

B

ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Syllabus van de werkgroep

Wijsbegeerte en Wiskunde

1967-'68

Met bijdragen van:

C. Doets

P. v. Emde Boas

L.E. Fleischhacker

E. Paërl

P. Pijl

en een uitgebreide literatuurlijst.



ZW

Errata van de syllabus.

De niet storende tikfouten zijn niet vermeld.

De lezer wordt verzocht zelf de onregelmatigheid in de bladzijde-nummering te corrigeren.

pag. 5 4e alinea : verwantschap

" 10 11e regel van boven: wil

" 11 Aan de literatuur toevoegen:

Peter mittelstaedt: Philosophische probleme der modernen Physik.

Inleiding

door L.E. Fleischhacker gehouden op de 1e bijeenkomst, 25 september 1967

Onvruchtbare vragen?

Hat es überhaupt sinn, eine solche Tätigkeit wie das Ableiten von Theoremen zu rechtfertigen?

Wenn ja, gibt es eine Rechtfertigung, über die Tatsache hinaus, dass das ableiten von Theoremen in der gegenwärtigen Gesellschaft anerkannt ist, und also honoriert wird?

Welchen ontologischen - oder anthropologischen Status hat eine formale Theorie? Ist Sie ein Spiel, eine zu leistende Arbeit, ein Werkzeug oder was sonst.

Dit zijn drie van de elf vragen die P. Lorenzen stelde op het "1964 Congress for logic methodology and philosophy of science" in Jerusalem. Deze en dergelijke vragen worden door beoefenaren van de wetenschap al gauw als onvruchtbaar beschouwd.

De volgende motiven komen hierbij vaak naar voren.

1. De vraag naar rechtvaardiging miskent reeds de belangeloosheid die ten grondslag ligt aan een zuivere wiskundebeoefening.
2. De zin van de wetenschap ligt in de technische middelen die ze de mens voor zijn "struggle for life" ten dienste stelt. Probleemstellingen die hier niet toe bijdragen zijn zinloos.
3. Wat over wiskunde gezegd kan worden doet altijd aan helderheid en dwingendheid onder voor wat op wiskundige wijze kan worden uitgedrukt. De middelen waarmee men een rechtvaardiging der wiskunde zou willen opstellen zouden meer rechtvaardiging behoeven dan de wiskunde zelf. Bovenstaande vragen roepen op "water naar de zee te dragen".

Deze respectievelijk esthetisch (l'art pour l'art), utilitistische en dogmatisch gerichte argumenten hebben alle gemeen dat ze een "practische instelling" prediken. Ze verwerpen de reflectie op de "vanzelf-zwijgende" achtergronden van een activiteit.

Vele grote geleerden hebben echter gewaarschuwd tegen de bezinningsloze wetenschapsbeoefening. Juist door gebrek aan bezinning verliest de wetenschap haar zelfstandigheid t.o.v. de maatschappelijke machten.

Zij die expliciete bezinning verwerpen kunnen hun vragen echter niet zo gemakkelijk geheel verdringen. Is het niet juist de onzekerheid op de achtergrond die veroorzaakt dat vragen die deze onzekerheid aanspreken al te snel naar het rijk der sofismen worden verbannen? De afwijzing van openlijke bezinning doet denken aan een soort samenzwering: "We doen alsof we weten wat we doen en waartoe, maar we weten wel dat we het geen van allen weten". Een situatie die verwantschap vertoont met de sexuele taboes der 19^e eeuw.

Het zou onjuist zijn dit taboe der bezinning wat betreft de wiskunde voor overheersend te houden. Sinds de "grondslagen crisis" is er voortdurend discussie over de vraag "wat is wiskunde". Vaak echter is deze vraag nadat ze in een of andere vorm gesteld was weer terzijde geschoven of afgedaan met een dogmatisch antwoord.

Hierin positie kiezend wil ik de vraag nogmaals stellen.

Het wiskundige van de wiskunde.

Wetenschappelijke arbeid schijnt minder door vervreemding aangetast dan andere vormen van arbeid. Ontdekkingen worden genoemd naar hun ontdekkers, een theorie blijft iemands theorie. Hij wordt toegepast, niet "afgenomen". Wetenschappelijke resultaten zijn geen "Privat-eigendom" maar wel :vàn iemand" in de zin van "geschapen door iemand". Wetenschappelijke werkers hebben, evenals b.v. kunstenaars en sommige werkers op "menslievend" terrein een meer persoonlijke relatie tot hun werk dan de meeste "werkers". Er is, en dit is bij wiskundigen duidelijk waarneembaar, een authentieke arbeidsvreugde. Authentiek

omdat ze direct verband houdt met de inhoud van het werk.

Het "fascinerende" van de wiskunde moet wel een belangrijke rol spelen in de ontwikkeling van deze wetenschap.

Hoe is het b.v. te verklaren dat de abstracte verzamelingenleer de intuitionistische kritiek en de incompleteheidsstelling overleefd heeft, anders dan uit een van zijn gedachteninhoud uitgaande bekoring.

Hoe komt het dat zelfs de meest rigoureuze intuitionisten een constructiebegrip blijven handhaven dat onze praktische vermogens in principe overschrijdt.

Hoe komen de getaltheoretici ertoe vragen te stellen die betrekking hebben op zo grote getallen dat het antwoord geen praktische betekenis kan hebben.

Hoe komen de topologen ertoe ruimten te onderzoeken die deze naam alleen nog bij definitie dragen.

Wat brengt wiskundigen ertoe theorieën op te stellen die zo algemeen zijn dat er in speciale gevallen vrijwel niets uit af te leiden valt (de term "general nonsense" is in dit verband wel gebruikt).

En wat, tenslotte, brengt mathematische logici ertoe geperverteerde (niet-standaard) interpretaties te geven aan wiskundige theorieën die toch zelf al gecompliceerd genoeg zijn.

Nut, schoonheid en motivatie.

Bovengenoemd "ertoe komen" is niet verklaarbaar uit nut van de genoemde theorieën. Enig nut kan immers alleen achteraf blijken. Bij de opsteller der theorieën bestaat hoogstens "geloof in nut", dit geloof is dan echter even raadselachtig als het "ertoe komen" zelf.

Een esthetische verklaring van de wiskundebeoefening blijkt ernstig te kort te schieten als we de wiskunde gaan vergelijken met echte kunsten. Als het alleen om de schoonheid ging, zouden de meeste wiskundigen dan geen musici geworden zijn?

Een psychologische verklaring van de wiskundige motivatie zou noodzakelijkerwijs moeten berusten op een "psychologie van het wiskundig

object". Hiermee zou de psychologie haar eigen terrein verlaten of een vooroordeel over het te onderzoeken gebied aan haar beschouwing ten grondslag leggen.

Het vooroordeel n.l. dat het object der wiskunde van psychische aard is.

Deze drie benaderingen van het probleem hebben gemeen dat ze de wiskundige activiteit los maken van haar inhoud.

Zijn en wezen.

Onthologische en kentheoretische vragen omtrent de wiskunde behoren reeds eeuwenlang tot de traditionele wijsgerige problematiek.

De voornaamste drie opvattingen omtrent de zijnswijze van het wiskundig object: "platonisme", "empirisme" en "intuitionisme" komen, in allerlei nuanceringen, telkens weer terug.

"Platonisme" kent aan de wiskundige objecten een zelfstandig bestaan toe.

"Empirisme", tegenwoordig vaak voorkomend als substratum van een formalistische opvatting van wiskunde, beschouwt wiskunde als een wijze van beschrijven der ervaringswereld.

Wiskundige objecten krijgen hier het karakter van abstracties.

"Intuitionisme" ziet de wiskundige objecten als "denkmaaksels" geconstrueerd in de geest.

In hoeverre deze drie opvattingen elkaar uitsluiten is een probleem op zichzelf. Ze maken sterk de indruk complementaire benaderingswijzen van eenzelfde (?) toedracht te zijn.

Misschien is het deze indruk geweest die Brouwer heeft geïnspireerd tot zijn poging de wiskunde inhoudelijk onafhankelijk te maken van metaphysische vooronderstellingen. Ook is er verwantschap te zien met Hilberts bewijstheorie.

De erkenning van inhoudelijke onafhankelijkheid lost echter het wijsgerige probleem omtrent de aard van het wiskundige niet op. Voor Brouwer was dit misschien de aanleiding tot zijn meer wijsgerige beschouwingen.

De zelfstandigheid der wiskundige geldigheid is een uitdaging aan de wijsbegeerte.

Houdt het feit dat zo vele grote denkers in het verleden zich via de wiskunde tot wijsgeer ontwikkeld hebben verband met deze uitdaging? Het staat zeker ook in verband met de sterke verwantschap tussen beide vakken. Plato noemde reeds de volgende drie punten van overeenkomst

- 1) Ze handelen beide over het bovenzinnelijke
- 2) Ze verwerpen beide de empirische methode
- 3) Beide hebben ze de pretentie resultaten te leveren die onomstotelijk vaststaan.

Merkwaardig is dat sommige hedendaagse opvattingen van wijsbegeerte en van wiskunde alle drie deze punten schijnen te logenstraffen.

Is er toch nog een verwachtschap? B.v. tussen fenomenologische wijsbegeerte en formele wiskunde? Hoe valt die dan te beschrijven? In welke relatie staan wiskundige en wijsgerige geldigheid?

(Beide vormen van geldigheid schijnen in deze eeuw een meer relatief karakter aangenomen te hebben!)

Dit zijn vragen die uitgaan van een gelijkwaardigheid van beide vakken. Ze lijken mij uitgangspunt te kunnen zijn voor een verheldering in beide gebieden en voor een synthese van "rationele" en "irrationele" elementen in het hedendaagse denken.

Of men zich zal bezinnen is een kwestie van persoonlijke keuze. Eenmaal gekozen bezinning is echter even rusteloos als eenmaal ontvlamde interesse in een wiskundig probleem. Beide verwerpen a priori niets, al lijkt het de dolste fantasie. Misschien scheppen ze beide al zoekend hun eigen zin.

FILOSOFISCHE PROBLEMEN VAN DE KWANTUM MECHANICA

door E. Paërl

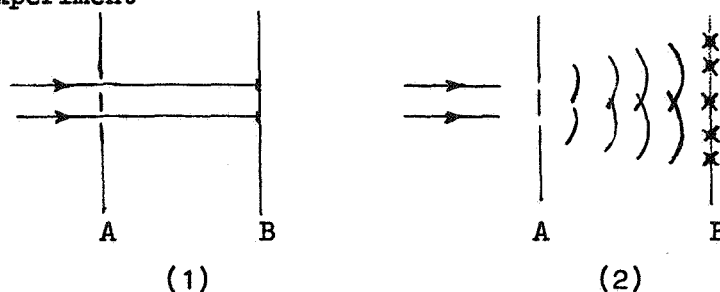
Ter introductie

De ontwikkeling van kwantum mechanica omstreeks 1930 heeft geleid tot diepgaande filosofische meningsverschillen omtrent haar consequenties voor ons wereldbeeld, i.h.b. betreffende de begrippen: causaliteit, determinisme, waarschijnlijkheid, toeval, ... enz.

In het onderstaande zijn de standpunten van de verschillende scholen uiteengezet. Gezien de omvang van de literatuur dragen deze bladzijden, dan ook slechts het karakter van een schets. Omdat de filosofische probleemstelling uit de natuurkunde is voortgekomen is het noodzakelijk eerst iets over de natuurkundige theorie te vertellen. De theorie is echter tot een minimum beperkt (uit een 1e jaars college kwantummechanica).

Natuurkundig uitgangspunt

Het experiment, dat als uitgangspunt kan dienen, is een z.g. interferentie-experiment



Als men een bundel snelle electronen op een scherm A met 2 gaatjes richt wordt de tegenoverliggende wand B op 2 plaatsen getroffen, zoals uit de klassieke mechanica te verwachten was (figuur (1)).

Richt men daarentegen een bundel langzame electronen op de wand A dan ontstaat op de wand B een interferentiepatroon van plaatsen waar véél en plaatsen waar weinig electronen komen.

De klassieke mechanica:

"een electron volgt een welomschreven baan, bepaald door de optredende elektrische en magnetische krachten"

kan dit experiment niet verklaren.

De kwantummechanica verklaart dit experiment door ieder electron te begeleiden door een golf, die de waarschijnlijkheidsverdeling van dit deeltje geeft. Dit wil zeggen: een golf, die zich in de ruimte uitbreidt en daar waar de uitslag van de golf groot (klein) is, is het waarschijnlijk (onwaarschijnlijk) het deeltje aan te treffen.

Waarschijnlijkheden kan men optellen, dus deze golven interferen als gewone golven en het interferentiepatroon op de wand B geeft dus een statistische beschrijving. Blijkens het experiment wordt hieraan voldaan doordat op de voorspelde plaatsen: veel dan wel weinig electronen komen. Zijn de objecten groot t.o.v. de golflengte, dan geldt evenals bij de gewone optica waar men "lichtstralen" kan invoeren, dat men "banen" kan invoeren. Dus het eerste experiment met snelle electronen kan eveneens met de kwantummechanica verklaard worden.

Filosofische probleemstelling.

De problemen, die zich nu bij deze kwantummechanische beschrijving voordoen zijn de volgende:

1. Wat is realiteit: de golf (waarschijnlijkheid) of het deeltje?

Het is belangrijk op te merken dat men bij experimenten steeds deeltjes constateerd. Dit wil zeggen de fotografische plaat in B wordt steeds in één punt getroffen door een electron, electronen hebben een duidelijk bepaalde massa en als B een foto-electrische cel is kan steeds de toename van 1 ladingseenheid geconstateerd worden. Daarentegen geeft de aanname dat een electron zich als deeltje van A naar B beweegt, moeilijkheden zoals wij gezien hebben omdat dan de resultaten strijdig zijn met de klassieke mechanica. Bovendien "manifesteert" de golf zich duidelijk in het interferentiepatroon.

2. Een tweede moeilijkheid is, dat hoewel het interferentiepatroon

van een groot aantal deeltjes vastligt (gedetermineerd is), het trefpunt van één deeltje niet van te voren te voorspellen is.

Men kan zelfs binnen het wiskundige formalisme van de kwantummechanica bewijzen, dat het onmogelijk is bij dit experiment pre-

cies de uitslag van het experiment te bepalen (onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg: er geldt onbepaaldheid van plaats of van moment onbepaaldheid van tijd of energie ... etc.). In de loop der tijd hebben zich bij de beantwoording van deze vraagstukken verschillende filosofische scholen tegenover elkaar opgesteld, nl. (1) De Kopenhaagse school, met als belangrijkste vertegenwoordigers: Niels Bohr en Heisenberg. (2) De deterministische school, met o.a. Einstein en de Broglie. (3) Tenslotte geven wij de opvattingen van Havemann, die de begrippen uit de dialektiek van Hegel in deze discussie heeft geïntroduceerd.

(1). De Kopenhaagse school.

De vertegenwoordigers van deze school redeneren ongeveer als volgt.

a. Tijdens de metingen die men aan een elektron verricht, beïnvloedt het meetinstrument de oorspronkelijke plaats en snelheid van het elektron. Deze wisselwerking tussen mikro-deeltje en meetinstrument verstoort het meetproces en doordat exacte gegevens van deze verstoring op grond van de onzekerheidsrelatie onbepaalbaar zijn, maakt dit de mens onmogelijk dieper op het wezen van de atomaire verschijnselen in te gaan. De onbepaaldheidsrelatie stelt dus een grens aan onze kennis van de natuur. Dit feit, dat de feitelijke gebeurtenissen ons ontgaan, heeft ten gevolge dat wij ons alleen kunnen uitdrukken in waarschijnlijkheden en "waarschijnlijkheidsgolven". Deze waarschijnlijkheidsgolven zijn niet zo zeer objectief, buiten ons bestaande gegevens, doch geven eerder de beperktheid van de menselijke kennis weer, die zich slechts in waarschijnlijkheden kan uitdrukken. Klaarblijkelijk, aldus de Kopenhaagse school, bestaat er in de natuur alleen het absolute toeval (als dit gebeurt dan kan dat gebeuren) en vormen alle kausale wetten (als dit gebeurt dan moet dat gebeuren) slechts een benadering als een gemiddelde van grote aantallen.

b. Het heeft verder in feite geen zin te spreken over het objectieve bestaan van deeltjes als electronen, atomen, ... enz. Wij kunnen alleen over waarnemingen spreken, een deeltje is dan ook niets anders dan een som van waarnemings-elementen. Het heeft geen zin te vragen, wat een atoom precies is, wat blijft is slechts een formule (gecondenseerde ervaring) die ons in staat stelt voorstellingen omtrent waarnemingen te doen.

De Kopenhaagse school heeft een grote invloed gehad en in veel populaire beschouwingen in de trant van "het irrationele in de natuur" vindt men deze stellingen vaak terug. Intussen heeft de discussie zich voortgezet en fysici als Bohr hebben zich gedistancieerd van verschillende uitspraken, die indertijd gedaan zijn.

Het standpunt van de Kopenhaagse school: dat er grenzen zijn aan menselijke kennis over de natuur (het ding an sich is niet kenbaar) draagt een duidelijk agnostisch karakter en is dan ook bestreden door fysici, die vooropstellen dat alles in de natuur principieel kenbaar is.

(2). De deterministische school.

Een groep fysici zoals Einstein, de Broglie, Bohm zochten de oplossing van het toevalskarakter in de kwantummechanica in een nieuwe theorie die ervan uitgaat dat het deeltje wel een bepaalde baan beschrijft, maar onderhevig is aan ons nog onbekende wetten. Zodat de indruk wordt gewekt dat de uitslag van een experiment het element van toeval bevat zoals dit door de waarschijnlijkheidsgolven wordt beschreven. Men spreekt dan ook van het z.g. "sub-kwantummechanisch niveau". Zover ik weet, vindt deze opvatting niet veel aanhangers i.v.m. de aanname van een sub-kwantummechanisch niveau, die de theorie veel gecompliceerder maakt, met als doel het redden van het determinisme.

(3).

Tenslotte wil ik een interessante filosofische benadering vermelden

van R. Havemann, die ontstaan is na gesprekken met Heisenberg. Havemann geeft ongeveer de volgende beschouwing:

De in de kwantummechanika optredende golven geven een beeld van wat mogelijk is in het gedrag van een deeltje, de deeltjes daarentegen zijn wat werkelijk is.

In de dialectiek worden "werkelijkheid" en "mogelijkheid" als twee aspecten van de objectieve realiteit gezien. Als wij nu nagaan wat Hegel over de dialectiek van werkelijkheid en mogelijkheid gezegd heeft, dan is dit het volgende:

Iedere werkelijke gebeurtenis is eens mogelijk geweest.

Mogelijk wel zeggen, dat die gebeurtenis *kàn* gebeuren maar niet hoeft te gebeuren. De werkelijke gebeurtenissen zijn daardoor gekenmerkt dat zij als het mogelijke van het onmogelijke gescheiden zijn.

Welke mogelijkheden er zijn in de natuur is niet toevallig, maar deze zijn met noodzakelijkheid bepaald (*kàn* niet anders zijn dan het is). Het wetmatige van de wereld ligt in het mogelijke. Wanneer nu iets als mogelijkheid vast ligt, dan kan het slechts door toeval werkelijkheid worden, want dat is het kenmerk van het mogelijke, dat het zowel kan optreden als uitblijven, anders was het niet het mogelijke maar het noodzakelijke.

Havemann gaat door met te zeggen: "Deze uitspraak van Hegel sluit op frappante wijze aan bij de denkwijze in de kwantummechanika. De golven beschrijven n.l. wat mogelijk is in het gedrag van een deeltje."

De wiskundige vorm van de kwantummechanika laat zien, dat het gedrag van de golven ondubbelzinnig bepaald is, op ieder moment vast ligt, dus noodzakelijk bepaald is.

Als de golf de mogelijkheid geeft, dan wordt deze mogelijkheid in de vorm van een deeltje, dat op een bepaalde plaats verschijnt; toevallig werkelijkheid. Het golfbeeld scheidt niet alleen het mogelijke van het onmogelijke af, maar levert tevens getal gegevens over de mate van mogelijkheid: "de waarschijnlijkheid". Wat wij dus moeten doen, om een geschikt begrippenapparaat voor de kwan-

tummechanica te ontwikkelen is:

1. Het toeval (naast de noodzakelijkheid!) als een objectieve, van ons bewustzijn onafhankelijke categorie aannemen.
2. Causaliteit niet interpreteren als de noodzakelijke samenhang tussen werkelijke gebeurtenissen, maar verruimen tot de noodzakelijke samenhang tussen mogelijke gebeurtenissen.
3. Tenslotte ook accepteren dat de objectieve realiteit twee aspecten bezit: mogelijkheid en werkelijkheid.

Havemann trekt deze beschouwingen door naar het probleem van de vrijheid. "Vrijheid wordt door Hegel niet opgevat als een absolute (onverantwoordelijke) vrijheid, maar vrijheid bezit men pas als men inzicht heeft in wat noodzakelijk is. Vrijheid als inzicht in de noodzakelijkheid moet echter niet zo begrepen worden, dat er slechts de mogelijkheid openstaat één ding te doen, maar vrijheid is dat wij over een scala van mogelijkheden beschikken. Inzicht in de noodzakelijkheid betekent dan kennis van de fantastische mogelijkheden die de wereld ons biedt".

E. Paërl.

Literatuur

David Bohm, Causaliteit en waarschijnlijkheid in de moderne fysica, Aula 1963.

Robert Havemann, Dialektik ohne Dogma?, Rororo 1964.

Autoriteit en conventie in de Wiskunde

De rol van de logica

Spreker: H.C. Doets

H.C. Doets

"These phrases, at first glance incoherent, can no doubt be justified in a cryptographical or allegorical manner".
(Jorge Luis Borges: "the library of Babel").

De wiskundige praktijksituatie

Waar hebben wiskundigen het over? Dit loopt van geval tot geval uiteen, maar er zullen er tegenwoordig niet veel zijn die bezwaar hebben tegen het volgende antwoord: een wiskundige heeft het over verzamelingen. Wat zijn dat voor dingen? Dit is niet geheel duidelijk, wat vaststaat is dat het dingen zijn die al of niet element van elkaar kunnen zijn. Wat valt er nog meer over te zeggen? Nou, als twee verzamelingen dezelfde elementen bezitten, dan worden ze beschouwd als een en dezelfde etc. etc. Komen al die beweringen uit de lucht vallen? Voor een gedeelte wel, maar hebben we er eenmaal een aantal, dan is het mogelijk duidelijk te maken dat we er nog meer moeten slikken als we eenmaal dat eerste aantal geslikt hebben. Dat "duidelijk maken" doen we met redenties die bewijzen heten. Hoe komt het dat de waarheid van een stelling als het ware ons wordt opgedrongen na het lezen van het bewijs van de stelling?

Autoriteit.

Er zijn zeer veel situaties waarin mensen overtuigd zijn van de waarheid van een stelling, niet, omdat ze bewezen werd, maar omdat een autoriteit zegt dat het zo is. Waar dit zonder meer duidelijk is: op de middelbare school lossen leerlingen vraagstukken op m.b.v. stellingen, waaraan ze niet twijfelen, terwijl ze niet bij machte zijn, deze stellingen te bewijzen (tenzij bewijzen is: het produceren van een bewijs; het laatste

kan natuurlijk uit een boek worden overgeschreven). Mensen die in de wiskunde alleen een nuttig instrument zien passen voortdurend wiskundige stellingen toe die ze niet kunnen bewijzen. Dit is "niet erg". Op een college is het ongebruikelijk dat het gehoor reageert op een betoog dat het niet begrijpt; de stelling die op dit betoog steunt wordt zonder meer geaksepteerd. Dit is "wel erg". Toch zie ik geen goede gronden waarop het akseptereren van autoriteit in de wiskunde als afkeurenswaardig zou moeten worden bestempeld.

I.h.a.: een stelling kan geslikt worden omdat hij gepubliceerd is, gebruikt wordt bij het verkrijgen van andere resultaten, en er nooit een autoriteit is geweest die zei dat ze fout was. Het is mogelijk dat de betreffende stelling in het begin wat vreemd aandeed, maar een mens went aan alles, nietwaar? (aan: de kerk (het eenheidsinterval bevat evenveel punten als de euclidische ruimte), de atoombom (de Russellparadox?), het huizenoverschot in Nederland (de stelling van Banach-Tarski), de censuur (de onvolledigheidsstelling))(er zijn nog meer dingen waaraan men kan wennen: aan conventies o.m.).

Conventies

Het kan ook voorkomen (en we hopen dat het vaker het geval is) dat men ertoe komt een stelling te akseptereren op grond van het begeleidend bewijs. Maar waaraan ontleent een "goed" bewijs zijn bewijskracht? Ik houd staande dat de notie "bewijs" in de wiskunde niet "uit de lucht komt vallen": het heeft geen absoluut karakter zoals de dingen, waarover een wiskundige het heeft. Een beginnend wiskundige kan geen goed van een slecht bewijs onderscheiden. Op de middelbare school is het zeer moeilijk tot onmogelijk de leerlingen een korrekt bewijs te ontworstelen. Ze dienen zich vast te houden aan allerlei sjablonen als "gegeven-te bewijzen-bewijs" etc. Ik heb zgn. "schriftelijke werkjes" lineaire algebra gezien van eerstejaars wiskundigen die de gewone vraagstukken goed konden maken, maar kennelijk met de handen in het haar zaten als ze eenvoudige stellingen moesten bewijzen, waarvan de inhoud toch niets geheimzinnigs voor hun kon hebben. Dedekind leefde, wat de wiskunde aangaat, al in een zeer verlichte tijd. Zijn boek "Was sind und was sollen die Zahlen" komt nog steeds in bibliografieën voor.

Maar zag u wel eens hoe hij het bestaan van een oneindige verzameling bewees? (hetzelfde schijnt eens door Russell "bewezen" te zijn).

Ik geloof dat ik zo wel genoeg argumenten heb aangevoerd om aan te tonen dat de notie "bewijs" niets anders is dan een kollektie van conventies die in een bepaalde tijd voor een bepaalde groep van wiskundigen gelden. Deze conventies komen niet uit de lucht vallen, maar komen op een bepaalde tijd in de mode en een aankomend wiskundige dient ze aan te leren. Het is mogelijk deze conventies te katalogiseren, te bestuderen en op te helderen. Op een wiskundige manier gebeurt dit in de mathematische logica. In hoeverre ze echter door de mathematische logika gerechtvaardigd kunnen worden is een andere kwestie, waarop ik terugkom.

Er is echter wel een ander punt dat opheldering verdient: hoe komt het, dat wiskundigen het in de regel op een eenvoudige manier eens kunnen worden, m.a.w. dat deze conventies, naar het schijnt, een zeker objectief karakter bezitten, dat wiskundigen ertoe komen te veronderstellen dat iedere andere wiskundige deze conventies stilzwijgend erkent?

Hier lijkt het absolute karakter van de wiskundige realiteit een rol te spelen; de wiskunde is geen empirische wetenschap waarvan de theorieën kunnen worden gelogenstraft door de feiten; het is de wiskundige die zegt dat het met de wiskundige realiteit zo en zo gesteld is, en zolang we ons voorzichtig gedragen, kan er niet veel ernstigs gebeuren. De paradoxen schijnen hier moeilijkheden te willen maken, maar zijn dat geen antikiteiten? Quine zegt wel (set theory and its logic, 1963) dat intuïtie hier (i.e. op 't gebied van de verzamelingen) bankroet is, maar hij was dan ook een van de laatsten die in deze kontekst door een van deze wespen gepest werd (Burali-Forti).

De wiskundige relevantie van de paradoxen is toch wel gereduceerd tot de volgende: a) de logische paradoxen verschaffen ons stellingen (het universum is een echte klasse; de Russellklasse is een echte klasse; de klasse van alle ordinaalgetallen is echt; de klasse van alle well-founded verzamelingen levert een model voor het regulariteitsaxioma) b) de semantische paradoxen leveren ons de onvolledigheidsstellingen en methodologische indicaties (het onderscheid van objecttaal en syntakstaal bv.).

Anderzijds worden wiskundigen het soms helemaal niet op een eenvoudige manier eens; en hier rijst de vraag of de keuze van de wiskundige conventies wel zo dwingend is als ze lijkt.

In verband hiermee is het nuttig op te merken dat er een synthese mogelijk is van de opvattingen van Brouwer en die van bv. Carnap t.a.v. het tolerantiebeginsel ("It is not our business to set up prohibitions, but to arrive at conventions" (Logical Syntax of Language, p. 51) Brouwer: de vrijheid van de logica is illusoir (Beth: Foundations, p. 413)) en wel in de volgende zin. Ikzelf ben niet vrij in het kiezen van mijn eigen conventies (Mostowski ("thirty years of foundational studies") geeft ruiterlijk toe van het intuitionisme niets te begrijpen) maar een ander is wel vrij er andere conventies op na te houden dan ikzelf- en een discussie op wiskundig niveau hierover is vrijwel uitgesloten. (De reden dat de meeste wiskundigen er dezelfde conventies op na houden is misschien wel van dezelfde aard als die van het feit dat de meeste mensen in Spanje katholiek zijn (of Spaans spreken)) D.w.z. (Carnap 1.c.p.52) "In logic, there are no morals. Everyone is at liberty to build up his own logic, i.e. his own form of language, as he wishes. All that is required of him is that, if he wishes to discuss it, he must state his methods clearly, and give syntactical rules instead of philosophical arguments". Maar een discussie op syntaksniveau heeft met informele wiskunde niets te maken. Bovendien valt er op dit niveau ook niet veel meer te diskussieren: het inzicht, voor iemand die Chichewa en Choktau spreekt, dat vertegenwoordigers van deze resp. talen wel communicatiemoeilijkheden zullen hebben, is direkt evident en vereist geen discussie.

Rechtvaardiging door de logika

Van nature is de logika in eerste instantie een empirische wetenschap; ze komt eerst na wiskunde (iets dergelijks beweert Brouwer). Het is gebruikelijk aan dit aspect voorbij te gaan; indicaties in deze richting kan men vinden in beweringen die zeggen dat het ene systeem "natuurlijker" zou zijn dan het andere, en het is vanzelfsprekend dat definities van "afleidbaar", "vervulbaar" etc. getrouwe afspiegeelingen van onze intuïtie over deze noties dienen te zijn.

Het analyseren van de wiskundige aktiviteit m.b.v. een logica die het predikaat "mathematisch" niet toekomt is een twijfelachtige zaak: als men het terrein van de wiskunde verlaat wordt er een hoop meer onzeker en onprecies; meningsverschillen worden onvermijdelijk.

Dus zal onze logika mathematisch moeten zijn. Het gevolg is dat we ons moeten overgeven aan bezigheden die we juist wilden ophelderen. Goed, zeggen we met Hilbert, laten we die bezigheden dan op een zo smal mogelijke, d.i. finitistische basis schoeien. Nu ontstaan er echter nieuwe moeilijkheden: we zouden graag willen bewijzen, dat we op een gegeven moment niet méér wiskundige bewijskonventies hebben geïnventariseerd dan er zijn. Voor een consistentiebewijs moeten we echter naar begrippen grijpen die niet in de finitistische kontekst passen. Een als we willen laten zien dat het zoeken naar nieuwe conventies niets wezenlijks meer zal opleveren, dan blijkt dat we voor een volledigheidsbewijs zeer infinitistische principes moeten gebruiken (priemideaalstelling). Dus om werkelijk te laten zien dat "de zaak gezond is" hebben we de hele machinerie nodig waarvan we juist moeten laten zien dat ze gezond is. Toch geeft het, Wat mij betreft althans, een geruststellend gevoel, te zien, dat we het hele kringetje rond kunnen lopen zonder dat het ergens spaak loopt, al is het dan maar een kringetje, m.a.w. een consistentiebewijs van de logika, al heb ik er verzamelingentheorie bij nodig, doet mij toch zeer wel deugd. Hoewel anderzijds die deugd misschien toch meer zit in de gekompliceerdheid van de gebruikelijke logische axiomas en afleidingsregels dan in het vertrouwen dat ik heb in mijn vermogens een korrekst bewijs uit de informele wiskunde als zodanig te herkennen.

Een tweede reden dat de logika de wiskundige gang van zaken maar zeer gedeeltelijk kan rechtvaardigen is natuurlijk dat een geformaliseerde taal iets heel anders is dan de wiskundige (kommunikatieve, natuurlijke) taal.

Stellingen die mij sterk de indruk geven dat het spreken over rechtvaardiging ongerechtvaardigd is, vindt men bij de geformaliseerde verzamelingentheorie (als men daarop de stelling van Lowenheim-Skolem-Tarski loslaat) en de getaltheorie (de omega-onvolledigheid die de niet-standaardmodellen toelaat; hoewel dit verschijnsel te vermijden is door

toevoeging van Carnap's infinitistische inferentieregel).

M.a.w. hoewel de logika misschien oorspronkelijk bedoeld was als een grondslag voor de wiskunde, kan ze deze pretentie kennelijk niet volledig waarmaken, hoewel ze anderzijds wel geëvolueerd is tot een nieuwe tak van wiskunde "in its own right".

Ter samenvatting enkele korte varianten van de thema's als stellingen:

1. Begrippen als "axioma", "afleidingsregel" hebben alleen in geformaliseerde systemen een duidelijke betekenis die in de informele wiskunde niet bestaat: een axioma in de informele wiskunde is meestal een onderdeel van een definitie (groep, ruimte etc.); verzamelingstheoretische en logische axiomas kent de wiskundige niet en van afleidingsregels heeft hij nooit gehoord (vanuit een logies standpunt zou men kunnen zeggen dat hij ze gebruikt, maar niet als zelfstandige dingen opmerkt).
2. "Grondslagenonderzoek" als deel van de wiskunde verdient die naam nauwelijks; buiten de wiskunde is ze waardeloos.
3. De dwingendheid van de wiskundige bewijsvoering wordt aan de conventie ontleend; iedere andere verklaring kan niet anders dan vaag en spekulatief zijn.
4. De helderheid van de wiskundige bewijsvoering is evenzo een gevolg van conventies: hoe preciezer deze vastliggen, hoe duidelijker een gegeven "deductieve" situatie is (vgl. de soepelheid in de maatschappelijke omgang en het bestaan van een etikette).
5. "Begrijpen" is "vertrouwd zijn met de relevante konventies".
6. Het objectieve karakter van de wiskundige gebruiken dient niet overschat te worden - ook overwegingen op minder heldere terreinen (recht, ethica) hebben plaatselijk hetzelfde objectieve karakter.

"Dat is een kwestie van conventie!" is een uitspraak waarmee men te kennen geeft dat men aan de zaak geen problematische kanten ziet. Het ligt dus voor de hand dat door filosofische bezinning bedorven geesten, die overal en altijd problemen willen zien, het verschijnsel van de conventie aan een filosofische beschouwing zullen onderwerpen.

In de wiskunde spelen conventies een belangrijke rol.

Laat ons zien hoe de problemen ontstaan bij conventies in de wiskunde.

Conventies komen voor als definities, als afspraken betreffende notaties. Ze spelen een belangrijke rol bij het formaliseren!

Wordt door iemand beweerd, dat de wiskunde, of een deel ervan (en in zekere zin) berust op conventies, dan komt daar meestal een vorm van formalisatie aan te pas. Wat is formaliseren?

Een omschrijving zullen we in de literatuur niet gemakkelijk vinden. Wel van een formeel systeem.

Inderdaad is "het in een formeel systeem brengen" een standaardvorm van formaliseren. "Formaliseren" is een werkwoord, en suggereert dus een activiteit. Laat ons dan ook het formaliseren beschrijven als een schakel in een proces, in een reeks van met elkaar samenhangende activiteiten.

1. De wiskundige denkt. Hij berekent een getal, differentieert een functie of zoekt een korter bewijs voor een stelling.

2. De wiskundige beweert. Hij stelt bijvoorbeeld een nieuwe theorie op schrift. (Of een oude met nieuwe bewijzen). In ieder geval bestaat de tekst uit een complex van stellingen met hun bewijzen.

Misschien is een axiomastelsel uitgangspunt. Anders is in ieder geval de eerste stelling gebaseerd op reeds bestaande stellingen. Voorzover de duidelijkheid dat vereist, worden hier en daar wat conventies expliciet gesteld (afspraken over notatie). Over afleidingsregels wordt niet gesproken.

3. De metawiskundige formaliseert.

Hij stelt een criterium op waar precies die zinnen aan voldoen welke de wiskundige aanvaardt als geldig binnen zijn theorie. Waarschijnlijk schakelt de metawiskundige voor de opstelling van het criterium formatieregels in, en canoniseert hij de taal van de wiskundige een beetje.

Maar dat zijn bijzaken en ze kunnen gezien worden als onderdeel van het criterium. Balangrijk is natuurlijk dat de zinnen van de wiskundige niet worden gebruikt, maar genoemd. Ze zijn onderwerp van studie geworden. Het criterium voor geldigheid bestaat uit conventies, een stel regels. Wat is nu het verband tussen die regels en het redeneren van de wiskundige?

Men heeft het gevoel dat de regels op een of andere manier het "bewijzen" van de wiskundige representeren.

De regels volgens welke de wiskundige een stelling beweest, zijn nu expliciet gemaakt. Daarmee zou de geldigheid van de theorie tot een kwestie van conventie zijn gereduceerd.

4. De metawiskundige bedrijft wiskunde.

We moeten het bewijzen van een stelling echter niet vergelijken met de opgestelde regels, die het criterium voor geldigheid vormen, maar met het hanteren van die regels. En het gebruik maken van conventies, het aantonen dat uit zekere conventies volgt dat iets (een zin) een bepaalde eigenschap (geldigheid) bezit, is weer een vorm van wiskunde. De metawiskundige kan verder gaan. Hij kan bewijzen dat ten aanzien van de door hem gekozen conventies bepaalde stellingen geldig zijn. Het complex van stellingen groeit uit tot een (wiskundige) theorie, en de tijd is rijp voor formalisatie er van.

Opvallend is dat de metawiskundige voor het bewijs, dat een bepaalde stelling (als uitdrukking) aan de eis voor geldigheid voldoet een andere "berekening" moet uitvoeren als de wiskundige voor het bewijs van de betreffende stelling.

Soms beweert men, dat (in een bepaald geval) de wiskunde van de metawiskundige van meer elementaire aard is. De oorspronkelijke wiskunde is dan gereduceerd tot die elementaire vorm; een deel is "wegge-conventionaliseerd".

Sommige wiskundige (logische) methoden keren bij formalisatie op het meta-niveau terug, als wijze van gebruik van de opgestelde regels, met een verbazingwekkende hardnekkigheid.

Een voorbeeld is modus ponens.

We kunnen die veel gebruikte afleidsregel als expliciete conventie stellen, maar om die conventie dan te kunnen benutten hebben we nu juist weer modus ponens nodig.¹⁾

Verder het bezwaar tegen het logicisme. Iedere geldige rekenkundige uitspraak mag dan binnen mathem. logica (inclusief verzamelingenleer) kunnen worden vertaald en afgeleid, de afleiding zelf is altijd een vorm van calculatie, een vorm van "gewone" rekenkunde bedrijven.

Het bovenstaande is eerder een beschrijving, een reeks algemeenheden over wiskunde en conventies, dan een betoog met uitdagende stellingen. Het gaat er om de gedachten te concentreren en een achtergrond te vormen voor de volgende vragen.

Is er een soort van theorie der conventies mogelijk? Ook in de wiskunde zijn niet alle taaluitingen beweringen.

Austin') heeft de nadruk gelegd op het verschijnsel van de (door hem zo genoemde) performatieven; uitspraken als bevelen, formules die worden gebruikt bij huwelijk, doop, weddenschap.

Conventies (bijvoorbeeld zinnen die beginnen met ('Per definitie is...')) bezitten inderdaad een performatief karakter. En het volgen van een bewering uit conventies als performatieven is iets anders als het volgen van een bewering uit andere beweringen. Ook in de metawiskunde zou dit onderscheid kunnen worden gemaakt.

Is er een theorie van het - gedrag - van - wiskundige - methoden - bij - het - formalisatie - proces mogelijk?

1) Zie LEWIS CAROLL: 'What the tortoise said to Achilles' en W.V.O. QUINE: 'Truth by convention'.

Peter Pijl.

De activiteit van de wiskundige

§1. Abstractie

Hoe is de wiskunde geworteld in het menselijk bestaan?

Als activiteit of als geheel van kennis beschouwd, in beide gevallen doet zich het probleem van de betekenis van wiskundige geldigheid voor. Een gangbare opvatting over die betekenis is die van de abstractie:

"Wiskundige begrippen zijn denkmaaksels, ontstaan door abstractie uit de realiteit, hun samenhang is een logische.

Deze samenhang wordt op abstract niveau onderzocht, een onderzoek dat historisch ontstaan is uit praktische problemen.

Het zuiver abstracte onderzoek wordt voortgezet, enerzijds uit een natuurlijke drang in de mens een bestaande mogelijkheid tot het uiterste voort te zetten, anderzijds omdat het abstracte bouwsel vaak oplossingen voor nieuwe praktische problemen aan de hand doet".

In zijn abstractheid is dit een alleszins aannemelijke beschrijving van de gang van zaken.

De problemen komen echter weer terug als we vragen naar de aard van "abstractie" en "het abstracte". Of er verschillende graden van abstractie zijn, verschillende soorten misschien, en welke graden en soorten van concreetheid hiertegenover staan.

Wat de zijnswijze is van denkmaaksels en waarom hun geldigheid niet psychologisch of sociologisch is op te vatten.

Wat het onderscheid is tussen mathematische abstractie en filosofische reflexie.

§2. Geometrische motieven

In de ornamentkunst onderscheidt men geometrische en niet-geometrische motieven. Deze laatste zijn meestal geïdealiseerde afbeeldingen van planten of dieren.

Dit onderscheid is merkwaardig omdat de geometrie toch alle vormen heet te bestuderen. Nuchter beschouwd bestaat er echter wel degelijk onderscheid tussen geometrische en natuurlijke vormen. "Geometrische" fi-

guren behalve misschien de cirkel, komen, oppervlakkig gezien, in enigszins zuivere vorm vrijwel nergens in de natuur voor.

Naar de zeshoeken van de honingraat moet men al zoeken; pas een diepgaand onderzoek begeleid door enige, zij het nog zo elementaire, kennis van de meetkunde levert meer op.

Ons wordt de meetkundige "abstractie" zeer concreet voorgeschoteld in de vormen van gebouwen en gebruiksvoorwerpen. Voor de primitieve mens moeten de eenvoudige meetkundige figuren ontdekkingen geweest zijn in een proces van bewustwording van vorm. Die bewustvorming vond blijkens de gegevens der archeologie niet plaats als een passief geestesproces. Veeleer was sprake van een actief creatieproces. De vroegste vaten en kruiken hebben vaak vormen van dieren, later pas ontstaan ronde, geometrisch gevormde voorwerpen.

De enige "natuurlijke" geometrische figuur, de cirkel ... is eigenlijk nu nog overheersend in vaatwerk.

De "abstractie" was tegelijk "concretisering" in kunst en techniek. Beschouwen we tegen deze achtergrond meetkundige tekeningen, stereometrische en topologische modellen en zelfs de axiomatische en formele theoriën van de hedendaagse wiskunde, dan wordt misschien ook hierin een concretisering zichtbaar.

Een wiskundige die voor het eerste kennis maakt met een of andere tak van zijn wetenschap zal de begrippen en definities van dat gebied eerst als volkomen abstract en willekeurig ervaren. Als hij echter met het gebied zo vertrouwd is dat hij het zelfstandig verder kan onderzoeken zullen de "mathematische objecten" ervan voor hem een welhaast tastbare realiteit bezitten. Ook in het taalgebruik is dit duidelijk. Wie voor het eerst een beschrijving leest van de (in de topologie befaamde) "tychonoff-ladder" zal onmiddellijk denken aan een met veel scholastieke hocus-pocus geleverd onthologisch godsbewijs.

Een ervaren topoloog zegt echter: "Nou, je neemt een tychonoff-ladder en ". Alsof het een houten schildersladder gold.

Men mag dit dan met Whitehead "misplaced concreteness" noemen, waar het echter gaat om begrip van de relatie abstract-concreet is deze term onbruikbaar omdat ze dit begrip reeds veronderstelt.

§3. Architectuur.

Een aanvulling op de abstractietheorie en een eveneens zeer aannemelijke beschrijving van het werk van de wiskundige is dat hij axiomatische, formaliseerbare systemen bouwt.

De analogie tussen het werk van de architect en dat van de wiskundige is ver door te trekken. De architect is gebonden aan de wetten van de statica, hij kan echter toch iets nieuwe creëren en doet dit naar een norm die een synthese tussen het aestetische en het praktische inhoudt. Ook kan hij ten behoeve van zijn creatie de wetten van de statica verder onderzoeken op hun mogelijkheden. Als hij dan nog zegt met zijn gebouwen het ruimtebewustzijn van de mens te willen ontwikkelen krijgt menig wiskundige het gevoel het verkeerde vak gekozen te hebben. De statica van welk krachtveld heet echter "logica"? Welk "bewustzijn" wordt ontwikkeld door de wiskundige systemen?

§4. Zoeken.

Meer dan aan "bouwen" besteedt de wiskundige echter zijn tijd aan zoeken. Hij vermoedt iets, probeert het te bewijzen, dat lukt niet. Uit de moeilijkheid waarop het afstuit probeert hij een tegenvoorbeeld te construeren. Dat lukt niet; uit die mislukking probeert hij een bewijs te destilleren ... enz.

Het kan zijn dat hij, als het al te lang duurt zijn theorie gaat wantrouwen in verband met dit probleem. Zijn onderzoek richt zich nu op de theorie, meestal vanuit een andere theorie, maar blijft hetzelfde zoekende karakter behouden.

Bij dit zoeken wordt geschreven, gerekend, getekend, gebouwd en afgebroken. Er worden fouten gemaakt en ontdekt en hersteld, er wordt gefantaseerd en gespeculeerd maar ook bewezen en weerlegd. Alles in stricte overeenstemming met de regels van de theorie, die echter naar willekeur gewijzigd kunnen worden. De "logica" van de overeenstemming en niet alleen die van de vooronderstelling is het blijkbaar die het wiskundige zoeken samenhang verleent.

Deze "logica" is het ook die het beschreven proces pas tot zoeken maakt want ze beslist over "gevonden" en "niet gevonden". Het is moeilijk

de wetten van deze logica expliciet te maken vooral als dat weer op wiskundige wijze moet geschieden. Het zou echter te ver gaan te beweren dat het onmogelijk is dat het wiskundige denken zichzelf op deze wijze verheldert.

§5. Formalisme.

Een methode die hierbij gevolgd kan worden is de formalistische. Het wiskundig zoeken wordt telkens begeleid door gebruik van tekensystemen, waarin de (voorlopige!) concretisering van het door "abstractie" gewonnen begrip tot stand komt. Meetkundige figuren, algebraïsche formalismen, getalnotaties enz.

Het is ook mogelijk geheel kunstmatige tekensystemen op te stellen die een idealisering vormen van de actueel gebruikte. De regels en kenmerken van "formele" overeenstemming in elk van deze "natuurlijke" of "kunstmatige" systemen vormen een concretisering van de mathematische overeenstemming waarvan ze zijn afgeleid. Door op wiskundige wijze te abstraheren van de specifieke kenmerken van elk der systemen kan inzicht gewonnen worden in de aard van de mathematische overeenstemming zelf. Dit inzicht wordt op zijn beurt weer concreet gemaakt in nieuwe methoden van notatie, verificatie en calculatie.

§6. Filosofie.

Met inzicht in de techniek van het bouwen hoe belangrijk dit ook is, is weinig omtrent de aard der zwaartekracht en evenmin veel omtrent de zin van het bouwen opgelost.

Fysicus en antropoloog zullen deze vraagstukken aanpakken, maar ze zullen zich al spoedig op filosoferen betrappen. Als ze zich voor die activiteit niet schamen zullen ze misschien vragen stellen als: Hoe is het bouwen geworteld in het menselijk bestaan. Ze zullen in historisch onderzoek ontdekken hoe dit bouwen ons bestaan telkens tegelijk weerspiegelt en verandert, maar ook hoe de zwaartekracht zich onveranderlijk deed gelden. Misschien zullen ze denken aan Heraklitus en Parmenides. En Plato.

Ook in de filosofie is er bouwen, zoeken, afbreken, "abstractie" en "concretisering". Kent ze ook zoiets als zwaartekracht, mathematische overeenstemming?

"Under what ever sky I had been born, since it is the same sky, I should have had the same philosophy", zo drukt Santayana een vertrouwen uit dat hij niet rechtvaardigt.

Vervangen we het woord 'philosophy' door het woord 'mathematics' zijn we dan niet geneigd een kern van waarheid in die uitspraak te vinden? En hebben we niet het gevoel dat het precies die kern is die wiskunde zinvol maakt?

§7. Conclusie.

Ter bevordering van de discussie een voorlopige speculatieve conclusie. Wiskunde is de creatieve verwerkelijking van het vorm-aspect van het menselijk bestaan. Vorm is een altijd aanwezige karaktertrek van werkelijkheid die zijn eigen onveranderlijke impliciete wetmatigheid heeft. Verwerkelijking van het vorm-aspect geschiedt evenals verwerkelijking van andere aspecten in een gecompliceerd dialectisch proces waarvan de abstractie-concretiserings theorie een extreme simplificatie is. De "formalistische" studie van wiskundige systemen is een van de wijzen waarop dit proces zich ontvouwt.

Wiskunde is een onderdeel van de zelfverwerkelijking van de mens en als zodanig verwant met filosofie.

Karakteristiek voor wiskunde is echter de gerichtheid op vorm.

L.E. Fleischhacker.

Wat is de mathematische voorstelling (niet)

Bij een onderzoek naar de aard van de wiskundige voorstelling kan men allereerst trachten deze voorstelling te zien als "beeld" van een in de wiskunde gegeven structuur. Als eerste komt hiervoor natuurlijk in aanmerking het begrip "model". Hiermee wordt bedoeld een abstracte verzameling met daarop een aantal relaties zodanig dat in het geheel van verzameling en relaties de uitspraken van de aan de orde zijnde theorie actuele betekenis krijgen en de axioma's en de daaruit afgeleide stellingen geldig zijn. Zo zal de zin $(a, b) \in R$ uit de theorie worden geïnterpreteerd: "a en b zijn namen van elementen uit de verzameling in het model en deze elementen staan in de door R aangeduide relatie".

Van de mathematische voorstelling verwachten wij dat ze soortgelijke eigenschappen bezit, n.l. dat alle objecten en structuren uit de theorie er in voorkomen en dat aan alle onderlinge relaties in de theorie beschreven voldaan is.

Desalniettemin is het niet mogelijk om de voorstelling te zien als "beeld van het model". Als bezwaren tegen deze identificatie kan men aanvoeren:

1e) De tijdsveranderlijkheid van de voorstelling

Het model van een theorie is eenmaal ingevoerd een onveranderlijk geheel. Hiertegenover is onze voorstelling aan voortdurende verandering onderhevig: Een gedurende onze studie afgeleide stelling zal als nieuwe verworvenheid aan de voorstelling worden toegevoegd. We hebben de mogelijkheid om onderdelen van de voorstelling sterk te vergroten om onze aandacht geheel te richten op wat er gebeurt in de omgeving van een vast punt. Dit ziet men b.v. aan het gereken met ϵ en δ in de analyse, waar omgevingen honderdvoudig vergroot worden zonder dat het beeld wat we voor ogen hebben verandert.

In de topologie zal men om zich voor te stellen dat men een topologische "cirkel" bestudeert en niet een planimetrische deze cirkel een deuk geven of nog liever zich voorstellen dat de cirkel een deuk krijgt om toch vooral het topologische er aan te zien.

2e) De onvolledigheid en eindigheid van de voorstelling

Het model is altijd volledig d.w.z. alles wat volgens de theorie bestaat is aanwezig in het model en iets dat geldig is in de theorie zal ook gelden in het model.

Daarentegen zal onze voorstelling altijd zijn opgebouwd uit een eindig aantal objecten, zoals punten (die we ons zichtbaar voorstellen hetgeen impliceert met positieve oppervlakte - iets wat wij onmiddellijk geneigd zijn te loochenen) getallen (gehele getallen of breuken met liefst niet te grote teller en noemer), reële getallen waarvan de decimale ontwikkeling slechts voor een zeer klein en eindig deel voorgesteld is. Meetkundige objecten als cirkels, lijnstukken en stukjes oppervlak of ruimte zien wij ook als geheel; desnoods kunnen we er losse punten in aanwijzen maar we zijn niet in staat ons een lijnstuk voor te stellen als de vereniging van zijn punten.

3e) Het visuele aspect van de voorstelling

Zolang de wiskundige nog over het algemeen twee functionerende ogen bezit waarmee hij gedurende zijn opleiding een groot aantal "verhelderende" plaatjes opneemt zal hij ondanks het dogma waarin hem wordt verboden op grond van figuren conclusies te trekken aan deze bedriegelijke objecten zijn ideeën en stellingen ontleenen.

Zo zal men op een bord waarop topologie bedreven is naast de veelheid van onbegrijpelijke formules en symbolen altijd plaatjes aantreffen van punten in cirkelvormige lijntjes opgesloten als ware de behandelde ruimte gewoon een stukje van het bord. Een krijtstreep kan even goed staan voor een reëel interval, de gehele reële rechte of de lange lijn (die topologisch niet in het bord is in te bedden) als voor een willekeurige andere lineair geordende ruimte (waarbij met het vingertje de nodige leemten zijn aangebracht).

Nog radicaler zijn we als het erom gaat oneindige producten voor te stellen. Hiervoor is nog altijd het plaatje gebruikelijk waarin een rechthoek wordt weergegeven als het product van twee gesloten (zie de franje aan de eindpunten) intervallen.

4e) Het niet-visuele aspect van de voorstelling

Omdat we gezien het bovenstaande bij lange na niet zichtbaar voor de geest kunnen brengen wat de objecten zijn waarover we denken nemen we

genoegen met een onvolledig plaatje wat suggereert hoe de structuur zich verder gedraagt.

Als voorbeeld wil ik noemen het rijtje punten convergerende naar een limietpunt. Aan een plaatje waar $+6$ punten ingetekend zijn heeft de wiskundige voldoende om precies te weten "waarover het gaat".

Van een structuur als de ordinaal getallen tot het eerste overaftelbare kennen we ook alleen hier en daar een speciaal ordinaalgetal zoals $0, 1, 2, 3, \omega, \omega+1, \omega \cdot 2, \omega^2$, en Ω al dan niet opgenomen maar als grens altijd aanwezig. Trekken we tussen deze paar ordinaalgetallen en hun respectievelijke opvolgers lijntjes dan hebben we ons de lange lijn voorgesteld.

In bovengenoemde opzichten is onze voorstelling van een wiskundige structuur onvoldoende om de eigenschappen van die structuur recht te doen. Toch ervaren wij dat juist het werken met deze onvolledige objecten ons vaak tot nieuw inzicht brengt.

Soms is dit zeer begrijpelijk. We zien op een gegeven moment dat in onze voorstelling een bepaald object een bepaalde eigenschap bezit. We proberen te begrijpen waarom dit zo is (als deze eigenschap tenminste niet op toeval blijkt te berusten). Nadat we op deze wijze tot een "bewijs" van de eigenschap zijn gekomen kunnen we nagaan welke eigenschappen van het basisobject gebruikt zijn waarna we de afgeleide stelling kunnen onderbrengen in de gegeneraliseerde theorie waar hij thuis hoort.

Het gevaar van deze methode is dat maar al te vaak niet onderkende specifieke eigenschappen van het plaatje gebruikt worden (De wiskundige dient dan ook in het bezit te zijn van een grote hoeveelheid tegen-voorbeelden tegen alle mooie eigenschappen van onze gedachtenwereld). Er zijn dan twee mogelijkheden: mogelijk is het bewijs te repareren door de onderkende eigenschap als nieuw axioma in te voeren (of uit andere af te leiden voor die situaties waar zij geldt); zoniet dan is de stelling verloren maar meestal een geheel nieuw stuk wiskunde aan het licht getreden.

Opmerkelijk is dat de wiskundige ook nog met dezelfde plaatjes werkt als de behandelde structuur in het geheel niets meer heeft dat lijkt op de door het krijgt weergegeven vormen. De wiskundige weet dit doende

precies wat de niet weergegeven eigenschappen zijn die in zijn betoog optreden: zij zijn niet in de figuur aanwezig doch zijn als "verkeersregels" aanwezig bij de persoon die met de figuur werkt.

Deze extra informatie is dusdanig overdraagbaar dat de ene wiskundige aan de hand van de zeer onvolledige figuur bij een andere wiskundige een voorstelling van het zelfde object kan aanroepen.

Zo zal het bekende plaatje van een rijtje punten convergerende naar een limietpunt door een andere wiskundige onmiddellijk begrepen worden. De tekenaar kan ook bedoeld hebben een overaftelbaar rijtje; als hij dit vermeldt zal zijn toehoorder direct zijn voorstelling aan deze wijziging aanpassen.

Uit het bovenstaande mag dan gebleken zijn dat de wiskundige voorstelling zich in vele opzichten anders gedraagt dan het wiskundige model, het is nog minder aantrekkelijk om de voorstelling te zien als beeld van de wiskundige theorie.

In de eerste plaats zijn wij geneigd om de voorstelling als iets concreets te zien terwijl de theorie iets is wat vaag rondwolkt en waarvan de logici ons geleerd hebben dat wij haar niet bezitten. We bezitten hoogstens een eindig gedeelte van de weergave van die theorie in een al dan niet formele taal. Dit gedeelte is even "klein" t.o.v. de hele theorie als het plaatje t.o.v. het model en de adequaatheid van de weergave (formele consistentie) is even dubieus als die van de voorstelling.

In de tweede plaats bezit één theorie meerdere modellen, die met enige moeite kunnen worden ervaren in werkelijk verschillende voorstellingen. Ook hier gedraagt de voorstelling zich meer als het model.

Verder ervaren wij in onze voorstelling eigenschappen meer als "waar" resp. "onwaar" dan als "bewijsbaar" of "weerlegbaar".

Tenslotte nog enkele bijzondere voorbeelden van specifieke voorstellingsproblemen.

- I. De voorstelling van een interval leert of het interval open of gesloten of half open half gesloten is hetzij door niet visuele informatie hetzij visueel door totaal buiten de bestudeerde struc-

tuur vallende franje die wij gebruiken als afkorting voor de niet visuele informatie.

- II. Hoewel in een ruimte als het platte vlak of de gewone 3 dimensionale ruimte de begrippen "open" en "gesloten" geheel visueel voorstelbaar zijn is het niet duidelijk of een concrete steen correspondeert met een open of een gesloten verzameling (of misschien met een lelijke verzameling die open noch gesloten is?). En als we het van de steen weten wat dan met een water-druppel te beginnen?
- III. De Hilbertruimte laat zich voorstellen als deelruimte van het product van aftelbaar veel reële rechten. De conditie dat de som $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ eindig moet zijn verwerken we in ons beeld door ons een bundel van aftelbaar veel coördinaat-assen te denken waarom heen de ruimte als een soort "hyperboloïde structuur" gelegen is. Dit intuïtieve beeld is wiskundig gezien onzinnig.
- IV. Van nature zal men altijd geneigd blijven de ordinaalgetallen kleiner dan het eerste overaftelbare te zien als een rijtje dat convergeert naar het eerste overaftelbare ordinaalgetal. Dit doende doet men vele essentiële eigenschappen van het begrip "rij" geweld aan.
- V. Ondanks de constructie van vele "wilde" en "exotische" inbeddingen van bekende mooie figuren is men geneigd bij iedere aanroep van een object zijn "tamme" vorm voor de geest te halen tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. De gronden waarop we de "tamme" vorm verkiezen vallen vaak geheel buiten de aan de orde zijnde theorie (zo zij wiskundig zijn).
- VI. Het is lastig om bij een probleem over objecten die in een plat vlak gelegen zijn (b.v. het bord) op het idee te komen de oplossing te zoeken door de ruimte er bij te betrekken.

Over de communicatie van de voorstelling nog het volgende: De combinatie van visuele informatie (uit het plaatje) en abstracte informatie als toelichting is goed overdraagbaar en maakt het mogelijk dat wiskundigen elkaar begrijpen. In hoeverre wij onze onbevooroordeeldheid ten

opzichte van andere mogelijke wiskunde's aantasten is moeilijk na te gaan.

De historische groei van de collectie der visuele "standaard voorstellingen" met hun informatie maakt het ons onmogelijk ons in de positie te plaatsen van de wiskundigen van langere tijd geleden (of in de verre of nabijere toekomst.)

Conclusies:

- I. De wiskundige voorstelling is eerder te zien als beeld van een model dan als beeld van een theorie.
- II. Tegen de voorstelling als beeld van het model zijn als bezwaren aan te voeren: 1) de veranderlijkheid, 2) de onvolledigheid, 3) de sterke nadruk op de visuele aspecten en 4) de afhankelijkheid van de niet visuele onderdelen.
- III. Ondanks de in II genoemde beperkingen bevat de voorstelling voldoende informatie om er wiskunde in te bedrijven; nieuwe ideeën worden aan de voorstelling ontleend.
- IV. Een onderzoek van de voorstelling met wiskundige middelen en strengheid zal slechts leiden tot sophismen en schijnparadoxen.
- V. De wiskundige voorstelling is door zijn visueel en eindig aspect goed communicabel. Dit ondanks de impredicatieve aspecten van de grote hoeveelheid abstracte informatie die tegelijkertijd wordt medegedeeld.

P. van Emde Boas

De verantwoordelijkheid van de wiskundige.

Hoogstwaarschijnlijk zal het U verbazen, misschien zelfs ergeren tussen de typische wiskundige onderwerpen van dit congres deze moralistisch klinkende titel aan te treffen.

Het gaat toch niet aan, zult U zeggen de wiskundigen van nu verantwoordelijk te stellen voor eventuele schadelijke toepassingen die misschien over honderd jaar van hun theorien gemaakt zullen worden. Wat zouden ze trouwens moeten doen om dat te voorkomen, zonder ook heilzame toepassingen onmogelijk te maken? Deze vraag houdt de gedachte aan een beknutting van de wetenschappelijke werkzaamheden in. Deze gedachte is in de huidige situatie absurd en het is dan ook niet voor zo'n beknutting, maar voor een uitbreiding van die werkzaamheden dat ik wil pleiten.

Iedere wiskundige kan weten dat hij, behalve de resultaten die uiteindelijk op papier komen door zijn activiteit nog iets anders doet ontstaan, n.l. een verandering van zichzelf. Hij wint inzicht, begrip, niet alleen van het wiskundige onderwerp waar hij zich op richt, maar ook van de bezigheid van het zich erop richten.

Hij is geneigd behalve de wiskundige theorie ook dit inzicht te gaan ontwikkelen.

Het zal zich over een breder gebied van wetenschap of misschien van menselijk handelen en beleven in het algemeen gaan uitstrekken. Kortom, hij zal geneigd zijn ook een beetje, of misschien wel helemaal, filosoof te worden. Vele van de grootste filosofen zijn als wiskundigen begonnen: Descartes, Leibnitz, Kant, Bergson, Husserl om maar enkelen te noemen.

Het komt mij voor dat deze neiging in onze tijd steeds meer onderhevig wordt aan een taboe. Misschien hangt dit samen met de sterke technocratische tendenzen in onze samenleving. Deskundigen op vele terreinen onttelen gezag aan mathematische methoden die voor de buitenstaander een ondoorzichtig, vaak zelfs magisch karakter dragen.

Een algemeen verbreid inzicht in het intuïtief- creatieve aspect van de ontstaanswijze van wiskundige methoden zou dit gezag wel eens kunnen ondermijnen!

Als hogepriesters zich gaan bezinnen worden ze vaak een bron van ketterij.

Ik spreek van een taboe omdat inderdaad de karakteristieke kenmerken daarvan aanwezig zijn: Er is een algemene neiging die een machtspositie dreigt te ondermijnen. De uitingen van die neiging zijn in de privé sfeer beperkt toegelaten doch komen in de openbare sfeer hoogstens schertsend of in beeldspraak (Hogepriesters) d.w.z. in verhulde vorm aan de orde. Alle individuen zijn geneigd te denken dat die neiging in hun geval uitzonderlijk, abnormaal is.

Dit lijkt erg overdreven maar aangezien de technocratische tendens zijn extreem nog lang niet bereikt schijnt te hebben zal dit taboe nog wel in kracht toenemen.

Laten we proberen iets van de aard van die tendens te bgrijpen.

Stel we hebben een doel. Een echt doel, niet een dat we duidelijk als middel voor een ander doel kunnen zien. Zo'n uiteindelijke doel kennen we nooit precies, het is iets dat ook naar gekendheid, nog moet komen, een utopie, een ideaal, een hoop, een verwachting, kortom iets dat nog niet is.

Stel nu we streven, met technische middelen uiteraard, dit doel na. Zo'n streven levert vaak een indrukwekkend resultaat op (b.v. een revolutie!). Hier zien we duidelijk in welk opzicht techniek (en ook wetenschap!) niet "waardevrij" is.

Het resultaat is veel concreter dan het doel was en komt er al gauw voor in de plaats. Het resultaat van de middelen verduistert het doel. (vgl. bijvoorb. Russische revolutie).

Bezinning, die het resultaat kritisch met het doel wil vergelijken is dan niet zo welkom, en ook zeer moeilijk geworden.

Techniek bepaalt dus vaak de richting waarin een doel, (een waarde!) geconcretiseerd wordt.

Voorals de doelbeleving, zoals in onze eeuw, zeer wankel is, is het houvast van het resultaat zeer welkom. Het resultaat heeft a.h.w. bij voorbaat het karakter van succes.

Dit verschijnsel doet zich voor in maatschappelijk verband, maar ook in het leven van het individu.

Overziet U b.v. eens Uw loopbaan, zeg vanaf Uw twaalfde jaar. Wat U zich van alles wat U ondernam heeft voorgesteld, wat het geworden is en hoe U zich verzoend hebt.

Ik wil niet, zeker op mijn leeftijd niet, beweren dat zoals ik een oude dame eens heb horen zeggen: het leven "één aaneenschakeling van ellende en teleurstellingen" is. Ik wil alleen een essentieel aspect van ons opzettelijk streven tonen. Het leven zij verder wat het is.

Nu zult U zeggen, dat er één gebied is waarop die doelverduistering weinig kans krijgt.

N.l. juist in de wiskunde, daar weten we meestal drommels goed b.v. of we een vermoeden als bewezen, een probleem als opgelost moeten beschouwen.

Hier ligt inderdaad een waarde, ik zou bijna zeggen een ideaal van het wiskundig denken: de welbepaaldheid, de exactheid die de wiskunde zoveel gezag verleent.

Er is wel eens gezegd dat deze welbepaaldheid bereikt wordt door de formele wijze van werken of het zich houden aan stelsels van afspraken, conventies, spelregels.

Ik kan het ermee eens zijn dat het doel van de exactheid met deze middelen wordt nagestreefd. Of het de enige, of enig mogelijke middelen zijn is de vraag.

Wat deze middelen precies inhouden is wel enigszins maar nog niet geheel opgehelderd sinds Hilbert schreef: (1922).

Meine Untersuchungen zur Neubegründung der Mathematik bezwecken nichts Geringeres als die allgemeinen Zweifel an der Sicherheit des mathematischen Schliessens definitiv aus der Welt zu schaffen.

Ook deze uitspraak drukt overigens juist een streven naar "Sicherkeits des mathematischen Schliessens" uit.

Kortom formeel en conventioneel denken lijken mij geen oorsprong of doel, maar middel van de wiskunde.

Wie durft de resultaten van deze middelen te confronteren met oorsprong en doel? U zult ongetwijfeld denken aan Brouwer, die inderdaad die moed had. In het licht van deze beschouwing is het interessant te zien hoe technisch de grondslagen van het intuitionisme al weer geworden zijn. Toch is in de begrippen spreiding en onbepaald voortlopende rij nog terug te vinden de problematiek van de regel-gebonden creatie, die Brouwer blijkbaar bij reflexie op de wiskundige activiteit aantrof. Ook zag hij het verband van deze creatie met het probleem der subjectieve tijd en met de muziek en de artistieke creatie. Ook probeerde hij in vele van zijn geschriften het isolement van de wiskunde t.o.v. andere levensgebieden te doorbreken. Ik hoop dat er onder U zullen zijn die in dit opzicht zijn voorbeeld zullen volgen: Te proberen ondanks veel kritiek en tegenwerking ook aan niet wiskundig technische gedachten over de wiskunde uiting te geven. Ook een beetje filosoof durven zijn en te proberen een denkvorm die in onze tijd een zeer belangrijke rol speelt als denkvorm te leren begrijpen. Opdat ze ons in haar objectivaties niet boven het hoofd groeit.

(Voordracht gehouden door L.E. Fleischhacker op het 4^e Nederlands Mathematisch Congres op 19-4-1968).

Nawoord

De in deze syllabus weergegeven inleidingen geven een onvolledig beeld van de discussies der werkgroep. In deze discussies vond een confrontatie plaats tussen filosofische methodologische en pragmatische opvattingen over de wiskunde met de praktijk van de wiskundebeoefening.

Specifiek filosofische problemen zoals: teken en betekenis, abstractie en werkelijkheid, creatie en reproductie, kwamen in deze confrontatie op concrete wijze naar voren.

Hoe komt een wiskundig betoog aan zijn helderheid en dwingendheid en wat is de samenhang tussen beide. Een heldere redenering kan fout zijn, een sluitend betoog volkomen ondoorzichtig.

Wat doet formalisatie toe of af aan helderheid en dwingendheid?

Hoe kan het dat mathematische begrippen zoals waarschijnlijkheid zich in de natuurwetenschap een niet uitsluitend wiskundige concreetheid verwerven. Wat is de rol van conventie in de wiskunde?

Hoe is het spelkarakter van de wiskunde te rijmen met de toepasbaarheid, wat is het verschil tussen een "echt spel" zoals b.v. het schaakspel en het "mathematische spel"? Waar gaat de wiskunde over, wat is het object van de mathematische kennis- een oude vraag met vele onbevredigende antwoorden.

Zoals bekend is het in sommige kringen gebruikelijk vragen als de bovengenoemde als zinloos van de hand te wijzen of te eisen dat reeds van te voren wordt gespecificeerd wat voor soort antwoord verwacht wordt. Of soms zelfs de wetenschap als een dogmatische religie op te vatten en te menen dat de antwoorden op deze vragen reeds voorgoed vastgesteld zijn.

Daarmee wordt echter het zoekende karakter, dat gemeenschappelijk is aan wetenschap en filosofie miskend. Toch is steeds dat zoeken langs alle methodologische vooroordelen heen voor de ontwikkeling van de wetenschap zeer belangrijk geweest.

Misschien is er een zeker cynisme ontstaan als reactie op een frustratie samenhangend met overspecialisatie, ontmenselijking van de wetenschapsbeoefening en angst voor de toekomst.

Een beleving van zinloosheid die hiermee samengaat wordt overgecompenseerd door nog sterkere specialisatie en concentratie op de voor de hand liggende problemen die een schijn van concreetheid hebben. Dit belemmert zowel het menselijk als het wetenschappelijk contact. Het dreigt te leiden tot een vervreemding en verstarring waaraan psychologisch wel een diepgewortelde angst ten grondslag zal liggen. Tegengestelde tendenzen, pogingen contact te vinden over de vertakkingen heen, neigingen tot open, spelend zoeken zijn zeker niet verdwenen. Niet zwaarwichtig maar toch buitengewoon serieus. We hopen onze werkgroep in deze geest te kunnen voortzetten.

L.F.

Literatuur.

De hiervolgende literatuurlijst is samengesteld met als belangrijkste doel zoveel mogelijk aanknopingspunten te bieden voor een wijsgerige benadering van de wiskunde.

Naar volledigheid werd niet gestreefd, titels werden opgenomen op grond van hun mogelijk, vermoedelijk of duidelijk verband met het onderwerp. Technische literatuur over grondslagenonderzoek en logica is niet opgenomen, behalve werken die ook wijsgerige hoofdstukken bevatten of werken die van grote betekenis zijn geweest in de ontwikkeling van het denken over de wiskunde. Op dezelfde gronden werden ook enige filosofische werken opgenomen die als geheel niet direct op de wiskunde betrekking hebben.

De laatste kolom bevat bibliografische opmerkingen in tekenvorm, ontbreken van zo'n teken kan voortkomen uit gebrek aan informatie aan de zijde van de opsteller. Werken van voor 1900 zijn alleen incidenteel opgenomen.

L.F.

Verklaring der tekens.

A algemeen werk.	! opmerkelijke titel.
B bevat een uitgebreide bibliografie.	? verband met onderwerp
D dissertatie.	dubieus.
O oratie of openbare les.	* belangrijk werk.
P bij uitstek filosofisch.	⊕ aanbevolen voor oriënter-
S bijdrage aan een symposium.	ende studie.
T enigszins technisch.	
V verzamelwerk.	
Jaartallen < 1900 of ≥ 1950 zijn onderstreept.	

Verklaring van afkortingen voor tijdschrifttitels achteraan.

Ackermann W.		
1927 ZMU58	Was ist Mathematik.	
Ambrose A.		
1935 MIND44	Finitism in Mathematics I,II.	
<u>1955</u> JP52	Wittgenstein on questions in the foundations of mathematics.	
<u>1956</u> PAS56	On entailment and logical nessecity.	
Apostle H.G.		
<u>1952</u>	Aristotles philosophy of mathematics.	*
Averbach F.		
1924	Die Furcht vor der Mathematik und ihre Überwindung.	!
Ayer A.J.		
1946	Language, truth and logic.	
<u>1951</u> ASS25	On what there is.	S
Baayen P.C.		
<u>1967</u>	Wiskundige Taal.	O!
Backbier F.G.		
<u>1960</u>	Wiskunde in dienst van de Natuurweten- schap.	D(Utrecht)
Baldus R.		
1924	Formalismus and Intuitionismus in der Mathematik.	
Banks P.		
<u>1950</u> DS3	On the Philosophical interpretation of logic: An Aristotelian Dialogue.	
Bar-Hillel Y.		
1947 PPRS	The revival of "The liar".	
<u>ed 1956</u>	Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proceedings of the congress).	V

ed <u>1961</u>	Essays on the Foundations of Mathematics. Fraenkel Anniversary Volume.	
Barker SF		
<u>1964</u>	Philosophy of Mathematics.	
Barnau J.M.		
1926	De Onbemindheid der wiskunde.	!
Bartlett J.M.		
<u>1961</u>	Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der logik von Gottlob Frege.	
Baumrin B.		
(ed) <u>1966</u>	Philosophy of Science.	V
Barzin M.		
1933-et A.Errera BMSR35	La logique de M. Brouwer	
1935 CR2CNCB	Sur les demonstrations de non contradiction des axiomes.	
1936 EM34	Sur la crise contemporaine des mathématiques.	
Baudet P.J.H.		
<u>1868-73</u>	& Baumann J.J. Die lehren von Raum, Zeit und Mathematik	
1918	Het limietbegrip.	!
Bayer R.		
(ed) 1950 ASI1089,1105	Philosophie XI, XIII	V
Baylis CA		
1936 PS3	Are some propositions neither true nor false?	
Becker O.		
1923 HJ6	Beitrage zur phenomenologische Begründung der Geometrie und ihren physikalischen Anwendungen.	P
1927 HJ8	Mathematische Existenz.	*P

<u>1954</u>	Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher entwicklung.	! P
<u>1959</u>	Grösse und Grenze der Mathematische Denkweise.	⊕
Behmann H. 1927	Mathematik und Logik.	
Benacerraf & Putnam <u>1964</u>	Philosophy of Mathematics, selected readings.	V ⊕ B
Bennett J. <u>1960</u> AN 121	A myth about logical Necessity.	!
<u>1961</u> ASS35	On being forced to a conclusion.	!
Bense M. 1948	Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik.	!
Bentley A.F. 1932	Linguistic Analysis of Mathematics.	!
Berghuys J.J.W. <u>1952</u>	De grondslagen der aanschouwelijke meetkunde.	⊕ D
Bergson H. <u>1889</u>	Essay sur les données immédiates de la conscience.	P
1922	Durée et simultanéité. (nooit herdrukt zie: Heisdieck 1950)	

Berkeley H. 1910	Mysticism in modern Mathematics.	!
Bernays P. 1922 DN10	Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik.	
1922 DMV31	Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik.	
1923 MA90	Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: "Über die Zahlen als Zeichen"	
1928 DN16	Über Nelsons Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik.	
1932 IMKZ2	Methoden des Nachweises von Widerspruchs freiheit und ihre Grenzen.	T
1934	Quelques point essentiels de la métamathématique.	T
1934 EM34	Sur le platonisme dans les Mathématiques.	
1935 H35	Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik.	T
<u>1954</u> RIP8	Zur beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung.	
<u>1960</u> BP510	Comment on Ludwig Wittgensteins Remarks on the Foundations of Mathematics.	

Beth E.W.	Voor een volledige Bibliografie van Beth's werken zie J.F. Staal in: E.W. Beth Memorial Colloquium 1964 (ed. J.L. Destouches).	
1935	Rede en aanschouwing in de wiskunde.	D (Utrecht)
1938 ANTW32	De paradoxen.	
1938 EU15	Getalbegrip en tijdsaanschouwing.	!
1940	Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde.	⊕
1942 ANTW35	De paradoxen: een repliek.	!
1943 GIDS107	Verleden en toekomst der wetenschappelijke wijsbegeerte.	
1944 ANTW37	Over formele en inhoudslogica.	
1944	De Wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano.	
1946	De strekking en het bestaansrecht der metaphysica in verband met de toekomst der wijsbegeerte.	!
1946 GIDS109	Metaphysica en wetenschap.	
1948	Wijsbegeerte der wiskunde.	⊕ B
1948	Significs and logic. (Uit feestbundel Pos)	
<u>1950</u>	Les fondaments logiques des mathématiques.	

<u>1950</u>	Wijsgerige ruimteleer.	⊗ B
<u>1952</u> (ANTW45)	Logique scolastique et logique mathématique.	
<u>1955</u> KA18/13	Semantic entailment and formal derivability.	*-
<u>1956</u> KS4P	Über Lockes Allgemeines Dreieck.	*-
<u>1957</u> DES	Le savoir deductif dans la pensée cartésienne.	
<u>1958</u> DIA12	"Cogito ergo sum" Raisonnement ou intuition?	
<u>1959</u>	The foundations of Mathematics.	AT*B
<u>1964</u>	Door wetenschap tot wijsheid (opstellen).	⊗
<u>1965</u>	Mathematical Thought.	⊗
Birgukow B.V. <u>1964</u>	Two Soviet studies on Frege. (Trans. by I Angelli).	!
Birkmeier W. 1923	Über den Bildungswert der Mathematik. Eine Beitrag für philosophischen Pädagogik.	
Birkhoff D. 1933	Aesthetic Measure.	!
Black M. 1933	The nature of mathematics.	
1948 AN8	The semantic definition of truth.	

Bochenski J.M. <u>1956</u>	&Church &Goodman: The problem of Universals. A Symposium.	V
Bôcher M. 1905 BAMS11	The fundamental conceptions and methods of Mathematics.	
Bochner S. <u>1966</u>	The role of mathematics in the rise of science.	
Folzano <u>1851</u> (repr. 1950)	Die Paradoxien des Unendlichen.	
(1930/48)	Schriften (Königl. Böhme ges. der Wiss.)	
<u>1810</u> (repr. 1926)	Philosophie der Mathematik oder Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik.	
Bonnet J.G. 1902	La géométrie atomique rationnelle.	
Bouligand G. 1949	&J. Desgranges Le déclin des absolus mathématico logiques.	O. 10
Bourbaki N. 1948	L'Architecture des Mathématiques.	O. 10
Boutroux P. 1920	1 ^{re} Ideal scientifique des Mathématiques.	O. 10

Brix W.		
<u>1889</u>	Die erkenntnistheoretische und logische Bedeutung des mathematischen Zahlbegriffs.	
Brouwer L.E.J.		
1907	Over de grondslagen der wiskunde.	*D(Amst)
1908 (AN)TW2	De onbetrouwbaarheid der logische principes.	*
1912	Intuitionisme en formalisme.	
1913 BAM20	Intuitionism and formalism.	
1919	Wiskunde, waarheid, werkelijkheid.	P
1924 CRELLE154	Über die Bedeutung des satzes vom ausgeslossenen Dritten in der Mathematik ins bezondere in der Funktionentheorie.	
1928	Die Struktur des Kontinuums.	*
1929 MMP36	Mathematik, Wissenschaft und Sprache.	
1933 EU	Weten, willen, spreken.	
1942 IM4	Zum freien Werden von Mengen und Funktionen.	*
1947 IM9	Richtlijnen der intuitionistische wiskunde.	*
1948 XthC	Consciousness, philosophy an Mathematics.	⊕
1948 IM10	Essentieel negatieve eigenschappen.	
1948 IM10	Opmerkingen over het beginsel van het uitge- sloten derde en over negatieve asserties.	
1949 IM11	Contradictoriteit in de elementaire meetkunde.	

1950 CRASP230	Remarques sur la notion d'ordre.	
1954	An example of contradictority in the classical theory of functions.	!
<u>1951</u> IM12	On order in the continuum and the relation of truth to non-contradictority.	
Brunschvicq L. 1922	Les étapes de la philosophie des mathématiques.	
1935	Les âges de l'intelligence.	P
1937	Le rôle du pythagorisme dans l'évolution des idées.	!
Bruyn N.G. de 1946	Enige beschouwingen over de waarde der wiskunde.	! 0
Cantor G. <u>(1967)</u> (ed)	(Meschkowski ed) Probleme des Unendlichen, Werk und Leben Georg Cantors.	*
Cantor M. <u>1964</u>	Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker.	
Carnap R. 1922 KS56	Der Raum.	
1934,37	The logical syntax of language.	*AP
1931 ER1	Bericht über Untersuchungen zur alllgemeinen Axiomatik.	!

1931 ER2	Die logizistische Grundlegung der Mathematik.	
1934 MMP41	Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik.	
1935 MMP42	Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik.	
1939 IEUS	Foundations of logic and Mathematics.	
1947-56	Meaning and Necessity.	*AP
<u>1959</u> LP	The old and the new logic.	!
Cassirer E.		
1910	Substanzbegriff und Funktionsbegriff.	
1929	Die Philosophie der Symbolischen Formen.	*AP
Castañeda H.N.		
<u>1959</u> BP404	Arithmetic and Reality.	!
<u>1961</u> MIND70	On mathematical proofs and meaning.	
Cavaillès J.		
1937 AS1608	Méthode Axiomatique et formalisme.	
Chomsky N.		
<u>1958-59</u> PAS59	(&Scheffler) What is said to be.	!
Chevalley C.		
1932 RPF/E113	(&Dandieu) Logique Hilbertienne et psychologie.	!

1935 RMM42	Variations de style mathématique.	!
Church A.		
1928 BAMS34	On the law of the excluded middle.	
1934 AMM41	The Richard Paradox.	
1942 JSL7	On sense and denotation.	
1936-38 JSL1,3	A bibliography of Symbolic logic.	*B
<u>1951</u>	A formulation of the logic of sense and denotation (in Structure, Method and Meaning).	
<u>1958</u> JP55	Onthological Commitment.	
Chwistek L.		
1933 EK3	Die Nominalistische Grundlegung der Mathematik.	
1946	La méthode générale des sciences positives.	
1947	The limits of science.	!
Clifford W.K.		
<u>1885</u>	The common sense of the exact sciences.	
<u>1879</u>	Platons Ideenlehre und die Mathematik.	
<u>1883</u>	Das Prinzip der infinitesimale Methode und seine Geschichte.	
Cohen H.		
<u>1885</u>	Kants Theorie der Erfahrung.	AP

Comte A.

1878

Essay de philosophie Mathématique.

!

Couturat L.

1901

La logique de Leibnitz d'après des documents inédits.

1905

Les principes des Mathématiques.

1908 (transl.)

Die philosophische Prinzipien der Mathematik.

!

Cramer W.

1937

Das problem der reinen Anschauung.
Eine erkenntnistheoretischen Untersuchung
der Prinzipien der Mathematik.

Crijns L.

1942 ANTW35

De paradoxen.

Curry H.B.

1939 JUS97

DIA8

Remarks on the definition and
Nature of Mathematics.

1941 BAMS47

Some aspects of the problem of mathematical rigor.

!

1948 XthC

Languages and formal Systems.

1950 PR59

Language, Metalanguage and Formal System.

1951 AP4

Philosophische Bemerkungen zu einigen
Probleme der Mathematische Logik.

1951

Outlines of a formalist philosophy of
mathematics.

1953 MIND62	Mathematics, Syntactics and Logic.	
Danzig T. 1930	Number, The language of Science.	
Danzig D. van 1929 EU5	Woord en Werktuig.	
1933 EU9	Over de elementen van het wiskundig denken.	
1942 IM4	On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics.	
1946 SGD	Wiskunde, logica, ervaringswetenschappen.	
Darbon A. 1949	La philosophie des Mathématiques.	
1951	Une doctrine de l'infini.	
Dedekind R. 1887	Was sind und was sollen die Zahlen.	*
Demel S. 1929	Platons Verhältnis zur Mathematik.	
Destouches J.L. 1951 JM13	Sur la mécanique classique et l'intuitionisme.	
Destouches Fèrrier P. 1947 CRAS225	Esquisses d'une mathématique positive.	
Dewey 1916	Essays in experimental logic.	*P

Dieudonné J.

1949

L'axiomatique dans les mathématiques modernes.

Donadt A.

1881

Das Mathematische Raumproblem und die geometrische axiome.

Dresden A.

1924 BAMS30

Brouwers contributions to the foundations of mathematics,

1928 BAMS34

Some philosophical aspects of mathematics.

1929 SCA45

Mathematical Certainty.

Dubislaw W.

1925 ADP5

Über das Verhältnis von Logik zur Mathematik.

1926

Über die Definition.

1930 ER1

Über den sogenannten Gegenstand der Mathematik.

1932

Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart.

Dugas R.

1940

Essai sur l'incompréhension mathématique.

Duhamel J.M.C.

1877-85

Des Méthodes dans les sciences du raisonnement.

Dummett M.A.E.	
1955 PR64	Frege on Functions: A Reply.
1956 PR65	Note: Frege on Functions.
1956 PR65	Nominalism.
1957 PR66	Constructionalism.
1958-59 PAS59	Truth. !
1959 PR68.BP491	Wittgensteins Philosophy of Mathematics.
Errera A.	
1933 RMM40	Quelques remarques sur les mathématiques intuitionistes.
1935 M9	Sur le principe du tiers exclue.
1936 EM34	Sur la crise contemporaine des mathématiques.
Feigl H.&M. Brodbeck	
1953	Readings in the Philosophy of Science. V
Félix L.	
1957	L'aspect moderne des mathématiques.
Fraenkel A.A.	
1930 ER1	Die heutige Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik.
1936 EM34	Sur la notion d'existence dans les mathématiques.
1936 EM34	Sur l'axiome du choix.

1959	Philosophie der Mathematik. (in F. Heinemann "Die Phil. des 20.jh.)	
(&Bar Hillel)1939		
RMM46	Le problème des antinomies et ses développements récents.	
Frege G.		
<u>1879</u>	Begriffsschrift.	*
<u>1884</u>	Die Grundlagen der Arithmetik.	*
<u>1892</u> ZPPK100	Über Sinn und Bedeutung. (Trans. in Feigl&Sellars: readings in philosophical analysis).	*
<u>1893</u> -1903	Die Grundgesetze der Arithmetik.	
<u>1952</u>	Translations from Philosophical Writings (ed. by P.Geach and M. Black).	
<u>1956</u> MIND65	The Thought (trans. by A&M Quinton).	!
Freudenthal H.		
(ed.)1960	The concept and the role of the model in mathematics and the natural and social sciences.	V
1932 EU8	Qualität und Quantität in der Mathematik.	
1936 CM4	Zum intuitionistischen Raumbegriff.	
1953 AIHS22	Zur Geschichte der vollständigen Induktion.	

1956 SST30	De begrippen axioma en axiomatiek in de wis- en natuurkunde.	
1957 NA5	Zur geschichte der Grundlagen der Geometrie.	
Freycinet Ch. L. de Saulces de 1903	De l'experience en géometrie.	
Freytag- Lörringhoff B.v. 1937	Die onthologische Grundlagen der Mathematik.	
Gasking D.A.T. 1940 AJPP18,BP390	Mathematics and the World.	
Geissler F.J. 1902	Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik.	!
Gerlach J.E. 1922	Kritik der mathematischen Vernunft.	!
Gerretsen J.C.H. 1946	Mathesis en aestetica.	0
Gödel K. 1947 AMM54	What is Cantors Continuum problem.	*
Gonseth F. 1926	Les fondaments des Mathématiques.	
1936	Les mathématiques et la réalité.	
1936 CIPSP	La logique en tant que physique de l'object quelquonque.	

(ed.)1939	Philosophie Mathématique.	V
1945-55	La géometrie et le problème de l'espace.	
1948 XthC	Les disciplines particulieres et la philosophie.	
1964	Le problème du temps.	
Goodman N.		
1951	The structure of appearance.	
1956 BP197	A world of individuals (in The problem of Universals: Notre Dame Univ.)	
1947	(&Quine) Steps toward a Constructive Nominalism.	!
Goodstein R.L.		
1951	Constructive formalism.	!
1957 MIND66	A critical note one Wittgensteins "Remarks on the foundations of mathematics".	
1958 DIA12	On the nature of Mathematical systems.	
<u>1962</u> ASS36 <u>1965</u>	The foundations of mathematics. Essays in the Philosophy of Mathematics.	
Grelling K.		
1936 MIND45	The logical Paradoxes.	
Grice H.P.		
<u>1956</u> PR65	(&P.F. Strawson) In defence of a Dogma.	!
Griss G.F.C.		
1948	Over de negatie (in Feestbundel voor H.J.Pos).	

1948 XthC	Mathématiques, mystique et philosophie.	
de Groot J.		
1949	Fantasie van punt tot punt.	0
<u>1952</u>	Tijd onder mathematisch aspect.	0
Hahn H.		
1935	Logique, mathématiques et connaissance de la réalité.	
Hardy G.H.		
1929 MIND38	Mathematical proof.	!
Hartmann N. 1950	Philosophie der Natur.	AP
Heisdieck		
<u>1950</u>	Henri Bergson et le problème de l'espace.	
Herbrand J.		
1929 CRASP189	Sur le problème fondamental des mathématiques.	
Hempel C.G.		
1945 AMM52, BP366	On the nature of mathematical truth.	
Hermes H.		
1938	Semiotik: eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen.	
Herz P.		
1923	Über das Denken.	
1935 AFS6	Über das Wesen der Logik und die Logische Urteilsforme.	

Hessenberg G.		
1906 AFS1	Grundbegriffe der Mengenlehre.	
1908 AFS2	Kritik und System in Mathematik und Philosophie.	
1908 JBDMV17	Willkürliche Schöpfungen des Verstandes?	
Heyenoort J.v. (ed) <u>1967</u>	From Frege to Gödel: a source book in Mathematical logic.	VT
Heymans G.		
1923	Die Gezetze und Elemente des Wissenschaftlichen Denkens.	
Heyting A.		
1932	Mathematische Grundlagenforschung.	
1932 ER2,BP42	Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.	
1941 EU17	Wiskundige strengheid in wetenschap en school.	
1948 SYN6	Formal logic and Mathematics.	
<u>1956</u>	Intuitionism; an introduction.	⊕B
<u>1958</u> DIA12	Blick von der Intuitionistische Warte.	!
<u>1961</u> FA	Axiomatic Method and Intuitionism.	
Hilbert D.		
1918 MA78	Axiomatisches Denken.	!
1922 MA88	Die logischen Grundlagen der Mathematik.	*

1922 ASUG	Neubegründung der Mathematik (1e Mitt.)	*
1925 MA95	Über das Unendliche.	*⊕
1930 (7e druk)	Grundlagen de Geometrie <u>incl.</u> Die Grundlagen der Mathematik.	
1934-1939	(&Bernays) Grundlagen der Mathematik.	*T
Hintikka J.K.K. <u>1959</u> JP56	Existential presuppositions and existential commitments.	
Hoenen SJ,P. 1940	Over prima principia in verband met ruimte.	
1900	Anschauung und Denken in der Geometrie.	
Hölder O. 1924	Die Mathematische Methode.	
Hänigswald R. 1912	Zum Streit über die Grundlagen der Mathematik.	
Huffer SJ,EJE. 1940 BNJ	Mathematische Existentie.	
1946	Wiskunde, een deductieve wetenschap.	
Husserl E. <u>1891</u>	Philosophie der Arithmetik.	*
<u>1891</u> VWP15	Der Folgerungskalkul und die Umfangslogik.	
1901	Logische Untersuchungen.	*P

1913	Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologische Philosophie.	P
Jager, E.M. de <u>1965</u>	De kracht van de abstractie.	0
Kalmar L. 1940 AHM	On the possibility of definition by recursion.	
Katsoff L.O. 1936 PS2,3	Postulational Methods.	
Kaufmann, F. 1930	Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung.	!
1931 ER2	Bemerkungen zum Grundlagenstreit in Logik und Mathematik.	
Keyser C.J. 1922	Mathematical Philosophy.	
1947	Mathematics as a culture clue and other essays.	!@
	The meaning of Mathematics.	
Klein F.	Über Arithmetisierung in der Mathematik.	
Kneale W. 1946 PAS46	The truth of logic.	
<u>1962</u>	(&M. Kneale) The developpement of logic.	
Kochen M. (ed) <u>1967</u>	The growth of knowledge - readings on the organisation and retrieval of information.	

Koenigsberger L. 1913	Die Mathematik, eine Geistes-oder Natur- wissenschaft.	!
Kolmogoroff A. 1932	Zur Deutung der intuitionistische Logik.	
Körner S. 1960	The philosophy of mathematics an introductory essay.	@
<u>1965</u>	On the relevance of post-Gödelian Mathematics to philosophy (zie Lakatos: Problems in the phil. of math.).	!
Kreisel G. <u>1951</u> MG35	Some remarks on the foundations of Mathematics. An expository Article.	
1958 DIA12	Hilberts Programme.	T
Kronecker L. <u>1887</u> CRELLE101	Über den Zahlbegriff.	
Küng G. <u>1963</u>	Ontologie und logistische Analyse der Sprache, eine Untersuchung zur zeitgenössischen Universaliendiskussion.	
Kunze F. 1912	Denkmittel der Mathematik im Dienst der exacten Darstellung erkenntniskritischer Probleme.	!
"Kursbuch 8" <u>1967</u>	Neue Mathematik, Grundlagenforschung, Theorie der Automaten.	

Laisant Ch.A. 1907	La Mathématique. Philosophie, Enseignement.	
Lakatos I 1962 ASS36	The foundations of Mathematics.	
(ed) 1967	Problems in the philosophy of Mathematics.	V
1968	(&Mushgrave) Problems in the philosophy of science.	V
Lallemand M. 1934	Le Transfini. Sa logique et sa métaphysique.	
Landolt M. 1947	Grandeur, mesure et unité.	!
Lautmann A. 1938	Essai zur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel.	
1938	Essai sur les notions de structure et d'existence en Mathématiques. Les Schemes de genèse.	
1939	Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques.	!
1946	Symétrie et dissymétrie en mathématique et en physique, le problème du temps.	!
Lefebvre E. <u>1958</u>	Structure et objet de l'analyse mathématique.	
Le Masson 1932	Philosophie des nombres.	

Lenz P.J.v.	Een realistische filosofie der wiskunde.	
Lewis CI 1918	A survey of symbolic logic.	B
Lewy C. 1946 ASS20	Why are the calculusses of logic and Mathematics applicable to reality?	
Lichtenstein L. 1932 RP113	La philosophie des mathématiques selon M. Emile Meyerson.	
Liebmann H. 1905	Notwendigkeit und Freiheit in der Mathematik.	0
Lionnais F. le 1948	Les grands courants de la pensee mathématique.	
Lipps C.F. <u>1893-1898</u> PS9,10, 11,14	Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik.	
Logique et Mathematiques. 1937	IXe congres internat de philosophie, Congres Descartes. No 6.	
London F. 1923 HJ6	Über die Bedingungen der Möglichkeit einer deduktiven Theorie.	!
Lorenzen P. 1957 PN4	Wie ist Philosophie der Mathematik möglich.	⊕

1964	Die Rechtfertigung einer Beschäftigung mit formalen Theorien. (zie Bar Hillel proc. of 1964 congress).	⊕
Geach P.T.		
1948 AN8	Designation and truth.	
1951 ASS25	On what there is.	
1951 PR60	Freges Grundlagen.	
1956 MIIND65	On Freges way out.	
1958 AN19	Russell on meaning and denotation.	
1961	Frege (in "Three philosophers" by Anscombe&Geach).	
Lucas J.R.		
1961 PH36	Minds, machines and Gödel.	
Mahnke D.		
1925 PAW	Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis.	!
Mannoury G.		
1903	Over de betekenis van de wiskundige logica voor de filosofie.	
1905 DB1	Hegelen of Cijferen.	
1909	Methodologisches und philosophisches zur Elementarmathematik.	
1917	Over de sociale betekenis van de wiskundige denkvorm.	!

1924	Mathesis en Mystiek.	
1924	Wiskunst filosofie en socialisme.	V
1931	Woord en Gedachte.	
1934 ER4	Die signifische Grundlagen der Mathematik.	
1937 SYN2	De schoonheid der wiskunde als signifisch probleem.	
1943 NA21	La question vitale "A ou B".	
1946	Relativisme en Dialectiek.	
1947	Les fondaments psycholinguistiques des mathématiques.	
1948	Handboek der Analytische signfica.	
Martin R.M.		
1949 JSL14	A note on nominalism and recursive functions.	
1958	Truth and Denotation.	
Mehlberg H.		
1962	The present situation in the philosophy of Mathematics (in Logic and Language: Carnap ann. vol.).	⊕
Menger K.		
1930 BDP4	Der Intuitionismus.	
Menne A.		
(ed) 1962	Logico Philosophical studies.	V

Menninger K. 1958	Zahlwort und Ziffer.	⊕
Meschkowski H. 1956	Wandlungen des mathematischen Denkens, eine Einführung in die Grundlagentrobleme der Mathematik.	
1965	Mathematik als Bildungsgrundlage.	
Meyer H. 1936 ANTW29	Tekentaal en het waarheidsprobleem.	
1947 SYN5	On definitions in symbolic logic.	
Meyer J. 1927 TvW21	Over de geldigheid van het beginsel van het uitgesloten derde.	
Meyerson E.	Du Chéminement de la Pensee.	
Milha d G. <u>1898</u>	Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique.	! o
1926	Le rationnel.	! o
1934	Les philosophes géomètres de la Grèce.	
Mises R.v. 1939	Kleines Lehrbuch des Positivismus.	
Möbius P.J. 1900	Über die Anlage zur Mathematik.	

Molitor A. 1940 JGG53,54	Zur neupositivistischer Philosophie der Mathematik.
Mooy J.J.A. 1966	La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré.
Mostowski A. 1939	Bemerkungen zum Begriff der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit.
Müller A. 1922	Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie.
Myhill J. <u>1951-52</u> RM5	Two ways of ontology in modern logic.
<u>1952-53</u> RM6	Some philosophical implications of mathematical logic.
Natorp P. 1910	Die logischen Grundlagen der Exacten Wissenschaften.
Nagel E. 1929 JP26	Intuition, consistency and the excluded middle.
1939	The formation of modern conceptions of formal logic in the developpement of Geometry.
1944 BP302	Logic without ontology.
<u>1956</u>	Logic without metaphysics.

1928 UMN34	Kritische Philosophie und Mathematische Axiomatik.
<u>1959</u>	Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik.
Neumann J.v. 1932 ER2	Die formalistische Grundlegung der Mathematik.
Odebrecht R. 1906	Hermann Cohens Philosophie der Mathematik.
Os Ch.H. van 1932 GIDS96	Wiskunde en Wijsbegeerte. !!
1938 SYN3	De Crisis der logica.
1939 EU15	Wat is wiskunde.
1946	Tijd, Maat en Getal. Naar aanleiding van Spinozas brief over het oneindige.
1947	Getal en Kosmos. Wiskunde en Wereldbeschouwing.
Pacatte J. 1925	Pensée Mathématique Contemporaine.
Pap A. <u>1958</u>	Semantics and Nessecary truth.
<u>1960</u> MIND69	Types and Meaninglessness.
Pasch M. 1927	Mathematik am Ursprung.

Peirce C.S. <u>1891</u> TM(jan.)	The architecture of theories.	
<u>1822</u> TM(apr.)	The doctrine of Nessecity.	
<u>1898</u> (EDR)	Logic of mathematics in relation to education.	
(1931-1958)	Collected papers 6 vols.(ed. by Hartshorne, P. Weiss, A.W.Burks).	*
(1923-1956)	Chance, love and logic: Philosophical essays by C.S.Peirce. The founder of Pragmatism.	
Perelman Ch. 1936 MIND45	Les paradoxes de la logique.	
1936 BARB	l'Antinomie de M. Gödel.	
1937 EM36	l'Equivalence, la définition et la solution du paradoxe de Russell.	
1939 RUB	Etude sur Gottlob Frege.	
Péter R. <u>1957</u>	Das Spiel mit dem Unendlichen.Mathematik für Aussenstehende.	⊕
Pfordten O.v.d. 1915-16 VPS39-40	Der Erkenntniswert der Mathematik.	
Poincarré H. 1902	La Science et l'Hypothèse.	*
1905	La valeur de la Science.	**

1909	Science et Méthode.	*
1920	Dernières pensées.	
Poirier R. 1938	Le Nombre.	
Popken J. 1940 EU16	De ontwikkeling van het getalbegrip.	
Popper K.R. 1946 ASS20	Why are the calculusses of logic and mathematics applicable to reality.	!
1947 MIND56	New foundations for logic.	
1947 PAS1947	Logic, without assumptions.	!
1948 ASS22	What can logic do for philosophy.	
Pos H.J. 1940-47	Filosofie der Wetenschappen.	
Pringsheim A. 1904	Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.	
Putnam H. <u>1956</u> PSTS7	Mathematics and the existence of abstract entities.	
<u>1962</u> MSPSIII	The analytic and the synthetic.	
<u>1964</u>	The thesis that mathematics is logic.	o

Quine W.V.	
1934 MIND43	Ontological remarks on the proposition calculus.
1936 BP322	Truth by Convention.
1939 JP36	Designation and existence.
1943 JP40	Notes on existence and nessecity.
1951 PAAS80	Semantics and abstract objects.
1951 PST2	Ontology and Ideology.
1951 ASS25,BP183	On what there is - a reply to Ayer and Geach.
1951 PST2	On Carnaps view of Ontology.
1953	From a local point of view.
1953 PAAAS80	Mental entities.
1955 MIND64	On Freges Way out.
1958 PAPA31	Speaking of objects.
1960	Word and object.
1962	Carnap and logical truth.
Ramsey F.P.	
1931	The foundations of Mathematics and other logical essays.
Ranganathan S.R.	
1967	Ramanujan, the man and the mathematician.

Reach K.		
1938, JSL3,ER7	The name relation and the logical antinomies.	
Reichenbach H.		
1927	Philosophie der Raumzeitlehre.	*
Reidemeister K.		
1929 PA3	Exactes Denken.	
Renyi A.		
1967	Dialoge über Mathematik.	!
Révesz G.		
1939 ANTW32	De ongedeeldheid der begaafdheidsvormen.	!
1943 NTP10	Over het verband tussen Mathematische en muzikale begaafdheid.	!
1946	Creatieve begaafdheid.	
Reyn J.W.		
<u>1967</u>	Vicieuse cirkels en plausibele veronderstellingen.	0
Richard J.		
1900	Sur la philosophie des Mathématiques.	
1905 RGS16	Les principes des Mathématiques et le problème des ensembles.	
1907 EM2	Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome de Zermelo.	
Rosser B.		
1939 JSL4	An informal exposition of proofs of Gödel's Theorem and Church's Thesis.	T0

1942 JSL7	The Burali-Forti Paradox.	
Rougier L. 1939 ER8	La relativité et la logique.	
Roy Ed. le 1924 RCC	Les principes de l'analyse mathématique.	
1960	La pensée du Mathématique pure.	
Russell B.A.W. 1913	(&Whitehead) Principia Mathematica.	*T
1900	A critical exposition of the philosophy of Leibnitz.	
1906 RMM14	Les paradoxes de la logique.	
1918	Mysticism and logic.	!
1919	Introduction to mathematical philosophy.	
1940	An inquiry into Meaning and Truth.	
1956	Logic and Knowledge.	
1956 (1895)	An essay on the foundations of geometry.	!0
Ryle G. 1946 ASS20	Why are the calculusses of logic and Mathematics applicable to reality.	
Rynier D. 1956	The dogma of logical Pragmatism.	

Saminsky L.		
1957	Physics and metaphysics of music and essays on the philosophy of mathematics.	!
Sauer O.F.		
1937 BOP11	Die konkrete Aussage und Ihre Wahrbewertung.	
1965	Mathematisches denken auf dem Wege zur Philosophie- eine Studie zur heutigen Wissenschaftslage.	⊕
Schnelle H.		
<u>1962</u>	Zeichensysteme für Wissenschaftliche Darstellung - Eine Beitrag zur Entfaltung des Ars Characterica im Sinne von C.W. Leibnitz.	!⊕
Scholz H.		
1938 JGG51	Die Mathematische logik und die Metaphysik.	
1942	Zur Erhellung des Verstehens.	
1942 DMV7	Was will die formalisierte Grundlagenforschung.	
Schouten J.A.		
1939	Meetkunde en ervaringsstructuur.	0
Schuh F.		
1909	De formele ontwikkeling van het getalbegrip.	
1927	Het getalbegrip, i.h.b. het onmeetbare getal.	
Selz O.		
1941 NTP9	Die phenomenalen Grundlagen des Zahlbegriffs.	
Shaw J.B.		
1918	Lectures on the philosophy of Mathematics.	

Shwayder D.S. <u>1961</u>	Modes of Referring and the problem of Universals.	
Skolem Th. 1929	Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik.	
Smith V.E. <u>1954</u>	St. Thomas on the object of geometry.	
Spaier A. 1927	La pensee et la quantité.	
Speiser A. 1932	Die Mathematische Denkweise.	⊕
1946 ERA	Die Grundlagen der Mathematik von Plato bis Fichte.	
<u>1952</u>	Elemente der Philosophie und der Mathematik: Eine Anleitung zum inhaltlichen Denken.	⊕
Stammler G. 1921	Berkeleys Philosophie der Mathematik.	
1926	Der Zahlbegriff seit Gauss. Eine erkenntnistheoretischen Untersuchung.	
Steck M. 1942	Das Hauptproblem der Mathematik.	
Stegmueller W. <u>1957</u>	Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik.	⊕
<u>1959</u>	Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit.	⊕

Stenius E. 1949 SSF14	Das Problem der Logische Antinomien.	
Stenzel J. 1924	Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles.	
Strawson P.F. 1956 PR65	(&H.B. Grice) In defense of a Dogma.	
Tannery J. 1912	Science et Philosophie.	
Tarski A. 1936	Der Wahrheitsbegriff in die formalisierten Sprachen.	*
1944 DPR4	The semantic conception of truth and the foundations of semantics.	*
Ternusss SJ,J 1926 JGG39	Zur Philosophie der Mathematik.	
Thomson J.F. 1960 RAT10 3	What Achilles should have said to the Tortoise.	
Tseng Ting-Ho 1938	La philosophie mathématique et la théorie des ensembles.	D
Tummers J.H. 1926	Het nut van het wijsgerig denken in de wis-en natuurkunde.	
1949	De meetkunde en de ervaring.	

Turing A.M. <u>1954</u>	Solvable und Unsolvable problems.	T ⁰
Verloren v. Themaat W.A. 1962	Räumliche Vorstellung und mathematisches Erkenntnisvermögen.I	D
1967	II.	
Vollenhoven D.H.Th. 1918	De wijsbegeerte der wiskunde van theistisch standpunt.	D
Waerden B.L. v.d. 1928	De strijd om de abstractie.	
1954	Einfall und Überlegung. Drei kleine Beiträge zur psychologie des mathematischen Denkens.	
1950	Over de ruimte.	0
Voss A. 1913	Über das Wesen der Mathematik.	
1914	Über die Mathematische Erkenntnis.	
Waismann F. 1936	Einführung in das Mathematische Denken.	
1946 PAS	Are there alternative logics.	
Wang H. 1953 PR62	What is an individual.	

1955 MIND64	On formalisation.	
1958 DIA12	Eighty years of foundational studies.	
1961 FAV	Process and existence in mathematics.	
Warnock G. 1956	Metaphysics in logic (in Essays in conceptual analysis ed A.Flew).	
Wavre R. 1933 ASDP5	Mathématique et philosophie.	
Werre P.F. 1957	The relationship between electroencephalographic and psychological data in normal adults.	D!
Weyl H. 1919 JBDMV28	Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis.	*
1921 MZ10	Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.	
1923	Mathematische Analyse des Raumproblems.	
1924 MZ20	Randbemerkungen zu Hauptprobleme der Mathematik.	
1926	Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik.	
1927	Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.	*
1931	Die stufen des Unendlichen.	
Whitehead A.N. 1911	Introduction to Mathematics.	⊕

1926	Science and the modern world.	
Wiener N.		
<u>1950</u>	Cybernetics.	
<u>1964</u>	God and Golem.	
Wiggins D.		
1967	Identity and spatio-temporal continuity.	
Wittenberg A.I.		
1957	Vom Denken in Begriffen. Mathematik als Experiment des reinen Denkens. (introd P. Bernays).	⊕
Wittgenstein L.		
1929 ASS9	Some remarks on logical form.	
1956	Remarks on the foundations of Mathematics.	*
Wolff J.		
1922	Over het subjectieve in de wiskunde.	
Wood O.P.		
1961 ASS35	On being forced to a Conclusion.	

Opmerking. Aanvullingen op deze literatuurlijst hopen wij in de toekomst regelmatig te publiceren.

Suggesties zijn van harte welkom. (gelieve deze te zenden of telefonisch door te geven aan L.E. Fleischhacker, Math. Centrum tel. 020-947272. toestel 74).

Hieronder volgt nog een verklaring van de gebruikte afkortingen voor tijdschrifttitels.

ABSUG	Abhandlungen eines Seminarium der Universität von Göttingen.
ADP	Annalen der Philosophie.
AFS	Abhandlungen der Friessche Schule.
AH	Acta literarum de scientarum Regiae Universitatis Hungariae etc.
AIHS	Archive internationale d'Histoire des sciences.
AJPP	Australasian Journal of Psych. and Phil.
AMM	American Mathematical Monthly.
AN	ANALYSIS.
ANTW	Algemeen Nederlands tijdschrift voor Wijsbegeerte.
AP	Archiv der Philosophie.
APPK	Annalen der Philosophie und philosophische Kritik.
ASBP	Archives du soc. Belge de Philosophie.
ASI	Actualités Scientifiques et Industrielles.

ASS	Aristotelian society supplement.
BAMS	Bulletin o. the Am. Math. Soc.
BARB	Bulletin de l'academie Royale de Belgique.
BDP	Blätter der Deutsche Philosophie.
BMSR	Bull. math. de la Soc. Roumaine des Sciences.
BNJ	Bijdragen der Nederlandse Jezuiten.
BP	Benacerraf & Putman 1964.
CIPSP	Congrès Internat de Phil. des Sciences, Paris.
CM	Compositio Mathematica.
CRASP	Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris.
CR2CNCB	C.R. du 2me congr. nat. des sc. Bruxelles.
DB	De Beweging.
DES	Descartes.
DIA	Dialectica.
DMV	Jahrbuch der Deutschen Mathematiker Verein.
DN	Die Naturwissenschaften.
DS	Dominican Studies.
EDR	Educational Review.
EM	l'Enseignement Mathématique.
ER	Enkenntnis.
ERA	Eranos Jahrbuch.

EU	Euclides.
FAV	Fraenkel Anniversary Volume.
FS	Feigl & Sellars.
H	HILBERT.
HJ	Husserls Jahrbuch (of JPPF).
IEUS	International encyclopedia of Unified Science.
IM	Indigationes Mathematicae.
IMKZ	Internat Mathematiker Kongress, Zürich.
JGG	Jahrbuch Görres Gesellschaft.
JP	Journal of Philosophy.
JPPF	Jahrbuch für Philosophie und Phenomenologische Forschung.
JUS	Journal of Unified Science.
KA	Meded. der Koninklijke Academie.
KS	Kant Studien.
LMP	Logic. Methodolog und Philosophy of science Congress 1964.
LP	Logical Positivism (ed Ayer).
M	Mathematica.
MA	Mathematische Annalen.
MG	Mathematical Gazette.
MMP	Monatsheft f. Math. und Physik.
MSPS	Minnesota studies of the philosophy of science.

MZ	Mathematische Zeitschrift.
NA	Nieuw Archief voor de Wiskunde.
NTP	Nederlands tijdschrift voor psychologie.
PA	Philosophische Anzeiger.
PAAAS	Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.
PAPA	Proceedings and Advancements of the American Philosophical Association.
PAS	Proceedings of the Aristotelian Society.
PAW	Abhandlungen der Preussische Akademie von Wissenschaften.
PH	Philosophy.
PN	Philosophia Naturalis.
PPR	Phenomenological and Philosophical Research.
PR	Philosophical Review.
PS	Philosophy of Science.
PST	Philos. Studien.
PSTS	Philosophical Studies.
RGS	Revue Générale des Sciences.
RIP	Revue Internationale de Philosophie.
RM	Review of Metaphysics.
RMM	Revue de Métaphysique et de Morale.
RPFÉ	Revue philos. de France et de l'étranger.

RUB	Revue de l'Université de Bruxelles.
SCA	Scientia.
SGD	Studium Generale Delft.
SSF	Soc. Scient. Fennica.
SST	Simon Stevin.
SYN	Synthese.
TM	The Monist.
TVW	Tijdschrift voor Wijsbegeerte.
UMN	Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft.
VPS	Vierteljahresschrift für Philosophie und Sociologie.
VWP	Vierteljahresschr. für Wissenschaft und Philosophie.
XthC	Xth Congress of philosophy. Amsterdam.
ZMU	Zeitschrift für Mathematik und Naturwiss Unterricht.
ZPPK	Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik.