(\mu_\tau + \frac{\nu}{2^{k_\tau}}\right) - \frac{N}{2} =$$

$$= \sum_{\tau=2}^{t} \mu_\tau e^{2k_\tau} + \sum_{\tau=1}^{t} \tfrac{1}{2}(2^{k_\tau}-1) - \frac{N}{2}$$

of

(68) $$R^{*}(N) = \sum_{\tau=2}^{t} \mu_\tau e^{2k_\tau} - \tfrac{1}{2}t .$$

Uit (68) en (53) volgt, onverschillig of we x_N weer toevoegen of niet

(69) $$\left| R^{*}(N) \right| \leqq \tfrac{1}{2}t \leqq \tfrac{1}{2}\ {}^{2}\log N.$$

Neemt men speciale waarden van N van de vorm

(70) $$N = 2^{k_1} , \text{ dus } t = 1$$

dan wordt dus (69) zelfs

$$\left| R^{*}(N) \right| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Neemt men N van de vorm (65) dan geven (66) en (68)

$$\left| R^{*}(N) \right| \leqq 1 \text{ als } a=1; \quad R^{*}(N) \leqq -\frac{1}{3}t \text{ als } a \geqq 2.$$

Voor de rij van Van der Corput geldt dus

(71) $$R^{*}(N) = \Omega(\log N), \; M(N) = \Omega(\log N), \; ND(N) = \Omega(\log N).$$

14. Door eveneens elementaire behandeling van M(N) wordt men gevoerd tot de volgende formule, die fraai correspondeert met (16) en (20)

$$(72)\qquad (M(N))^2 = (R^*(N))^2 - \frac{1}{6} R^*(N)$$

en waarin het verrassende is de tweede term die absoluut $\leqq \frac{1}{12} t = \mathcal{O}(\log N)$ is, in tegenstelling tot de eerste die $\Omega(\log^2 N)$ is.

(In (72) is weer $x_o=0$ toegevoegd en bij de definitie van R^* en M is x_N weer weggelaten; alles betrekt zich dus op de N getallen (51)).

15. Wil men op M(N) voor de rij van Van der Corput de transcendente methoden toepassen, dan moet men sommen

$$(73)\qquad \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} \qquad \text{voor gehele } k \neq 0$$

berekenen. We nemen weer $x_o=0$ en beschouwen

$$(74)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} = \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{n\in I_\tau} e^{2\pi i k x_n} = \sum_{\tau=1}^{t} e^{2\pi i k \mu_\tau} \sum_{n\in I_\tau} e^{2\pi i k v_n} \\ \displaystyle = \sum_{\tau=1}^{t} e^{2\pi i k \mu_\tau} \sum_{\nu=0}^{2^{k_\tau}-1} e^{2\pi i k \frac{\nu}{2^{k_\tau}}} = \sum_{\tau=1}^{t}{}^{*} e^{2\pi i k \mu_\tau} 2^{k_\tau}, \end{cases}$$

waar $\sum^{*}$ betekent, dat alleen over de waarden van τ wordt gesommeerd waarvoor

$$(75)\qquad h \equiv 0 \pmod{2^{k_\tau}}.$$

Noemt men de maximale k_τ ($\tau=1,2,\ldots,t$) met (75) gemakshalve K(h,N), dan volgt uit (74), dat in elk geval

$$(76)\qquad \left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h x_n}\right| \leqq \sum_{k_\tau \leqq K(h,N)} 2^{K(h)} \leqq 2\cdot 2^{K(h,N)}.$$

Uit (20) en (76) kan men afleiden

$$(77)\qquad (M(N))^2 \leqq (R^*(N))^2 + c_o t$$

in overeenstemming met (72).
De transcendente methode en de elementaire geven dus voor M(N) een resultaat van vrijwel gelijke scherpte. Voor D(N) geldt dat niet: past men (19) toe onder gebruikmaking van (76), dan wordt het resultaat slechter dan de schatting (61) van Van der Corput.

15. De formules (72) en (77) zijn van belang voor de constructie van rijen $\{x_n\}$ met zo klein mogelijke M(N): Neemt men een willekeurige rij $\{x_n\}$ en vormt men de nieuwe rij

$$x_1, (1-x_1), x_2, (1-x_2), \dots, \tag{78}$$

dan is de

$$R^*(N)$$

der nieuwe rij kennelijk =0 voor even N en $= x_{\frac{1}{2}(N+1)} \leq 1$ voor oneven N. Vormt men (78) uit de rij van Van der Corput, dan leidt men uit (72), zowel als uit (77) eenvoudig af:

$$M(N) = \mathcal{O}(\sqrt{\log N}). \tag{79}$$

(79) betekent

$$\int_0^1 R^2(0,x,N)\,dx \leq c_0 \log N \tag{80}$$

voor alle $N \geq 2$ en dus wegens (34)

$$\int_0^1 \int_0^1 R^2(0,x,0,y,N)\,dx\,dy \leq \bar{c}_3 \log N; \tag{81}$$

dus in R_2 geldt:

$$M(N) \leq \bar{c}_2 \log N \tag{82}$$

voor de N punten

$$(x_1, \tfrac{1}{N}), \dots, (x_N, \tfrac{N}{N}). \tag{83}$$

D.w.z.: het resultaat (33) van Roth kan voor k=2 niet worden verscherpt.

Tevens blijkt dat geen rij op het eenheidsvak kan worden gevonden met essentieel kleinere M(N) dan de M(N) van (78) gevormd uit de rij van Van der Corput. Immers dan zou uit de betreffende verscherping van (79) via de analoga van (80) en (81) een verscherping van (82) volgen in tegenspraak met (33).

17. Men zou kunnen menen, dat de rij (78) gevormd uit de rij van Van der Corput een essentieel kleinere ND(N) gezit dan de rij van Van der Corput zelf. Neem echter de eerste 2N termen van (78). Dan zullen we aantonen

$$2N\, D(2N) = \Omega(\log N) \tag{84}$$

door dezelfde combinatie van een speciale $x=x_N$ en N als we in (62) en (65) hebben gebruikt.

18. Op blz.41 werd reeds gezegd, dat het eerste voorbeeld van een rij met (82) werd gegeven door Davenport. Davenport past de kunstgreep (78) toe op de rij

$$x_n = n\theta - [n\theta] \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{85}$$

waar θ een kwadratisch irrationaal getal is, of een ander getal met begrensde wijzergetallen in de kettingbreukontwikkeling. Van zulk een rij (85) is bekend dat ND(N) klein n.l. $\mathcal{O}(\log N)$ is.
Hij bewijst voor de uit (85) geconstrueerde rij (87):

$$(M(N))^2 \leq c \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} \right|^2 \tag{86}$$

en leidt daaruit (79) af, waaruit dan weer (81) en (82) = (41) volgen. Het vermoeden der in dit colloquium bewezen algemene geldigheid van (16) werd door deze kunstgreep van Davenport geïnspireerd.

Literatuur bij § 8 (Onregelmatigheden der verdeling enz.), blz.36-48.

Voor (12) vgl. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77, 313-352 (1916).

Voor (14) en (13) zie J.F. Koksma, Een algemene stelling uit de theorie der gelijkverdeling (mod.1). Mathematica (Zutphen) 11B (1942/43), 7-11.

Voor de discontinue functie R(0,x) die eindig vele sprongpunten heeft, moet, zo ook w(x) daar discontinu is, het linkerlid van (13) worden geinterpreteerd als de som der eindig vele integralen over de continuïteitsintervallen van R(0,x).

Voor (19) c.a. zie b.v. J.F. Koksma, Some theorems on diophantine inequalities, Scriptum 5, Mathematisch Centrum 1950.

Voor literatuur inzake de resultaten van Mevr. Van Aardenne en Roth, zie .

K. Roth, On irregularities of distribution, Mathematica (London), 1, 73-79 (1954).

J. Halton, On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multidimensional integrals. Numerische Mathematik 2, 84-90 (1960).

Voor het resultaat van Davenport (41) zie

H. Davenport, Note on irregularities of distribution. Mathematika 3, 131-135 (1956).

Voor de rij (43) van Van der Corput, zie

J.G. van der Corput, Verteilungsfunktionen. Proc.Kon.Ned. Akad.Wet. 38, 813-821, 1058-1066 (1935); 39, 10-19; 19-26; 149-153; 339-344; 489-494; 579-590 (1936),

en ook J. Halton, l.c. en

H. Gabai, On the discrepancy of certain sequences mod 1. Proc. Kon. Ned.Akad. Wet. 66 (ser.A), 603-605 (1963).

Aanhangsel bij § 8.

Bewijs van de formule (13):

(13) $$\int_0^1 R(0,x,N)\,dw(x) = N\int_0^1 w(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} w(x_n),$$

waar w(t) een willekeurige functie van begrensde variatie op $0 \leqq x \leqq 1$ is en waar de integraal in het linkerlid wordt geïnterpreteerd volgens de (op blz.49 genoemde en in het colloquium toegelichte)

Definitie. I. Is op $a \leqq x \leqq b$ de functie f(x) continu en w(x) van begrensde variatie, dan bestaat, zoals bekend, ondubbelzinnig

(I) $$\int_a^b f(x)\,dw(x).$$

II. Is voor

(II) $$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N < a_{N+1} = b$$

f(x) continu op elk der vakken

(III) $$a_n < x < a_{n+1}$$

en bovendien van binnenuit continu voortzetbaar in de uiteinden, dan kan men voor de aldus op

(IV) $$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$$

continu gedefinieerde functie f(x) voor elke n ondubbelzinnig

(V) $$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dw(x)$$

neerschrijven, hoewel (I) in het algemeen geen zin heeft. Nu definieer ik in geval II de integraal (I) door de afspraak

(VI) $$\int_a^b f(x)\,dw(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dw(x).$$

N.B. Aan de oorspronkelijke definitie van de functie w(x) is hierbij niet getornd!

Thans het <u>bewijs</u> van (13), waarin z.b.d.a. wordt aangenomen

(VII) $$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N \leq 1.$$

Het rechterlid heeft zin. Het linkerlid heeft in de zin onzer definitie de waarde

$$\int_0^1 R(0,x,N)\,dw(x) = \sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} R(0,x,N)\,dw(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (n-xN)\,dw(x) = \sum_{n=0}^{N} n \int_{x_n}^{x_{n+1}} dw(x) - \sum_{n=0}^{N} N \int_{x_n}^{x_{n+1}} x\,dw(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n(w(x_{n+1})-w(x_n)) - N\int_0^1 x\,dw(x) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} w(x_n) + N\,w(1) - N\,w(1) + N\int_0^1 w(t)\,dt$$

$$= N\int_0^1 w(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} w(x_n).$$ Q.e.d.

Opmerking. Met de uitbreiding van het integraalbegrip volgens Definitie II blijven diverse manipulaties geldig, o.a. ook de afleiding van (14) en (15) uit (13) (en andere bewijzen van (13)).

Aanhangsel II bij §8.

Simple proof of a theorem of J.F. Koksma

by L. Kuipers

Let $x_1, x_2, \ldots, x_N$ be points lying in the unit-interval and let $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1$.

Define

$$A(N) = A(0,x,N) = \sum_{\substack{x_n \in [0,x) \\ 1 \leq n \leq N}} 1$$

$$R(x,N) = R(0,x,N) = A(N) - Nx$$

$$R^*(x,N) = R^*(0,x,N) = \sum_{n=1}^{N} (x_n + x - [x_n + x] - \tfrac{1}{2})$$

$$R^*(N) = \sum_{n=1}^{N} (x_n - \tfrac{1}{2})$$

Evidently $A(N)$ is a stepfunction with discontinuities at $x_1, x_2, \ldots, x_N$ and assuming the values $0, 1, \ldots, N$ consecutively. Therefore

(1) $$A(N) = N - \sum_{n=1}^{N} [x_n + 1 - x].$$

$R^*(x,N)$ can be written in the form

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n - \tfrac{1}{2}) + Nx - \sum_{n=1}^{N} [x_n + x].$$

The expression $\sum_{n=1}^{N} [x_n + x]$ is a stepfunction with discontinuities at $1-x_n$, $1-x_{n-1}, \ldots, 1-x_1$ and assuming the values $0, 1, \ldots, N$ consecutively.

We have

(2) $$R^*(x,N) = R^*(N) + Nx - \sum_{n=1}^{N} [x_n + x].$$

From the definition of $R(x,N)$ and (1) follows

(3) $$R(1-x,N) = Nx - \sum_{n=1}^{N} [x_n + x].$$

Now from (2) and (3) we have

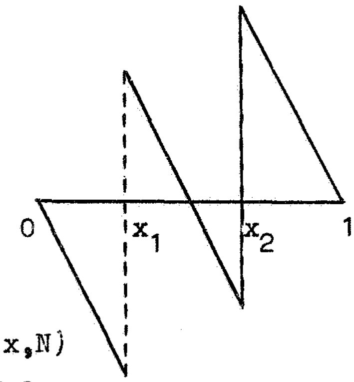
$$(4)\qquad R(1-x,N)= R^{*}(x,N)- R^{*}(N).$$

Obviously

$$R(0,N)= R(1,N) = 0$$

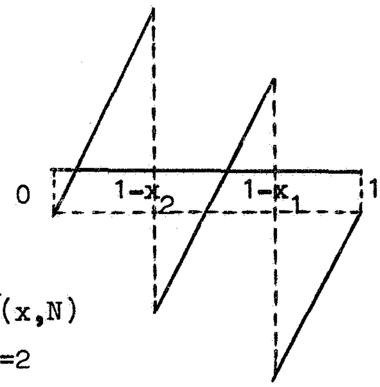
$$R^{*}(0,N)= R^{*}(1,N)= R^{*}(N)$$

The graphs of the functions $R(x,N)$ and $R^{*}(x,N)$ for $N=2$ are drawn below.



$R(x,N)$

$N=2$



$R^{*}(x,N)$

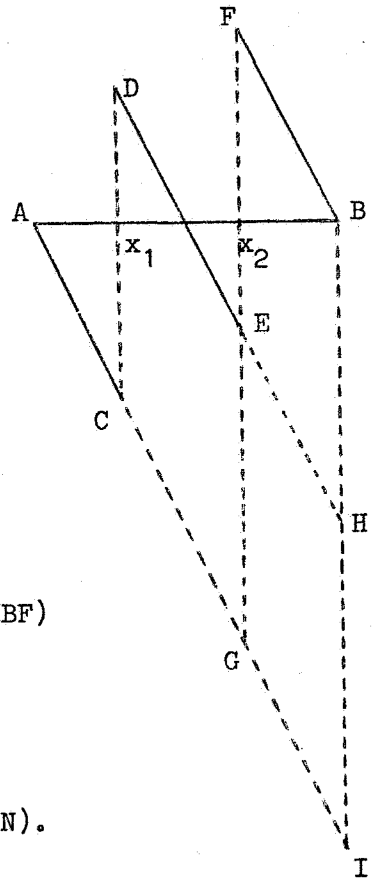
$N=2$

Now we evaluate some integrals.

$$\begin{aligned}\int_0^1 R(x,N)dx &= \int_0^1 (A(N)-Nx)dx\\ &= \int_0^1 A(N)dx - \tfrac{1}{2}N\\ &= \tfrac{1}{2}N - \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} [x_n+1-x]\right) dx \quad \text{(according to (1))}\\ &= \tfrac{1}{2}N - \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 [x_n+1-x]\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}N - \sum_{n=1}^{N} x_n. \text{ Hence}\end{aligned}$$

$$(5)\qquad \int_0^1 R(x,N)dx = -\sum_{n=1}^{N} (x_n- \tfrac{1}{2})= -R^{*}(N).$$

By interpreting the integral as an area and by looking more closely at the graph of $R(x,N)$ we may read the result (5) immediately from the figure:



$$\int_0^1 R(x,N)dx \;(= -\text{ area ABI } + \text{ area CIHD } + \text{ area EHBF})$$
$$= -\tfrac{1}{2}N + (1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)$$
$$= -R^*(N).$$

From (5) follows eveidently

$$(6)\qquad \int_0^1 R(1-x,N)dx = \int_0^1 R(x,N)dx = -R^*(N).$$

Now by (4) and (6)

$$(7)\qquad \int_0^1 R^*(x,N)dx = 0.$$

By (4),(5),(6) and (7)

$$\int_0^1 (R(x,N))^2dx = \int_0^1 (R(1-x,N))^2dx$$
$$= \int_0^1 (R^*(x,N)-R^*(N))^2dx$$
$$= \int_0^1 (R^*(x,N))^2dx - 2R^*(N)\int_0^1 R^*(x,N)dx + (R^*(N))^2,$$

hence

$$(8)\qquad \int_0^1 (R(x,N))^2dx = \int_0^1 (R^*(x,N))^2dx + (R^*(N))^2.$$

It can easily be seen that (8) is valid for any set of N real numbers after defining $R^*(N) = \sum_{n=1}^{N} (x_n-[x_n]-\tfrac{1}{2})$ and replacing in the definition of A(N) the numbers x_n by their remainders $x_n-[x_n]$ and adapting subsequent expressions accordingly if necessary. The way with respect to

the order of magnitude in which the numbers are indexed is of no importance. The numbers x_n need not be distinct.
Now (8) is a result obtained by J.F. Koksma. For the sake of completeness we mention Koksma's next result

$$(9) \qquad \int_0^1 (R(x,N))^2 dx = (R^*(N))^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} \right|^2,$$

which he derives by expanding $R(x,N)$ in a Fourier series

$$R(x,N) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h e^{2\pi h i x} ,$$

where

$$a_0 = \int_0^1 R(x,N)dx = - R^*(N)$$

and

$$a_h = \int_0^1 R(x,N)e^{-2\pi i h x}dx = \sum_{k=0}^{N+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} R(x,N)e^{-2\pi i h x}dx$$

$(x_0=0$ and $x_{N+1}=1)$

$$= \sum_{k=1}^{N} \{R(x_k+0,N)-R(x_k-0,N)\} \frac{e^{-2\pi i h x_k}}{2\pi i h}$$

$$= \frac{1}{2\pi i h} \sum_{k=1}^{N} e^{-2\pi i h x_k},$$

and by using Parseval's relation

$$\int_0^1 (R(x,N))^2 dx = a_0^2 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} |a_h|^2 .$$

Einige Fragen der Theorie der Gleichverteilung.

Von Johann Cigler, Wien.

Die folgenden Bemerkungen bilden eine sehr unvollständige und einseitige Skizze einiger Aspekte der Theorie der Gleichverteilung. Der Hauptzweck besteht darin, einige wohlgekannte Sätze von einem neuen Gesichtspunkt aus zu behandeln und auf eine Reihe von Untersuchungen hinzuweisen, die für die Theorie der Gleichverteilung von Interesse sein könnten. Die meisten Resultate, über die ich sprechen werde, sind wohlbekannt, wenn auch manche üblicherweise anders formuliert und bewiesen werden. Definitionen und Sätze, die in [1] vorkommen, werden als bekannt vorausgesetzt. Auf Arbeiten, die bereits in [1] zitiert sind, wird nicht ausdrücklich hingewiesen.

I. Bezeichnungen:

$N = \{1,2,3,\ldots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen in der diskreten Topologie.

$C(S)$ = Algebra aller beschränkten stetigen komplex-wertigen Funktionen f auf einem Hausdorff-Raum S mit der Norm $\|f\| = \sup_{s\in S} |f(s)|$.

$C^r(S)$ = Menge aller reellen Funktionen in $C(S)$.

$C^+(S)$ = Menge aller nicht-negativen Funktionen in $C(S)$.

K: Menge der komplexen Zahlen. Ist $z \in K$, dann bedeute $\overline{z}$ die konjugiertkomplexe Zahl zu z.

$A(S)$ heisst C-Teilalgebra von $C(S)$, wenn

$f_1, f_2 \in A(S) \Longrightarrow f_1+f_2$ und $f_1 f_2 \in A(S)$

$f \in A(S),\quad \lambda \in K \Longrightarrow \lambda f \in A(S)$

$1 \in A(S);\quad f \in A(S) \Longrightarrow \overline{f} \in A(S)$

$\|f\| = \sup_{s\in S} |f(s)|$

$f_n \in A(S),\ \|f_n - f\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow f \in A(S)$.

Ein kompakter Hausdorff-Raum X, in dem ein stetiges Bild $\phi(N)$ von N dicht liegt, heisst eine Kompaktifizierung von N.

$C(N)$ ist die menge aller beschränkten komplex-wertigen Funktionen $f = \{f(n)\}$ auf N. Ist $f = \{f(n)\}$ dann sei $Tf = \{f(n+1)\}$.
Eine C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$ heisst invariant, wenn mit $f \in A(N)$ auch $Tf \in A(N)$ gilt.
$C(N)$ ist invariant.
$M(X)$ bedeute die Menge aller komplex-wertigen regulären Masse μ auf einem kompakten Raum X, also die Menge aller beschränkten stetigen Funktionale μ auf $C(X)$.
$M^+(X)$ bedeute die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse, d.h. die Menge aller Masse $\mu \in M(X)$ mit $\mu(f) \geq 0$ für $f \geq 0$ und $\mu(1)=1$.
Für jedes $x \in X$ bedeute $\varepsilon_x(f)$ das im Punkt x konzentrierte Mass, für das also $\varepsilon_x(f) = f(x)$ für jedes $f \in C(X)$ gilt.
Ein Mass μ ist konzentriert auf einer Menge E, wenn für jede Borel-Menge A gilt $\mu(A)=\mu(A \cap E)$.
$\mathfrak{T}$ = Torusgruppe = Gruppe der reellen Zahlen mod 1, repräsentiert durch das Intervall $[0,1)$, bei dem die Endpunkte identifiziert werden.
$\mathfrak{T}^k$ = k-dimensionale Torusgruppe.

II. Hilfssätze aus der Theorie der kommutativen Banach-Algebren

Jede C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$ ist isometrisch isomorph zur Algebra $C(X)$ aller stetigen komplex-wertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X, in dem ein stetiges Bild $\phi(N)$ von N dicht liegt. Ist umgekehrt X eine Kompaktifizierung von N, dann ist die Algebra $C(X)$ isometrisch isomorph zu einer C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$. Dieser Isomorphismus wird durch die Zuordnung

$$\hat{f}(x) \in C(X) \longleftrightarrow \hat{f}(\phi(n)) \in A(N), \quad \hat{f}(\phi(n)) = f(n),$$

gegeben.
Die Funktion $\hat{f}(x)$ ist die stetige Fortsetzung von $\hat{f}(\phi(n))$ auf X.

Die Kompaktifizierung von N, die der Algebra $C(N)$ selbst entspricht, werde mit Ω bezeichnet. Ω heisst Stone - Čech - Kompaktifizierung von N. Es ist $C(N) \cong C(\Omega)$. Jede Kompaktifizierung X von N ist als

stetiges Bild von Ω darstellbar. Rein mengentheoretisch ist Ω isomorph zur Menge aller Ultrafilter auf N.
Jedem $f \in C(N)$ ist umkehrbar eindeutig eine stetige Funktion $\hat{f}=\hat{f}(\omega) \in C(\Omega)$ zugeordnet, so dass für $n \in N$ $\hat{f}(n) = \rho(n)$ gilt.
Für $\omega \notin N$ und jedes $f \in C^r(N)$ gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(n) \leq \hat{f}(\omega) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} f(n)$.

Literatur: [2], [3], [4].

III. Der Problemkreis der Theorie der Gleichverteilung.

Die Theorie der Gleichverteilung kann aufgefasst werden als die explizite und konkrete Realisierung der Isomorphismen zwischen den C-Teilalgebren A(N) von C(N) und den entsprechenden Algebren C(X). Das Hauptinteresse liegt dabei an der Zuordnung der einander entsprechenden linearen Funktionale.
Die beschränkten linearen Funktionale auf C(X) sind genau die Masse $\mu \in M(X)$. Die beschränkten linearen Funktionale L auf A(N) werden durch Limitierungsverfahren gegeben. Der wichtigste Fall ist der, wo ein Matrix-Limitierungsverfahren $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ zugrunde liegt. Es ist dann

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} f(k),$$

wobei sowohl jedes einzelne $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(k)$ als auch der Grenzwert für jedes $f \in A(N)$ exstieren sollen.
Nun definiert $\sum_k a_{nk} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \hat{f}(\phi(k)) = \mu_n(\hat{f})$

ein Mass $\mu_n \in M(X)$, das auf der Menge $\phi(N)$ konzentriert ist.
Die Theorie der Gleichverteilung beschäftigt sich also vor allem mit dem Grenzverhalten von Folgen von Massen auf X, die auf einer abzählbaren Menge $\phi(N)$ konzentriert sind.
Eine Folge von Massen $\mu_n \in M(X)$ konvergiert genau dann (in der w^*-Topologie) gegen ein Mass μ, wenn $\mu_n(\hat{f}) \to \mu(\hat{f})$ für jedes $\hat{f} \in C(X)$ gilt.

Die bedeutung der kompakten Räume für die Theorie der Gleichverteilung beruht wesentlich darauf, dass die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse kompakt ist.
Alle Fragen der Theorie der Gleichverteilung können in dem dargelegten allgemeinen Rahmen behandelt werden. Im Folgenden wird auf einige Spezialfälle näher eingegangen, die entweder zur Vertiefung des Verständnisses dienen oder Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen sein könnten.

Lit.: [1], [5].

IV. Die Einpunkt-Kompaktifizierung

Sei X die Einpunkt-Kompaktifizierung von N mit dem Punkt ∞. C(X) ist dann isomorph mit der C-Teilalgebra $A_\infty(N)$ aller Funktionen $f \in C(N)$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ existiert. Dieser Isomorphismus wird gegeben durch die Zuordnung

$$f = f(n) \in A_\infty(N) \longleftrightarrow \hat{f} = \hat{f}(x) \in C(X)$$

$$\text{mit } \hat{f}(\phi(n) = f(N)\ , \quad n \in N$$

$$\hat{f}(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Wir nehmen im Folgenden $\phi(n) = n$ an.

Wir interessieren uns für die Frage: Welche Limitierungsverfahren $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ definieren das Funktional ε_∞ auf X? M.a.W. Für welche Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} f(k) = \varepsilon_\infty(\hat{f}) = \hat{f}(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Das ist aber genau die Frage, welche limitierungsverfahren permanent sind, d.h. jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnen.
Die Antwort ist durch den wohlbekannten Satz von Toeplitz gegeben:
IV.1. Notwendig und hinreichend für die Permanenz von $\mathfrak{A}$ ist

(1) $\sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

(2) $\lim\limits_n a_{nk} = 0$

(3) $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} a_{nk} = 1.$

Der Beweis verläuft genau so, wie der übliche funktionalanalytische. Nur ist hier die Terminologie masstheoretisch. Wir skizzieren nur den notwendigen Teil:

Für jedes $\hat{f} \in C(X)$ existiert $\mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_k a_{nk} \hat{f}(k) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k\leq N} a_{nk} \hat{f}(k)$

$\Longrightarrow$(Banach-Steinhaus) $\|\mu_n\| = \sup\limits_{|f|\leq 1} \mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty.$

Für jedes $\hat{f} \in C(X)$ gilt $\mu_n(\hat{f}) \to \varepsilon_\infty(\hat{f}) \Longrightarrow$

$\sup\limits_n \|\mu_n\| = \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

$f = 1 \Longrightarrow \mu_n(1) \to \varepsilon_\infty(1) = 1 \Longrightarrow \sum\limits_k a_{nk} \to 1.$

$f = \varepsilon_k \Longrightarrow \mu_n(\varepsilon_k) \to \varepsilon_\infty(\varepsilon_k) = 0 \Longrightarrow a_{nk} \to 0.$

"Gleichverteilungstheoretische Interpretation" dieses Satzes:
Die Menge der natürlichen Zahlen ist bezüglich jedes permanenten Summationsverfahrens in X ε_∞-gleichverteilt.
Mehrere weitere Fragen der Theorie der Limitierungsverfahren können unter ähnlichen Gesichtspunkten betrachtet werden.

Lit.: [6], [7].

V. Klassische Definition der Gleichverteilung

Die übliche Definition der Gleichverteilung bekommt man, wenn man von einer Folge $\phi(n)$ ausgeht, die in einem kompakten Hausdorff-Raum S liegt. Als Kompaktifizierung von N wähle man in diesem Fall die kleinste abgeschlossene Teilmenge X von S, die all Punkte $\phi(n)$ enthält.
Da das der übliche Gesichtspunkt ist, wollen wir nicht näher darauf eingehen.

Lit.: [1], [8].

VI. Die Stone - Čech - Kompaktifizierung

Die Stone - Čech - Kompaktifizierung Ω entspricht der Algebra $A(N) = C(N)$. Jedes $f \in C(N)$ kann zu einer eindeutig bestimmten stetigen Funktion $\hat{f}$ auf Ω erweitert werden.

Jedes beschränkte lineare Funktional auf $C(N)$ definiert ein Mass μ auf Ω. Ein Matrix-Limitierungsverfahren liefert genau dann ein Mass auf Ω, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk} f(k)$ ex. für jedes $f \in C(N)$, wenn

(1) $\sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

(2) $\sup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk}$ ex.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk} = a_k$ ex.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k |a_{nk} - a_k| = 0.$

Der Beweis verläuft genau so wie bei der Einpunkt-Kompaktifizierung und kann daher weggelassen werden.

Ist jedes μ_n, definiert durch $\mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_k a_{nk} f(k)$, ein Wahrscheinlichkeitsmass, dann folgt, dass $\sum\limits_k a_k = \lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = 1$ gilt d.h. dass $\mu = \lim \mu_n$ ebenfalls auf N konzentriert ist.

Die Matrix-Limitierungsverfahren liefern daher keine nicht-trivialen Masse μ auf Ω. Auf Ω kann daher keine im üblichen Sinne vernünftige Theorie der Gleichverteilung betrieben werden.

Lit.: [6].

VII. Banach-Limiten und Fast-Konvergenz

Unter einem Banach-Limes versteht man ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf Ω, das invariant bezüglich T ist:

$\hat{f} \geq 0 \Longrightarrow \mu(\hat{f}) \geq 0$

$\mu(1) = 1$

$\mu(\widehat{Tf}) = \mu(\hat{f}).$

Es gilt dann für $\hat{f} \in C^r(\Omega)$: $\underline{\lim} f(n) \leq \mu(f) \leq \overline{\lim} f(n)$.
Insbesondere ist $\mu(n) = 0$, $n \in N$.
Die Menge aller Banach-Limiten werde mit M_T bezeichet. Sei B_T der Teilraum von $C(\Omega)$, auf dem alle Banach-Limiten übereinstimmen. Der gemeinsame Wert werde mit $L(\hat{f})$ bezeichnet.
VII.1. Die Funktion $\hat{f}$ liegt genau dann in P_T, wenn für jedes $\omega \in \Omega$

$$(*) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) = L(\hat{f})$$

existiert, wobei $L(\hat{f})$ unabhängig von ω ist.

Bew.: Hinr. Sei $\mu \in M_T$ und $(*)$ erfüllt.

$$\Longrightarrow \mu(\hat{f}) = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \Big(\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega)\Big)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega \Big(\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega)\Big) d\mu(\omega)$$

$$= \int_\Omega L(\hat{f})\, d\mu(\omega) = L(\hat{f}),$$

d.h. $\mu(\hat{f})$ ist unabhängig von $\mu \in M_T \Longrightarrow \hat{f} \in B_T$.

Notw. Sie $\hat{f} \in B_T$ und $\omega_0 \in \Omega$. Dann existiert eine Folge N_n, so dass

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k \hat{f}(\omega_0) = \alpha.$$

Wir ordnen nun jeder Funktion $\hat{g} \in C(\Omega)$ eine Funktion $S\hat{g} \in C(\Omega)$ zu, deren Einschränkung auf N gegeben ist durch

$$S\hat{g} = \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k \hat{g}(\omega_0).$$

Dann ist für beliebiges $\omega \in \Omega - N$ durch $\mu(\hat{g}) = S\hat{g}(\omega)$ ein Banach-Limes definiert. Denn:

$\hat{g} \geq 0 \Longrightarrow S\hat{g}(n) \geq 0 \Longrightarrow \mu(\hat{g}) = S\hat{g}(\omega) \geq 0$

$\hat{g} = 1 \Longrightarrow S\hat{g}(n) = 1 \Longrightarrow \mu(1) = S\hat{g}(\omega) = 1.$

$ST\hat{g}(n) = \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k T\hat{g}(\omega_0) = TS\hat{g}(n)$

$\Longrightarrow ST\hat{g}(\omega) = TS\hat{g}(\omega)$

Nun ist $T S\hat{g}(\omega) = S\hat{g}(\omega)$, weil $\lim\limits_{n\to\infty} (TS\hat{g}(n) - S\hat{g}(n)) = 0$ ist.

$\mu(T\hat{g}) = ST\hat{g}(\omega) = TS\hat{g}(\omega) = S\hat{g}(\omega) = \mu(\hat{g})$.

Ausserdem ist $\mu(\hat{f}) = S\hat{f}(\omega) = \alpha$ wegen (1).

Nun ist $\hat{f} \in B_T$, $\mu \in M_T \Longrightarrow \mu(\hat{\rho}) = L(\hat{\rho})$ unabhängig von $\mu \Rightarrow \alpha = L(\hat{\rho})$

$\Longrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leq N} T^n \hat{\rho}(\omega_0) = L(\hat{\rho})$

existiert. Das gilt für jedes $\omega_0 \Longrightarrow (*)$.

VII.2. Es ist $f \in B_T$ genau dann, wenn

$$(**) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n+k) = L(\hat{f})$$

gleichmässig in k existiert, d.h. wenn die Folge $\{f(n)\}$ fastkonvergent ist.

<u>Bew.:</u> Hinr. Sei (**) erfüllt, $\omega \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ bel. Es ex. N_0, so dass für alle $N \geq N_0$

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n+k) - L(\hat{f})\right| < \varepsilon/2$$

für alle k=1,2,3,... gilt. Das kann auch geschrieben werden:

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(k) - L(\hat{\rho})\right| < \varepsilon/2.$$

Ausserdem gibt es zu jedem N und vorgegebenem $\omega \in \Omega$ eine natürliche Zahl $k_N = k_N(\omega)$, so dass

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) - \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(k_N)\right| < \varepsilon/2$$

gilt, weil $T^i f$ für jedes i eine stetige Funktion ist und N dicht in Ω liegt

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) - L(\hat{\rho})\right| < \varepsilon \Longrightarrow (*).$$

Nctw. Sei (*) erfüllt. Dann gilt für jedes $\nu \in M(\Omega)$: $\nu(\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n f) \to L(\hat{\rho})$. Die Folge $\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}$ strebt daher schwach gegen $L(\hat{f})$ und daher nach dem "mean ergodic theorem" auch stark. $\Rightarrow$ (**).

Lit.: [9], [10], [11], [12]

VIII. Strikte Ergodizität

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Eine stetige Transformation T auf X heisst strikt ergodisch, wenn es nur ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf X gibt, das invariant bezüglich T ist, d.h. $\int f(Tx)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$ für alle $f \in C(X)$ erfüllt.

VIII.1. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) T ist strikt ergodisch

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leq N} f(T^n x) = \mu(f)$ existiert für jedes $f \in C(X)$ und jedes $x \in X$.

(3) $\lim\limits_{N\to\infty} \| \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leq N} f(T^n x) - \mu(f) \| = 0$ für jedes $f \in C(X)$.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2):

Sei ν ein beliebiges Häufungsmass der Folge μ_N, definiert durch $\mu_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(T^n x)$, $f \in C(X)$. Dann ist ν invariant bezüglich T.

Daraus folgt $\nu = \mu$, d.h. $\lim \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(T^n x) = \mu(f)$ für jedes $f \in C(X)$.

(1) $\Rightarrow$ (3):

Ang. (3) wäre nicht erfüllt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem N Elemente x_N mit

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(T^n x_N) - \mu(f)\right| > \varepsilon$$

für mindestens ein $f \in C(X)$. Sei $\mu_N(g) = \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} g(T^n x_N)$ für jedes $g \in C(X)$.

Sei ν ein Häufungsmass der Folge $\mu_N \Rightarrow \nu(\rho) \neq \mu(f)$, $\nu(T\rho) = \nu(f)$, d.h. es existieren mindestens zwei invariante Masse, was der Voraussetzung widerspricht.

(3)$\Rightarrow$(2): trivial

(2)$\Rightarrow$(1):

Sei ν invariant $\Rightarrow \nu(f) = \int(\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(T^n x))\, d\nu(x) =$

$= \int(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(T^n x))d\nu(x) = \int \mu(\rho)d\nu(x) = \mu(f) \Rightarrow \mu = \nu.$

Literatur: [10], [13], [14].

IX. Verschiedene Probleme.

IX.1. Sei $A(N)$ eine separable invariante C-Teilalgebra von $C(N)$. Dann existiert eine stetige Transformation T auf der zugehörigen Kompaktifizierung X derart, dass $Tf(x) = f(Tx)$ für alle $f \in C(X)$ gilt.

Bew. Da $A(N)$ separabel ist, ist X ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Eine Folge $x_n \in X$ konvergiert genau dann, wenn $f(x_n)$ für jedes $f \in C(X)$ konvergiert. In der einen Richtung folgt das aus der Stetigkeit der Funktionen f. Wenn x_n nicht konvergiert, dann existieren mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte x,y. Dann würden aber $f(x)$ und $f(y)$ verschiedene Häufungspunkte der Folge $f(x_n)$ sein. Das ist ein Widerspruch zur Konvergenz der Folge $f(x_n)$.

Sei $\phi(N)$ das Bild von N, das in X dicht liegt. Wir zetzen $T\phi(n) = \phi(n+1)$, $n=1,2,3,\ldots$

Sei $x \in X$. Da $\{\phi(n)\}$ dicht in X ist, existiert eine Teilfolge $\phi(n_i)$, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert $\hat{f}(\phi(n_i))$ für jedes $\hat{f} \in C(X)$. Da $A(N)$ invariant ist, konvergiert auch $T\hat{f}(\phi(n_i)) = \hat{f}(T\phi(n_i))$.
Das bedeutet aber, dass auch die Folge $T\phi(n_i))$ konvergiert.
Wir definieren $Tx = \lim T\phi(n_i)$. Man zeigt leicht, dass Tx eindeutig festgelegt und unabhängig von der Wahl der Folge, die gegen x konvergiert, ist. Ebenso zeigt man die Stetigkeit von T.

IX.2. Sei $A(N)$ eine invariante C-Teilalgebra von $C(N)$, die ganz in B_T liegt. Dann ist die durch IX.1. definierte Transformation T strikt ergodisch.

Bew. Da $A(N) \subseteq B_T$ gilt, ist für jedes $f \in A(N)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \hat{f}(T^n\phi(k)) = L(\hat{\rho})$$

gleichmässig in k. Nun folgt mit demselben Schluss wie in VII.2, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \hat{f}(T^n x) = L(\hat{\rho})$$

für jedes $x \in X$ gilt. Das bedeutet aber, dass T strikt ergodisch ist.

IX.3. Ein Beispiel für eine strikt ergodische Transformation ist $Tx = x+\vartheta$ auf $\mathcal{T}$, ϑ irrational. Denn $T^n x = x+n\vartheta$ ist für jedes $x \in \mathcal{T}$ gleichverteilt. Daraus folgt nach VIII.1(3) schon die gleichmässige Gleichverteilung.

IX.4. Die Folge $\{n^2\vartheta\}$ kann nicht in der Gestalt $n^2\vartheta = T^n x$, $x\in\mathcal{T}$, dargestellt werden, wobei T eine stetige Transformation auf $\mathcal{T}$ bedeutet. Sonst müsste mit jeder Folge $n_i^2\vartheta \to x_0$ auf $\mathcal{T}$ auch $T\, n_i^2\vartheta = (n_i+1)^2\vartheta$ auf $\mathcal{T}$ konvergieren, was offenbar nicht der Fall ist.

Sei jedoch auf $\mathcal{T}^2$ die Transformation T durch $T(x_1,x_2) = (x_1+\vartheta,\ x_2+2x_1+\vartheta)$ definiert. Dann ist T stetig auf $\mathcal{T}^2$, und es gilt $T^n(x_1,x_2) = (x_1+n\vartheta,\ x_2+2nx_1+n^2\vartheta)$. Also speziell für $x_1=x_2=0$ ergibt sich $T^n(0,0) = (n\vartheta, n^2\vartheta)$. Man kann direkt beweisen, dass T strikt ergodisch ist. Es folgt aber schon daraus, dass $T^n(x_1,x_2)$ für jedes x_1,x_2 gleichverteilt ist. Daraus folgt dann wieder die gleichmässige Gleichverteilung.

IX.4a. Ganz analog kann gezeigt werden, dass jede Folge $\phi(n) = \alpha_0 n^k+\alpha_1 n^{k-1}+\ldots+\alpha_k$ mit irrationalem α_0 auf $\mathcal{T}$ als Projektion einer Folge $T^n(x_1,\ldots,x_k)$ dargestellt werden kann, wobei T strikt ergodisch auf $\mathcal{T}^k$ ist.

<u>Lit.:</u> [14],[15].

IX.5. Jede Folge $\{\phi(n)\} \in X$ lässt sich als Projektion einer Folge $\{T^n x\}$, wobei x in einem kompakten Hausdorff-Raum $\tilde{X}$ liegt, auffassen. Sei nämlich $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n=X$, das kartesische Produkt von abzählbar

vielen Exemplaren X mit der überlichen Produkt-Topologie.

Sei $x = (\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n), \ldots) \quad \Pi X_n$

$Tx = (\phi(2), \phi(3), \ldots, \phi(n+1), \ldots,).$

Dann ist $\phi(n) = P_1 T^{n-1} x$ wobei P_1 die Projektion von $\prod_n X_n$ auf X_1 bedeutet. Setzt man $\tilde{X} = \overline{\{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}}$, gleich dem Abschluss der Folge $\{T^n x\}$ in $\prod_n X_n$, dann ist $\tilde{X}$ ein kompakter Hausdorff-Raum, in dem die Folge $\{T^n x\}$ dicht liegt.

IX.6. Wenn $\{\phi(n)\} \in X$ gleichmässig gleichverteilt zum Mass μ auf X ist, dann muss für jedes $\hat{f} \in C_1(\tilde{X})$ gelten

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \hat{f}(T^n \tilde{x}) = \mu(\hat{f})$$

für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Hiet bedeutet $C_1(\tilde{X})$ die Menge aller stetigen Funktionen der Gestalt $\hat{f}(P_1 \tilde{x})$ mit $\hat{f} \in C(\tilde{X})$.

<u>Bew.</u> Wörtlich wie in VII.2.

IX.7. Sei $\{\phi(n)\}$eine bel. Folge auf $\mathcal{T}$ und sei $\lim_{n\to\infty} \phi(n+k) - \phi(n) = 0$ auf $\mathcal{T}$ für jedes k=1,2,3,... . Dann ist die Folge $\{\phi(n)\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt.

<u>Bew.</u> Sei $\tilde{X} = \overline{\{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}}$, wobei

$$x = (\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n), \ldots\} \in \Pi X_n, \; X_n \equiv \mathcal{T},$$

gilt. Sei α eine bel. Zahl$\in \mathcal{T}$. Dann gibt es eine Folge $\phi(n_i) \to \alpha$. Dann ist aber auch $\lim_i \phi(n_i + k) = \alpha$ für jedes k=1,2,3,... M.a.W. $\tilde{X}$ enthält den Punkt $(\alpha, \alpha, \alpha, \ldots)$.

Wenn $\{\phi(n)\}$ gleichmässig gleichverteilt wäre, würde folgen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(\alpha) = \int_0^1 \rho(x)dx$$

für alle $f \in C(\mathcal{T})$, was offenkundig falsch ist.

Beispiele: αn^σ, $0 < \alpha < 1$; $\alpha(\log n)^\tau$, $\tau > 1$.

<u>Lit.</u> [16], [17].

IX.8. Die Folge $\{a^n x\}$ ist bei ganzzahligem $a > 1$ für kein x gleichmässig gleichverteilt.

Wäre $\{a^n x\}$ für ein $x \in \mathcal{T}$ gleichmässig gleichverteilt, dann wäre nach IX.6 $\lim\limits_N \frac{1}{N} \sum\limits_{n \le N} f(a^n x_0) = \int\limits_0^1 f(x)dx$ für jedes $x_0 \in \mathcal{T}$, weil $Tx=ax$ eine stetige Transformation auf $\mathcal{T}$ darstellt.

Das ist aber für $x_0=0$ sicher falsch.

IX.9. Sei $a > 1$ eine ganz-algebraische Zahl vom Grad k. Wenn die Folge $(a^{n+k-1}x, a^{n+k-2}x, \ldots, a^n x)$ in $\mathcal{T}^k$ den Punkt $(0,0,\ldots,0)$ als Häufungspunkt enthält, ist die Folge $\{a^n x\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt.

<u>Bew.</u> Sie $a^k = h_1 a^{k-1} + \ldots + h_k$, h_i ganz. Sei T die stetige Transformation auf $\mathcal{T}^k$, die durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 h_2 & \ldots & h_k \\ 1\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0\ 0 & \ldots 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dann ist

$$T^n(a^{k-1}x, \ldots, x) = (a^{n+k-1}x, \ldots, a^n x).$$

Wenn also $\{a^n x\}$ gleichmässig gleichverteilt wäre unf $(0,0,\ldots 0)$ Häufungspunkt der Folge $(a^{n+k-1}, \ldots, a^n x)$, würde nach IX.6 folgen, dass auch die Folge $T^n(0,\ldots,0) = (0,\ldots,0)$ gleichverteilt wäre, was einen Widerspruch darstellt.

<u>Korollar.</u> Für fast alle x ist die Folge $\{a^n x\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt, da für fast alle $x \in \mathcal{T}$ $(a^{n+k-1}, \ldots, a^n x)$ gleichverteilt in $\mathcal{T}^k$ ist und daher $(0,\ldots,0)$ als Häufungspunkt besitzt.

IX.10. Die Menge der x, für die bei transzendentem $a > 1$ die Folge $\{a^n x\}$ gleichmässig gleichverteilt ist, besitzt das Mass Null.

Bew. Für fast all x ist die Folge $\{a^n x\}$ vollständig gleichverteilt. Die Folge $T^n(x,ax,\ldots,a^k x,\ldots)$ im Produktraum besitzt also den Punkt $(0,,,,0)$ als Häufungspunkt.

Lit. [18].

X. Weitere Fragestellungen.

Sei G eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe, $\mathcal{G}$ eine Menge von Charakteren auf G und $C_{\mathcal{G}}(G)$ die kleinste C-Teilalgebra von C(G), die $\mathcal{G}$ enthält. Die zugehörige Kompaktifizierung $X_{\mathcal{G}}$ nennt man eine fastperiodische Kompaktifizierung von G.
Eine Folge $\{\phi(n)\} \in G$ heisst gleichverteilt auf $X_{\mathcal{G}}$, wenn

$$(*) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \hat{f}(\phi(n)) = \lambda(\hat{f}) \text{ für jedes } \hat{f} \in C(X_{\mathcal{G}}) \text{ gilt.}$$

Dabei bedeutet λ das Haar'sche Mass auf $X_{\mathcal{G}}$.
Für den Fall $G = R_1$, $\mathcal{G} = \{e^{2\pi ikx}\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots$, bekommt man die übliche Definition der Gleichverteilung mod 1. Für den Fall G = Z = Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathcal{G} = \{e^{2\pi irn}\}$, r rational, den Gleichverteilungsbegriff von I. Niven. Für $G = Z$, $\phi(n) = n$, $\mathcal{G}$ eine beliebige Menge von Charakteren, bedeutet (*), dass der Mittelwert M(f) einer fastperiodischen Funktion f auf Z durch $\lambda(\hat{f})$ gegeben ist. Da der Mittelwert eindeutig bestimmt ist, liegt jede fastperiodische Funktion in B_T.

Man kann nun nach der Menge aller Limitierungsverfahren fragen, die den Mittelwert einer fastperiodischen Funktion f auf Z liefern, usw.

Die vorangegangenen Sätze lassen sich zum Grossteil auch auf andere Gleichverteilungsbegriffe übertragen, z.B. bekommt man den Begriff der C-Gleichverteilung, wenn man statt N die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen nimmt, usw.
Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Lit. [5], [19], [20], [21], [22].

Literaturverzeichnis

[1] J. CIGLER, G. HELMBERG, Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresbericht DMV 64 (1961), 1-50.

[2] I.M. GELFAND, D.A. RAIKOW, G.E. SCHILOW, Kommutative normierte Ringe. Moskau 1960.

[3] CH. RICKART, General Theory of Banach Algebras. Van Nostrand, Princeton 1960.

[4] W. RUDIN, Homogeneity Problems in the Theory of Čech-Compactifications. Duke Math. J. 23 (1956), 409-419.

[5] E. HEWITT, K. ROSS, Abstract Harmonic Analysis I. Springer-Verlag 1963.

[6] K. ZELLER, Theorie der Limitierungsverfahren. Springer-Verlag 1958.

[7] A. RÉNYI, Summation Methods and Probability Theory. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 4 (1959), 389-397.

[8] E. HLAWKA, Folgen auf kompakten Räumen. Abh. Math. Sem. Hamburg 20 (1956), 223-241.

[9] M. JERISON, The Set of all Generalized Limits of Bounded Sequences. Canad. J. Math. 9 (1957), 79-89.

[10] K. JACOBS, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Springer-Verlag 1960.

[11] G. LORENTZ, A contribution to the theory of divergent series. Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[12] M. HENRIKSEN, Multiplicative Summability Methods and the Stone-Čech-Compactification. Math. Z. 71 (1959), 427-435.

[13] J.C. OXTOBY, Ergodic sets. Bull. AMS 58 (1952), 116-136.

[14] H. FURSTENBERG, Strict ergodicity and transformation of the torus. Amer. J. Math. 83 (1961), 573-601.

[15] N.M. AKULINITSCHEW, Über ein dynamisches System, das mit der Verteilung der Bruchteile eines Polynomes zweiten Grades zusammenhängt. Dokl. Akad. Nauk, 143 (1962), 503-505.

[16] L. KUIPERS, Continuous distribution modulo 1. Nieuw Archief X (1962), 78-82.

[17] G.M. PETERSEN, M.T. MC GREGOR, On the structure of well distributed sequences. Nieuw Archief XI (1963), 64-67.

[18] J. CIGLER, Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung. J. reine angw. Math. 205 (1960), 91-100.

[19] I.D. BERG, The Algebra of Semiperiodic Sequences. Michigan Math. J. 10 (1963), 237-239.

[20] J. CIGLER, Einige Bermerkungen zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Archiv der Mathematik.

[21] G. HELMBERG, Ein Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und Werteverteilungen fastperiodischer Funktionen. Math. Z. 81 (1963), 300-307.

[22] I. NIVEN, Uniform Distribution of Sequences of Integers. Trans. AMS 98 (1961), 52-61.

§10. C-gelijkverdeling modulo 1.

Zij $f(t)$ een Lebesgue-meetbare, reële functie, gedefinieerd op $[0,\infty)$. De rest modulo 1 van $f(t)$ schrijven we als $\{f(t)\}$; derhalve is $\{f(t)\} = f(t) - [f(t)]$. Zij A het interval $[\alpha,\beta]$ $(0 \leqq \alpha < \beta < 1)$. Beschouw de verzameling der punten t op $[0,\infty)$:

$$E(A,T) = \bigcup_{n=-\infty}^{n=\infty} \{t\colon n+\alpha \leqq f(t) < n+\beta;\ 0 \leqq t \leqq T\}$$

$$= \{t\colon \alpha \leqq f(t) < \beta (\mathrm{mod}\ 1);\ 0 \leqq t \leqq T\}.$$

Indien voor elke keuze van A

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mu E(A,T)}{T}$$

bestaat en gelijk is aan $\beta-\alpha$, dan heet $f(t)$ C-gelijkverdeeld mod 1. (μV duidt de Lebesgue-maat van de verzameling V aan). De in deze definitie optredende limiet heet de relatieve maat van de verzameling $\{t\colon \alpha \leqq f(t) < \beta(\mathrm{mod}\ 1);\ 0 \leqq t\}$.

Is $f(t)$ C-gelijkverdeeld modulo 1, dan geldt voor alle continue complexwaardige functies w op $[0,1]$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(\{f(t)\})\,dt = \int_0^1 w(u)\,du \quad .$$

Verder hebben we (criterium van Weyl):
Nodig en voldoende voor het C-gelijkverdeeld zijn van $f(t)$ (mod 1) is de betrekking

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i h f(t)}\,dt = 0 \quad (h=1,2,\ldots) \quad .$$

Een interessante toepassing van het criterium van Weyl is de volgende stelling (van M. Tsuji, 1943).

Stelling. Zij f(t) een positieve, differentieerbare, toenemende, convexe functie van log t. Als bovendien

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{\log t} = \infty ,$$

dan is f(t) C-gelijkverdeeld modulo 1.

Ook geldt de volgende stelling.

Stelling. Zij f(t) een differentieerbare functie met de eigenschap

$$|tf'(t)| < K \quad \text{(K een vast positief getal)},$$

dan is f(t) niet C-gelijkverdeeld mod 1.

Er zijn stellingen die de C-gelijkverdeling mod 1 van f(t) verbinden met de gelijkverdeling van de waarden mod 1 van de rij f(1),f(2),f(3),...

Zo heeft Ryll-Nardzewski (1951) het volgende bewezen.

Stelling. Zij f(t) een reële en Lebesgue-meetbare functie. f(t) is C-gelijkverdeeld mod 1 als aan een der volgende voorwaarden is voldaan.

(a) de rij $\{f(n+t)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ is gelijkverdeeld voor bijna alle positieve t.

(b) de rij $\{f(nt)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ is gelijkverdeeld voor bijna alle positieve t.

Een argument in omgekeerde richting wordt toegepast bij het bewijs van de volgende stelling (Kuipers, 1953).

Stelling. Is f(t) differentieerbaar, en is

$$f'(t) \log t \to C > 0 \quad (t \to \infty),$$

dan is de rij f(1),f(2),... gelijkverdeeld mod 1.

In vele gevallen kan men op grond van eigenschappen van de eerste differentie $\Delta f(t) \equiv f(t+1)-f(t)$ van een meetbare functie $f(t)$ besluiten tot het al of niet C-gelijkverdeeld mod 1 zijn van $f(t)$. Zo geldt de volgende

Stelling. Zij $f(t)$ een meetbare functie gedefinieerd voor $t \geq 0$. Indien

$$\lim_{t\to\infty} \Delta f(t)=\theta \quad (\theta \text{ irrationaal}),$$

dan is $f(t)$ mod 1 C-gelijkverdeeld.

§11. C-gelijkverdeling modulo m.

Notaties en definities.

E: een meetbare verzameling van niet-negatieve getallen.
$E(T) = E \cap [0,T] \quad (0 \leq T)$.
m: een positief geheel getal ≥ 2.

$$E(T,j,m)=E(T)\cap \bigcup_{k=0}^{\infty} [km+j,km+j+1)(j=0,1,\ldots,m-1).$$

Definitie. We zeggen dat E gelijkverdeeld mod m is, indien

$$\lim_{T\to\infty} \mu E(T,j,m)/\mu E(T)= 1/m \quad (j=0,1,\ldots,m-1).$$

Indien deze laatste betrekking geldt voor iedere $m=2,3,\ldots$, dan heet E gelijkverdeeld.

We herinneren aan het begrip relatieve maat.
Als $\lim_{T\to\infty} \mu E(T)/T$ bestaat, dan heet deze limiet de relatieve maat van de verzameling E. We duiden de relatieve maat van E aan door $\|E\|_R$.
Zij E^* het complement van E t.o.v. $[0,\infty)$. Dan geldt de volgende

Stelling. (a) Indien E uniform verdeeld is, en E^* een positieve relatieve maat bezit, dan is E^* ook uniform verdeeld.

(b) Indien E^* een relatieve maat = 0 bezit, dan is E uniform verdeeld.

(c) Indien E een relatieve maat = 1 bezit, dan is E uniform verdeeld.

Zij $f(t)$ een reële, L-meetbare functie op $[0,\infty)$ gedefinieerd. Zij m een positieve gehele modulus ≥ 2. Beschouw de verzamelingen

$$E(f(t),j,m) = \{t: j \leq f(t) < j+1 \pmod m\} \quad (j=0,1,\ldots,m-1).$$

<u>Definitie.</u> $f(t)$ heet gelijkverdeeld mod m als

$$\|E(f(t),j,m)\|_R = 1/m \quad (j=0,1,\ldots,m-1).$$

Indien deze laatste betrekkingen gelden voor iedere $m \geq 2$, dan heet $f(t)$ gelijkverdeeld.

Bestaat er veband tussen het gelijkverdeeld mod 1 zijn en het gelijkverdeeld mod m (eventueel gelijkverdeeld) zijn? De volgende twee stellingen geven een antwoord op deze vraag.

<u>Stelling.</u> Is $f(t)/m$ gelijkverdeeld mod 1, dan is $f(t)$ gelijkverdeeld modulo m.

<u>Stelling.</u> Is voor iedere m de functie $mf(t)$ gelijkverdeeld mod m, dan is $f(t)$ gelijkverdeeld mod 1.

Verder geldt:

<u>Stelling.</u> $\log t$ is niet gelijkverdeeld mod m.

<u>Stelling.</u> Gegeven is dat $f(t)$ uniform verdeeld is. Zij verder $w(u)$ een op $[0,1]$ gedefinieerde R-integreerbare functie. Dan is

$$\text{(a)} \quad \lim_{m\to\infty} \lim_{T\to\infty}{}^{*} \frac{1}{T} \int_0^T w(f(t) \pmod m/m)\,dt = \int_0^1 w(u)\,du$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T w([f(t)] \pmod m/m)\,dt = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{w(j/m)}{m}$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i [f(t)]/m}\,dt = 0.$$

Geldt omgekeerd (b) voor elke R-integreerbare functie $w(u)$, dan is $f(t)$ gelijkverdeeld mod m.

Geldt omgekeerd (c), dan kan men hieruit tot de gelijkverdeling van $f(t)$ besluiten alleen in de gevallen $m=2$ en $m=3$.

§12. Gelijkverdeling t.o.v. een vaste rij.

Een generalizatie van het begrip gelijkverdeling mod 1 in de zin als bedoeld door het opschrift is de volgende.

Zij $z_1, z_2, \ldots$ een vaste rij van positieve getallen met

$$0 < z_1 < z_2 < \ldots \qquad z_n \to \infty (n \to \infty),$$

in het vervolg aangeduid door Δ.

Is t een positief getal, dan is per definitie de rest van t modulo Δ

$$\{t\}_\Delta = \frac{t - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} \text{ voor } z_{n-1} \leq t < z_n (n=1,2,\ldots)$$

Is $s_1, s_2, \ldots$ een rij van positieve getallen, is α een positief getal met $0 \leq \alpha \leq 1$, is $A(N)$ het aantal van de resten mod Δ van de getallen $s_1, s_2, \ldots, s_N$ gelegen op het interval $[0, \alpha)$, en geldt voor iedere de betrekking

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(N)}{N} = \alpha,$$

dan heet de rij $s_1, s_2, \ldots$ gelijkverdeeld mod Δ.

Genoemde generalizatie is afkomstig van W.J. LeVeque (zie zijn: On uniform distribution modulo a subdivision, Pac. J. Math. 3(1953), 757-771).

We noemen de volgende

<u>Stelling</u> (H. Davenport en W.J. LeVeque): Gegeven is dat $z_n - z_{n-1} \downarrow$ (als $n \to \infty$) en dat $z_n \to \infty$. Voorts is gegeven dat de termen van de rij $a_1, a_2, \ldots (a_k > 0)$ voldoen aan de voorwaarde

$$a_{k+1} - a_k \geq \frac{c a_k}{k} \quad (c > 0)$$

Dan is de rij $s_k = a_k x$ gelijkverdeeld mod Δ voor bijna alle $x > 0$. I.h.b. geldt dit voor $s_k = kx$ of, algemener, voor $s_k = k^\gamma x (\gamma > 0)$. (Zie: Uniform distribution relative to a fixed sequence, Mich. Math. J, 10(1963), p. 315-319).

De auteurs bewijzen deze stelling door gebruik te maken van de volgende

Stelling (H. Davenport, P. Erdös en W.J. LeVeque):
Als de reeks

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \int_a^b \left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m s_n(x)}\right|^2 dx$$

convergeert voor $m=1,2,\ldots$, dan is de rij $s_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ gelijkverdeeld mod 1 voor bijna alle x in $[a,b]$. (Zie: On Weyl's criterion for uniform distribution, Mich. Math. J., 10(1963), p. 311-314).

§13. De individuele Ergodenstelling in de theorie van de gelijkverdeling

Zij (X,μ) een willekeurige maatruimte en T een afbeelding van X in zichzelf.

T heet meetbaar als voor iedere meetbare verzameling E geldt dat $T^{-1}(E)$ meetbaar is.

Een meetbare transformatie T heet maatvast als $\mu(E) = \mu\{T^{-1}(E)\}$ voor iedere meetbare verzameling E.

Het is duidelijk dat als T een meetbare transformatie is en f(x) een meetbare functie gedefinieerd op X, dan is ook $f(Tx) = g(x)$ meetbaar.

Als T maatvast is en f integreerbaar ($f \in L(X,\mu)$), dan geldt $\int f(x)d\mu = \int f(Tx)d\mu$.

Immers als χ_E de karakteristieke functie is van een meetbare verzameling E met $\mu(E) < \infty$, dan is $\chi_E(Tx) = \chi_{T^{-1}(E)}(x)$ en $\int \chi_E(Tx)d\mu = \int \chi_E(x)d\mu = \mu(E)$.

Daar iedere niet-negatieve integreerbare functie f de limiet is van een stijgende rij $\{f_n\}$ van niet-negatieve trap functies en daar $\{f_n(Tx)\}$ ook een stijgende rij functies is, geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)d\mu = \int f(x)d\mu \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n(Tx)d\mu = \int f(Tx)d\mu$$

en dus $\int f(x)d\mu = \int f(Tx)d\mu$.

Het algemene geval volgt nu uit het feit dat iedere functie te schrijven is als verschil van twee niet-negatieve functies.

Individuele ergoden stelling. (Birkhoff) zie Halmos [2]

Als T een maatvaste afbeelding is van X in zichzelf en $f \in L(X,\mu)$, dan convergeert de rij

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \text{ voor bijna alle } x \in X.$$

De limietfunctie $f^*(x)$ is integreerbaar en invariant (d.w.z. $f^*(Tx) = f^*(x)$ voor bijna alle x).

Als bovendien $\mu(X) < \infty$, dan is $\int_X f^*(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu$.

Zij nu T een maatvaste afbeelding en E een meetbare verzameling van X. E heet invariant als $T^{-1}(E)$ en E bijna gelijk zijn, d.w.z. als $\chi_E(x) = \chi_{T^{-1}(E)}(x)$ voor bijna alle x.

Daar $\chi_{T^{-1}(E)}(x) = \chi_E(Tx)$ is E dus invariant als zijn karakteristieke functie invariant is.

Een maatvaste afbeelding met de eigenschap dat voor iedere invariante meetbare verzameling E geldt:

$\mu(E) = 0$ of $\mu(X-E) = 0$ heet <u>ergodisch</u>.

<u>Stelling 1</u>

De maatvaste transformatie T is dan en slechts dan ergodisch als iedere meetbare invariante functie bijna overal gelijk is aan een constante.

<u>Bewijs</u>

Als er geen niet constante invariante functies zijn, dan is iedere meetbare invariante karakteristieke functie of bijna overal gelijk aan de karakteristieke functie van de lege verzameling of bijna overal gelijk aan de karakteristieke functie van X.

T is dan dus ergodisch.

Als omgekeerd T ergodisch is en f invariant, dan mogen we aannemen dat f reeël is.

Uit de invariantie van f volgt de invariantie van de verzameling

$X(k,n) = \{ x \mid k/2^n \leq f(x) < k/2^{n+1} \}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$ $n = 1, 2, \ldots\ldots$

Hieruit volgt dat $\mu(X(k,n)) = 0$ of $\mu\{X - X(k,n)\} = 0$.

Voor iedere n is er dus precies één verzameling $X(k_n, n)$ met $\mu\{X - X(k_n, n)\} = 0$.

Daar f constant is op $\bigcap_n X(k_n, n)$ en $\mu\{X - \bigcap_n X(k_n, n)\} = 0$ is f bijna overal constant.

<u>Stelling 2</u>

Zij T een ergodische maatvaste transformatie van X in zichzelf en $f \in L(X, \mu)$.

Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = f^*(x)$ bijna overal gelijk aan een constante en als

$$\mu(X) < \infty,$$

dan is

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int f(x)\, d\mu .$$

Bewijs

Daar T maatvast is volgt uit de individuele ergoden stelling dat $f^*(x)$ integreerbaar is en invariant.

$f^*(x)$ is dus bijna overal gelijk aan een constante.

Als $\mu(X) < \infty$ dan volgt uit $\int f^*(x) d\mu = \int f(x) d\mu$, dat $f^*(x) =$
$= \frac{1}{\mu(X)} \int f(x) d\mu$.

Voorbeeld

Zij X een compacte Hausdorff-ruimte die voldoet aan het tweede aftelbaarheids axioma en μ een genormeerde Borelmaat op X.

Zij $X_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ met $X_i = X$ het product van aftelbaar veel exemplaren van X met de product topologie.

X_∞ is dus de verzameling van alle rijen $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$ met $x_i \in X$.

Zij $\mathfrak{A}$ de verzameling van alle deelverzamelingen A van X_∞ met $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ met A_i een Borel verzameling van X_i en $A_i = X_i$ voor bijna alle i.

In X_∞ kunnen wij een genormeerde Borel maat μ_∞ invoeren door te definieren.

$$\mu_\infty(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \text{ voor } A \in \mathfrak{A}.$$

(Het product $\mu_\infty(A)$ is slechts formeel oneindig, daar $\mu(A_i) = \mu(X_i) = 1$ als $i \geq i_o$ voor zekere i_o).

Zie Halmos [3].

Zij nu T de transformatie van X_∞ op X_∞ gedefinieerd door $T(x_1, x_2, \ldots) =$
$= (x_2, x_3, \ldots)$.

Dan is T ergodisch.

Het is duidelijk dat T maatvast is, daar $T^{-1}(A) = X \times A_1 \times \ldots \times A_n \times X \ldots$ als $A = A_1 \times A_2 \times \ldots A_n \times X \times \ldots$

Zij nu E een meetbare invariante verzameling.

Dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een verzameling $A \in \mathfrak{A}$ met $\mu_\infty(E \Delta A) < \varepsilon$.

Stel $A = A_1 \times \ldots \times A_n \times X \times \ldots$

Dan is $T^{-n}(A) = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} A_1 \times \ldots \times A_n \times X \ldots$ en

$T^{-n}(A) \cap A = A_1 \times \ldots \times A_n \times A_1 \times \ldots \times A_n \times X \ldots$

Dus $\mu_\infty(A \cap T^{-n}(A)) = \mu_\infty(A) \cdot \mu_\infty(A)$.

Verder geldt:

$$\mu_\infty(E \Delta A) = \mu_\infty(T^{-n}\{E \Delta A\}) = \mu_\infty(T^{-n}(E) \Delta T^{-n}(A)) =$$
$$\mu_\infty(E \Delta T^{-n}(A)) < \varepsilon.$$

Dus $\mu_\infty(E \,\Delta\, \{ A \cap T^{-n}(A)\}) \leq \mu_\infty(E \,\Delta\, A \cup E \,\Delta\, T^{-n}(A)) \leq 2\,\varepsilon$.

Hieruit volgt dat $| \mu_\infty(A) - \mu_\infty(E)| < \varepsilon$ en $| \mu_\infty^2(A) - \mu_\infty(E)| < \varepsilon$.

Dus $\mu_\infty(E) = \mu_\infty^2(E) \Rightarrow \mu_\infty(E) = 0$ of $\mu_\infty(E) = 1$.

Stelling 3 (Hlawka [4])

Zij X een compact groep die voldoet aan het tweede aftelbaarheids-axioma en μ de Haar-maat op X.

Dan is (in de zin van de product maat μ_∞) bijna iedere rij $\xi = (x_n)$ gelijk verdeeld in X.

Bewijs

Als $\xi = (x_n)$ een rij is in X geven we de "verschoven" rij $(x_{h+n})_{n=1,2}$ aan met ξ^h.

Uit het bovenstaande voorbeeld volgt dat de transformatie T met $T(\xi) = \xi^1$ ergodisch is, en uit de individuele ergodenstelling volgt dat voor iedere $F \in C(X_\infty)$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} F(\xi^r) = \int F(\xi)\, d\,\mu_\infty \text{ voor bijna alle } \xi .$$

Zij nu $\{ D^k = (d_{ij}^k)\ k = 0,1,2,\ldots;\ i,j = 1,2,\ldots n_k\}$ een volledig stelsel inequivalente irreducibele unitaire representaties van X. en stel

$F_{ij}^k(x_1,x_2,\ldots) = d_{ij}^k(x_1)$. Dan is $F_{ij}^k \in C(X_\infty)$ en

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} d_{ij}^k(x_{r+1}) = \int_{X_\infty} F_{ij}^k(\xi)d\mu_\infty = \int_X d_{ij}^k(x)d\mu \text{ voor bijna}$$

alle ξ. (zie B. Jessen [5]).

Zij nu $\tilde{X}_\infty$ de verzameling van alle ξ waarvoor (*) geldt voor alle d_{ij}^k.

Daar het stelsel $\{d_{ij}^k\}$ aftelbaar is, geldt $\mu_\infty(\tilde{X}_\infty) = 1$.

Uit §4 stelling 1 volgt dan dat voor alle ξ uit $\tilde{X}_\infty$ ξ gelijkverdeeld is.

Zij nu X een compacte Hausdorff ruimte met aftelbare basis en M(X) de verzameling van alle begrensde genormeerde positieve lineaire functionalen op C(X).

In M(X) voeren we de zwakke topologie in .

Uit de stelling van Riesz volgt dat wij M(X) mogen identificeren met de verzameling van alle genormeerde reguliere Borel maten op X en wij schrijven $\mu(f) = \int f(x)\, d\,\mu$.

Zij nu T een continue afbeelding van X in zichzelf, en stel $I_T =$
$= \{ \mu \mid \mu \in M(X)$ en $\mu(f(x)) = \mu\,(f(T(x))$ voor alle $f \in L(X,\mu)\}$.

I_T is dus de verzameling van alle maten μ , zodanig dat T maatvast is met betrekking tot μ.

Stel $E_T = \{\mu \mid \mu \in I_T$, T ergodisch met betrekking tot $\mu \}$.

Zij nu μ en ν twee maten uit M(x).

Als $\nu(f) = 0$ indien $\mu(f) = 0$ voor een willekeurige niet-negatieve functie f, dan heet ν <u>absoluut continu</u> ten opzichte van μ. <u>Notatie</u>: $\nu \ll \mu$.

ν is dus absoluut continu ten opzichte van μ als $\nu(E) = 0$ voor alle meetbare E met $\mu(E) = 0$.

<u>Stelling 4</u> (A.G. Postnikow, I. Pjatezkij [7]).

Als $\nu \in I_T$ en $\mu \in E_T$ met $\nu \ll \mu$, dan is $\nu = \mu$.

<u>Bewijs</u>

Uit de ergoden stelling volgt dat als $f \in L(X,\mu)$

$$(x)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \mu(f) \text{ voor bijna alle } x \in X .$$

Zij nu A de verzameling van alle x waarvoor (*) niet geldt; dan is $\mu(A) = 0$ en dus $\nu(A) = 0$.

Daar $\nu \in I_T$ geldt $\nu(f(x) = \nu\{f(T(x))\} = \nu\{f(T^2x)\} = \dots\dots$

Zij nu $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f(T^r x)$., dan is $\nu(f) = \nu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n)$.

Daar $\|F_n\| \leqslant \|f\|$ voor iedere $f \in C(X)$ volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \nu(F_n) = \nu(\lim_{n\to\infty} F_n).$$

Dus $\nu(f) = \nu(\lim_{n\to\infty} F_n) = \nu(\mu(f)) = \mu(f)$.

<u>Stelling 5</u>. (J. Cigler [1])

1) I_T is convex en gesloten.

2) E_T is de verzameling van de extermaal punten van I_T.

3) I_T is het convexe omhulsel van E_T.

<u>Bewijs</u>

1) Stel dat $\mu(f(x)) = \mu(f(Tx))$ en $\nu(f(x)) = \nu(f(Tx))$.

Dan is $\lambda_1\mu + \lambda_2\nu\,(f(x)) = \lambda_1\mu(f(x)) + \lambda_2\nu(f(x)) = \lambda_1\mu + \lambda_2\nu\,(f(Tx))$.

en dus is I_T convex.

Zij nu μ een verdichtingspunt van I_T en stel $f \in C(X)$.

Stel $U(f(x), f(Tx), \varepsilon) = \{\nu \mid \nu \in M(x)\ |\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon$ en $|\mu(f(Tx)) - \nu(f(Tx))| < \varepsilon\}$.

Dan is U een omgeving van μ en er is dus een $\mu_0 \in I_T \cap U$.
Hieruit volgt

$$|\mu(f(x)) - \mu(f(Tx))| \leq |\mu(f) - \mu_0(f)| + |\mu_0(f(Tx)) - \mu(f(Tx))|$$
$$\leq 2\varepsilon \ .$$

Dus $\mu(f(x)) = \mu(f(Tx))$ en $\mu \in I$.

2) Onder een extremaalpunt μ van I_T verstaan we een maat μ die niet te schrijven is als $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ met $\mu_1, \mu_2 \in I_T, \mu_1 \neq \mu_2$ en $0 < \lambda_i < 1$.

Stel nu $\mu \in E_T$ en stel dat

$\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$, $0 < \lambda_i < 1$ $\mu_i \in I_T$ $\mu_1 \neq \mu_2$.

Zij nu f een niet-negatieve functie met $\mu(f) = 0$.
Dan is $\lambda_1\mu_1(f) + \lambda_2\mu_2(f) = 0$ en dus $\mu_1(f) = 0$ en $\mu_2(f) = 0$.
Daar $\mu_1 << \mu$ en $\mu_2 << \mu$ volgt uit stelling 4 dat $\mu = \mu_1 = \mu_2$. een tegenspraak.

Stel nu omgekeerd dat μ een extremaalpunt is en stel dat $\mu \notin E_T$.
Dan is T niet ergodisch en zijn er dus twee deelverzamelingen E_1 en E_2 van X met $E_1 \cup E_2 = X$.
E_1 en E_2 invariant, $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ en $0 < \mu(E_1)$ $0 < \mu(E_2)$.

Stel nu $\mu_1(E) = \frac{1}{\mu(E_1)} \cdot \mu(E_1 \cap E)$

en $\mu_2(E) = \frac{1}{\mu(E_2)} \mu(E_2 \cap E)$.

Dan is

$$\mu = \mu(E_1) \cdot \mu_1 + \mu(E_2)\mu_2,$$ terwijl $\mu_1, \mu_2 \in I_T$. een tegenspraak.

3) Daar M(x) compact is in de zwakke topologie en I_T gesloten, is I_T dus ook compact.

Uit de stelling van Krein-Milman [6] volgt dan dat E_T niet leeg is en dat I_T het convexe omhulsel is van zijn extremaal punten.

<u>Stelling 6</u> (Cigler [1]).

De maat $\mu \in I_T$ is dan en slechts dan ergodisch als er geen maat $\nu \in I_T$ bestaat met $\nu << \mu$.

<u>Bewijs</u>

Stel dat $\mu \in I_T$ niet ergodisch is, dan is $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ met $\mu_1, \mu_2 \in I_T$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $0 < \lambda_i < 1$.

Dan is echter iedere ν met $\nu = \lambda_1^*\mu_1 + \lambda_2^*\mu_2$ absoluut continu t.o.v. μ.

Omgekeerd volgt uit stelling 4 dat als μ ergodisch is en $\nu << \mu$ dan $\nu = \mu$.

Zij nu $V_T = \left\{ \mu \,\middle|\, \mu \in M(x);\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{r=0}^{n-1} f(T^r(x)) = \mu(f)$ voor alle $f \in C(X)$. en voor een $x \in X \right\}$.

V_T is dus de verzameling van alle maten μ zó dat er een x uit X is met $\{T^n x\}$ gelijkverdeeld t.o.v. μ.

Stelling 7

Als V_T convex en gesloten is, dan is $V_T = I_T$.

Bewijs

Stel $\mu \in V_T$, dan is $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{r=0}^{n-1} f(T^r(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{r=0}^{n-1} f(T(T^r x)) =$

$= \mu(f(Tx))$

en dus $V_T \subset I_T$.

Als $\mu \in E_T$, dan volgt uit de individuele ergoden stelling dat $\mu \in V_T$ en dus $E_T \subset V_T$.

Daar V_T convex en gesloten is, geldt dus $I_T \subset V_T$.

Stelling 8

Zij F een verzameling van niet-negatieve functies zó dat iedere continue functie op X te benaderen is door lineaire combinaties van functies met F.

Stel nu dat $\mu \in E_T$ en dat voor alle $f \in F$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f(T^r(x)) \leq c\,\mu(f)$$ voor een vaste $x \in X$, een constante $c \geq 1$.

Dan is de rij $\{T^n x\}$ gelijkverdeeld t.o.v. μ.

Bewijs

Stel $p_n(f) = \frac{1}{n} \sum\limits_{r=0}^{n-1} f(T^r x)$. Dan geldt $p_n \in M(X)$ en daar $M(x)$ compact is is er een $\nu \in M(x)$ en een deelrij p_{n_k} met $\lim p_{n_k}(f) = \nu(f)$ voor alle $f \in C(X)$.

Verder geldt $\left| p_n(f) - p_n(f(Tx)) \right| \leq \frac{2\|f\|}{n}$.

En dus $\nu(f) = \nu(f(Tx))$, $\nu \in I_T$.

Daar $\nu(f) \leq c\,\mu(f)$ voor $f \in F$ is $\nu \ll \mu$ en daar μ ergodisch is $\nu = \mu$.

Hieruit volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(f)$ bestaat en gelijk is aan $\mu(f)$ voor alle $f \in F$.

Daar iedere continue functie g te benaderen is door lineaire combinaties van functies uit F geldt ook $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(g) = \mu(g)$.

Zij nu X_k de k-dimensionale torusgroep en A een $k \times k$ matrix met gehele elementen en $|\det A| > 1$.
Stel dat er een natuurlijk getal l is met $\| A^{-l} \| < 1$.
Hierbij verstaan we onder de norm $\|A\|$ van een matrix A de Hilbert norm $\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$.
Er geldt dan:

<u>Stelling 9</u> [Cigler [1]]. Stel $\mu \in M(X_k)$.
Een nodige en voldoende voorwaarde opdat er een $x \in X_k$ is met $\{A^n x\}$ (mod 1) gelijkverdeeld t.o.v. μ is

$$\int_{X_k} f(x)d\mu = \int_{X_k} f(Ax)d\mu \quad \text{voor iedere } f \in C(X_k).$$

<u>Bewijs:</u>
Uit stelling 7 volgt dat het voldoende is te bewijzen dat V_A convex en gesloten is.
Stel $|\det A| = d$ en $I_k = \{(x): 0 \leq x_i < 1 \; i=1,\ldots,k\}$ de k-dim eenheidscel. Het volume van $A^{-1}(I_k)$ is dan gelijk aan $\frac{1}{d}$ en $A^{-1}(I_k)$ bestaat geheel uit mod 1 niet congruente punten.
Dit geldt natuurlijk ook voor iedere cel $A^{-1}(I_k+a)$ waarbij a een willekeurig rooster punt is.
Verder is gemakkelijk in te zien dat er precies d mod 1 niet equivalente cellen van de vorm $A^{-1}(I_k+a)$ zijn. We kiezen d van dergelijke cellen en beschouwen hun beelden mod 1 die geheel in I_k liggen; $B_1, B_2, \ldots, B_d$. Zij nu T_i de afbeelding die I_k op B_i afbeeldt en definieer:

$$B_{i_1} B_{i_2} = T_{i_1}(B_{i_2}), \; B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_n} = T_{i_1}(B_{i_2} \ldots B_{i_n}).$$

Dan is dus $A(B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_m}) = (B_{i_2} \ldots B_{i_n})$ mod 1.
Ligt een punt $x \in I_k$ in de verzamelingen $B_{i_1}, B_{i_1} B_{i_2}, B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3}$, dan kunnen we x voorstellen door $i_1, i_2, i_3, \ldots$.
Verschillende punten hebben dan verschillende voorstellingen.
Immers uit $\|A^{-l}\| < 1$ volgt $|A^{-ln}x| \leq \|A^{-l}\|^n |x|$ en dus $|A^{-n}x| \to 0$.
Verder geldt $Ax = A(i_1, i_2, i_3 \ldots) = (i_2, i_3, \ldots)$.

Zij nu $f \in C(X_k)$ en stel $\varepsilon_1 = \sup\limits_{\substack{x,y \in B_i \\ i=1,..d}} |f(x)-f(y)|$, $\varepsilon_n = \sup\limits_{\substack{x,y \in B_{i_1}..B_{i_n} \\ 0 \le i_j \le d}} |f(x)-f(y)|$

Daar f continu is en $|A^{-n}x| \to 0$ geldt $\varepsilon_n \to 0$.

Stel nu ν_1 en $\nu_2 \in V_A$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} (f(x)+f(Ax)+..f(A^n x) = \nu_1(f)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} (f(y)+f(Ay)+..f(A^n y) = \nu_2(f).$$

$x= x_1,x_2,...$

$y= y_1,y_2,...$

Stel $z= x_1,y_1,y_2,x_2,x_3,x_4,y_3,y_4,y_5,y_6,x_5...$.

Dan geldt $|\frac{1}{N+1} \sum\limits_{i=0}^{N} f(A^i z)- \frac{\nu_1+\nu_2}{2} (f)|= \frac{1}{N+1}| \sum\limits_{i=0}^{N} \frac{\nu_1+\nu_2}{2} (f(A^i z)-f)| \le$

$$\frac{1}{N+1} | \sum_{i=0}^{N^{xx}} \frac{\nu_1+\nu_2}{2} (f(A^i z)-f)|+ \frac{1}{N+1} | \sum_{i=N^{xx}+1}^{N} \frac{\nu_1+\nu_2}{2} (f(A^i z)-f)| \le$$

$$\frac{N^{xx}}{N+1}|\frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}} f(A^i z)- \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i x)- \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i y)| +$$

$$+ \frac{N^{xx}}{N+1} |\frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i x)- \tfrac{1}{2} \nu_1(f)|+ \frac{N^{xx}}{N+1} | \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i y)- \tfrac{1}{2}\nu_2(f)| +$$

$$+ \frac{2(N-N^{xx})}{N+1} \|f\| ,$$

$$N^{x} = \frac{n}{2}(n+1) \le N \le \frac{n+1}{2}(n+2)$$

waarbij $N^{xx} = \frac{n^2}{2}$ als n even

$$N^{xx} = \frac{n^2-1}{2} \text{ als n oneven.}$$

Kies nu N_0 zo dat als $N > N_0$

$\frac{2(N-N^{xx})}{N+1}\,||f|| < \varepsilon/3$, $\left| \frac{2}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i y) - \nu_2(f) \right| < \varepsilon/3$ en

$$\left| \frac{2}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i x) - \nu_1(f) \right| < \varepsilon/3 \,.$$

Verder geldt $\frac{N^{xx}}{N+1} \left| \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}} f(A^i z) - \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i x) - \frac{1}{N^{xx}} \sum_{i=0}^{N^{xx}/2} f(A^i y \right| \leq$

$$\frac{N^{xx}}{N+1} \frac{1}{N^{xx}} (n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_{n-1}) \leq \frac{1}{N+1} (nj\varepsilon_1 + \frac{(n-j)^2}{2} \varepsilon_j).$$

We kiezen nu N_0' zo dat voor $N \leq N_0'$ geldt

$$\frac{1}{N+1}(nj\varepsilon_1 + \frac{(n-j)^2}{2} \varepsilon_j) \leq \varepsilon/3.$$

Voor $N > \sup (N_0, N_0')$ geldt dan $\left| \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} f(A^i z) - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} (f) \right| < \varepsilon.$

Dus $\frac{\nu_1+\nu_2}{2} \in V_A.$

We bewijzen nu dat V_A gesloten is.

Stel $x^k = (x_1^k, x_2^k \ldots)$ met $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(A^i x^k) = \nu^k(f)$ en stel $\lim_{k\to\infty} \nu^k = \nu.$

Stel $x^{n,k} = (x_1^k, \ldots x_n^k, x_1^k, \ldots x_n^k, x_1^k \ldots \ )$ en stel $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(A^i x^{n,k}) = \nu_n^k.$

Dan geldt $\lim_{n\to\infty} \nu_n^k = \nu^k$ en voor iedere deelrij n_k met $n_k \to \infty$ als $k \to \infty$ geldt $\lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}^k = \nu.$

Stel nu $\phi(i)$ een functie zó dat als

$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \phi(i) n_i$ dan $\frac{S_{k-1}}{S_k} \to 0$ en $\frac{n_k}{S_k} \to 0.$

Stel nu $z = (\underbrace{x_1^1, \ldots x_{n_1}^1,\ x_1^1 \ldots x_{n_1}^1, \ldots}_{\phi(1)}, \underbrace{x_1^2 \ldots x_{n_2}^2, x_1^2, \ldots x_{n_2}^2, \ldots}_{\phi(2)} \ldots).$

Dan geldt

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} f(A^i z) = \nu(f)$. Immers stel $N=S_k+an_k+\theta n_k$ $0<a<\phi(k)$, geheel $0\leq\theta\leq 1$.

Dan is $\frac{1}{N+1} \sum\limits_{i=0}^{N} f(A^i z) = \frac{1}{N+1} \sum\limits_{i=0}^{S_{k-1}} + \frac{1}{N+1} \sum\limits_{i=S_{k-1}+1}^{S_k} + \frac{1}{N+1} \sum\limits_{i=S_k+1}^{S_k+an_k} +$

$$\frac{1}{N+1} \sum_{i=S_k+an_k+1}^{N} = 0\left(\frac{S_k-1}{N+1}\right) + \frac{\phi(k-1)n_{k-1}}{N+1}\left[\nu_{n_{k-1}}^{k-1}(f)+o(1)\right] +$$

$$+ \frac{an_k}{N+1}\left[\nu_{n_k}^{k}(f)+o(1)\right] + 0\left(\frac{n_k}{N+1}\right)$$

en dus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} f(A^i z) = 0 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(k-1)n_{k-1}+an_k}{N+1} \nu(f) + 0 = \nu(f)$.

Uit het feit dat V_A gesloten is, en dat met ν_1 en ν_2 V_A ook $\frac{\nu_1+\nu_2}{2} \in V_A$ volgt dat V_A convex is g.e.d.

Opmerking Deze stelling werd voor k=1 bewezen door Schapiro-Pjatezkij [8].

[1] J. Cigler : Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. J. reine angew. Math 205 1960.

[2] P.R. Halmos: Lectures on ergodic theory: Tokio 1956.

[3] P.R. Halmos: Measure theory: New York 1956.

[4] E. Hlawka: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen Rend. Circ. mat. Palermo 4 1955.

[5] B. Jessen: The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions: Acla Math. 63 1934.

[6] M. Naimark: Normed rings Moscow 1959.

[7] A.G. Postnikow, I Pjatezkij: Markow normale rijen en normale kettingbreuken, Iswest. Akad. Nauk. 21 1957.

[8] I. Schapiro - Pjatezkij: Über die Verteilungsfunktionen der Bruchteile der Exponential funktion, Iswest. Akad. Nauk 15 1951.

§14 De hoofdstelling van v.d. Corput

In deze paragraaf wordt de volgende stelling van v.d. Corput [4] bewezen:

Stelling 1 (Hoofdstelling):
Zij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen. Is voor ieder vast natuurlijk getal h de rij $x_h(n)=x(n+h)-x(n)$ $n=1,2,\ldots$ gelijkverdeeld mod. 1 dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ zelf ook gelijkverdeeld mod. 1.

Het bewijs zoals v.d. Corput [4] het gegeven heeft berust op de volgende fundamentele ongelijkheid.

Lemma 1:
Zij $u(n)$ $n=1,2,\ldots,N$ een rij complexe getallen met geconjugeerde $\overline{u}(n)$. Dan geldt voor ieder natuurlijk getal $q \leq N$:

$$\frac{q^2}{N+q-1}\left|\sum_{n=1}^{N} u(n)\right|^2 \leq q\sum_{n=1}^{N}|u(n)|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{n=1}^{N-h}u(n)\overline{u}(n+h)$$

waarin Re a het reële deel van a voorstelt.

Opmerking: Voor q=1 heeft de ongelijkheid de vorm:

$$(1)\qquad \left|\sum_{n=1}^{N} u(n)\right|^2 \leq N\sum_{n=1}^{N}|u(n)|^2 .$$

Dit is een speciaal geval van de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz.

Bewijs lemma 1:
Definieer $u(n)=0$ voor alle gehele getallen n met $n<1$ en $n>N$.
Dan geldt:

$$(2)\qquad q\sum_{n=1}^{N} u(n) = \sum_{k=2}^{N+q}\sum_{l=1}^{q} u(k-l).$$

Hieruit volgt met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz in de vorm (1):

$$q^2\left|\sum_{n=1}^{N} u(n)\right|^2=\left|\sum_{k=2}^{N+q}\left(\sum_{l=1}^{q} u(k-l)\right)\right|^2 \leq (N+q-1)\sum_{k=2}^{N+q}\left|\sum_{l=1}^{q} u(k-l)\right|^2.$$

Ofwel:

$$\frac{q^2}{N+q-1}\left|\sum_{n=1}^{N} u(n)\right|^2 \leq \sum_{k=2}^{N+q}\sum_{l=1}^{q} u(k-l)\sum_{j=1}^{q}\overline{u}(k-j)=$$

(3)

$$=\sum_{k=2}^{N+q}\sum_{l=1}^{q}\left|u(k-l)\right|^2+2\mathrm{Re}\sum_{k=2}^{N+q}\sum_{l=1}^{q}\sum_{\substack{j=1\\ j<l}}^{q} u(k-l)\overline{u}(k-j)=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2.$$

Vergelijking met (2) leert dat $\sum_1$ gelijk is aan $q\sum_{n=1}^{N}|u(n)|^2$.

$\sum_2$ bevat termen van de gedaante $u(n)\overline{u}(n+h)$ met $n=1,2,\ldots,N$, $h=(L-j)=1,2,\ldots,q-1$.

Kies vaste $n\in[1,N]$ en $h\in[1,q-1]$.

Er geldt $j=l-h$ zodat $1\leq j\leq q-h$.

Bij iedere gekozen $j\in[1,q-h]$ is het steeds op precies één manier mogelijk $k\in[2,N+q]$ en $l\in[1,q]$ te bepalen zodanig dat $u(k-l)\overline{u}(k-j)=u(n)\overline{u}(n+h)$, namelijk $l=j+h$ en $k=j+h+n$. Daar $1\leq j\leq q-h$ komt iedere term $u(n)\overline{u}(n+h)$ precies $q-h$ maal voor zodat

$$\sum\nolimits_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)u(n)\overline{u}(n+h).$$

Daar $u(n)=0$ voor $n>N$ kan bij vaste h de sommatie over n beperkt worden tot $1\leq n\leq N-h$.

Substitutie van $\sum_1$ en $\sum_2$ in (3) geeft dan de te bewijzen ongelijkheid.

<u>Bewijs van stelling 1:</u>

Pas de fundamentele ongelijkheid toe met $u(n)=e^{2\pi i l x(n)}$ waarin l een geheel getal $\neq 0$ is.

Dit geeft:

$$\frac{Nq^2}{N+q-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i l x(n)}\right|^2 \leq q+2\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i l(x(n)-x(n+h))}.$$

Daar de rij $(x_h(n))_{n=1}^{\infty}$ voor ieder vast natuurlijk getal h gelijkverdeeld mod. 1 is, geldt voor ieder natuurlijk getal l:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i l(x(n)-x(n+h))} = 0.$$

Zodat:

$$\limsup_{N\to\infty} q^2 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i l x(n)} \right|^2 \leq q.$$

Dit geldt dan voor ieder natuurlijk getal q waaruit volgt dat

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i l x(n)} = 0 \quad \text{voor ieder natuurlijk getal } l.$$

Volgens §1 stelling 2 is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ dan gelijkverdeeld mod.1.

Gevolg 1:

Is $x(t)$ een polynoom met reële coefficienten, waarvan de kopterm een irrationale coefficient heeft, dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1.

Voor een polynoom van de eerste graad is dit reeds bewezen. Door herhaalde toepassing van stelling 1 volgt het gestelde voor polynomen van hogere graad.

Gevolg 2:

Is k een natuurlijk getal, θ een irrationaal getal en $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} \Delta^k x(n) = \theta$ dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1.

Voor k=1 is het reeds bewezen (pag. 28).

Met inductie en stelling 1 volgt het voor willekeurige $k > 1$. Immers definieer voor een vast natuurlijk getal h de rij $(x_h(n))_{n=1}^{\infty}$ door

$$x_h(n) = x(n+h) - x(n) = \sum_{l=0}^{h-1} \Delta x(n+l) \quad n = 1, 2, \dots .$$

Zodat

$$\Delta^{k-1} x_h(n) = \sum_{l=0}^{h-1} \Delta^k x(n+l) \to h\theta \quad \text{voor } n \to \infty.$$

Is het gestelde reeds bewezen voor k-1 dan volgt dat voor ieder natuurlijk getal h de rij $(x_h(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod.1. is. Volgens stelling 1 is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ dan zelf gelijkverdeeld.

Stelling 1 is eenvoudig te generaliseren tot een stelling over functies die C-gelijkverdeeld mod. 1 zijn (zie §9) (Hlawka [6]).

Stelling 2:

Zij $x(t)$ een Lebesgue meetbare, reële functie gedefinieerd op $[0,\infty)$. Bestaat er een reëel getal σ zodat voor ieder vast natuurlijk getal h de functie $x_h(t)=x(t+h\sigma)-x(t)$ C-gelijkverdeeld is mod. 1 dan is $x(t)$ zelf ook C-gelijkverdeeld mod. 1.

Bewijs:

Het bewijs verloopt geheel analoog aan dat van stelling 1. Men hoeft slechts de sommaties over n te vervangen door integraties over $\sigma^{-1}t$.

Gevolg 3: Ieder polynoom met reële coefficienten van de graad ≥ 1 is C-gelijkverdeeld mod. 1.

Uit het criterium van Weyl voor C-gelijkverdeling mod. 1 (zie pag. 71) volgt direct dat een polynoom van de eerste graad C-gelijkverdeeld mod. 1 is. Door herhaald toepassen van stelling 2 volgt dan het gestelde voor polynomen van willekeurig hoge graad.

Een generalisatie tot rijen in compacte groepen werd gegeven door Hlawka [5].

Stelling 3:

Zij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ een rij punten in een compacte groep G met aftelbare basis. Is voor ieder natuurlijk getal h de rij $x_h(n)=x(n)^{-1}x(n+h)$ $n=1,2,\ldots$ gelijkverdeeld in G dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ zelf ook gelijkverdeeld in G.

Bewijsschets:

(Voor een nauwkeurig bewijs zie Hlawka [5]).

Zijn A en B $(k\times k)$-matrices dan definieren we:

$(A\,|\,B)=$ spoor $(\overline{B}^TA)$ en $|A|^2=(A|A)=$ spoor $(\overline{A}^TA)$ (vgl. pag. 17).

Zijn $U(1), U(2),\ldots,U(N)$ $(k\times k)$-matrices dan geldt voor ieder natuurlijk getal q met $1\leq q\leq N$.

$$\frac{q^2}{N+q-1}\left|\sum_{n=1}^{N}U(n)\right|^2\leq q\sum_{n=1}^{N}|U(n)|^2+2\operatorname{Re}\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{n=1}^{N-h}(U(n)|U(n+h)).$$

Deze ongelijkheid voor matrices komt in de plaats van de fundamentele ongelijkheid van v.d. Corput (lemma 1).
Zij wordt geheel analoog bewezen.
Zij $\{D^{(k)}(x)\colon k=0,1,2,\ldots\}$ het volledig stelsel inequivalente, irreducibele, unitaire representaties van G. Zij $D^{(k)}(x)$ een niet triviale representatie uit dit stelsel, d.w.z. $k\neq 0$. Pas de ongelijkheid toe met $U(n)=D^{(k)}(x(n))$.
Dit geeft:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D^{(k)}(x(n)) = 0 \text{ voor alle } k\neq 0.$$

Volgens §4 stelling 1 is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ dan gelijkverdeeld in G.

Een geheel andere methode is afkomstig van J. Bass [1] .
Deze is als volgt.
Zij $(u(n))_{n=1}^{\infty}$ een begrensde rij complexe getallen.
Dan is de verzameling getallen $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(n)$ $N=1,2,3,\ldots$ begrensd in het complexe vlak en bezit dus minstens een verdichtingspunt m.
Stel verder dat $\gamma(h)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(n+h)\overline{u}(n)$ bestaat voor alle natuurlijke getallen h.
Het bewijs verloopt hierna in de volgende stappen.

a) Met behulp van de stelling van Bochner-Herglotz is af te leiden dat $\gamma(h)$ te schrijven is als

$$\gamma(h) = \int_0^1 e^{2\pi ihx}d\sigma(x)$$

waarin $\sigma(x)$ een monotoon niet dalende functie van begrensde variatie op $[0,1)$ is.

b) $M\gamma(h) = \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\gamma(h)$ bestaat en is gelijk aan de discontinuiteit van $\sigma(x)$ in $x=0$, dus ≥ 0.

c) Voor ieder verdichtingspunt m van getallen $(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(n))_{N=1}^{\infty}$ geldt de ongelijkheid:

(4) $$|m|^2 \leq M\gamma(h)$$

Dit is uitgeschreven:

$$\left|\lim_{N'\to\infty} \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} u(n)\right|^2 \leq \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u(n+h)\overline{u}(n)\right)$$

als de rij (N') een deelrij van de natuurlijke getallen is waarvoor de limiet in het linkerlid bestaat.

d) Zij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen waarvoor voor ieder natuurlijk getal h de rij $x_h(n)=x(n+h)-x(n)$ $n=1,2,\ldots$ gelijkverdeeld mod.1 is.

Definieer $u(n)=e^{2\pi ilx(n)}$ waarin l een natuurlijk getal is. Dan bestaat $\gamma(h)$ voor alle natuurlijke getallen h en er geldt:

$$\gamma(h)=\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi il(x(n+h)-x(n))} \equiv 0.$$

Dan volgt uit de ongelijkheid (4) dat het enige verdichtingspunt van de rij getallen $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ilx(x)}\right)_{n=1}^{\infty}$ het getal nul is.

Zodat:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ilx(n)}=0 \text{ voor ieder natuurlijk getal l.}$$

Op grond van §1 stelling 2 is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ dan gelijkverdeeld mod.1.

Deze methode wordt toegepast door Cigler [2] [3] bij generalisaties van het begrip gelijkverdeling.

§ 15 De polynoomstelling van Weyl

In § 14 gevolg 1 werd aangetoond dat als $x(t)$ een polynoom met reële coefficienten is, waarvan de kopterm een irrationale coefficient heeft, de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1 is.
Algemener geldt:

Stelling 1 (Weyl):
Zij $x(t) = a_p t^p + a_{p-1}t^{p-1} + \dots + a_1 t + a_0$ een polynoom met reële coefficienten waarvan minstens één van de coefficienten $a_p, a_{p-1}, \dots, a_1$ irrationaal is. Dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1.

Bewijs:
Deze stelling werd het eerst bewezen door H. Weyl [12];
wij volgen hier het bewijs van v.d. Corput [4]; dit verloopt met inductie.
a) Stel dat a_1 de enige irrationale coefficient van $x(t)$ is, afgezien van a_0.
Schrijf dan $x(t) = \chi(t) + a_1 t + a_0$. Dan is $\chi(t)$ een polynoom dat uitsluitend rationale coefficienten heeft.
Er bestaat een natuurlijk getal D zodat

$$\chi(Dm+d) = \chi(d) \text{ mod. } 1 \quad \text{voor } m = 1,2,\dots,\ d = 1,2,\dots \ .$$

(Neem voor D bijvoorbeeld het K.G.V. van de noemers van $a_p, a_{p-1}, \dots, a_2$)
Voor een vast natuurlijk getal l geldt:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i l x(n)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i l(\chi(n) + a_1 n + a_0)} =$$

$$\sum_{d=0}^{D-1} e^{2\pi i l(\chi(d) + a_1 d + a_0)} \cdot \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{[N/D]} e^{2\pi i l a_1 Dm} +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{n=D[\frac{N}{D}]+1}^{N} e^{2\pi i l x(n)} .$$

Daar a_1 irrationaal is, is de rij $(a_1Dm)_{m=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1 zodat voor ieder natuurlijk getal l de eerste term in het rechterlid naar nul convergeert als n naar ∞ gaat. De tweede term is in absolute waarde kleiner dan D/N zodat ook deze naar nul convergeert voor $n \to \infty$.
Volgens § 1 stelling 2 is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ dan gelijkverdeeld mod. 1.
b) Stel dat het gestelde reeds bewezen is voor polynomen waarin $x^{\pi-1}$ de term van de hoogste graad met irrationale coefficient is.
$(\pi \geq 2)$
Zij x(t) nu een polynoom waarin x^{π} de hoogste graadsterm met irrationale coefficient is.
Voor ieder vast natuurlijk getal h is

$$x_h(t) = x(t+h) - x(t)$$

een polynoom waarin $x^{\pi-1}$ de hoogste irrationale coefficient heeft.
Dus is voor iedere natuurlijk getal h de rij $(x_h(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1. Volgens § 14 stelling 1 is dan ook de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1.
Uit (a) en (b) volgt het gestelde.

De polynoomstelling van Weyl gaat over gelijkverdeelde puntenrijen in de k-dimensionale ruimte R^k.
Punten in R^k worden genoteerd als: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
E is de eenheidskubus in R^k d.w.z. $E = \{x \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq x_k \leq 1\}$.
<u>Definitie</u>: Zij $x(n) = (x_1(n), \ldots, x_k(n))$ $n = 1,2,\ldots$ een rij punten in E, dan heet deze rij gelijkverdeeld in E als voor iedere continue complexwaardige functie $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k)$ op E geldt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_1(n), \ldots, x_k(n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x(n)) =$$

$$= \int_E f(x)dx = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_k)dx_1 \ldots dx_k.$$

Een rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ in R^k heet gelijkverdeeld mod. 1 in R^k als de rij $(\{x_1(n)\}, \ldots, \{x_k(n)\})_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld in E is.

Opmerking 1: In het bizonder geldt voor een rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ die gelijkverdeeld mod. 1 in R^k is:
Voor ieder "roosterpunt" $(l_1,\ldots,l_k) \neq (0,\ldots,0)$ is

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(l_1x_1(n)+\ldots+l_kx_k(n))} = 0.$$

Omgekeerd geldt:
Lemma 1: Is $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ een rij in R^k zodanig dat voor ieder roosterpunt $(l_1,\ldots,l_k) \neq (0,\ldots,0)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(l_1n_1(n)+\ldots+l_kx_k(n))} = 0$$

dan is de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1 in R^k.

Bewijs:
De verzameling F van functies $\phi_l(x) = e^{2\pi i l_1 x_1}.\ \ldots\ .e^{2\pi i l_k x_k}$ waarin $l = (l_1,\ldots,l_k)$ alle roosterpunten doorloopt is een aftelbare verzameling.
Eindige lineaire combinaties met complexe coefficienten van functies uit F vormen een deelalgebra A van de complexwaardige continue functies op de compacte ruimte E, die met iedere functie ook zijn geconjugeerde bevat. A "scheidt punten", d.w.z. is $x \in E$, $y \in E$ en $x \neq y$ dan is er steeds een $\phi \in A$ met $\phi(x) \neq \phi(y)$. Bovendien bevat A alle constanten.
Volgens de stelling van Stone (zie b.v. Naimark [9], pag. 32)ligt A dan dicht in de verzameling van alle continue complexwaardige functies op E.
De verzameling F voldoet kennelijk aan de voorwaarden van § 3 stelling 1 zodat de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1 in R^k is.

Stel dat de rij $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld mod. 1 is in R^k.
Zij verder $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$ voor $i = 1,2,\ldots,k$ en $A(\alpha,\beta,N)$ het aantal punten $x(n)$ met $1 \leq n \leq N$ waarvoor $\alpha_i \leq x_i(n) \leq \beta_i$ mod. 1 $(i = 1,2,\ldots,k)$ is.

Dan volgt uit § 3 stelling 2:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\alpha,\beta,N)}{N} = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Dit wordt hieronder gebruikt in de volgende vorm:

Lemma 2:

Is de rij $x(n) = (x_1(n),\ldots,x_k(n))$ $n = 1,2,\ldots$ gelijkverdeeld mod. 1 in R^k en $0 \le \alpha_i < \beta_i \le 1$ voor $i = 1,2,\ldots,k$ dan is er een oneindige rij n^1 waarvoor $\alpha_i \le x_i(n^1) \le \beta_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$

Uit opmerking 1 en lemma 1 volgt direct:

Stelling 2: Een rij punten $x(n) = (x_1(n),\ldots,x_k(n))$ $n = 1,2,\ldots$ is dan en slechts dan gelijkverdeeld mod. 1 in R^k als voor ieder roosterpunt $(l_1,l_2,\ldots,l_k) \neq (0,0,\ldots,0)$ de rij $y(n) = l_1x_1(n) + {}$ $+ l_2x_2(n) + \ldots + l_kx_k(n)$ $n = 1,2,\ldots$ gelijkverdeeld mod. 1 op de reële rechte is.

Uit stelling 1 en stelling 2 volgt nu onmiddellijk de polynoomstelling van Weyl [12]:

Stelling 3: Zijn $x_1(t),\ldots,x_k(t)$ polynomen met reële coefficienten zodanig dat voor ieder roosterpunt $(l_1,\ldots,l_k) \neq (0,\ldots,0)$ het polynoom $y(t) = l_1x_1(t) + \ldots + l_kx_k(t)$ minstens één term met irrationale coefficient heeft die niet de constante is, dan is de rij $x(n) =$ $= (x_1(n),\ldots,x_k(n))$ $n = 1,2,\ldots$ gelijkverdeeld mod. 1 in R^k.

Opmerking 2:

Voor C-gelijkverdeling wordt stelling 3 als volgt (vgl. § 14 gevolg 3 en Weyl [12] pag. 325):

Zijn $x_1(t),\ldots,x_k(t)$ polynomen met reële coefficienten zodanig dat voor geen enkel roosterpunt $(l_1,\ldots,l_k) \neq (0,\ldots,0)$ het polynoom $y(t) = l_1x_1(t)+\ldots+l_kx_k(t)$ een constante is, dan is de functie $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$ C-gelijkverdeeld in R^k.

Opmerking 3:

Zijn $x_1(t),\ldots,x_k(t)$ weer polynomen met reële coefficienten.
Stel dat er roosterpunten $l = (l_1,\ldots,l_k) \neq (0,\ldots,0)$ bestaan zodanig dat het polynoom $y(t) = l_1x_1(t)+\ldots+l_kx_k(t)$, afgezien van de constante term, uitsluitend rationale coefficienten heeft en dat er roosterpunten bestaan waarvoor dit niet geldt.
Het blijkt dan dat de punten $(\{x_1(n)\},\ldots,\{x_k(n)\})_{n=1}^{\infty}$ in een eindig aantal lineaire deelruimten van E liggen.
Deze deelruimten zijn onderling evenwijdig. In iedere deelruimte liggen de punten gelijkverdeeld, maar de dichtheden van verschillende deelruimten kunnen verschillend zijn. Voor bewijs en verdere uitwerking: zie Weyl [12] pag. 337-341.

Toepassing van de gelijkverdeling op machtreeksen

I. In het bewijs van de onderstaande stelling wordt de polynoomstelling van Weyl (stelling 3) gebruikt.

Stelling 4: Zij α een reëel getal, k een natuurlijk getal en g(x) een polynoom van de graad $p \geq 1$. Dan stelt de reeks

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g([\alpha n^k])x^n$$

dan en slechts dan een rationale functie van x voor als α een rationaal getal is.

Opmerking 4:

Voor k = 1 werd de stelling bewezen door M. Newman [10].

Bewijsschets stelling 4:

Voor een nauwkeurig bewijs zie H.G. Meijer [7].

a) Is α een rationaal getal dan is de rij αn^k mod. 1 periodiek. Er is dan eenvoudig aan te tonen dat G(x) de som van een aantal rationale functies is, die alle van de vorm zijn:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^i y^m = \left(y\frac{d}{dy}\right)^i \frac{1}{1-y} \quad \text{(i natuurlijk getal)}$$

b) Is α een irrationaal getal stel dan dat $G(x)$ te schrijven is als $B(x)/A(x)$ waarin $A(x)$ en $B(x)$ polynomen zijn respectievelijk van de graad a en b.

Stel $A(x) = 1 - c_1x - \ldots - c_ax^a$

Dan volgt uit $A(x)\,G(x) = B(x)$:

$$g([\alpha n^k]) = \sum_{r=1}^{a} g([\alpha\,(n-r)^k])\,c_r \text{ voor } n \geq a,\ n \geq b.$$

Daar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g([\alpha(n-r)^k])}{g([\alpha n^k])} = 1$$

moet gelden:

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{a} c_r = 1.$$

Zodat:

$$\sum_{r=1}^{a} (g([\alpha(n-r)^k]) - g([\alpha n^k]))\,c_r = 0.$$

Vervolgens wordt $g([\alpha(n-r)^k]) - g([\alpha n^k])$ in een Taylorreeks ontwikkeld:

$g([\alpha(n-r)^k]) - g([\alpha n^k]) = ([\alpha(n-r)^k] - [\alpha n^k])g^1([\alpha n^k])+\ldots$

De zo gevonden gelijkheid wordt door $g^1([\alpha n^k])$ gedeeld.

Zij de k^e differentie van een functie $f(x)$ t.o.v. d gedefinieerd als

$$(2) \quad \Delta^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x+dj).$$

Kies dan een natuurlijk getal $d > a$ en neem de k^e differentie t.o.v. d van de gelijkheid.

Het blijkt dat voor $n \to \infty$ vrijwel alle termen uit de gevonden betrekking naar nul convergeren.

Er blijft alleen over:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^k \sum_{r=1}^{a} ([\alpha(n-r)^k] - [\alpha n^k])\,c_r = 0.$$

Nu is:

(3) $\Delta^k(\alpha(n-r)^k - \alpha n^k) \equiv 0.$

Zodat als $[a] = a - \{a\}$ gezet wordt:

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{a} \Delta^k(\{\alpha\,(n-r)^k\} - \{\alpha n^k\})\, c_r = 0.$

Het doel is de n in (4) langs twee verschillende wegen (n_1) en (n_2) naar ∞ te laten gaan, zó dat voor termen uit de rij (n_1) steeds geldt:

(5) $\Delta^k(\{\alpha(n_1-r)^k\} - \{\alpha n_1{}^k\}) = t_r.$

en voor termen uit de rij (n_2) steeds:

(6) $\Delta^k(\{\alpha(n_2-r)^k\} - \{\alpha n_2{}^k\}) = s_r = t_r - (-1)^k.$

Dan volgt:

$$\sum_{r=1}^{a} t_r c_r = 0 \quad \text{en} \quad \sum_{r=1}^{a} s_r c_r = 0$$

Zodat:

$$\sum_{r=1}^{a} c_r = 0 \text{ in tegenspraak met } (1).$$

Volgens (2) bevat (4) termen van de vorm $\{\alpha(n-r+dj)^k\}$.
Volgens stelling 3 is het stelsel polynomen αn^k, $\alpha n^{k-1}, \ldots, \alpha n$ gelijkverdeeld mod. 1 in R^k.
Dan is op grond van lemma 2 een oneindige rij (n_1) te vinden waarvoor steeds $\{\alpha n_1{}^{k-1}\}, \ldots, \{\alpha n_1\}$ zo klein zijn dat

$\{\alpha(n_1-r+dj)^k\} = \{\alpha n_1{}^k + \gamma_{k-1}\,\alpha n_1^{k-1} + \ldots + \gamma_1 \alpha n + \gamma_0 \alpha\} =$
$= \{\alpha n_1{}^k\} + \gamma_{k-1}\{\alpha n_1{}^{k-1}\} + \ldots + \gamma_1\{\alpha\, n_1\} + \{\gamma_0 \alpha\}.$

Het is zelfs mogelijk de rij (n_1) zo te kiezen dat dit geldt voor alle j en r die bij uitschrijven van (4) voorkomen.
Vergelijking met (3) leert dat voor deze rij (n_1) bij uitwerking alle termen met n_1 wegvallen.
Zodat voldaan is aan (5).
Voor de rij (n_2) kiezen we een rij waarvoor $\{\alpha\, n_2^{k-1}\},\ldots,\{\alpha\, n_2\}$ weer klein zijn terwijl $\{\alpha n_2^{k}\}$ zo groot is dat:

$\{\alpha(n_2-r+dj)^k\} = \{\alpha n_2^{k}\} +\ldots+ \{\gamma_0\alpha\}-1.$

Ook nu is het weer mogelijk de rij (n_2) zo te kiezen dat dit voor alle r en j uit (4) geldt.
Bij uitwerking levert dit het gevraagde resultaat (5) op.

II. Een andere toepassing van gelijkverdeling op een verwant probleem treedt op in het bewijs van de volgende stelling. (H.G. Meijer [8]).

Stelling 5:
Zij $B_s(t)$ het s^e polynoom van Bernoulli, $s \geq 1$, r een niet negatief geheel getal, terwijl α een irrationaal en β een willekeurig reëel getal zijn.
Dan is de reeks

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r B_s(\{\alpha n + \beta\})x^n$$

niet voortzetbaar over de eenheidscirkel.

Het bewijs berust op het volgende lemma dat eenvoudig volgt uit o.a. stellingen in Titchmarsh [11] pag. 224-225.

Lemma 3:
Zij $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ een begrensde rij complexe getallen waarvoor geldt:

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} c_n = c$ bestaat, zij r een niet negatief geheel getal en is $\phi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, n^r x^n.$

Dan geldt:

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^{r+1} \phi(x) = r!\, c.$$

Bewijs stelling 5:

Zij m een geheel getal dan is

$$G(xe^{2\pi i m\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r B_s(\{\alpha n+\beta\}) e^{2\pi i m n\alpha} x^n.$$

Nu geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} B_s(\{\alpha n+\beta\}) e^{2\pi i m\{n\alpha+\beta\}} = \int_0^1 B_s(x) e^{2\pi i m x} dx = d_m$$

als d_m de m^e Fouriercoefficient van $B_s(x)$ is.
Zodat volgens lemma 3

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^{r+1} G(xe^{2\pi i m\alpha}) = r!\, d_m e^{-2\pi i m\beta}$$

Ofwel:

$$G(x) \sim \frac{r!\, d_m\, e^{-2\pi i m\beta}}{1-xe^{-2\pi i m\alpha}}$$ als x radiaal nadert tot $e^{2\pi i m\alpha}$.

Het is bekend dat voor $m \neq 0$ geldt $d_m \neq 0$.
Zodoende heeft $G(x)$ singulariteiten overal dicht op de eenheids-cirkel zodat hij niet voortzetbaar is.

Literatuur:

1. J. Bass : Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires; Bull. Soc. Math. France 87 (1959), 1-64.

2. J. Cigler : Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung. Journ. f.d. reine und angewandte Math. 210 (1962) 141-147.

3. J. Cigler : Folgen normierter Masze auf kompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1(1962), 1-13.

4. J.G.v.d. Corput : Diophantische Ungleichungen I Acta Mathematica 56 (1931) 373-456

5. E. Hlawka : Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend.Circ.Matem. Palermo serie II, 4 (1955) 33-47.

6. E. Hlawka : Über C-Gleichverteilung. Annali Mathematica, pura ed applicata, serie IV, 49(1960) 311-325.

7. H.G. Meijer : Irrational Power Series. Proc.Kon.Ned.Ak.v. Wet. serie A, 66(1963), 682-690.

8. H.G. Meijer : Asymptotic behaviour of a class of power series near the circle of convergence. Verschijnt binnenkort.

9. M.A. Naimark : Normed Rings. (1959) Noordhoff, Groningen.

10. M. Newman : Irrational Power Series. Proc.Am.Math.Soc. 11(1960) 699-702.

11. E.C. Titchmarsh : The theory of functions, 2nd ed. (1960)Oxford.

12. H. Weyl : Über die Gleichverteilung mod. 1, Math.Ann. 77(1916) 313-352.

§16. In [1] the following theorem is stated:

Theorem 5. If p, q are positive integers, the sequence

$$\{(\tfrac{p}{q})^k\alpha\}, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

is not well distributed for any α, $0 < \alpha \leqq 1$.

The proof of this result as given in [1] is incorrect, though, as indicated in [2], Theorem 6' the theorem is true if $\frac{p}{q}$ is an integer. We shall now show that the theorem is true if <u>any α</u> is replaced by <u>almost all α</u>. The proof is a modification of that given in [1] and is of interest because the non-well distribution of a sequence is deduced from the uniform distribution of each of a countable set of sequences.

Theorem I If p, q are positive integers, the sequence

$$\{(\tfrac{p}{q})^k\alpha\}, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

is not well distributed for almost all α, $0 < \alpha \leq 1$.

Proof. In the first instance, we may suppose that the sequence is uniformly distributed; otherwise there is nothing to prove, since a sequence which is not uniformly distributed is not well distributed.

We denote by E_N $(N = 0, 1, 2, \dots)$ the set of α for which $\{\frac{p^k}{q^{k+N}}\alpha\}$ is uniformly distributed. Then, by a result due to H. Weyl, [3],

$$\mu(E_N) = 1,$$

for all $(N = 0, 1, 2, \dots)$. Also, if

$$E = \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N,$$

we have

$$\mu(E) = 1.$$

Sequences which are uniformly distributed are also everywhere dense in [0,1]. Hence, if $\alpha \in E$, for every N we can find an $m = m(N)$ such that

$$\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\} < \frac{1}{8\, p^N q^N} \quad . \tag{1}$$

Consider,

$$\sum_{k=m+1}^{m+N} e(s_k) = \sum_{k=m+1}^{m+N} e(\{(\tfrac{p}{q})^k\alpha\}) = \sum_{k=m+1}^{m+N} e(\frac{p^k}{q^k}\alpha) = \sum_{k=m+1}^{m+N} e(q^N \frac{p^k}{q^{k+N}}\alpha)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e(q^N \frac{p^k}{q^k}\ (\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha)) = \sum_{k=1}^{N} e(q^{N-k}p^k\,\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\}).$$

If $\alpha \in E$ and $m = m(N)$ then it follows from (1) that for all $k \leq N$,

$$0 \leqq q^{N-k}p^k\,\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\} < \frac{1}{8}\,\frac{q^{N-k}p^k}{p^N q^N} \leqq \frac{1}{8} \quad .$$

This implies

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+N} e(s_k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} e(q^{N-k}p^k\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\})\right| \geqq \mathcal{R}\left(\sum_{k=1}^{N} e(q^{N-k}p^k\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\})\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \mathcal{R}\left(e(q^{N-k}p^k\{\frac{p^m}{q^{m+N}}\alpha\})\right) > \sum_{k=1}^{N} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{N}{\sqrt{2}} ,$$

and so, by the usual criterion, $\{(\frac{p}{q})^k\alpha\}$ is not well distributed if $\alpha \in E$, which proves the theorem since $\mu(E) = 1$.

This technique does not seem to lend itself to other problems, though the following result can be established by a few modifications of the above proof.

Theorem Let p_i and q_i $(i = 1, 2, \dots, K)$ be positive integers with $\frac{p_i}{q_i} > 1$ for all $i = 1, 2, \dots, K$, where K is fixed. Then the sequence $\{f(n)\alpha\}$, where

$$f(n) = (\frac{p_1}{q_1})^{n_1}(\frac{p_2}{q_2})^{n_2}\cdots(\frac{p_K}{q_K})^{n_K} ,$$

with $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$, each n_i being an integer $\geqq 0$, is not well distributed for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$.

§17. Suppose that (s_k) is a given sequence of real numbers and t is a real number in the interval $0 \leqq t \leqq 1$. Representing t by a non-terminating binary decimal expansion, we can define a one to one mapping of the infinite subsequences (s_{k_i}) of (s_k) onto the interval $[0,1]$. For, let (s_{k_i}) be an infinite subsequence of (s_k), we define $t = 0.\beta_1\beta_2 \dots$ (radix 2) by means of the equations

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = k_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The inverse mapping is evident if we agree to use only the infinite decimal representation of t. With this mapping it is possible to speak of 'almost all subsequences of (s_k)' or 'a set of subsequences of measure one' when the corresponding subset of the interval $[0,1]$ has measure one.

We now state the following result, [4]

Theorem II A bounded sequence (s_k) is $(C,1)$ summable to s if, and only if, almost all subsequences of (s_k) are $(C,1)$ summable to s.

We use this theorem to prove the following:

Theorem III The sequence $\{s_k\}$ is uniformly distributed if, and only if, almost all subsequences of $\{s_k\}$ are uniformly distributed.

Proof. From Theorem II, it follows that if $e(hs_k)$ is $(C,1)$ summable to zero for every $(h = 1, 2, \dots)$, then the set of subsequences, E_h say, which are $(C,1)$ summable to zero is of measure one. Hence,

$$\mu(\bigcap_{h=1}^{\infty} E_h) = 1,$$

and a set of subsequences of measure one is uniformly distributed.

If almost all subsequences of (s_k) are uniformly distributed then, for each h, the sequence $[e(hs_k)]$ has a set of subsequences of measure one which are $(C,1)$

summable to zero. Hence, by Theorem II, $[e(hs_k)]$ is (C,1) summable to zero ($h = 1, 2, 3, \ldots$), and so (s_k) is uniformly distributed. This completes the proof.

§18. In [2] the following theorem is proved:

Theorem 4 Let $(n(k))$ be a subsequence of the integers,

$$\frac{n(k)}{n(k-1)} = r(k), \qquad r(k) \nearrow \infty,$$

then, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$, the sequence $\{n(k)\alpha\}$ is not well distributed.

In fact the very same proof can be used to prove a stronger result:

Theorem IV Let $(n(k))$ be a subsequence of the integers

$$\frac{n(k)}{n(k-1)} = r(k), \qquad \lim_{k\to\infty} r(k) = \infty, \tag{2}$$

then, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$, the sequence $\{n(k)\alpha\}$ is not well distributed.

In the proof it is shown that if (2) is assumed then, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$, we have

$$\{n(k)\alpha\} \leqq \frac{1}{2} \text{ for } k = k_\nu + 1, k_\nu + 2, \ldots, k_\nu + [\log_2 \nu],$$

and infinitely many ν. Thus the condition

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} I_{[a,b]}(s_k) = b - a \tag{3}$$

uniformly in n for every interval $[a,b]$ is violated. The number $\frac{1}{2}$ was chosen in a purely arbitrary way, and with minor modifications the proof of Theorem 4 could be carried out using any rational number in (0,1), e.g. the number $\frac{1}{R}$, $0 < \frac{1}{R} < 1$. Hence, if (2) is satisfied then, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$, we have

$$\{n(k)\alpha\} \leqq \frac{1}{R} \quad \text{for } k = k_\nu + 1, k_\nu + 2, \ldots, k_\nu + [\log_R \nu]$$

for infinitely many ν and any fixed positive integer R. Moreover, the same arguments will show that if $(n(k))$ possesses a subsequence, $(n(k_i))$ say, such that

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n(k_i)}{n(k_{i-1})} = \infty,$$

then, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$,

$$\{n(k_i)\alpha\} \leqq \frac{1}{R} \quad \text{for } i = i_\nu + 1, \ldots, i_\nu + [\log_R \nu] \tag{4}$$

for infinitely many ν, and any fixed positive integer R.

For the subsequence $(n(k_i))$ we now define the <u>index sequence</u> (x_j) of $(n(k_i))$ by the equations

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ when } j = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Let us suppose that, for some positive integer R,

$$\frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{m+p} x_j > \frac{2}{R} > 0$$

for all m and all $p > P$. If this is so we say that the <u>lower density</u> of $(n(k_i))$ exceeds $\frac{2}{R}$. From (4) it follows that, for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$,

$$\frac{1}{\lambda(\nu)} \sum_{k=\eta}^{\theta} I_{[0,\frac{1}{R}]}(\{n(k)\alpha\}) > \frac{2}{R}$$

for infinitely many ν, where

$$\eta = k_{i_\nu + 1}, \quad \theta = k_{i_\nu} + [\log_R \nu] \qquad \text{and} \qquad \lambda(\nu) = \theta - k_{i_\nu}$$

From this it is clear that the sequence is not well distributed for almost all α.

Theorem V If $(n(k))$ possesses a subsequence $(n(k_i))$ satisfying

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n(k_i)}{n(k_{i-1})} = \infty,$$

and having a lower density that is positive, then $\{n(k)\alpha\}$ is not well distributed for almost all α, $0 < \alpha \leqq 1$.

We prove a stronger result than this, but first we prove two lemmas about arithmetic means. If (x_j) is a bounded sequence it is evident that

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{j=m_1+1}^{m_1+p} x_j - \frac{1}{p} \sum_{j=m_2+1}^{m_2+p} x_j \right| = 0. \tag{5}$$

Lemma 1. If the bounded sequence (x_j) is not almost convergent to zero, then there exists a positive real number γ, and sequences (p_u), (m_v) such that

$$\left| \frac{1}{p_u} \sum_{j=m_v+1}^{m_v+p_u} x_j \right| > \gamma,$$

where

$$\lim_{v\to\infty} m_v = \lim_{u\to\infty} p_u = \infty.$$

Proof. If (x_j) is not $(C,1)$ summable to zero, and

$$\limsup_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} x_j \right| > 2\gamma, \tag{6}$$

then it follows from (5) that the conditions of the lemma are satisfied. If (x_j) is $(C,1)$ summable to zero, then

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{m+p} x_j \right| = 0$$

for all $m = 1, 2, \ldots$, and if the conditions of the lemma are not satisfied, then the limit is uniform in m, and (x_j) is almost convergent to zero.

Lemma 2. If (x_j) is a sequence of 1's and 0's which is not almost convergent to zero then, for every p $(p = 1, 2, \ldots)$ there exists an infinite sequence $(m_v) = (m_v(p))$ such that:

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{j=m_v+1}^{m_v+p} x_j \right| > \gamma.$$

Proof. Firstly, we choose γ to be an irrational number so that the conditions of Lemma 1 are satisfied. Then, if Lemma 2 is not valid we have for some p and all $m > M$,

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{m+p} x_j \right| < \gamma < (1-\varepsilon)\gamma.$$

Consequently, for all $m > M$

$$\left| \frac{1}{\omega p} \sum_{j=m+1}^{m+\omega p} x_j \right| < (1-\varepsilon)\gamma,$$

ω a positive integer; and if $(\omega - 1)p < h \leqq \omega p$, then

$$\left| \frac{1}{h} \sum_{j=m+1}^{m+h} x_j \right| \leqq \left| \frac{1}{h} \sum_{j=m+1}^{m+\omega p} x_j \right| = \left| \frac{\omega p}{h} \cdot \frac{1}{\omega p} \sum_{j=m+1}^{m+\omega p} x_j \right| < \frac{\omega p}{h} \gamma (1-\varepsilon).$$

For ω sufficiently large, i.e. $\omega > \omega_0$ say,

$$\frac{\omega p}{h} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon},$$

and so

$$\left| \frac{1}{h} \sum_{j=m+1}^{m+h} x_j \right| < \gamma,$$

for $h > \omega_o p$ and $m > M$, which contradicts the conclusion of Lemma 1.

<u>Definition:</u> If (x_j) is the index sequence of $(n(k_i))$, and (x_j) is almost convergent to zero, we say that the subsequence $(n(k_i))$ has <u>density</u> zero.

Theorem VI If the sequence $(n(k)\alpha)$ is well distributed for almost all α, $0 < \alpha \leq 1$, then any subsequence $(n(k_i))$ of $(n(k))$ satisfying

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n(k_i)}{n(k_{i-1})} = \infty$$

has density zero.

Proof. We shall use the notation of [2] in proving Theorem 4. If the sequence $(n(k_i))$ has a positive lower density then, by Theorem V, we have the above result. Arguments similar to those used in the proof of Theorem V are applicable in this instance if, for each ν, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ we have as is implied in the theorem

$$\xi_\nu = \bigcap_{i=i_\nu}^{i_\nu+[\log_R \nu]} E_{k_i} ,$$

where the basic intervals $J'(r,n(k))$, $(r = 0, \ldots, n(k)-1)$, are of length $\frac{1}{Rn(k)}$ where $\frac{1}{R} < \gamma$, γ being chosen so that Lemmas 1 and 2 are valid. In the induction process for the construction of the sets ξ_ν, the only restriction imposed on each i_ν is $i_\nu > N$ for some positive integer N. We now choose i_ν so that $i_\nu > N$ and also

$$\left| \frac{1}{p(\nu)} \sum_{j=m(\nu)+1}^{m(\nu)+p(\nu)} x_j \right| > \gamma,$$

where

$$k_{i_\nu} < m(\nu) < m(\nu)+p(\nu) < k_{i_\nu+[\log_R \nu]}$$

and

$$\lim_{\nu \to \infty} p(\nu) = \lim_{\nu \to \infty} m(\nu) = \infty .$$

With this choice of the i_ν the usual contradiction follows and the theorem is proved.

§19. In conclusion, I wish to propose three problems.

1. Is it true that $\{(\frac{p}{q})^k \alpha\}$ is not well distributed for any α?

2. Does $r(k) > \gamma > 1$, $(k = 1, 2, \ldots)$ imply that $\{n(k)\alpha\}$ is not well distributed for almost all α ?

3. In [5] it is shown that if

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} dF(\theta)$$

then $(|c_n|^2)$ is almost convergent to $(4\pi)^{-2} \Sigma \mu_m^2$ where μ_m are the discontinuities of the non-continuous part of F. Can an explicit formula be found for $(|c_n|)$?

1. F. R. Keogh, B. Lawton and G. M. Petersen, Well distributed sequence, Can. J. Math., 10(1958), 572 - 576.

2. A. F. Dowidar and G. M. Petersen, The distribution of sequences and summability, Can. J. Math., 15 (1963), 1 - 10.

3. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77(1916), 313 - 352.

4. R. C. Buck and H. Pollard, Convergence and summability properties of subsequences, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 4 - 931.

5. F. R. Keogh and G. M. Petersen, A strengthened form of a theorem of Wiener, Math. Zeitschr. 71 (1959) 31 - 35.