B

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW

Syllabus van het oriënterend colloquium

Lineaire Analyse

cursus 1967-1968

ZW

oktober 1968

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ERRATA

pag.	regel	staat	moet staan
5	15 v.o.	(aan het eind van de regel toevoegen)	als $n > n(\varepsilon)$ en
6	4 v.b.	$\rho(f(x), f(x_0))$	$\sigma(f(x), f(x_0))$
20	11 v.o.	orthonormaal	orthogonaal
29	1 v.o.	$(\frac{1}{2}, 1]$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$
35	2 v.b.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
	7 v.b.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
	9 v.b.	$\int_2^1$	$\int_0^1$
36	11 v.b.	$\{x^k \mid k = 1, 2, \dots\}$	$\{x^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$
37	8 v.b.	$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$	$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$
40	3 v.o.	$F(g) = \lambda G(f) = \lambda(f,g)$	$G(f) = \lambda F(f) = (f,g), \lambda \neq 0$
41	13 v.b.	Een symmetrische ... etc.	(vervalt geheel)
	3 v.o.	$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j y_j$	$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j$
42	1 v.o.	$(\|\|2e^{-i\alpha}f\|\|^2 + \|\|g\|\|^2)$	$(2\|\|e^{-i\alpha}f\|\|^2 + 2\|\|g\|\|^2)$
43	4 v.b.	lineaire	bilineaire
44	1 en 2 v.o.	Voorbeeld. De ... etc.	(vervalt)
46	13 v.b.	Zie voorbeeld ... etc.	(vervalt)
47	9 v.o.	(deze regel vervangen door)	We bewijzen 1 <==> 3. Dan volgt 1 <==> 2 vanwege symmetrie-overwegingen
61	9 v.b.	$\sqrt{n \cdot e_n}$	$\sqrt{n} \cdot e_n$

pag.	regel	staat	moet staan
63	10 v.b.	is	λ is
65	3 v.b.	a) is	a) λ is
	7 v.b.	$f_n \to f_n$ $Kf_n \to Kf_n$	$f_n \rightharpoonup f$ $Kf_n \rightharpoonup Kf$
	15 v.b.	$Kf_{n''} \to Kf_n$	$Kf_{n''} \rightharpoonup Kf$
75	12 v.b.	$\sup\limits_{f=1}$	$\sup\limits_{\|\|f\|\|=1}$
	6 v.o.	K	Kf_n

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

20 september 1967

Spreker: H.G.J. Pijls

1. Metrische ruimten

Definitie 1. Laat X een verzameling zijn en laat $\mathbb{R}^+$ de verzameling van de niet-negatieve reële getallen zijn. Een functie $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+$ heet een metriek voor X, indien voor alle x, y, $z \in X$ geldt:

(i) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (driehoeksongelijkheid)

Het paar (X, ρ) heet dan een metrische ruimte en $\rho(x, y)$ heet de afstand tussen x en y.

Voorbeelden.

a) Laat X een willekeurige verzameling zijn. Voor $x, y \in X$ definiëren we: $\begin{cases} \rho(x, y) = 0 & \text{als } x = y \\ \rho(x, y) = 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$

Dan is (X, ρ) een metrische ruimte.

b) Laat $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen zijn. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ definiëren we: $\rho(x, y) = |x - y|$. Dan is $(\mathbb{R}, \rho)$ een metrische ruimte.

c) Zij $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, n\}$. Voor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiëren we:

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Men kan bewijzen dat $(\mathbb{R}^n, \rho)$ een metrische ruimte is (zie syllabus Colloquium "Topologie").

d) Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Laat A een deelverzameling van X zijn. Voor $x, y \in A$ definiëren we : $\sigma(x, y) = \rho(x, y)$.

Dan is (A, σ) een metrische ruimte.

<u>Definitie 2.</u> Laat (X, ρ) een metrische ruimte zijn. Zij $\varepsilon > 0$ en $p \in X$. De verzameling $U_\varepsilon(p) = \{x \mid \rho(p, x) < \varepsilon\}$ heet de <u>ε-omgeving van het punt p</u>.

<u>Definitie 3.</u> Laat (X, ρ) een metrische ruimte zijn. Zij A een deelverzameling van X. Dan heet een punt $p \in X$

<u>inwendig punt van A</u>, als er een ε-omgeving $U_\varepsilon(p)$ van p bestaat, die geheel bevat is in A;

<u>verdichtingspunt van A</u>, als elke ε-omgeving $U_\varepsilon(p)$ van p een punt $a \neq p$ uit A bevat (m.a.w. voor elke ε-omgeving $U_\varepsilon(p)$ van p geldt: $(U_\varepsilon(p) \setminus p) \cap A \neq \emptyset$).

<u>Definitie 4.</u> Laat (X, ρ) een metrische ruimte zijn. Een niet-lege verzameling $O \subset X$ heet <u>open</u>, indien elk punt $x \in O$ inwendig punt O is. De lege verzameling $\emptyset$ heet open.
Een verzameling $V \subset X$ heet <u>omgeving</u> van een punt $p \in X$, als er een open verzameling $O \subset X$ bestaat zodanig dat $p \in O \subset V$.

<u>Stelling 1.</u> (X, ρ) is een metrische ruimte. Zij $\varepsilon > 0$ en $p \in X$. Dan is de verzameling $U_\varepsilon(p)$ open.
<u>Bewijs</u>: Zij $q \in U_\varepsilon(p)$. Dan is $\rho(p, q) = \eta < \varepsilon$. Kies δ zódat $0 < \delta < \varepsilon - \eta$. Voor elk punt x met $\rho(q, x) < \delta$ geldt dan wegens de driehoeksongelijkheid

$$\rho(p, x) \leq \rho(p, q) + \rho(q, x) < \eta + \delta < \varepsilon$$

Dus $U_\delta(q) \subset U_\varepsilon(p)$. Dus $U_\varepsilon(p)$ is open.

<u>Stelling 2.</u> (X, ρ) is een metrische ruimte. Dan geldt:
a) $\emptyset$ en X zijn open
b) De vereniging van een willekeurig stelsel van open verzamelingen is een open verzameling.
c) De doorsnede van eindig veel open verzamelingen is een open verzameling.

<u>Bewijs:</u>
a) Dit volgt onmiddellijk uit Definitie 4.
b) Zij gegeven een willekeurig stelsel van open verzamelingen O_α, waarbij α een zekere indexverzameling A doorloopt.

Zij O de vereniging der verzamelingen O_α en zij p een willekeurig punt uit O. Dan behoort p tot een zekere O_{α_0}. Er is dus een omgeving $U_\varepsilon(p)$ die bevat is in deze O_{α_0}. Deze omgeving $U_\varepsilon(p)$ is zeker bevat in O. Dus p is inwendig punt van O. Dus O is open.

c) Zij nu gegeven een eindig stelsel open verzamelingen en stel $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Zij p een punt uit de doorsnede. Dan bestaan er positieve getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ met

$$U_{\varepsilon_i}(p) \subset O_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Stellen we $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,k} \varepsilon_i$, dan is $U_\varepsilon(p)$ bevat in elke O_i,

dus in de doorsnede. Hieruit volgt dat de doorsnede der O_i open is.

Het gedeelte c) van de stelling geldt niet voor oneindig veel verzamelingen, zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld:
de verzamelingen $(-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ in $\mathbb{R}$ zijn open, terwijl hun doorsnede het gesloten interval $[0, 1]$ is.

<u>Opmerking</u>: Zij X een verzameling. Laat $\mathfrak{J}$ een collectie van deelverzamelingen van X zijn; als $A \subset X$ en als A tot de collectie $\mathfrak{J}$ behoort, dan zullen we A open noemen. Als nu voldaan is aan a), b) en c) uit Stelling 2 dan heet het paar $(X, \mathfrak{J})$ een <u>topologische ruimte</u>.

<u>Definitie 5</u>. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Een verzameling $G \subset X$ heet <u>gesloten</u> als $X \setminus G$ open is.

<u>Stelling 3</u>. (X, ρ) is een metrische ruimte. Dan geldt:

a) $\emptyset$ en X zijn gesloten.

b) De vereniging van eindig veel gesloten verzamelingen is een gesloten verzameling.

c) De doorsnede van een willekeurig stelsel van gesloten verzamelingen is een gesloten verzameling.

<u>Stelling 4</u>. (X, ρ) is een metrische ruimte. Zij $G \subset X$. Dan geldt: G is gesloten $\Longleftrightarrow$ G bevat al zijn verdichtingspunten.

Bewijs:

"==>" Zij G gesloten (i.e. $X\setminus G$ is open). Zij p een willekeurig punt in $X\setminus G$. Dan is p inwendig punt van $X\setminus G$. Er is dus een omgeving $U_\varepsilon(p)$ van p, die geheel bevat is in $X\setminus G$. Hieruit volgt, dat p geen verdichtingspunt van G is.

"<==" Laat G al zijn verdichtingspunten bevatten. Zij p een willekeurig punt in $X\setminus G$. Daar p nu geen verdichtingspunt van G is, bestaat er een omgeving $U_\varepsilon(p)$ van p zodanig dat $(U_\varepsilon(p)\setminus p)\cap G = \emptyset$. Daar $p \notin G$, geldt ook $U_\varepsilon(p)\cap G = \emptyset$ ofwel $U_\varepsilon(p)\subset X\setminus G$.

Definitie 6. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Zij $A\subset X$. De doorsnede van de familie van de gesloten verzamelingen die A bevatten, heet de afsluiting $\bar{A}$ van A.

Opmerking. Zij $\mathfrak{F} = \{F_\beta\}_{\beta\in B}$ de familie van de gesloten verzamelingen die A bevatten. Dan is $\bar{A} = \bigcap_{\beta\in B} F_\beta$.

Hieruit volgt dat $\bar{A}$ gesloten is (Stelling 3 c)).

Als G nu een gesloten verzameling is die A bevat, dan geldt $G\in\mathfrak{F}$. Dus $G\supset\bar{A}$.

We zien dus: $\bar{A}$ is de "kleinste" gesloten verzameling die A omvat.

Stelling 5. (X, ρ) is een metrische ruimte. Zij $A\in X$. Laat B de verzameling van de verdichtingspunten van A zijn.

Dan geldt: $\bar{A} = A\cup B$.

Bewijs:

We tonen eerst aan dat $A\cup B$ gesloten is.

Stel nl. dat p_0 een verdichtingspunt van $A\cup B$ is.

Zij $\varepsilon > 0$, willekeurig. Dan is er een punt $q\in A\cup B$ $(q \neq p_0)$ met $q\in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_0)$ i.e. $\rho(p_0, q) < \frac{\varepsilon}{2}$.

a) Als $q\notin A$, dan $q\in B$, d.w.z. q is verdichtingspunt van A. Er is dus een punt $r\in A$ te vinden met $r\in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(q)$ en $r \neq q$. Dus $\rho(q, r) < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Wegens de driehoeksongelijkheid geldt dan:

   $\rho(p_0, r) \leq \rho(p_0, q) + \rho(q, r) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Dit betekent: $r \in U_\varepsilon(p_0)$. De ε-omgeving van p_0 bevat dus een punt $r \in A$.

b) Als $q \in A$, dan bevat de ε-omgeving van p_0 ook een punt $r \in A$ nl. $r = q$.

Iedere ε-omgeving van p_0 bevat een punt van A.
Als nu $p_0 \notin A$, dan betekent dit dat p_0 verdichtingspunt van A is, d.w.z. $p_0 \in B$. Dus $p_0 \in A \cup B$. Als $p_0 \in A$, dan zeker $p_0 \in A \cup B$.
Hiermee is aangetoond dat $A \cup B$ gesloten is.
Laat F nu een gesloten verzameling zijn die A omvat.
Dan bevat F alle verdichtingspunten van zichzelf, dus ook alle verdichtingspunten van A, i.e. $F \supset B$.
Dus $F \supset A \cup B$. Dus $A \cup B$ is de "kleinste" gesloten verzameling die A omvat.

Definitie 7. Laat (X, ρ) een metrische ruimte zijn. Een rij punten $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uit X heet convergent naar $a \in X$ (we schrijven $\lim_{n\to\infty} a_n = a$), indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal $n(\varepsilon)$ te vinden is met de volgende eigenschap: als $n > n(\varepsilon)$, dan is $\rho(a, a_n) < \varepsilon$.
Een rij punten $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uit X heet een fundamentaalrij indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal $n(\varepsilon)$ te vinden is met de volgende eigenschap: $m > n(\varepsilon)$, dan is $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Opmerking. Iedere convergente rij uit X is een fundamentaalrij.
Het omgekeerde geldt niet.

Definitie 8. Een metrische ruimte (X, ρ) heet volledig, indien iedere fundamentaalrij uit X convergeert naar een punt van X. M.a.w. als $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij is uit X, dan is er een punt $a \in X$ zó dat $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Voorbeelden

a) De reële rechte $\mathbb{R}$ met de gewone metriek (i.e. als $x, y \in \mathbb{R}$, dan is $\rho(x, y) = |x-y|$) is een volledige metrische ruimte, zoals bewezen wordt in de analyse.
b) De verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen met de gewone metriek, is niet volledig.
c) Het interval $(0, 1)$ met de gewone metriek is niet volledig.

Definitie 9. Laten (X, ρ) en (Y, σ) metrische ruimten zijn. Een functie $f : X \to Y$ heet continu in $x_0 \in X$, indien bij ieder getal $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ is te vinden met de volgende eigenschap:
als voor $x \in X$ geldt: $\rho(x, x_0) < \delta$, dan is $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (*).
Indien f continu is in ieder punt $x \in X$, dan heet f continu.

Opmerking. De eigenschap (*) kan ook als volgt geformuleerd worden:

$$f[U_\delta(x_0)] \subset V_\varepsilon(f(x_0)) \qquad (**)$$

waarbij:

$$U_\delta(x_0) = \{x \mid x \in X \text{ en } \rho(x, x_0) < \delta\} \text{ en}$$

$$V_\varepsilon(f(x_0)) = \{y \mid y \in Y \text{ en } \sigma(y, f(x_0)) < \varepsilon\}.$$

Stelling 6. Laten (X, ρ) en (Y, σ) metrische ruimten zijn.
Zij $f : X \to Y$. Dan geldt:
f is continu in $x_0 \in X$ <==> als $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij uit X is waarvoor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Bewijs:
"==>" Stel f is continu in $x_0 \in X$ en stel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is een rij met de eigenschap: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zij nu $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Daar f continu is, is het nu mogelijk een $\delta > 0$ te kiezen zodanig dat

$$f(U_\delta(x_0)) \subset V_\varepsilon(f(x_0)). \qquad (1)$$

Daar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, kan een natuurlijk getal n_0 gevonden worden zodanig dat geldt:

$$\text{als } n > n_0, \text{ dan is } \rho(x_n, x_0) < \delta. \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\text{als } n > n_0, \text{ dan is } \sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

Dit betekent: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
"<==" Als f niet continu is in het punt $x_0 \in X$, dan bestaat er een omgeving $V_\varepsilon(f(x_0))$ zó dat iedere δ-omgeving van x_0 punten bevat die door f niet binnen $V_\varepsilon(f(x_0))$ worden afgebeeld. Voor ieder natuurlijk getal n kan een punt x_n gevonden worden met de volgende eigenschappen:

$$x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$$

$$f(x_n) \notin V_\varepsilon(f(x_0)).$$

Dan geldt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Echter, $\{f(x_n)\}$ convergeert niet naar $f(x_0)$, Er is dus niet aan de voorwaarde van de stelling voldaan.

<u>Stelling 7</u>. Laten (X, ρ) en (Y, σ) metrische ruimten zijn.
Zij $f: X \to Y$. Dan geldt:
f is continu <==> als $H \subset Y$ open is, dan is $f^{-1}[H] \subset X$ open.
<u>Bewijs</u>:
"==>" Stel f is continu. Laat H een willekeurige niet-lege open verzameling in Y zijn.
Zij $x_0 \in f^{-1}[H]$. Dan is $f(x_0) \in H$. Daar H open is, is er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat de ε-omgeving $V_\varepsilon(f(x_0))$ van $f(x_0)$ geheel bevat ligt in H. M.a.w. $V_\varepsilon(f(x_0)) \subset H$. Daar f nu continu is, is er een $\delta > 0$ te vinden met de eigenschap:

$$f[U_\delta(x_0)] \subset V_\varepsilon(f(x_0)).$$

Daar $V_\varepsilon(f(x_0)) \subset H$, volgt hieruit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}[H]$.
"<==" Stel dat er aan de voorwaarde voldaan is. Laat x_0 een willekeurig punt van X zijn. Dan tonen we aan dat f continu is in x_0. Kies daartoe een $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Nu is $V_\varepsilon(f(x_0))$ open in Y. Dus $f^{-1}[V_\varepsilon(f(x_0))]$ is open in X. Dit betekent dat een getal $\delta > 0$ is te vinden zodanig dat

$$U_\delta(x_0) \subset f^{-1}\,[V_\varepsilon(f(x_0))]$$

ofwel

$$f[U_\delta(x_0)] \subset V_\varepsilon(f(x_0)).$$

En dit betekent, dat f continu is in x_0.

<u>Definitie 10</u>. Laten (X, ρ) en (Y, σ) metrische ruimten zijn.
Een afbeelding $f : X \to Y$ heet een <u>topologische afbeelding</u> of een <u>homeomorfisme</u> indien f <u>eeneenduidig op</u> is ($f^{-1} : Y \to X$ is dus goed gedefinieerd) en zowel f als f^{-1} continu zijn.

Voorbeelden

a) Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ als volgt gedefinieerd zijn:

$f(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Dan is f continu. Maar f is geen homeomorfisme.

b) Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als volgt gedefinieerd ($\mathbb{R}^n$ voorzien van de "gewone metriek"):

als $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dan is $f(x) = y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ waarbij

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Dan is f continu. En f is een homeomorfisme dan en slechts dan als $\det(a_{ik}) \neq 0$.

Opgaven

1. Zij (X, ρ) een metrische ruimte.
   Bewijs: a) $\rho(x, y) \geq |\rho(x, z) - \rho(y, z)|$ $(x, y, z \in X)$

   b) $|\rho(x, x') - \rho(y, y')| \leq \rho(x, y) + \rho(x', y')$ $(x, x', y, y' \in X)$.

2. Zij $X = \{x \mid 0 < x < \infty\}$. Voor $x, y \in X$ definiëren we:
   $\sigma(x, y) = |\log x - \log y|$. Bewijs dat (X, σ) een metrische ruimte is.

3. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Voor $x, y \in X$ definiëren we:

   $\sigma(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$. Bewijs dat (X, σ) een metrische ruimte is.

4. Voor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiëren we:
   $\sigma(x, y) = \max\limits_{i = 1,2,\ldots,n} |x_i - y_i|$.
   Bewijs dat $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ een metrische ruimte is.

5. Bewijs Stelling 3.

6. (X, ρ) is een metrische ruimte. Zij $\varepsilon_1 > 0$ en $\varepsilon_2 > 0$; en laat $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Zij $p \in X$.
   Bewijs: $U_{\varepsilon_1}(p) \cap U_{\varepsilon_2}(p) = U_\varepsilon(p)$.

7. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Zij $\varepsilon > 0$ en $p \in X$.
   a) Laat $q \in U_\varepsilon(p)$. Zij $\eta = \varepsilon - \rho(p, q)$. Bewijs dat $\eta > 0$.
   b) Bewijs dat $U_\varepsilon(p)$ open is (toon aan dat $U_\eta(q) \subset U_\varepsilon(p)$).

8. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Zij $A \subset X$.
   Bewijs: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

9. Bewijs dat een convergente rij een fundamentaalrij is.

10. Bewijs dat (0, 1) als metrische ruimte (met de "gewone" metriek i.e. $\rho(x, y) = |x-y|$ als $x, y \in (0, 1)$) niet volledig is.

11. Is de metrische ruimte (X, σ) uit Opgave 2 volledig?

12. Laten (X, ρ) en (X, σ) zijn als in Opgave 3.
Zij $i : X \to X$ de identieke afbeelding (i.e. $i(x) = x$ voor alle $x \in X$). Bewijs, dat i een homeomorfisme is.

13. Bewijs dat (0, 1) en $\mathbb{R}$ (beide voorzien van de "gewone" metriek) homeomorf zijn (i.e. er bestaat een homeomorfisme $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$).

14. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een volledige en een niet-volledige metrische ruimte homeomorf kunnen zijn.

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

2. Genormeerde lineaire ruimten

Definitie 1. Een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is een verzameling L, waarin twee bewerkingen zijn gedefiniëerd, die aan nog te noemen eisen A1, ..., A4, B1, ..., B4 voldoen.
Aan elk paar (f,g) ($f \in L$, $g \in L$) is een element van L toegevoegd, dat met $f+g$ wordt aangeduid. En L bevat een element dat met 0 (nul) wordt aangeduid. Er is voldaan aan:

A1. $f + g = g + f$ voor alle $f,g \in L$.
A2. $(f + g) + h = f + (g + h)$ voor alle f, g en $h \in L$.
A3. $f + 0 = f$ voor alle $f \in L$.
A4. voor alle $f \in L$ is er een $g \in L$ zó dat $f + g = 0$.

Aan elk paar (f,α) ($f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$) is een element van L toegevoegd dat met αf wordt aangeduid. Er is voldaan aan:

B1. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ voor alle $f,g \in L$ en $\alpha \in \mathbb{R}$.
B2. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ voor alle $f \in L$ en $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
B3. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ voor alle $f \in L$ en $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
B4. $1f = f$ voor alle $f \in L$.

Opmerking 1. De elementen van L noemt men wel vectoren.

Opmerking 2. Als aan elk paar (f,α) ($f \in L$) waarbij $\alpha \in \mathbb{C}$ een element $\alpha f \in L$ is toegevoegd, waarbij voldaan is aan B1, ..., B4, dan heet L een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$.

Voorbeeld 1. Beschouw de verzameling $C([a,b])$ van alle continue reële functies op het segment $[a,b]$. Als f en $g \in C([a,b])$, dan definiëren we $f+g$ door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in [a,b]).$$

En als $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, dan definiëren we αf door

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Door deze definitie wordt $C([a,b])$ een lineaire ruimte.

Definitie 2. Een niet-lege deelverzameling M van een lineaire ruimte L heet een lineaire deelruimte als geldt:

$f,g \in M \implies f + g \in M$

$f \in M,\ \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in M$

Definitie 3. Laat S een deelverzameling zijn van een lineaire ruimte L. Onder het lineair omhulsel L(S) van S verstaan we de verzameling van alle lineaire combinaties van eindig vele elementen van S d.w.z. de verzameling van alle elementen van de vorm

$$\alpha_1 f_{i_1} + \dots + \alpha_n f_{i_n}$$

waarbij $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ en $f_{i_j} \in S$ $(j = 1, \dots, n)$.

Definitie 4. Een stelsel S van vectoren uit L heet onafhankelijk als voor ieder eindig stel verschillende vectoren $f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \in S$ geldt

$$\alpha_1 f_{i_1} + \dots + \alpha_n f_{i_n} = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$(\alpha_j \in \mathbb{R} \text{ voor } j = 1, \dots, n).$$

Definitie 5. Een onafhankelijk stelsel vectoren $S \subset L$ heet een basis voor de lineaire ruimte L, indien $L = L(S)$.

Definitie 6. Zijn L_1 en L_2 lineaire ruimten over $\mathbb{R}$ dan heet een afbeelding $T: L_1 \to L_2$ lineair als T voldoet aan:

1. $T(f + g) = T(f) + T(g)$ voor alle $f,g \in L_1$.
2. $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ voor alle $f \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definitie 7. Een lineaire ruimte L heet genormeerd, wanneer aan ieder element $f \in L$ een niet-negatief reëel getal, de norm van f, is toegevoegd (aangegeven met $||f||$), waarbij voldaan is aan:

N1. $||f|| \geq 0$ voor alle $f \in L$.

$||f|| = 0 \iff f = 0$

N2. $||\alpha f|| = |\alpha|\ ||f||$ voor alle $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

N3. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ voor alle f en $g \in L$.

In een genormeerde lineaire ruimte L voeren we een metriek in door te definiëren:

$$\rho(f,g) = ||f - g|| \quad (f,g \in L).$$

Stelling 1. Door de definitie $\rho(f,g) = ||f - g||$ wordt een genormeerde lineaire ruimte tot een metrische ruimte.

Bewijs: We bewijzen de driehoeksongelijkheid:

$\rho(f,g) = ||f - g|| = ||(f - h) + (h - g)|| \leq ||f - h|| + ||h - g|| =$

$= \rho(f,h) + \rho(h,g)$.

Stelling 2. Laat L een genormeerde lineaire ruimte zijn. Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

$(f \in L$ en $f_n \in L$ voor $n = 1, 2, \ldots)$.

Stelling 3. Laat L een genormeerde lineaire ruimte zijn. Laat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\lim_{n\to\infty} g_n = g$.

$(f,g \in L$ en $f_n, g_n \in L$ voor $n = 1, 2, \ldots)$.

Verder is $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ en $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$.

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ voor $n = 1, 2, \ldots)$.

Dan is: $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n f_n + \beta_n g_n) = \alpha f + \beta g$

$\lim_{n\to\infty} ||f_n|| = ||f||$.

Voorbeeld 2. We beschouwen de lineaire ruimte $C([a,b])$. Voor $f \in C([a,b])$ definiëren we:

$$||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

We merken op dat $||f - g|| < \varepsilon$ betekent:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ voor alle } x \in [a,b].$$

In $C([a,b])$ betekent $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dus:

voor alle $\varepsilon > 0$ is er een natuurlijk getal $n(\varepsilon)$ te vinden met de volgende eigenschap:

als $n > n(\varepsilon)$, dan is $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle $x \in [a,b]$.

We zien dus dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ betekent:

de rij functies $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert op $[a,b]$ uniform naar de functie f.

Opgaven.

1. X is een lineaire ruimte. Bewijs dat de doorsnede van een willekeurige familie van lineaire deelruimten van X een lineaire deelruimte van X is.
2. Laat S een deelverzameling van een lineaire ruimte X zijn. Bewijs dat L(S) (= het lineair omhulsel van S in X) de kleinste lineaire deelruimte van X is die S omvat.
3. Geef voorbeelden van lineaire deelruimten van $C([a,b])$.
4. Zij $f_n(x) = x^n (x \in [a,b])$ en $S = \{f_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} \subset C([a,b])$. Bepaal L(S).
5. Bewijs dat het stelsel S uit opgave 4 onafhankelijk is.
6. Laten L_1 en L_2 lineaire ruimten zijn; en laat $T: L_1 \to L_2$ een lineaire afbeelding zijn. Stel dat $B \subset L_1$ een basis van L_1 is. Bewijs dat T volledig bepaald is door zijn waarden op B.
7. Laat L_1, L_2 en T zijn als in opgave 6.
   $N(T) = \{f \mid f \in L_1 \text{ en } T(f) = 0\}$ (de nulruimte van T)
   en
   $R(T) = \{T(f) \mid f \in L_1\} \subset L_2$ (de beeldruimte van T).
   Bewijs dat N(T) resp. R(T) lineaire deelruimten zijn van L_1 resp. L_2.
8. Bewijs Stelling 3.
9. Laat L(S) zijn als in opgave 4. Bewijs dat $\overline{L(S)} = C([a,b])$. (Gebruik de volgende stelling van Weierstrass: Bij elke continue reële functie f op $[a,b]$ en bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat een reëel polynoom p zó dat $||f - p|| < \varepsilon$).

10. Bewijs dat de genormeerde lineaire ruimte $C([a,b])$ volledig is. (Beschouw een fundamentaalrij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $C([a,b])$. Definiëer de functie f op $[a,b]$ als volgt: als $x \in [a,b]$ dan is $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Bewijs nu dat de rij f_n uniform op $[a,b]$ naar f convergeert. Daar de limiet van een uniform convergente rij van continue functies een continue functie is, volgt: $f \in C([a,b])$).

Literatuur

1. N.I. Achieser - I.M. Glasman: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum
   Akademie Verlag, Berlin, 1954.

2. G. Bachman - L. Narici: Introduction to Hilbertspace
   Academic Press, New York, 1966.

3. S.K. Berberian: Introduction to Hilbertspace.
   Oxford University Press, London and New York, 1961.

4. N. Dunford - J.T. Schwartz: Linear Operators I
   Wiley (Interscience), New York, 1958.

5. N. Dunford - J.T. Schwartz: Linear Operators II
   Wiley (Interscience), New York, 1963.

6. R.E. Edwards: Functional Analysis; theory and applications.
   Holt, New York, 1965.

7. P.R. Halmos: Introduction to Hilbertspace.
   Chelsea, New York, 1951.

8. P.R. Halmos: A Hilbertspace Problem Book
   Van Nostrand, 1967

9. A.N. Kolmogoroff - S.V. Fomin: Elements of the theory of functions and Functional Analysis, Vol I and Vol II
   Graylock Press, Rochester, N.Y.

10. L.A. Ljusternik - V.I. Sobolev: Elemente der Funktionalanalysis.
    Akademie Verlag, Berlin, 1955.

11. E. Lorch: Spectral Theory
    Oxford University Press, London and New York, 1962.

12. F. Riesz - B.Sz-Nagy: Leçon d'analyse fonctionnelle
    Akademiai Kiado, Budapest, 1953.

13. A.E. Taylor: Introduction to Functional Analysis
    Wiley, New York, 1958.

14. A. Wilanski: Functional Analysis
    Blaisdell, New York, 1964.

15. K. Yosida: Functional Analysis
    Springer-Verlag, Berlin, 1965.

16. A.C. Zaanen: Linear Analysis
    North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956.

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

Spreker: P.C. Baayen

3. Ruimten met inproduct

Definitie 1. Zij L een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Een inproduct in L is een functie die aan ieder tweetal elementen f, $g \in L$ een complex getal (f, g) toevoegt, zó dat voor alle f, f_1, f_2, $g \in L$ en alle $\alpha \in \mathbb{C}$ voldaan is aan

$$H_1 \qquad (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$$

$$H_2 \qquad (\alpha f, g) = \alpha(f, g)$$

$$H_3 \qquad (g, f) = \overline{(f, g)}$$

$$H_4 \qquad (f, f) > 0 \quad \text{als } f \neq 0.$$

Opmerking 1. Uit H_3 volgt dat het complexe getal (f, f) gelijk is aan zijn toegevoegde complexe waarde $\overline{(f, f)}$ en dus reëel is. Het is dus zinvol (f, f) met 0 te vergelijken, zoals in H_4 gebeurt.

Opmerking 2. Ter aanvulling van H_4 constateren we dat (0, 0) = 0, immers $(0, 0) = (0.0, 0) \overset{H_2}{=\!=} 0.(0, 0) = 0$.

Opmerking 3. Men kan H_1 en H_2 samenvatten tot de voorwaarde dat voor alle f_1, f_2, $g \in L$ en alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

$$(3.1) \qquad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1(f_1, g) + \alpha_2(f_2, g).$$

Stelling 1. Voor een inproduct gelden:

$$H_1' \qquad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2);$$

$$H_2' \qquad (f, \beta g) = \overline{\beta}(f, g)$$

Bewijs:

$$(f, g_1+g_2) \overset{H_3}{=\!=} \overline{(g_1+g_2, f)} \overset{H_1}{=\!=} \overline{(g_1, f)+(g_2, f)} = \overline{(g_1, f)}+\overline{(g_2, f)}$$

$$\overset{H_3}{=\!=} (f, g_1)+(f, g_2)$$

$$(f,\ \beta g) \overset{H_3}{=\!=} \overline{(\beta g,\ f)} \overset{H_2}{=\!=} \overline{\beta(g,\ f)} = \overline{\beta}\,\overline{(g,\ f)} \overset{H_3}{=\!=} \overline{\beta}(f,\ g)$$

Opmerking 3'. Men kan H_1' en H_2' samenvatten tot

(3.2) $\qquad (f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta_1}(f,\ g_1) + \overline{\beta_2}(f,\ g_2).$

Voorbeelden

1. Een inproduct in de complexe n-dimensionale ruime $\mathbb{C}^n$ wordt gedefinieerd door

$$(a,\ b) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n$$

voor willekeurige $a = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ en $b = (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n) \in \mathbb{C}^n$.

2. Zij $\mathbb{C}^\infty$ de ruimte van alle oneindige rijen $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots)$ met de eigenschap dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat (die van a mag afhangen) zodanig dat $\alpha_i = 0$ voor $i > n$. Als ook $b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots) \in \mathbb{C}^\infty$ en $\lambda \in \mathbb{C}$, dan zullen ook

(3.3) $\qquad a + b = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \ldots)$

en

(3.4) $\qquad \lambda a = (\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \ldots)$

tot $\mathbb{C}^n$ behoren, terwijl $\mathbb{C}^\infty$ met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging een complexe lineaire ruimte is. Wij definieren een inproduct in $\mathbb{C}^\infty$ als volgt:

(3.5) $\qquad (a,\ b) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots$

(waarbij de som in het rechterlid bestaat omdat slechts eindig veel termen $\neq 0$ zijn).

3. Met l^2 duidt men aan de complexe lineaire ruimte van alle rijen $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots)$ die voldoen aan $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$, waarin optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd worden door (3.3) en (3.4) (vgl. opgave 6). Een inproduct in l^2 wordt gedefinieerd door voor $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots) \in l^2$ en $b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots) \in l^2$ te stellen

(3.6) $\qquad (a,\ b) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\overline{\beta_i}.$

We moeten dan wel aantonen dat deze definitie zin heeft, dat de som in het rechterlid van (3.6) convergeert. Hiertoe maken we gebruik van de bekende ongelijkheid tussen meetkundig en arithmetisch gemiddelde: voor niet-negatieve reële α, β geldt

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$$

(<u>Bewijs</u>: $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$).
Op grond hiervan is

$$|\alpha_i\overline{\beta_i}| = |\alpha_i|.|\beta_i| \leq \frac{|\alpha_i|^2+|\beta_i|^2}{2}$$

zodat $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i\overline{\beta_i}|$ gemajoreerd wordt door de - volgens hypothese convergente - reeks $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2)$. Bijgevolg convergeert $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\overline{\beta_i}$.

<u>Opmerking 4.</u> $\mathbb{C}^\infty$ is een lineaire deelruimte van l^2; voor $a, b \in \mathbb{C}^\infty$ is het l^2-inproduct (3.6) identiek aan het $\mathbb{C}^\infty$-inproduct (3.5).

4. In de ruimte $C([a, b])$ van alle complex-waardige continue functies op $[a, b]$ wordt een inproduct gedefinieerd door

(3.7) $$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

<u>Stelling 2.</u>(ONGELIJKHEID VAN CAUCHY-SCHWARZ). Zij L een lineaire ruimte met inproduct. Voor alle $f, g \in L$ is

(3.8) $$|(f, g)|^2 \leq (f, f).(g, g).$$

<u>Bewijs</u>: Voor alle willekeurige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ is (op grond van H_4)

$$0 \leq (\alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g) = \alpha(f, \alpha f + \beta g) + \beta(g, \alpha f + \beta g) =$$
$$= \alpha\overline{\alpha}(f, f) + \alpha\overline{\beta}(f, g) + \beta\overline{\alpha}(g, f) + \beta\overline{\beta}(g, g) =$$
$$= |\alpha|^2(f, f) + \alpha\overline{\beta}(f, g) + \overline{\alpha\overline{\beta}(f, g)} + |\beta|^2(g, g).$$

<u>Geval 1.</u> $(f, f) = (g, g) = 0$. Kies $\beta = 1$ en $\beta = -(f, g)$; we vinden dan dat $-2|(f, g)|^2 \geq 0$, zodat noodzakelijk $|(f, g)| = 0$.
In dit geval is er dus aan (3.8) voldaan.

Geval 2. $(g, g) \neq 0$. Kies $\alpha = 1$ en $\beta = -\frac{(f, g)}{(g, g)}$. We vinden nu dat

$$(f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} + \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \geq 0$$

waaruit (3.8) weer volgt.
(N.B. we gebruiken hier dat (g, g) reëel is: $(g, g) = \overline{(g, g)}$).

Geval 3. $(g, g) = 0$ maar $(f, f) \neq 0$. Kies nu $\alpha = -\frac{(f, g)}{(f, f)}$ en $\beta = 1$.

Stelling 3. Zij (f, g) een inproduct in de lineaire ruimte L over $\mathbb{C}$. Dan is $||f|| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ een norm.

Bewijs: N_1 volgt uit H_4 en opmerking 2; N_2 volgt uit H_2 en H_2':

$$||\alpha f|| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = \{\alpha\bar{\alpha}(f, f)\}^{\frac{1}{2}} = \{|\alpha|^2(f, f)\}^{\frac{1}{2}} = |\alpha|.||f||.$$

De driehoeksongelijkheid N_3 tenslotte bewijzen we als volgt. Daar $||f||$, $||g||$ en $||f+g||$ niet negatieve reële getallen zijn is het voldoende aan te tonen dat

$$||f+g||^2 \leq (||f|| + ||g||)^2. \tag{3.9}$$

Nu is $$||f+g||^2 = (f+g, f+g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) =$$
$$= ||f||^2 + (f, g) + \overline{(f, g)} + ||g||^2$$

terwijl
$$(||f|| + ||g||)^2 = ||f||^2 + 2||f||.||g|| + ||g||^2$$

Daar volgens stelling 2
$$||f||.||g|| \geq |(f, g)| \geq \text{Reële deel van } (f, g) = \frac{(f, g)+\overline{(f, g)}}{2}$$

volgt (3.9).

Voorbeelden

In voorbeeld 1 definieert het inproduct de norm

$$||a|| = (a, a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2} = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

de gewone afstand van $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tot de oorsprong. In C^∞ en l^2 krijgen we een rechtstreekse generalisatie hiervan, nl.

(3.11) $$||a|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In voorbeeld 4 bepaalt het inproduct in $C([a, b])$ de norm

(3.12) $$||f|| = \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

N.B. Dit is een andere norm dan die welke in §2 voorbeeld 2 in $C([a, b])$ word ingevoerd!

Definitie 2. Zij L een complexe lineaire ruimte met inproduct. Twee elementen $f, g \in L$ heten onderling loodrecht, $f \perp g$, indien $(f, g) = 0$ Een stelsel $A \subset L$ heet orthogonaal indien elk tweetal elementen $f, g \in A$ onderling loodrecht is. Het stelsel heet orthonormaal indien het orthogonaal is terwijl bovendien $||f|| = 1$ voor iedere $f \in A$. M.a.w. A is orthonormaal als en slechts als voor alle $f, g \in A$

$$(f, g) = \begin{cases} 0 \text{ als } f \neq g \\ 1 \text{ als } f = g \end{cases}$$

Voorbeeld 5. In $C([a, b])$ met het inproduct als in voorbeeld 4) zij f_n de functie $\sin(\frac{2\pi nx}{b-a})$ en g_n de functie $\cos(\frac{2\pi nx}{b-a})$. Het stelsel A bestaande uit alle f_n en g_n, n geheel, is orthonormaal.

Stelling 4. (PYTHAGORAS). Als $f \perp g$ dan is $||f \pm g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$.

Bewijs:

$$||f \pm g||^2 = (f \pm g, f \pm g) = (f, f) \pm (f, g) \pm (g, f) + (g, g) =$$
$$= ||f||^2 + 0 + 0 + ||g||^2.$$

Door volledige inductie volgt uit stelling 4.

Stelling 4'. Als de eindige collectie $A = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ orthogonaal is dan is

$$||\sum_{i=1}^{n} f_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||f_i||^2.$$

Voorbeeld 6. In $\mathbb{C}^n$ (voorbeeld 1) zij

(3.13) $$e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(het KRONECKER-symbool δ_{ij} is als volgt gedefinieerd: $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$; $\delta_{ii} = 1$, voor alle i). M.a.w. $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, enz. Dan is $A = \{e, e_2, \ldots, e_n\}$ een orthonorm stelsel.
Als $a = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, dan is $(a, e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$.
Bijgevolg is

$$a = (a,e_1)e_1 + (a,e_2)e_2 + \ldots + (a,e_n)e_n.$$

Daar $e_1, \ldots, e_n$ onderling loodrecht zijn geldt hetzelfde voor hun scalaire veelvouden $(a, e_1)e_1, \ldots, (a, e_n)e_n$. Volgens de stelling van Pythagoras is dus

$$\begin{aligned} ||a||^2 &= ||(a, e_1)e_1 + \ldots + (a, e_n)e_n||^2 = ||(a, e_1)e_1||^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + ||(a, e_n)e_n||^2 = \\ &= |(a, e_1)|^2 \, ||e_1||^2 + \ldots + |(a, e_n)|^2 \, ||e_n||^2 = \\ &= |(a, e_1)|^2 + \ldots + |(a, e_n)|^2, \end{aligned}$$

daar $||e_1||^2 = \ldots = ||e_n||^2 = 1$. Daar $(a, e_i) = \alpha_i$ is dit in overeenstemming met (3.10).

Stelling 5. Zij $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ een (aftelbaar) orthonorm stelsel in een lineaire ruimte L met inproduct. Voor iedere $f \in L$ is

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, e_i)|^2 \leq ||f||^2 \tag{3.14}$$

(de ongelijkheid van BESSEL).

Bewijs: Kies een n. Evenals in voorbeeld 6 zijn de vectoren $(f, e_1)e_1, \ldots, (f, e_n)e_n$ onderling loodrecht. Bovendien staat elk dezer vectoren loodrecht op de vector

$$g \overset{\text{def}}{=} f - \sum_{i=1}^{n} (f, e_i)e_i,$$

immers

$$\begin{aligned} (g, e_j) &= (f, e_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} (f, e_i)e_i, e_j\right) = \\ &= (f, e_j) - \sum_{i=1}^{n} (f, e_i)(e_i, e_j) = (f, e_j) - (f, e_j) = 0. \end{aligned}$$

Volgens stelling 4' is daarom

$$||f||^2 = ||g + \sum_{i=1}^{n} (f, e_i)e_i||^2 = ||g||^2 + \sum_{i=1}^{n} |(f, e_i)|^2$$

waarbij we weer gebruiken dat $||(f, e_i)e_i|| = |(f, e_i)|.||e_i|| = |(f, e_i)|$.
Aangezien $||g||^2 \geq 0$ concluderen we dat

$$(3.15) \qquad ||f||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |(f, e_i)|^2.$$

Daar dit voor iedere n correct is volgt het gestelde.

Opmerking 5. De aanname in de formulering van stelling 5 dat A aftelbaar is, is overbodig. Is A een willekeurig orthonormaal stelsel, dan bewijst men (3.15) voor ieder eindig deelstelsel $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van A. Men concludeert vervolgens uit (3.15) dat voor iedere $f \in L$ slechts aftelbaar veel der getallen (f, e), $e \in A$, niet-nul kunnen zijn en dat

$$||f||^2 \leq \sum_{e \in A} |(f, e)|^2.$$

Opgaven

1. Zij L een ruimte met inproduct, en zij $||f|| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$.
   Bewijs dat

   $$||f+g|| = ||f|| + ||g|| \iff f = 0 \text{ of } g = \lambda f \text{ voor zekere}$$

   niet-negatieve reële λ.

2. Bewijs dat in iedere ruimte met inproduct

   $$2||f||^2 + 2||g||^2 = ||f+g||^2 + ||f-g||^2.$$

3. Bewijs dat in iedere ruimte met inproduct

   $$(f, g) = \tfrac{1}{4}(||f+g||^2 - ||f-g||^2 + i||f+ig||^2 - i||f-ig||^2).$$

4. Zij L een ruimte met inproduct. Bewijs dat ieder orthogonaal stelsel $\{f_i\}_{i\in I}$ in L lineair onafhankelijk is.

5. Zij L een ruimte met inproduct. Bewijs dat uit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ in L volgt $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, g_n) = (f, g)$ in $\mathbb{C}$.

6. Maak voorbeeld 3 volledig door te bewijzen: als $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)\in l^2$ en $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots)\in l^2$, dan ook $a+b\in l^2$.
M.a.w. bewijs dat uit $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 < \infty$ en $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 < \infty$ volgt $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i+\beta_i|^2 < \infty$.

7. Zij L een ruimte met inproduct, en zij $0 \neq a\in L$. Bewijs dat iedere $x\in L$ op één en slechts één manier geschreven kan worden als $x = \lambda a + y$ met $\lambda\in\mathbb{C}$ en $y \perp a$, en bepaal λ.

8. Zij L een ruimte met inproduct, en zij $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ orthogonaal in L met alle $a_i \neq 0$.
Bewijs dat iedere $x\in L$ op één en slechts één manier geschreven kan worden als

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + y$$

met $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\mathbb{C}$ en $y \perp a_1, \ldots, y \perp a_n$.

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

4. Hilbertruimten

Definitie 1. Een complexe Hilbertruimte is een lineaire ruimte L over $\mathbb{C}$ met inproduct (x, y) die volledig is t.o.v. de norm $||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

Voorbeelden.

1. $\mathbb{C}^n$ is een Hilbertruimte (met het inproduct als in §3 voorbeeld 1).
2. $\mathbb{C}^\infty$ (zie §3 voorbeeld 2) is niet een Hilbertruimte want zij

$$x_n = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots);$$

dan is de rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij; immers, als $k \geq 0$, dan is

$$||x_{n+k} - x_n|| = ||(0, \ldots, 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots, \frac{1}{2^{n+k}}, 0, 0, \ldots)|| =$$

$$= \{ \sum_{m=1}^{k} (\frac{1}{2^{n+m}})^2 \}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

zodra $n > {}^2\log \frac{1}{\varepsilon}$. Maar deze fundamentaalrij heeft geen limiet (opgave 1).

3. l^2 (zie §3 voorbeeld 3) is een Hilbertruimte.

Stel nl. de rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in l^2 is een fundamentaalrij, waarbij

$$x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots) \quad \text{met} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}|^2 < \infty.$$

We moeten bewijzen dat deze fundamentaalrij convergeert in l^2. Daartoe merken we op dat voor iedere k de rij $(\xi_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is in $\mathbb{C}$ (waarom?) en dus een limiet ξ_k bezit.

Zij

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots).$$

We zullen aantonen: 1) dat $x \in l^2$ en 2) dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Kies $\varepsilon > 0$; dan is er een natuurlijk getal N zódat $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ als $n, m \geq N$. Kies nu een $n \geq N$. Dan is

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{mk}|^2 = ||x_n - x_m||^2 < \varepsilon^2$$

voor iedere $m \geq N$. Hieruit concluderen we dat

$$(4.1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^2 \leq \varepsilon^2.$$

I.h.b. is dus $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^2 < \infty$, waaruit volgt dat $x_n - x \in l^2$.
Maar dan zal ook $x = x_n - (x_n - x) \in l^2$, waarmee 1) is bewezen.
Verder volgt uit (4.1) dat $||x_n - x|| \leq \varepsilon$ voor iedere $n \geq N$. Daar ε willekeurig was volgt 2).

Definitie 2. Een metrische ruimte X heet separabel indien er een aftelbare verzameling $A \subset X$ bestaat met $\bar{A} = X$.

Voorbeeld 3 (vervolg). De Hilbertruimte l^2 is separabel.
Zij A_0 de verzameling van alle complexe getallen $\alpha = s + it$ waarbij s en t rationaal zijn; A_0 is aftelbaar. Zij $A \subset \mathbb{C}^{\infty}$ gedefinieerd door de eis:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) \in A \iff \text{alle } \xi_k \in A_0;$$

dan is A een aftelbare deelverzameling $\mathbb{C}^{\infty}$, en dus ook van l^2, daar $\mathbb{C}^{\infty} \subset l^2$. We zullen laten zien dat $\bar{A} = l^2$ door voor een willekeurige $x \in l^2$ aan te tonen dat iedere omgeving van x punten van A bevat.
Zij $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2$, en zij $\varepsilon > 0$. Daar
$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ is er een N zodanig dat $\sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2$.
Voor elke n, $1 \leq n \leq N$, is er een $\eta_n \in A_0$ zodanig dat $|\xi_n - \eta_n| < \frac{\varepsilon}{2^{(n+1)/2}}$.
Zij nu

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N, 0, 0, \ldots);$$

dan is $\eta \in A$. Bewering: $||\xi - \eta|| < \varepsilon$. Inderdaad:

$$||\xi - \eta||^2 = \sum_{n=1}^{N} |\xi_n - \eta_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 < \varepsilon^2.$$

Stelling 1. Zij L een genormeerde ruimte en zij M een lineaire deelruimte van L. Dan is $\bar{M}$ een lineaire deelruimte van L.

Bewijs:

Stel $f \in \bar{M}$ en $g \in \bar{M}$. Dan zijn er f_n, $g_n \in M$ met $f_n \to f$ en $g_n \to g$. Volgens §2 stelling 3 zal dan $f_n + g_n \to f + g$, dus $f + g \in \bar{M}$, terwijl, als $\alpha \in \mathbb{C}$, ook $\alpha f_n \to \alpha f$, dus $\alpha f \in \bar{M}$.

Stelling 2. Zij L een Hilbertruimte en M een gesloten lineaire deelruimte van L. Zij $f \in L$. Dan is er één en slechts één $g_0 \in M$ zodanig dat $||f - g_0|| = \inf\limits_{g \in M} ||f - g||$. Tevens is g_0 het enige element uit M zodanig dat $f - g_0 \perp M$.

Bewijs:

Zij $\delta = \inf\limits_{g \in M} ||f - g||$.

Voor ieder natuurlijk getal n is er een $g_n \in M$ te vinden zodanig dat $||f - g_n||^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}$.

We zullen nu aantonen, dat de rij $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is.

We gebruiken daarbij §3 opgave 2:

$$2||f - g_n||^2 + 2||f - g_m||^2 = ||2f - (g_n + g_m)||^2 + ||g_n - g_m||^2$$

ofwel

$$||g_n - g_m||^2 = 2||f - g_n||^2 + 2||f - g_m||^2 - 4||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Daar nu M een lineaire deelruimte van L is, is $\frac{g_n + g_m}{2} \in M$; en dus

$$||f - \frac{g_n + g_m}{2}|| \geq \inf_{g \in M} ||f - g|| = \delta.$$

Dus:

$$||g_n - g_m||^2 \leq 2(\delta^2 + \frac{1}{n}) + 2(\delta^2 + \frac{1}{m}) - 4\delta^2 = 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}).$$

Hieruit volgt dat de rij $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is.

Daar L een Hilbertruimte is (dus is L volledig), is de rij $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, i.e. er is een $g_0 \in L$ zódat $g_0 = \lim\limits_{n \to \infty} g_n$.

Daar M gesloten is, is dan $g_0 \in M$.

Uit: $||f - g_n||^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}$, volgt nu dat $||f - g_0||^2 \leq \delta^2$.

Daar ook $||f - g_0|| \geq \delta$ (immers $g_0 \in M$), moet $||f - g_0|| = \delta$. We tonen nu aan, dat g_0 het enige element uit M is zodanig dat $||f - g_0|| = \delta$.

Stel nl. $g_0' \in M$ en $||f - g_0'|| = \delta$.

M.b.v. opgave 2 in §3 concluderen we:

$$2||f - g_0||^2 + 2||f - g_0'||^2 = ||2f - g_0 - g_0'||^2 + ||g_0 - g_0'||^2$$

zodat

$$||f - \frac{g_0+g_0'}{2}||^2 = \tfrac{1}{4}(2\delta^2 + 2\delta^2 - ||g_0 - g_0'||^2) = \delta^2 - \tfrac{1}{4}||g_0 - g_0'||^2.$$

Daar $\frac{g_0+g_0'}{2} \in M$ moet ook gelden: $||f - \frac{g_0+g_0'}{2}||^2 \geq \delta^2$.

Bijgevolg moet $||g_0 - g_0'||^2 = 0$ of $g_0 = g_0'$.

We zullen nu laten zien dat $f - g_0 \perp M$. Voor willekeurige $z \in M$ en reële $\lambda > 0$ is $g_0 + \lambda z \in M$ en dus

$$\delta^2 < ||f - (g_0 + \lambda z)||^2 = (f - g_0 - \lambda z, f - g_0 - \lambda z) =$$

$$= (f - g_0, f - g_0) - \lambda(f - g_0, z) - \lambda\overline{(f - g_0, z)} + \lambda^2||z||^2.$$

$$= \delta^2 - 2\lambda \mathrm{Re}(f - g_0, z) + \lambda^2||z||^2 \quad (\text{N.B.}\lambda = \bar{\lambda}),$$

zodat

(4.2) $\lambda||z||^2 - 2\,\mathrm{Re}(f - g_0, z) > 0.$

Stel nu dat $f - g_0$ niet loodrecht stond op M. Dan is er een $z_0 \in M$ met $(f - g_0, z_0) \neq 0$. Zij ϕ het argument van het complexe getal $(f - g_0, z_0)$ en zij $z_1 = e^{i\phi}z_0$. Dan is

$$(f - g_0, z_1) = (f - g_0, e^{i\phi}z_0) = e^{-i\phi}(f - g_0, z_0)$$

reëel en positief. Dus

$$(f - g_0, z_1) = \mathrm{Re}(f - g_0, z_1) > 0.$$

In (4.2) nemen we nu $z = z_1$. Door geschikte keuze van λ krijgen we dan een tegenspraak.

Tenslotte moeten we nog aantonen dat g_0 het enige element g uit M is waarvoor $f - g \perp M$. Stel dat ook $f - g_1 \perp M$.

Dan is $f - g_0 \perp (g_1 - g_0)$ en $f - g_1 \perp (g_1 - g_0)$. Uit de stelling van Pythagoras volgt:

$$||f - g_0||^2 = ||f - g_1||^2 + ||g_1 - g_0||^2$$

en ook

$$||f - g_1||^2 = ||f - g_0||^2 + ||g_0 - g_1||^2.$$

Dus $||g_1 - g_0||^2 = 0$ ofwel $g_1 = g_0$.

Definitie 3. Zij L een Hilbertruimte, M een gesloten lineaire deelruimte. Als $f \in L$, dan wordt de $g_0 \in M$ waarvoor $(f - g_0) \perp M$ aangegeven met $P_M(f)$. De afbeelding P_M heet de orthogonale projectie van L op M.

Definitie 4. Zij T een lineaire afbeelding van een genormeerde lineaire L_1 in een genormeerde lineaire ruimte L_2. De afbeelding T heet begrensd, indien er een getal $c \geq 0$ bestaat zodanig dat

$$||T(f)||_{L_2} \leq c||f||_{L_1} \text{ voor alle } f \in L_1.$$

Stelling 3. Zij L een Hilbertruimte, M een gesloten lineaire deelruimte. De afbeelding $P_M : L \to M$ (zie definitie 3) is lineair en begrensd.
Verder geldt nog dat $P_M^2 = P_M$ (d.w.z. $P_M(f)) = P_M(f)$ voor alle $f \in L$).

Bewijs:

a) P_M is lineair.
Immers, als $f_i - P_M(f_i) \perp M$ voor $i = 1, 2$, dan is ook

$$[\alpha_1 f_1 - \alpha_1 P_M(f_1) + \alpha_2 f_2 - \alpha_2 P_M(f_2)] = [(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - (\alpha_1 P_M(f_1) + \alpha_2 P_M(f_2))] \perp M.$$

Maar volgens de definitie is $P_M(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$ het enige element g uit M waarvoor geldt

$$[(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - g] \perp M.$$

Bijgevolg moet: $P_M(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 P_M(f_1) + \alpha_2 P_M(f_2)$.

b) P_M is begrensd.
Daar n.l. $P_M(f) \in M$ en $f - P_M(f) \perp M$, is volgens de stelling van Pythagoras

$$||f||^2 = ||f - P_M(f)||^2 + ||P_M(f)||^2 \geq ||P_M(f)||^2$$

zodat

$$||P_M(f)|| \leq 1.||f||, \text{ voor alle } f \in L.$$

c) $P_M^2 = P_M$.
Immers, als $f \in L$, dan $P_M(f) \in M$. Maar voor iedere $g_0 \in M$ geldt: $P_M(g_0) = g_0$, daar $||g_0 - g_0|| = 0 = \inf_{g \in M} ||g - g_0||$ (zie stelling 2).

Zij P_M de orthogonale projectie van de Hilbertruimte L op zijn gesloten lineaire deelruimte M. Dan is $P_M^{-1}(0)$ een gesloten lineaire deelruimte van L (zie opgave 3).
Nu is iedere $f \in L$ op precies één wijze te schrijven als som van een $f_1 \in P_M^{-1}(0)$ en een $f_2 \in M$:

a) het kan: neem maar $f_1 = f - P_M(f)$ en $f_2 = P_M(f)$
dan is: $P_M(f_1) = P_M(f) - P_M^2(f) = 0$ dus $f_1 \in P_M^{-1}(0)$, en $f_2 \in M$.

b) het kan maar op één manier: als $f = f_1 + f_2$ met $f_1 \in P_M^{-1}(0)$ en $f_2 \in M$
dan is $P_M(f) = P_M(f_1) + P_M(f_2) = f_2$ (immers $P_M(f_1) = 0$ en $P_M(f_2) = f_2$);
dus $f_2 = P_M(f)$, en dus $f_1 = f - P_M(f)$.

Opgaven

1. Bewijs dat de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uit voorbeeld 2 geen limiet in $\mathbb{C}^\infty$ heeft. Daar l^2 volledig is, heeft deze rij wel een limiet in l^2. Bepaal deze limiet.

2. Bewijs dat de afsluiting van $\mathbb{C}^\infty$ in l^2 de gehele l^2 is.

3. Zij T een begrensde lineaire operator van een genormeerde lineaire ruimte L_1 in een genormeerde lineaire ruimte L_2. Bewijs dat $N(T)$ $(= T^{-1}(0))$ (zie §2 opgave 7) een gesloten lineaire deelruimte van L_1 is.

4. Laat M een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte L zijn.
Bewijs: $f \in M \iff ||P_M f|| = ||f||$

5. Zij $A : l^2 \to l^2$ als volgt gedefinieerd:
als $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}, \xi_{2n+1}, \ldots)$
dan is $Ax = (0, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}, 0, \ldots)$.
Laat zien dat er een gesloten lineaire deelruimte M van l^2 bestaat zodanig dat $A = P_M$.

6. Toon aan dat $C([0, 1])$ (met het inproduct als in §3 voorbeeld 4) geen Hilbertruimte is. (Aanwijzing: beschouw de rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ waarbij
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -nx + \frac{n}{2} + 1 \text{ als } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ als } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Colloquium Lineaire Analyse (1967-1968)

Spreker: L.E. Fleischhacker.

5. Bases.

Definitie 1. Een reeks $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (waarbij $f_i \in L$ en L een Hilbertruimte) noemen we convergent als er een $f \in L$ bestaat met

$$\lim_{k\to\infty} ||f - \sum_{i=1}^{k} f_i|| = 0$$

Opmerking: Wegens de volledigheid van L geldt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \text{ convergent} \iff \lim_{m,n\to\infty} ||\sum_{i=m}^{n} f_i|| = 0.$$

Stelling 1. Als $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ een orthogonaal stelsel is geldt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \text{ convergent} \iff \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||^2 \text{ convergent.}$$

Bewijs: Volgt onmiddellijk uit bovenstaande opmerking aangezien voor een orthogonaal stelsel

$$||\sum_{i=m}^{n} f_i||^2 = \sum_{i=m}^{n} ||f_i||^2.$$

Definitie 2. Als M en N lineaire deelruimten zijn van een Hilbertruimte L en $M \cap N = \{0\}$ dan noteren we:

$$M \oplus N = \{x + y | x \in M, y \in N\}.$$

$M \oplus N$ is weer een lineaire deelruimte; de directe som van M en N. Elk element van de directe som is eenduidig te schrijven als som van een element van M en een element van N.

Als M_n voor elk natuurlijk getal n een deelruimte van L is en $i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \{0\}$ dan generaliseren we bovenstaande definitie als volgt.

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i = \{ \sum_{i=1}^{\infty} f_i \,|\, (\forall i) f_i \in M_i, \sum_{i=1}^{\infty} f_i \text{ convergent} \}.$$

Ook hier is de schrijfwijze van de elementen van $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ als som van element der M_i's eenduidig.

Definitie 3. $M^{\perp} = \{x | x \perp M\}$, M deelruimte van Hilbertruimte.

Opmerking: $f \in M^{\perp} \iff p_M(f) = 0$, $M^{\perp}$ is gesloten.

Stelling 2. $L = M \oplus M^{\perp}$.

Het bewijs volgt direct uit de definities en de opmerking boven aan pag. 29.

Stelling 3. M,N gesloten, $M \perp N \Rightarrow M \oplus N$ gesloten.

Bewijs: We kunnen $f \in \overline{M \oplus N}$ schrijven als

$$f = p_M(f) + p_N(f) + h \text{ met } h \perp M,N.$$

Beschouw nu de functie $\phi(x) = (x, h)$.

Deze functie is continu en $\phi(x) = 0$ voor $x \in M \oplus N$, dus ook voor $x \in \overline{M \oplus N}$ i.h.b.

$\phi(h) = (h,h) = ||h|| = 0$. d.w.z. $f \in M \oplus N$.

Stelling 4. M_n gesloten, $\underline{\{M_n\}_{n=1}^{\infty}}$ orthogonaal $\Rightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ gesloten.

Bewijs: Stel weer $f \in \overline{\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n}$, we definiëren:

$$f_n = p_{M_n}(f), \quad f'_n = \frac{f_n}{||f_n||}.$$

Volgens de Bessel-ongelijkheid is nu voor elke m

$$\sum_{i=1}^{m} |(f, f'_i)|^2 \leq ||f||^2$$

dus ook

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, f'_i)|^2 \leq ||f||^2.$$

Maar

$$(f, f'_i) = (f_n + f_n, f'_n) = ||f_n||$$

dus $\sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||^2$ convergeert, en volgens stelling 1 dus

ook $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

Met $h = f - \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ gaat het bewijs verder als dat van de vorige stelling.

Definitie 4. Een maximaal orthogonaal systeem voor de Hilbertruimte L is een verzameling $B \subset L$ zodat

i) $0 \notin B$

ij) $x, y \in B,\ x \neq y \Rightarrow x \perp y$

iij) $x \in L, \forall b \in B: x \perp b:. \Rightarrow x = 0.$

Is ook nog voor elke $b \in B$ $||b|| = 1$ dan spreken we van een maximaal orthonorm systeem, of een basis voor L.

Stelling 5. De volgende beweringen zijn equivalent als E een orthonorm stelsel is.

i) $E\ (= \{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ is een aftelbare basis van L.

ij) Voor alle $f \in L$ geldt $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n$.

iij) Voor alle f en $g \in L$ geldt

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)\overline{(g, e_n)}$$

iv) Voor alle $f \in L$ geldt $||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2$.

Opgave: Bewijs deze stelling.

Stelling 6. (Gram-Schmidt).

Als F een eindige of aftelbaar oneindige lineair onafhankelijke deelverzameling van L is, dan bestaat er een eindige, resp. aftelbaar oneindige orthonorme verzameling E met L(E) = L(F) (elke $f \in F$ is een lineaire combinatie van (eindig veel) elementen van E en elke $e \in E$ een lineaire combinatie van elementen van F).

Bewijs: We noteren: $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nu definiëren we een stelsel $E' = \{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ en een stelsel $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tegelijk recursief als volgt:

$$\begin{cases} e'_n = f_n - \sum_{j=1}^{n-1} (f_n, e_j)e_j \\ \\ e_n = \dfrac{e'_n}{||e'_n||} \end{cases}$$

Deze definitie is alleen mogelijk als $e'_n \neq 0$ voor alle n waarvoor een f_n bestaat.

Was $e'_k = 0$ en voor $n < k$, $e'_n \neq 0$ dan zou f_k een lineaire combinatie zijn van $e_1, \ldots, e_{k-1}$ die elk op hun beurt weer lineaire combinaties van $f_1, \ldots, f_{k-1}$ zijn.
Dit kan niet want F is lineair onafhankelijk.
Dat $L(F) = L(E)$ geldt, volgt onmiddellijk uit de definitie van E. We moeten nog aantonen dat E orthonorm is.

Veronderstel dat $e_1, \ldots, e_{n-1}$ orthonorm is dan is voor $1 \leq j \leq n-1$:

$$(e'_n, e_j) = (f_n, e_j) - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, e_k)(e_k, e_j)$$

$$= (f_n, e_j) - (f_n, e_j) = 0$$

dus $e'_n \perp e_1, \ldots, e_{n-1}$ dus ook $e_1, \ldots, e_n$ is orthonorm.

Voorbeeld: Neem in $C[-1, +1]$ $f_n(x) = x^{n-1}$, dan is $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ lineair onafhankelijk.

Passen we hierop het Gram-Schmidt procédé toe dan vinden we:

$$e'_1(x) = 1 \quad ||e'_1|| = \sqrt{2} \quad e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e'_2(x) = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = x \quad ||e'_2|| = \frac{2}{3} \quad e_2 = \frac{3}{2}\, x.$$

Dit voortzettend vinden we $e_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{(-2)^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n$

hetgeen zich laat verifieren door berekening van (f_k, e_n) voor $k < n$ m.b.v. partiele integratie en toepassing van de volgende gemakkelijk te bewijzen stelling:

Als voor twee orthonorme stelsels $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ geldt
g_n is een lineaire combinatie van $h_1, \ldots, h_n$
h_n is een lineaire combinatie van $g_1, \ldots, g_n$,
dan is voor alle n $g_n = h_n$.

De polynomen $\frac{e_n(x)}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$ zijn de z.g. polynomen van Legendre, oplossingen, van de differentiaalvergelijking:
$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$

Stelling 6. Voor elke Hilbertruimte L geldt: L separabel $\Longleftrightarrow$ L bezit een aftelbare basis.

Bewijs: $\Leftarrow$ Stel $\{e_i\}_{i=1}$ is een aftelbare basis dan is
$\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \mid (\forall i)\alpha_i \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i,\ k \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare overal dichte deelverzameling (vgl. §4, voorb. 3).

$\Rightarrow$ Stel F is een aftelbare, overal dichte deelverzameling.
Als $F = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ definiëren we $g_i = f_{n_i}$ waarbij
$n_1 = \min \{n \mid f_n \neq 0\}$
$n_{i+1} = \min \{n \mid n > n_i,\ f_n$ lineair onafhankelijk van $g_1, \ldots, g_i\}$.
Dus $L(G) = L(F)$.
Bij G definiëren we volgens stelling 5 een orthonorm stelsel $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ met $L(E) = L(G)$.
Zij nu $E_i = \{\alpha e_i \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ dan is volgens stelling 4 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ gesloten. We hebben nu

$$L = \overline{F} \subseteq \overline{L(F)} = \overline{L(E)} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq L.$$

Dus $L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ d.w.z. $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ is een basis voor L.

Opmerking: In feite is elke separabele Hilbertruimte isomorf met l^2 of met een $\mathbb{C}^n$. Onder isomorfisme moeten we hier verstaan een lineaire afbeelding ϕ met de eigenschap

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y).$$

Waarbij de beide inwendige producten behoren bij ruimten H en L resp. als $\phi : L \to H$.

Opgave: Bewijs bovenstaande bewering en verifieer dat een isomorfisme als boven gedefinieerd ook een homeomorfisme is.

Colloquium Lineaire Analyse (1967 - 1968)

Spreker: J. van der Slot.

Voorbeelden: 1. Beschouw de lineaire ruimte $C[0,1]$ bestaande uit alle continue functies $f:[0,1] \to R$. De definitie

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$$

bepaalt een inproduct op $C[0,1]$ doch met de geinduceerde norm is deze ruimte niet volledig (zie opgave 6 op blz. 29).
Om nu toch een Hilbertruimte te construeren die de collectie van alle continue functies van $[0,1]$ naar R omvat gaat men als volt te werk:
Beschouw de collectie S van alle meetbare functies f waarvoor $\int_2^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ (het integraalteken staat hier voor de Lebesgueintegraal). Definieer op S de equivalentierelatie $\sim$ door $f \sim g \iff \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx=0$ en vorm de ruimte L^2 bestaande uit alle equivalentieklassen. Op L^2 definieren we een inproduct door $([f], [g]) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$, waarbij $[f]$ en $[g]$ de equivalentieklassen zijn waartoe de functies f resp. g behoren (de definitie is onafhankelijk van de keuze van de representanten uit de klassen). Men kan bewijzen dat L^2 met dit inproduct een Hilbertruimte is.
Beschouw in L^2 voor n geheel het volgende stelsel functies

$$e_n = e^{2\pi inx} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dit is een orthonormaal stelsel, want $(e_n, e_m) = \int_0^1 e^{2\pi inx}\, e^{-2\pi imx} dx = \delta_{mn}$.

We gaan aantonen dat de collectie $\{e_n | n = 1, 2, \ldots\}$ een basis is voor L^2. Hiervoor maken we gebruik van de volgende twee lemma's.

Lemma 1. Voor alle $f \in L^2$ bestaat er een $g \in C[0, 1]$ met $g(0) = g(1)$ zodat $||f-g|| < \varepsilon$. (m.a.w. $C[0,1]$ ligt dicht in L^2 met de norm $|| \ ||$)

Lemma 2. $\forall g \in C[0,1]$ met $g(0) = g(1)$ bestaat er een trigonometrisch polynoom $h(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi ikx}$ zodat $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in [0,1])$.

Laat nu $f \in L^2$ en $f \perp e_n$ voor alle n; we moeten aantonen dat $f = 0$.
Kies een g volgens lemma 1 en bij g een h volgens lemma 2.
Dan geldt

$$||g-h|| = \left(\int_0^1 |g(x) - h(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{en}$$

$$||f-h|| < ||f-g|| + ||g-h|| < 2\varepsilon \; \ldots\ldots\ldots \qquad (*)$$

Ook geldt $||f-h||^2 = (f, f) + (h, h) = ||f||^2 + ||h||^2$ (want $(f, h) = 0$ omdat $f \perp e_n$ voor alle n, en h een lineaire combinatie van e_n's).

Dus
$$||f-h||^2 \geq ||f||^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (**)$$

$(*)$ en $(**)$ impliceren $||f||^2 \leq 4\varepsilon^2$ dus $f = 0$.

Voorbeeld 2. Op geheel analoge wijze kan men aantonen dat de collectie polynomen $\{x^k | k = 1, 2, \ldots\}$ een basis is voor L^2. Inplaats van lemma 2 maken we gebruik van het volgende lemma.

Lemma 3 (Weierstrass). Voor alle $g \in C[0, 1]$ bestaat een polynoom $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ zodat $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$ voor alle $x \in [0, 1]$.

De betekenis van het begrip basis in een Hilbertruimte wordt uitgedrukt in de volgende stelling.

Stelling 7. Zij $\{e_n | n = 1, 2, \ldots\}$ een orthonormaal stelsel van een Hilbertruimte H.
Dan zijn de volgende condities equivalent:

(1) Het stelsel $\{e_n | n = 1, 2, \ldots\}$ is een basis voor H.

(2) Als $M_n = L(e_n)$ voor $n = 1, 2, \ldots$, dan $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$.

(3) Voor alle $f \in H$ geldt $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n$ (Fourierontwikkeling).

(4) Voor alle f en $g \in H$ geldt $(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)\overline{(g, e_n)}$ (Parseval).

(5) Voor alle $f \in H$ geldt $||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2$ (Bessel).

(gelijkteken in de ongelijkheid van Bessel, zie pagina 21 St. 5).

Bewijs. (1) $\Rightarrow$ (2). Het is duidelijk dat $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n \subset H$; laten we onderstellen dat $f \in H \backslash M$. Uit blz. 31 St. 4 volgt dat M gesloten is in H en uit blz. 26 St. 2 volgt dat de projectie $P_M f$ van f op M bestaat. Nu geldt $(f - P_M f) \perp M$ en dus $(f - P_M f) \perp e_n$ voor alle n. Uit het ondergestelde volgt nu $f - P_M f = 0$ d.w.z. $f = P_M f$. Dit impliceert echter $f \in M$ wat in strijd is met $f \in H \setminus M$.

$2 \Rightarrow 3$. Stel $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$; dan is elke $f \in H$ te schrijven als $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ met $\alpha_n \in \mathbb{C}$. We tonen nog aan dat de coefficiënt $\alpha_n = (f, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

$(f, e_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, e_n) = (\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n, e_n) = \lim_{m\to\infty} (\sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n, e_n)$ (vanwege de continuïteit van (,)) $= \alpha_n$ (vanwege de orthonormaliteit van $\{e_n | n = 1, 2, \ldots\}$).

$3 \Rightarrow 4$. $(f, g) = (\sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n, \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n)e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} ((f, e_n)e_n, (g, e_n)e_n)$ (continuïteit van inproduct) $= \sum (f, e_n)\overline{(g, e_n)}$.

$4 \Rightarrow 5$. Neem $f = g$.

$5 \Rightarrow 1$. Triviaal.

6. Begrensde lineaire operatoren.

Definitie's. H_1 en H_2 zijn Hilbertruimten. Een lineaire operator A van H_1 in H_2 (notatie: $A : H_1 \to H_2$) is een lineaire afbeelding A van een lineaire deelruimte D(A) van H_1 in H_2. D(A) heet het definitiegebied van A. De kern (nulruimte) van A noteren we met N(A). De operator A heet begrensd wanneer er een reële constante C bestaat zodat $||Af|| \leq C||f||$ voor alle $f \in D(A)$. Het infimum van de verzameling reële getallen C met deze eigenschap heet de norm van A, notatie $||A||$ ($||A|| = 0$ d.e.s.d. wanneer A de nulafbeelding is).
Een operator A heet continu wanneer A als afbeelding van metrische ruimten continu is.

Opmerkingen. 1. Een lineaire operator A van H_1 in H_2 is continu d.e.s.d. wanneer hij continu is in het punt 0.

2. Men gaat gemakkelijk na dat voor een begrensde lineaire operator A geldt: $||A|| = \sup\{||Af|| \mid ||f|| = 1, f \in D(A)\}$.

Stelling 1. Een lineaire operator A van een Hilbertruimte H_1 in een Hilbertruimte H_2 is continu d.e.s.d. wanneer hij begrensd is.

Bewijs $\Rightarrow$ Stel A begrensd. Als f een vast punt is van D(A) en g is een punt van D(A) met $||g-f|| < \varepsilon/||A||$, dan

$$||Af-Ag|| \leq ||A|| \, ||f-g|| < \varepsilon.$$ Dus A is continu.

$\Leftarrow$ Stel A continu. Neem aan dat A niet begrensd is; dan bestaan voor $n = 1, 2, \ldots$ $f_n \neq 0$ uit D(A), zodat $||Af_n|| > n||f_n||$. Noem $g_n = \frac{f_n}{n||f_n||}$. Dan $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, terwijl $||Ag_n|| = \frac{||Af_n||}{n||f_n||} > 1$ voor alle n.
Dit is in tegenspraak met de continuïteit van A.

Definitie. Een lineaire operator van een Hilbertruimte H naar de complexe getallen heet een functionaal.

Voorbeelden. 1. Stel H een Hilbertruimte. De identieke afbeelding van H op zichzelf is een begrensde lineaire operator met norm 1.
2. Stel M is een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte H. Dan is de projectie P_M op M een begrensde lineaire operator van H in zichzelf. Volgens de stelling van Pythagoras geldt voor elke $f \in H$
$||f||^2 = ||P_Mf||^2 + ||1-P_Mf||^2 \geq ||P_Mf||^2$. Dus $||P_M|| \leq 1$. Omdat voor $f \in M$ $P_Mf = f$ volgt zelfs $||P_M|| = 1$.
3. Laat g een vast element zijn van een Hilbertruimte H.
Definieer voor $f \in H$ $F(f) = (f, g)$. Dan is F een lineaire functionaal op H. Volgens Cauchy-Schwarz geldt voor $f \in H$ $||F(f)|| = ||f, g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$. Dus $||F|| \leq ||g||$. Omdat $F(g) = ||g||^2$ volgt $||F|| = ||g||$.

Stelling 2. Zij A een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H_1 in een Hilbertruimte H_2 met definitiegebied D(A).
Dan is A uniek uit te breiden tot een begrensde lineaire operator $\bar{A}$ met definitiegebied $\overline{D(A)}$. Bovendien geldt $||\bar{A}|| = ||A||$.

Bewijs. Stel f een element van $\overline{D(A)}$. Er bestaat een rij punten $\{f_n | n = 1, 2, \ldots\}$ met $f_n \in D(A)$ die in H_1 naar f convergeert.
De rij $\{Af_n | n = 1, 2, \ldots\}$ is kennelijk een fundamentaalrij in H_2 want voor $n, m \in N$ geldt $||Af_n - Af_m|| \leq ||A||\ ||f_n - f_m||$. Omdat H_2 volledig is bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} Af_n$ die we noteren met $\bar{A}f$.
Het punt $\bar{A}f \in H_2$ is onafhankelijk van de keuze van de rij $\{f_n | n = 1, 2, \ldots\}$ want als $\{f'_n | n = 1, 2, \ldots\}$ een willekeurig andere rij punten uit $D(A)$ is die naar f convergeert, dan geldt voor $n > n_0$ $||f_n - f_n'|| < \varepsilon$, d.w.z. $||Af_n - Af_n'|| \leq \varepsilon ||A||$; en dus $\lim\limits_{n\to\infty} (Af_n - Af_n') = 0$ wat impliceert dat $\lim\limits_{n\to\infty} Af_n = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n'$.

De nieuw gedefinieerde operator $\bar{A}$ is duidelijk een voortzetting van A; we tonen nog aan dat $\bar{A}$ begrensd is en dezelfde norm heeft als A. (de lineariteit van $\bar{A}$ wordt aan de lezer overgelaten).
Stel $f \in \overline{D(A)}$ en f_n $n = 1, 2, \ldots$ punten uit $D(A)$ met $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.
Dan geldt $||Af_n|| \leq ||A|| \cdot ||f_n||$ voor elke n, en dus ook $\bar{A}f =$
$||\lim\limits_{n\to\infty} Af_n|| = \lim\limits_{n\to\infty} ||Af_n|| \leq \lim\limits_{n\to\infty} ||A|| \cdot ||f_n|| = ||A|| \cdot ||f||$.
In elk geval geldt dus $||\bar{A}|| \leq ||A||$. Daar $\bar{A}$ een uitbreiding is van A geldt m.b.v. Opm. 2 op blz. 38 ook $||\bar{A}|| \geq ||A||$. Dus $||A|| = ||A||$.
Tenslotte, laat A^* een willekeurige begrensde lineaire operator zijn met definitiegebied $\overline{D(A)}$ die een voortzetting is van A. Zij $f \in \overline{D(A)}$ en $\{f_n | n = 1, 2, \ldots\}$ een rij punten uit $D(A)$ welke convergeert naar f. Dan volgt uit de continuïteit van A^* (St. 2), dat $A^*f_n \to A^*f$ d.w.z. $\lim\limits_{n\to\infty} Af_n = A^*f = \bar{A}f$ (door de definitie van $\bar{A}$). Hiermee is ook de eenduidigheid van $\bar{A}$ bewezen.

Gevolg. Een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H_1 in een Hilbertruimte H_2 is altijd uit te breiden tot een begrensde lineaire operator met definitiegebied H (Ga dit na).

In het vervolg zullen we van een begrensde lineaire operator altijd onderstellen dat het definitiegebied de gehele Hilbertruimte in kwestie omvat.

7. De representatiestelling van Riesz.

Stelling 1 (Riesz). Zij F een begrensde lineaire functionaal gedefinieerd op een Hilbertruimte H. Dan bestaat een uniek bepaald element h van H zodat $F(f) = (f,h)$ voor alle $f \in H$. M.a.w. elke begrensde lineaire functionaal op een Hilbertruimte is van de vorm beschreven in voorbeeld 3 op blz. 38.

Voor we deze stelling bewijzen eerst het volgende lemma.

Lemma. Laten F en G twee lineaire functionalen zijn gedefinieerd op een Hilbertruimte H. Als gegeven is dat $N(F) \supset N(G)$ dan bestaat er een complex getal λ zodat $F(f) = \lambda G(f)$ voor alle $f \in H$.

Bewijs. Laat g een vast element van H zijn niet gelegen in de kern $N(G)$ van G (als $N(G) = H$ dan is de stelling triviaal) en f een willekeurig element van H. Dan $G(g) \neq 0$ en er geldt $G(f - \frac{G(f)}{G(g)} \cdot g) = 0$. Omdat $N(G) \subset N(F)$ volgt $F(f - \frac{G(f)}{G(g)} \cdot g) = 0$. Dus $F(f) = \frac{G(f)}{G(g)} \cdot F(g) = \frac{F(g)}{G(g)} \cdot G(f)$. Omdat $\frac{F(g)}{G(g)}$ een constante is die niet afhangt van de keuze van f volgt het gestelde.

Bewijs van de stelling. We mogen aannemen dat $N(F) \neq H$. Omdat $N(F)$ gesloten is in H (St. 2) bestaat er een element $g \neq 0$ van H dat loodrecht staat op $N(F)$ terwijl $F(g) = 1$. Definieer de functionaal G op H door $G(f) = (f, g)$. Dan geldt $N(G) = \{g\}^{\perp} \supset N(F)$. Uit het vorige lemma volgt dat er een complex getal λ bestaat met $F(f) = \lambda G(f) = \lambda(f, g)$ voor alle $f \in H$. Substitutie van $f = g$ levert $\lambda = 1/||g||^2$ zodat $F(f) = (f, g/||g||^2)$ voor alle f. Hiermede is de stelling bewezen.

8. Begrensde bilineaire functionalen

Definitie. Zij H een Hilbertruimte. Een afbeelding $\phi : H \times H \to \mathbb{C}$ heet een bilineaire functionaal (of bilinaire vorm), wanneer

1. $\phi(\alpha f + \beta g, h) = \alpha\phi(f, h) + \beta\phi(g, h)$
2. $\phi(h, \alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\phi(h, f) + \overline{\beta}\phi(h, g)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; $f, g, h \in H$.

Een bilineaire functionaal ϕ heet begrensd, wanneer er een reële constante C bestaat met

3. $|\phi(f, g)| \leq C \cdot ||f|| \cdot ||g||$ voor alle $f, g \in H$.

In dat geval definiëren we $||\phi|| = \sup\{\phi(f, g) \mid ||f|| = ||g|| = 1\}$.
Een bilineaire functionaal ϕ heet symmetrisch, wanneer

4. $\phi(f, g) = \overline{\phi(g, f)}$ voor alle $f, g \in H$.

Een symmetrische functionaal is altijd reëel.

Definitie. Zij ϕ een bilineaire functionaal gedefinieerd op een Hilbertruimte H. De afbeelding $\hat{\phi}$ van H naar $\mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\hat{\phi}(f) = \phi(f, f)$$

heet de kwadratische vorm van ϕ. De kwadratische vorm $\hat{\phi}$ heet begrensd wanneer er een reële constante C bestaat met $|\hat{\phi}(f)| \leq C||f||^2$. In dat geval definiëren we de norm $||\hat{\phi}|| = \sup\{|\hat{\phi}(f)| \mid ||f|| = 1\}$.

Voorbeelden. 1. Beschouw een begrensde lineaire operator A van een Hilbertruimte H in zichzelf, en stel voor $f, g \in H$ $\phi(f, g) = (f, Ag)$. Dan is ϕ een bilineaire functionaal.
2. Definieer voor $x, y \in \mathbb{C}^n$ $\phi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j y_j$ ($a_{ij} \in \mathbb{C}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$).
Dan is ϕ een bilineaire functionaal op $\mathbb{C}^n$.

De volgende stelling legt een ondubbelzinnig verband tussen een bilineaire functionaal en zijn kwadratische vorm.

Stelling 1. (polarizatie): Voor iedere bilineaire functionaal ϕ geldt:

$$\phi(f, g) = \tfrac{1}{4}\left[\hat{\phi}(f + g) - \hat{\phi}(f - g) + i\hat{\phi}(f + ig) - i\hat{\phi}(f - ig)\right].$$

Bewijs: Het rechterlid kunnen we schrijven als

$$\tfrac{1}{4}\left[\phi(f + g, f + g) - \phi(f - g, f - g) + i\phi(f + ig, f + ig) - i\phi(f - ig, f-ig)\right]$$

wat na herleiding geeft

$$\tfrac{1}{4}\left[2\phi(f, g) + 2\phi(g, f) + 2i\phi(f, ig) + 2i\phi(ig, f)\right].$$

Gebruik makend van de lineariteit van ϕ in de eerste variabele, en de antilineariteit in de tweede, volgt nu het gestelde.

Stelling 2. Zij ϕ een begrensde bilineaire functionaal. Dan is de kwadratische vorm $\hat{\phi}$ ook begrensd, en er geldt

$$||\hat{\phi}|| \leq ||\phi|| \leq 2||\hat{\phi}||.$$

Is in het bijzonder ϕ symmetrisch, dan geldt: $||\hat{\phi}|| = ||\phi||$.

Bewijs: Als $f \in H$, dan geldt $|\hat{\phi}(f)| = |\phi(f, f)| \leq ||\phi||\ ||f||^2$ d.w.z. $||\hat{\phi}|| \leq ||\phi||$.
Anderzijds geeft toepassing van de polarizatiestelling voor $f, g \in H$

$$|\phi(f, g)| \leq \tfrac{1}{4}||\hat{\phi}||(||f + g||^2 + ||f - g||^2 + ||f + ig||^2 + ||f - ig||^2).$$

Het rechterlid is met toepassing van de parallelogramwet te schrijven als

$$\tfrac{1}{4}||\hat{\phi}||(4||f||^2 + 4||g||^2) = ||\hat{\phi}||(||f||^2 + ||g||^2).$$

Kiezen we $||f|| = ||g|| = 1$, dan volgt $|\phi(f, g)| \leq 2||\hat{\phi}||$, dus $||\phi|| \leq 2||\hat{\phi}||$.
Het tweede deel van de stelling. Laat ϕ symmetrisch zijn, en $f, g \in H$.
Kies $\alpha, r \in \mathbb{R}$ zo'dat $\phi(f, g) = re^{i\alpha}$.
Dan is $r = \phi(e^{-i\alpha}f, g) =$ (volgens de polarizatiestelling) =

$$= \tfrac{1}{4}\left[\hat{\phi}(e^{-i\alpha}f + g) + \hat{\phi}(e^{-i\alpha}f - g)\right] \leq \tfrac{1}{4}||\hat{\phi}||\{||e^{-i\alpha}f + g||^2 + ||e^{-i\alpha}f - g||^2\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}||\hat{\phi}||(||2e^{-i\alpha}f||^2 + ||g||^2) = ||\hat{\phi}|| \text{ als } ||f|| = ||g|| = 1.$$

Dus $||\phi|| \leq ||\Phi||$, en met $||\Phi|| \leq ||\phi||$ geeft dit $||\phi|| = ||\Phi||$.

<u>Stelling 3</u>. (representatiestelling voor bilineaire functionalen). Zij $A : H \to H$ een begrensde lineaire operator. Dan is ϕ gedefinieerd door $\phi(f, g) = (f, Ag)$ een begrensde lineaire functionaal op H, terwijl $||\phi|| = ||A||$.

Omgekeerd, als ϕ een begrensde bilineaire functionaal is op een Hilbertruimte H, dan bestaat er een ondubbelzinnig bepaalde begrensde lineaire operator $A : H \to H$ zo'dat $\phi(f, g) = (f, Ag)$ voor alle $f, g \in H$.

<u>Bewijs:</u> Het eerste deel van de stelling is reeds opgemerkt in blz. 41 voorbeeld 1. Stel nu ϕ een gegeven begrensde bilineaire functionaal op H. Definieer voor $g \in H$ de lineaire functionaal $\Phi_g : H \to \mathbb{C}$ door $\Phi_g(f) = \phi(f, g)$. Uit de representatiestelling van Riesz volgt dat er bij elke $g \in H$ een element g^* van H bestaat, zo'dat $\phi(f, g) = (f, g^*)$ voor alle $f \in H$. Men bewijst gemakkelijk dat de toevoeging $g \to g^*$ een lineaire operator is van H in zichzelf; we noteren deze met A. Dan volgt $\phi(f, g) = (f, g^*) = (f, Ag)$ voor alle f en $g \in H$.

Bovendien $||Ag|| = ||\Phi_g|| \leq ||\phi|| \, ||g||$. Dus $||A|| \leq ||\phi||$. Omdat volgens Cauchy Schwarz $||\phi|| \leq ||A||$ geldt blijkbaar $||A|| = ||\phi||$.

Dus A is ook begrensd en heeft dezelfde norm als ϕ. Hiermede is de stelling bewezen.

<u>Gevolg</u>. Voor een operator A van een Hilbertruimte H in zichzelf geldt

$$||A|| = \sup\{|(Af, g)| \mid ||f|| = ||g|| = 1\}.$$

9. <u>Geadjungeerde operatoren</u>.

Zij A een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H in zichzelf. Uit de representatiestelling van bilineaire functionalen volgt dat er een ondubbelzinnig bepaalde begrensde lineaire operator A^* bestaat, zo'dat $(Af, g) = (f, A^*g)$ voor alle $f, g \in H$. De norm van A^* is gelijk aan die van A. Deze operator A^* noemt men de <u>geadjungeerde van</u> A. Voor geadjungeerde operatoren gelden de volgende eigenschappen.

Stelling 1.

1. $A^{**} = A$
2. $(A + B)^{*} = A^{*} + B^{*}$
3. $(\alpha A)^{*} = \bar{\alpha}A^{*}$
4. $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$
5. A inverteerbaar, dan ook A^{*} inverteerbaar, en $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$.

Bewijs:

1. Stel $f, g \in H$. Dan $(f, A^{**}g) = (A^{*}f, g) = \overline{(g, A^{*}f)} = \overline{(Ag, f)} = (f, Ag)$.
Dus $(f, Ag - A^{**}g) = 0$ voor vaste g en alle $f \in H$. Dus $Ag = A^{**}g$, $\forall g \in H$. Hieruit volgt $A = A^{**}$.
2. Stel $f, g \in H$. Dan $((A + B)f, g) = (f, (A + B)^{*}g)$. Ook $((A + B)f, g) =$ $= (Af, g) + (Bf, g) = (f, A^{*}g) + (f, B^{*}g) = (f, (A^{*} + B^{*})g)$.
Uit de willekeurigheid van f en g volgt weer $(A + B)^{*} = A^{*} + B^{*}$.
3. Analoog.
4. $(AB f, g) = (Bf, A^{*}g) = (f, B^{*}A^{*}g)$. Dus $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$.
5. Dit volgt gemakkelijk uit 4.

Stelling 2. $||A^{*}A|| = ||A||^2$.

Bewijs: $||A^{*}Af|| \leq ||A^{*}||\cdot||Af|| \leq ||A^{*}||\cdot||A||\cdot||f|| = ||A||^2||f||$.
Dus $||A^{*}A|| \leq ||A||^2$.
Anderzijds: $||Af||^2 = |(Af, Af)| = |(f, A^{*}Af)| \leq ||f||\cdot||A^{*}Af|| \leq ||f||^2\cdot$ $||A^{*}A||$.
Dus $||A||^2 \leq ||A^{*}A||$.

Definities. Zij A een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H in zichzelf.

A heet hermitisch als $A = A^{*}$
A heet unitair als $A^{*} = A^{-1}$
A heet normaal als $AA^{*} = A^{*}A$

Voorbeeld. De loodrechte projectie op een gesloten lineaire deelruimte M van een Hilbertruimte, aangeduid met P_M, is een unitaire operator.

<u>Stelling 3.</u> Voor een begrensde lineaire operator A zijn de volgende condities equivalent

1. A is hermitisch
2. De bilineaire vorm (Af, g) is symmetrisch
3. De kwadratische vorm (Af, f) is reëel.

<u>Bewijs:</u>

$1 \Rightarrow 2$ $\quad (Af, g) = (f, A^{*}g) = (f, Ag) = \overline{(Ag, f)}$

$2 \Rightarrow 3$ $\quad$ Triviaal

$3 \Rightarrow 1$ $\quad (f, Af) = \overline{(Af, f)} = (Af, f) = (f, A^{*}f)$. Dus $((A^{*} - A) f, f) = 0$ voor alle $f \in H$. De bijbehorende bilineaire vorm $((A^{*} - A) f, g)$ is ook nul voor alle $f, g \in H$ (Polarizatiestelling). Dus $A^{*} - A = 0$ i.e. $A^{*} = A$.

<u>Gevolg.</u> A hermitisch $\Rightarrow ||A|| = ||\hat{A}|| = \sup\{|(Af, f)| \; ||f|| = 1\}$.

<u>Stelling 4.</u> Zij A een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H in zichzelf. Dan is A op ondubbelzinnige wijze te schrijven als $A = H_1 + iH_2$ met H_1 en H_2 hermitisch.

<u>Bewijs:</u> Kies $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^{*})$ en $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^{*})$. Dan zijn H_1 en H_2 hermitisch, terwijl $A = H_1 + iH_2$. H_1 en H_2 zijn eenduidig bepaald, want als H_1 en H_2 twee hermitische operatoren zijn met $A = H_1 + iH_2$, dan geldt $A + A^{*} = H_1 + iH_2 + H_1^{*} - iH_2^{*} = 2H_1$ (merk op dat $(iH_2)^{*} = -iH_2^{*}$). Dus $H_1 = \frac{A+A^{*}}{2}$, en op analoge wijze volgt $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^{*})$. Hiermede is het gestelde bewezen.

<u>Stelling 5.</u> Zij A een begrensde lineaire operator van een Hilbertruimte H in zichzelf. Dan

$$A \text{ normaal} \Leftrightarrow ||Af|| = ||A^{*}f|| \text{ voor alle } f \in H.$$

<u>Bewijs:</u> $\Leftarrow$ $\quad ||Af||^2 = ||A^{*}f|| = (A^{*}Af, f) = (AA^{*}f, f)$. Uit de willekeurigheid van f volgt $AA^{*} = A^{*}A$ i.e. A is normaal (v.g.l. met bewijs van stelling 3 boven)

$\Rightarrow$ $\quad$ Triviaal.

10. Enkele eigenschappen van projectieafbeeldingen

Stelling 1. Zij M een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte H, en laat P de projectieafbeelding zijn op M.
Dan $M = \{f \in H \mid \|Pf\| = \|f\|\}$.

Bewijs: We weten al dat $Pf = f \iff f \in M$.
Als nu $\|Pf\| = \|f\|$ dan volgt $f - Pf = 0$ want volgens de stelling van Pythagoras geldt $\|f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2$.

Stelling 2. Laat P een begrensde lineaire operator zijn van een Hilbertruimte H in zichzelf.
Dan: P is een projectie op een gesloten lineaire deelruimte $\iff P = P^*$ en $P^2 = P$.

Bewijs:
$\Rightarrow$ Zie voorbeeld op blz. 44.
$\Leftarrow$ Definieer $M = \{f \in H \mid Pf = f\}$. Dan is M een lineaire deelruimte van H en is bovendien gesloten (want als $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots, ..\}$ een rij punten van H is met $Pf_n = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, die convergeert naar $f \in H$, dan is volgens de continuïteit van P (St. 1 op blz. 38) $f = \lim_{n\to\infty} Pf_n = P \lim_{n\to\infty} f_n = Pf$).
Het is nu voldoende aan te tonen dat $f - Pf \perp M$ voor alle $f \in H$.
Zij $g \in M$. Dan $(f - Pf, g) = (f - Pf, Pg) = (f - Pf, P^*g) = (Pf - P^2f, g) = (Pf - Pf, g) = 0$.

Stelling 3. M en N zijn gesloten lineaire deelruimten van een Hilbertruimte H; P, Q zijn de projectieafbeeldingen op M respectievelijk N.
Dan zijn de volgende condities equivalent:

1. $M \perp N$
2. $PQ = QP = 0$
3. $P + Q$ is een projectie.

Bewijs:
$1 \Rightarrow 2$. Stel $f \in H$. Dan $Qf \in N$, en omdat $M \perp N$, volgt $Qf \perp M$.
Dus $P(Qf) = 0$, d.w.z. $PQ = 0$. Analoog bewijzen we $QP = 0$.

$2 \Rightarrow 3$. We zullen gebruik maken van de vorige stelling. $(P + Q)^2(f) =$
$= (P + Q)(P + Q)(f) = (P^2 + PQ + QP + Q^2)(f) = (P + Q)(f).$
$(P + Q)^* = P^* + Q^* = P + Q.$

$3 \Rightarrow 1$. Zij gegeven dat $P + Q$ een projectie is.
$f \in M \Rightarrow ||f||^2 \geq ||(P + Q)f||^2 = ((P + Q)f, (P + Q)f) =$
$= ((P + Q)^2 f, f) = ((P + Q)f, f) = (Pf, f) + (Qf, f) = ||Pf||^2 +$
$+ ||Qf||^2 = ||f||^2 + ||Qf||^2 \Rightarrow Qf = 0 \Rightarrow f \perp N.$
Analoog geldt $f \in N \Rightarrow f \perp M$. Dus $M \perp N$.

Gevolg. Als $P + Q$ een projectie is, dan is het de projectie op $M + N$.

Bewijs: Uit de vorige stelling volgt $M \perp N$. Dus $M \perp N$ is een gesloten deelruimte van H. Als $f = (P + Q)f$ voor zekere $f \in H$, dan $Pf \in M$, $Qf \in N$, dus $f \in M + N$. Is omgekeerd $f \in M + N$ dan volgt $f = f_1 + f_2$ met $f_1 \in M$, $f_2 \in N$; dus $(P + Q)(f_1 + f_2) = Pf_1 + Pf_2 + Qf_1 + Qf_2 = f_1 + f_2 = f =$
$= (P + Q)f$.
Al met al hebben we dus aangetoond dat $M + N = \{f \in H \mid (P + Q)f = f\}$.
Dus $P + Q$ is de projectie op $M + N$.

Stelling 4. Zij M, N, P en Q als in de vorige stelling.
Dan zijn de volgende condities equivalent.

1. PQ is een projectie
2. QP is een projectie
3. $PQ = QP$.

Bewijs:
$1 \Leftrightarrow 2$ is duidelijk vanwege symmetrie-overwegingen.
$1 \Rightarrow 3$: $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$.
$3 \Rightarrow 1$: We passen st. 2 op blz. 46 toe: $(PQ)^* = Q^*P^* = QP = PQ$.
$(PQ)^2 = PQ\,PQ = PP\,QQ = P^2Q^2 = PQ.$

Gevolg. Als PQ een projectie is, dan is het de projectie op $M \cap N$.

Bewijs: $f \in M \cap N \Rightarrow Qf = f$ en $PQf = Pf = f$.
Als omgekeerd $PQf = f$, dan volgt $||f|| = ||PQf|| \leq ||Qf|| \leq ||f||$, en dus $||Qf|| = ||f||$. Uit St. 1 blz. 46 volgt $f \in M$, en analoog $f \in N$.
Dus $f \in M \cap N$.

Opgaven.

1. Zij A de operator van $L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ gedefinieerd door

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x, y)\cdot f(y)dy,$$

waarbij $K(x, y)$ een begrensde functie is die meetbaar is op $[a, b] \times [a, b]$.

   a) bewijs dat A continu is

   b) bereken A^*.

2. Definieer $A : l^2 \to l^2$ door $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ (shiftoperator). Bereken A^*.

3. Laat $F_1, \ldots, F_n$ lineaire functionalen zijn op een Hilbertruimte, en laat G een lineaire functionaal zijn waarvan de kern de doorsnede van de kernen van $F_1, \ldots, F_n$ omvat.

   Dan bestaan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, zo'dat $G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i$.

4. (Lax-Milgram). Laat B een begrensde bilineaire functionaal zijn op een Hilbertruimte H met de volgende eigenschap:

   (α) Er bestaat een reële constante C zo'dat $|B(f, f)| \geq C||f||^2, \forall f \in H$.

   (zo'n functionaal heet wel een coërcieve vorm).

   Zij G een lineaire functionaal op H. Dan bestaat $g \in H$ zo'dat $G(f) = B(f, g)$ voor alle $f \in H$.

5. Een reële $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ heet symmetrisch wanneer $a_{ij} = a_{ji}$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$. Bewijs dat een $n \times n$ matrix symmetrisch is d.e.s.d. wanneer hij als operator op $\mathbb{R}^n$ hermitisch is. Zoek een analoog resultaat voor complexe matrices.

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

Spreker E. Wattel.

§11. De stelling van Baire

Definitie. Een deelverzameling V van een metrische ruimte X heet nergens dicht indien het inwendige van haàr afsluiting leeg is. (dus $\overline{V}^{o} = \emptyset$).

Voorbeelden: 1e. Een punt in de reële rechte is een nergens dichte deelverzameling.
2e. Een Jordan kromme in het platte vlak is een nergens dichte deelverzameling.
3e. Een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte is òf de gehele ruimte òf nergens dicht.

Definitie. Een deelverzameling van een metrische ruimte heet van de eerste categorie indien zij de vereniging is van een aftelbare collectie nergens dichte deelverzamelingen.

Voorbeelden: In de reële rechte is elke aftelbare verzameling van de eerste categorie, daar elk punt nergens dicht is.
In een discrete metrische ruimte is alleen de lege verzameling nergens dicht, dus ook alleen de lege verzameling is van de eerste categorie.

Definitie. Een deelverzameling van een topologische ruimte heet van de tweede categorie als zij niet van de eerste categorie is.

Stelling 1. (Baire). Een niet lege open deelverzameling van een volledige metrische ruimte is altijd van de tweede categorie.

Bewijs: Zij X een volledige metrische ruimte, met metriek ρ. Zij U een niet lege open deelverzameling van X en onderstel dat U van de eerste categorie is in X. Dan bestaat er een aftelbaar stelsel van nergens dichte deelverzamelingen

$$\mathcal{V} = \{V_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$$

zodanig dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = U$.

Omdat de verzameling U open is, is ook $U\setminus\overline{V}_1$ een open deelverzameling van X.

Omdat V_1 nergens dicht is, heeft $\overline{V}_1$ een leeg inwendige, dus $\overline{V}_1 \not\supset U$, dus $U\setminus\overline{V}_1$ is een niet-lege open deelverzameling van X.

Daarom is er wel een punt x_1 te vinden in $U\setminus\overline{V}_1$, zodanig dat er nog een open ε-bol om x_1 is, die nog geheel in $U\setminus\overline{V}_1$ ligt, dus is er nog een ρ_1 te vinden zodanig dat de gesloten bol om x_1

$$S\rho_1(x_1) = \{x|\rho(x, x_1) \leq \rho_1\} \subset U\setminus\overline{V}_1.$$

Zij nu

$$U_1 = U_{\frac{1}{2}\rho_1}(x_1) = \{x|\rho(x, x_1) < \tfrac{1}{2}\rho_1\}$$

een open bol om x_1 met straal $\frac{1}{2}\rho_1$.

We kunnen nu op soortgelijke wijze aantonen, dat $U_1\setminus\overline{V}_2$ een niet lege open deelverzameling is van X, en dus is ook hier een punt x_2 te vinden en een straal ρ_2, zodanig dat de gesloten bol

$$S\rho_2(x_2) = \{x|\rho(x, x_2) \leq \rho_2\} \subset U_1\setminus\overline{V}_2.$$

Het is duidelijk dat $\rho_2 < \frac{\rho_1}{2}$.

Zij nu $U_2 = U_{\frac{1}{2}\rho_2}(x_2) = \{x|\rho(x, x_2) < \frac{1}{2}\rho_2\}$ een open bol met straal $\frac{\rho_2}{2}$.

Door inductie definieren wij uit U_{n-1}, $\overline{V}_n$, ρ_{n-1} en x_{n-1} een ρ_n en een x_n, zodanig dat $\rho_n < \frac{1}{2}\rho_{n-1}$ en

$$S\rho_n(x_n) \subset U_{n-1}\setminus\overline{V}_n.$$

Terwijl $U_n = U_{\frac{1}{2}\rho_n}(x_n) = \{x|\rho(x, x_n) < \frac{1}{2}\rho_n\}$.

Wij merken nu als eerste op dat $\rho(x_n, x_{n-1}) < \frac{\rho_{n-1}}{2}$, en daar U_m steeds bevat is in U_n voor $m > n$, geldt bovendien

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\rho_n}{2} < \frac{\rho_{n-1}}{4} < \dots < \frac{\rho_1}{2^n}.$$

Dus $\rho(x_m, x_n)$ gaat naar 0 als n en m naar oneindig gaan, met andere woorden: de rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij, en daar X volledig is, is er een limiet x_0.

Zij n een willekeurig natuurlijk getal. Dan is $\rho(x_m, x_n) < \frac{\rho_n}{2}$ voor alle m, dus $\rho(x_0, x_n) \leq \frac{\rho_n}{2} < \rho_n$.

Dit betekent, dat $x_0 \in S\rho_n(x_n)$ dus $x_0 \in U_{n-1} \setminus \overline{V}_n$ dus voor elke n ligt x_0 niet in V_n.

Dit betekent dat $U \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, wat in tegenspraak is met de eerder gemaakte veronderstelling.

Wij concluderen, dat U niet van de eerste categorie is, en dus is U van de tweede categorie.

Definitie. Een metrische ruimte waarin elke open verzameling van de tweede categorie is heet een Baire-ruimte.

Gevolg 1. Een Baire-ruimte is zelf van de tweede categorie.

Gevolg 2. Elke Hilbertruimte is een Baire-ruimte

Bewijs: Een Hilbertruimte is een volledige metrische ruimte t.o.v. de metriek $\rho(x, y) = ||x - y||$.

Opgave: Toon aan dat de rationale getallen met de gebruikelijke metriek geen Baire-ruimte vormen.

§12. De stelling van Banach-Steinhaus

Op een Hilbertruimte bestaat veelal meer dan één topologie.
De meest gebruikte topologie is de sterke topologie of de normtopologie, die wordt geïnduceerd door de norm. Een tweede topologie is de topologie der puntsgewijze convergentie of de zwakke topologie, en ook deze topologie is voor sommige stellingen en toepassingen van belang.

Definitie. De zwakke topologie is de topologie die wordt voortgebracht door de subbasis

$$\mathcal{S} = \{Vg_{0,\varepsilon}(f_0) \,|\, \varepsilon > 0 \;\&\; g_0 \in H \;\&\; f_0 \in H\},$$

waarin

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

$$Vg_{0,\varepsilon}(f_0) = \{f|f\in H \,\&|(f - f_0, g_0)| < \varepsilon\}.$$

Een basisomgeving van een punt f_0 in de Hilbertruimte met deze topologie bestaat uit al die punten f, waarvoor het inwendig product met een eindig aantal g_i minder dan ε_{g_i} verschilt van het inproduct van f_0 en die g_i. (Merk de overeenkomst op met de producttopologie, men kan de zwakke topologie ook invoeren met behulp van een producttopologie).

Lemma 1. Een rij f_n convergeert naar f_0 in de zwakke topologie, dan en slechts dan indien (f_n, g_0) convergeert naar (f_0, g_0) in $\mathbb{C}$ voor alle $g_0 \in H$.

Bewijs: Stel f_n convergeert zwak naar f_0. Dan moet elke basisomgeving van f_0 bijna alle f_n's bevatten dus ook elke subbasisomgeving. Neem eens zo'n subbasis omgeving $Vg_{0,\varepsilon}(f_0)$, dan wil dat zeggen, dat $|(f_n - f_0, g_0)| < \varepsilon$ zodra $n > N$, oftewel $(f_n - f_0, g_0)$ convergeert naar 0 in $\mathbb{C}$, d.w.z. (f_n, g_0) convergeert naar (f_0, g_0) voor elke $g_0 \in H$.
Omgekeerd, als (f_n, g_0) convergeert naar (f_0, g_0), voor alle $g_0 \in H$, dan geldt voor elk eindig stelsel g_i en elk bijbehorend stelsel ε_i, dat er een stelsel N_i bestaat zodanig dat $|(f_n, g_i) - (f_0, g_i)| = |(f_n - f_0, g_i)| < \varepsilon_i$ zodra $n > N_i$. Dus als $N = \max N_i$, dan ligt voor elke $n > N$ het punt f_n in de basisomgeving van f_0, die gedefinieerd wordt door g_i en ε_i, dit is

$$\bigcap_i Vg_{i,\varepsilon_i}(f_0).$$

Oftewel: f_n convergeert naar f_0 in de zwakke topologie.

Definitie. f_n convergeert zwak naar f_0, indien f_n convergeert naar f_0 in de zwakke topologie.
Wij noteren dit met $f_n \rightharpoonup f_0$.
Een rij f_n convergeert sterk naar f_0 indien $||f_n - f_0|| \to 0$.
Wij zullen dit aangeven met $f_n \to f_0$.

Definitie. Een deelverzameling A van een Hilbertruimte heet sterk begrensd indien zij begrensd is. d.w.z. $(\exists N\in \mathbb{N})(\forall f\in A): ||f|| \leq N$.
Een verzameling A heet zwak begrensd indien zij "begrensd" is t.o.v.

de zwakke topologie. Dat wil zeggen:

$$(\forall g \in H)(\exists N_g \in \mathbb{N})(\forall f \in A): |(f, g)| \leq N_g.$$

Lemma 2. Convergeert een rij f_n sterk naar f_0 in een Hilbertruimte H, dan convergeert zij ook zwak naar f_0.

Bewijs: Kies een $g_0 \in H$; $g_0 \neq 0$ en kies een $\varepsilon > 0$.
Dan is er een Ng_0 te vinden zodanig dat voor alle $n > Ng_0$
$||f_n - f_0|| < \frac{\varepsilon}{||g_0||}$ dus nu geldt:

$$|(f_n, g_0) - (f_0, g_0)| = |(f_n - f_0, g_0)| \leq ||f_n - f_0||.||g_0|| < \varepsilon$$

zodra $n > Ng_0$. Dus wij concluderen met behulp van lemma 1, dat f_n zwak convergeert naar f_0.

Lemma 3. Zij A een sterk begrensde verzameling van een Hilbertruimte H. Dan is A ook zwak begrensd.

Bewijs: Zij $g_0 \in H$ en zij $N \in \mathbb{N}$, zodanig dat $N \geq ||f||$ voor alle $f \in A$.
Dan geldt: $|(f, g_0)| \leq ||f||.||g_0|| \leq N.||g_0||$ voor alle $f \in A$.
Dus voor alle $g_0 \in H$ is $|(f, g_0)|$ begrensd voor alle $f \in H$, dus A is zwak begrensd.

In een oneindig dimensionale Hilbertruimte is niet elke zwak convergente rij ook sterk convergent.
Dit zien wij uit het volgende voorbeeld.
Voorbeeld: Zij $\{e_n | n = 1, 2, \ldots\}$ een orthonormale rij in een Hilbertruimte H. Daar $\sum_{i=1}^{n} |(e_i, g_0)| \leq ||g_0||$ voor alle $g_0 \in H$, is de reeks (e_i, g_0) sommeerbaar, dat wil zeggen $|(e_i, g_0)| \to 0$ als $i \to \infty$, oftewel e_i convergeert zwak naar 0.
De rij e_n convergeert echter niet in norm, en is zelfs geen Cauchyrij, omdat volgens de stelling van Pythagoras $||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$. voor alle $n \neq m$.

Het omgekeerde van lemma 3 geldt wel. Hiertoe bewijzen wij eerst de stelling van Banach-Steinhaus.

Stelling 3. (Banach-Steinhaus).
Zij $\mathfrak{A}$ een familie van begrensde lineaire operatoren A, en zij $\mathfrak{A}(x) = \{Ax | A \in \mathfrak{A}\}$ sterk begrensd voor alle $x \in H$ dan is ook $\{||A|| \mid A \in \mathfrak{A}\}$ begrensd.

Bewijs: Neem aan: $V_n = \{x \mid ||Ax|| \leq n \text{ voor alle } A \in \mathfrak{A}\}$.
Daar voor elke $x \in H$ de verzameling $\{||Ax|| \mid A \in \mathfrak{A}\}$ begrensd is, volgt dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = H$.
De verzameling V_n is gesloten voor elke n.
Want: Stel x_i is een rij, die geheel in V_n ligt en convergeert naar een punt x_0. Dan geldt, dat er voor elke ε en elke operator A een getal $N_0(\varepsilon, A)$ bestaat, zodanig dat $||x_i - x_0|| < \frac{\varepsilon}{||A||}$ zodra $i > N_0(\varepsilon, A)$.
Hieruit volgt dat

$$\left| ||Ax_i|| - ||Ax_0|| \right| \leq ||A(x_i - x_0)|| \leq ||A|| \, ||x_i - x_0|| < \varepsilon.$$

Daar voor alle $A \in \mathfrak{A}$ geldt dat $||Ax_i|| \leq n$ volgt dat $||Ax_0|| \leq n$ dus V_n is gesloten.
Volgens de stelling van Baire is H niet de vereniging van een aftelbare collectie nergens dichte deelverzamelingen. Uit $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = H$ volgt dus, dat niet alle V_n nergens dicht zijn, dus er is een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat V_N is niet nergens dicht, dus $\bar{V}_N^{0} \neq \emptyset$.
Daar V_N gesloten is, volgt dat $V_N^0 \neq \emptyset$.
Er is dus zeker een punt x_0 in het inwendige van V_N en een straal $\varepsilon_0 > 0$, zodanig dat

$$\{x \mid ||x - x_0|| \leq 2\varepsilon_0\} \subset V_N.$$

Verder geldt voor alle $A \in \mathfrak{A}$ en elke $x \in H$ dat

$$A(x) = -A(-x). \text{ dus } ||A(x)|| = ||A(-x)||. \text{ dus } -x_0 \in V_N.$$

daar $||Ax_0|| \leq N$ voor alle $A \in \mathfrak{A}$.
Stel nu $y \in H$ en $||y|| \leq \varepsilon_0$. Dan is $y = \frac{1}{2}(x_0 + 2y) + \frac{1}{2}(-x_0)$.
Kies een $A \in \mathfrak{A}$. Dan geldt:

$$||Ay|| = ||A(\tfrac{1}{2}(x_0 + 2y) + \tfrac{1}{2}(-x_0))|| = ||\tfrac{1}{2}A(x_0 + 2y) + \tfrac{1}{2}A(-x_0)|| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2}||A(x_0 + 2y)|| + \tfrac{1}{2}||A(-x_0)|| \leq \tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N = N, \text{ daar A lineair is,}$$

en $||(x_0 + 2y) - x_0|| \leq 2\varepsilon_0$.

Dus wij mogen concluderen dat $\{y|\ ||y|| \leq \varepsilon_0\} \subset V_N$.

Zij nu $z \in H$ met $||z|| = 1$ dan geldt dat $||\varepsilon_0 z|| = \varepsilon_0$.

Dus voor alle $A \in \mathfrak{A}$ geldt dat $||A\varepsilon_0 z|| = \varepsilon_0||Az|| \leq N$, dus $||Az|| \leq \frac{N}{\varepsilon_0}$.

Dit geldt voor alle z met $||z|| = 1$, dus $||A|| \leq \frac{N}{\varepsilon_0}$. Dit geldt voor alle $A \in \mathfrak{A}$, dus $\{||A||\,|A \in \mathfrak{A}\}$ is begrensd. Dit bewijst de stelling.

<u>Gevolg 1</u>. Als een verzameling A in een Hilbertruimte zwak begrensd is, dan is zij ook sterk begrensd.

<u>Bewijs</u>: Een verzameling A heet zwak begrensd, indien voor iedere $g \in H$ een $N_g \in \mathbb{N}$ bestaat, zodanig dat voor alle $f \in A$ geldt dat $|(f, g)| \leq N_g$, en dit is hetzelfde als $|(g, f)| \leq N_g$.

Beschouw nu f als een lineaire functionaal, die aan elke $g \in H$ het complexe getal (g, f) toevoegt. Dan is f een lineaire operator, en de norm van f als operator is gelijk aan $||f||$.

We kunnen dus A beschouwen als een collectie van lineaire operatoren f, zodanig dat voor elke $g \in H$ $\{f(g)|f \in A\}$ begrensd is. Er is dus voldaan aan de voorwaarden van de stelling van Banach - Steinhaus en wij vinden dat er een N bestaat, zodanig dat voor alle $f \in A$ geldt, dat $||f|| \leq N$, oftewel, de verzameling A is sterk begrensd.

<u>Gevolg 2</u>. Als voor alle $g \in H$ de rij (f_n, g) een limiet heeft, dan is de rij f_n zwak convergent.

(i.e. er bestaat een f_0 zodanig dat $f_n \rightharpoonup f_0$).

<u>Bewijs</u>: $(g, f_n) = \overline{(f_n, g)}$; dus als (f_n, g) een limiet heeft voor alle $g \in H$, dan ook (g, f_n). Opnieuw beschouwen wij f_n als een collectie lineaire operatoren op de Hilbertruimte H, en we beschouwen de rij van complexe getallen $f_n(g)$. Deze nadert voor elke g naar een limiet die we noemen: $f(g)$. Kies een $\varepsilon > 0$.

$|f(\alpha g + \beta h) - \alpha f(g) - \beta f(h)| < |f_n(\alpha g + \beta h) - \alpha f_n(g) - \beta f_n(h)| +$

$+ 3\varepsilon$ zodra $n > N_0(\alpha g, \varepsilon)$ en $n > N_0(\beta h, \varepsilon)$ en $n > N_0(\alpha g + \beta h, \varepsilon)$. Wij concluderen dat $f(\alpha g + \beta h) = \alpha f(g) + \beta(h)$ dus de functionaal f is lineair.

Voor elke $g \in H$ is bovendien $\{|f_n(g)| \mid n \in \mathbb{N}\}$ begrensd, dus de collectie $\{||f_n||\}$ is begrensd volgens Banach Steinhaus. Hieruit volgt dan direct, dat de limietfunctionaal f ook begrensd is.
Volgens de representatiestelling van Riess bestaat er nu een element $f_0 \in H$, zodanig dat

$$f(g) = (g, f_0) \text{ voor alle } g \in H,$$

terwijl (g, f_n) nadert naar (g, f_0) voor elke $g \in H$.
Dit betekent, dat (f_n, g) nadert naar (f_0, g) voor alle $g \in H$, dus f_n is zwak convergent.

Toepassingen van de stelling van Banach - Steinhaus.

1. Stelling (Landau).
Zij $a = (a_1, a_2, \ldots, \ldots)$ een rij complexe getallen, en onderstel, dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ convergeert voor elke rij $x = (x_1, x_2, \ldots)$ waarvoor $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ convergeert. Dan convergeert ook $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Bewijs: Beschouw de Hilbertruimte, bestaande uit alle kwadratisch convergente reeksen.
Dan is voor elke n de functionaal b_n die aan $(x_1, x_2, \ldots)$ toevoegt $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ een lineaire functionaal, die bovendien nog begrensd is, want $\sum_{k=1}^{n} |a_k . x_k| \leq n . \max_{1 \leq k \leq n} |a_k . x_k| \leq n . \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$, als alle $x_k \leq 1$; dus ook als $||x|| \leq 1$.
Wij mogen dus concluderen, dat de collectie van lineaire operatoren $B = \{b_n | n = 1, 2, \ldots\}$ zwak begrensd is, dus ook dat zij normbegrensd is. De norm voor een functionaal wordt gedefinieerd door $||b_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$.
Wij mogen dus concluderen, dat $\exists N$ zodanig dat $||b_n|| \leq N$ voor elk natuurlijk getal n, en dus geldt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq N$, dus de rij a_k is kwadratisch convergent.

2. Matrixvoorstelling van begrensde lineaire operatoren in l^2.

Laat $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ een basis van l^2 zijn. We definiëren de matrix elementen t_{ik} $(i \geq 1,\ k \geq 1)$ van een begrensde lineaire operator T als volgt:

$$t_{ik} = (Te_k, e_i) \qquad (i \geq 1,\ k \geq 1).$$

<u>Stelling</u>. Met bovenstaande definities geldt:

als $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ waarbij $x_k = (x, e_k)$ dan is $T_x = \sum_{i,k=1}^{\infty} t_{ik}x_k e_i$ waarbij $\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k$ convergent is en bovendien $\sum_i |\sum_k t_{ik}x_k|^2 \leq \infty$.

<u>Bewijs</u>: Het is duidelijk uit de definities van T en t_{ik}, dat $T_{e_k} = \sum_{i=1}^{\infty} t_{ik}e_i$. Evenzo is het duidelijk uit de lineariteit van T, en uit de continuiteit van T, dat $\sum_{k,i=1}^{\infty} t_{ik}x_k e_i = Tx$ indien $x = (x_1, x_2, \ldots)$,

want $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ dus $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} x_k Te_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} t_{ik}x_k e_i$.

M.b.v. de relatie van Parseval vinden we

$$||T_x||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} t_{ik}x_k e_i, e_j)|^2$$

$$= \sum_j | \sum_k t_{jk}x_k|^2.$$

Daar $||T_x||^2 < \infty$, is

$$\sum_j | \sum_k t_{jk}x_k|^2 < \infty.$$

<u>Stelling</u>. Laat gegeven zijn een stelsel complexe getallen t_{ik}, zodanig dat voor elke $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ geldt:

$$\sum_i | \sum_k t_{ik}x_k|^2 < \infty \tag{$*$}$$

Dan bestaat er een begrensde lineaire operator $T: l^2 \to l^2$ zo dat geldt:

$$t_{ik} = (Te_k, e_i) \qquad (i \geq 1,\ k \geq 1)$$

(d.w.z. de t_{ik}'s zijn de matrixelementen van T).

Bewijs: Uit (*) volgt:

$$\sum_i |t_{ik}|^2 < \infty \quad (k \geq 1)(\text{neem } x = e_k).$$

Uit (*) volgt bovendien:

voor alle $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k$ $(i \geq 1)$.

Volgens toepassing 1 is dan ook $\sum_{k=1}^{\infty} |t_{ik}|^2 < \infty$.

We definieren nu de operatoren T_n:

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k\right)e_i.$$

Dan is T_n lineair en ook begrensd want

$$||T_n x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}|^2 \; |\sum_{k=1}^{\infty} x_k|^2\right)$$

$$= ||x||^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}|^2\right).$$

Dus $\qquad ||T_n||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}|^2.$

Verder zien we:

$$||T_n x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k|^2.$$

Dus

$$||T_n x|| \leq C(x) \ \forall n.$$

Passen we de Stelling van Banach - Steinhaus toe, dan vinden we

$$||T_n|| \leq C \qquad \forall n.$$

Daar $\qquad T_n x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}x_k\right)e_i$

en daar $\qquad \sum_i |\sum_k t_{ik}x_k|^2 < \infty$, bestaat $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$.

We definieren $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

Dan is T een lineaire en begrensde operator en er geldt

$$(Te_k, e_i) = \lim_{n\to\infty} (T_n e_k, e_i) = t_{ik}.$$

Stelling 4. Zij H een Hilbertruimte en zij A een lineaire operator van H in H.

Dan zijn de volgende eigenschappen aequivalent.

1e. A is een continue functie van H met de normtopologie naar H met de normtopologie.

2e. A is een continue functie van H met de zwakke topologie naar H met de zwakke topologie.

3e. A is een continue functie van H met de normtopologie naar H met de zwakke topologie.

Bewijs: 1e. Onderstel A is een continue operator van H met de sterke topologie naar H met de sterke topologie.

Om aan te tonen, dat A ook continu is voor H met de zwakke topologie in zichzelf, is het voldoende om aan te tonen, dat het oerbeeld van een subbasiselement voor de zwakke topologie, een open verzameling is van H met de zwakke topologie; en wegens de homogeniteit van een lineaire topologische ruimte is het voldoende om dit aan te tonen voor een subbasiselement om 0.

Zij $V_{g_0,\varepsilon}(0) = \{Af \,|(Af, g_0) < \varepsilon\}$.

Zij A^* de geadjungeerde van de operator A. Nu is

$$A^{-1}\left[V_{g_0,\varepsilon}(0)\right] = \{f\,|(Af, g_0) < \varepsilon\} = \{f\,|(f, A^*g_0) < \varepsilon\}.$$

maar deze laatste verzameling is precies $V_{A^*g_0,\varepsilon}(0)$ dus een subbasiselement en dus open.

In het algemeen is dus het oerbeeld van een subbasiselement open, en dus is A zwak-zwak continu.

2e. Onderstel dat A is zwak-zwak continu.

Om aan te tonen dat A sterk-zwak continu is, is het voldoende om aan te tonen dat de sterke topologie sterker is dan de zwakke, en dan volgt dit gedeelte uit het feit, dat A gelijk is aan de samenstelling van de identieke operator met A.

Zij $Vg_{0,\varepsilon}(f_0)$ een subbasisomgeving om f_0. We tonen aan, dat dit ook een open omgeving is van f_0 in de sterke topologie. $Vg_{0,\varepsilon} = \{f \,|\, |(f - f_0, g_0)| < \varepsilon\}$.

Nu is $\{f \,|\, ||f - f_0|| < \frac{\varepsilon}{||g_0||}$ een omgeving van f_0 in de sterke topologie.

In deze verzameling is ook $|(f - f_0, g_0)| < \varepsilon$, daar $|(f - f_0, g_0)| \leq ||f - f_0||.||g_0|| < \varepsilon$ en dit bewijst dat de sterke topologie sterker is dan de zwakke topologie, en dus is A sterk-zwak continu.3e.Neem aan dat A sterk-zwak continu is.

Definieer nu een functionaal A_f voor elke $f \in H$ met $||f|| = 1$ op de volgende wijze:

$A_f(g) = (g, Af)$. Deze functionaal is lineair want:

$$A_f(\alpha g + \beta h) = (\alpha g + \beta h, Af) = \alpha(g, Af) + \beta(h, Af).$$

Kies nu een $g_0 \in H$. Dan is $Vg_{0,\varepsilon}$ een open 0 omgeving in de zwakke topologie. $A^{-1}[Vg_{0,\varepsilon}]$ bevat een open 0-omgeving in de sterke topologie, b.v. $\{f \,|\, ||f|| < \delta\}$.

Nu is A lineair, en voor alle f met $||f|| = 1$ geldt, dat $A\,(\frac{\delta}{2}f) \in Vg_{0,\varepsilon}$, oftewel $|(A\,\frac{\delta}{2}f, g_0)| < \varepsilon$ dus $|(Af, g_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta}.2$ dus d.w.z. dat $|(g_0, Af)| < \frac{\varepsilon}{\delta}\,.\,2$ dus $Af(g_0)$ is een begrensde collectie complexe getallen.

Volgens, Banach - Steinhaus geldt nu, dat dus ook $||A_f||$ begrensd is, en dit betekent juist dat $||A||$ bestaat, want $||A|| = \sup\limits_{||f||=1} ||A_f|| = \sup\limits_{||f||=1} ||Af||$ dus A is een begrensde lineaire operator, d.w.z. een sterk-sterk continue operator.

De drie gedeelten samen bewijzen de stelling.

<u>Opgaven.</u>

1. In een eindig dimensionale Hilbertruimte vallen de zwakke en de sterke topologie samen.
2. Als B een zwak gesloten deelverzameling is van een Hilbertruimte, dan is B ook sterk gesloten. Het omgekeerde geldt niet. Geef hiervan een tegenvoorbeeld.

   Als B een sterk gesloten lineaire deelruimte is, dan is B ook zwak gesloten.

3. Bewijs, dat de norm en het inproduct zwak continu zijn.

4. Bewijs dat als f_n zwak naar f convergeert, en als $||f_n|| \to ||f||$, dan convergeert f_n sterk naar f.

5. Een rij f_n convergeert dan en slechts dan sterk naar f, als (f_n, g) uniform convergeert naar (f, g) voor alle g met $||g|| = 1$.

6. Zij $A = \{\sqrt{n}.\, e_n | n = 1, 2, \ldots\}$ dan is $0 \in \overline{A}^w$ (d.i. de zwakke afsluiting van A). Stel dat een deelrij van A zwak naar 0 convergeerde, dan zou deze rij zwak, en dus ook sterk begrensd zijn. Hieruit volgt, dat H met de zwakke topologie niet metrizeerbaar is.
(Men kan echter wel bewijzen, dat de eenheidsbol met de zwakke topologie wel metrizeerbaar is).

7. Zij B een bilinaire functionaal; bestaat er nu voor elke $f \in H$ een C_f en een C_f^*, zodanig dat voor elke $g \in H$

$$|B(f, g)| \leq C_f . ||g|| \text{ en}$$
$$|B(g, f)| \leq C_f^* ||g||,$$

dan is de bilinaire functionaal B begrensd.

Colloquium "Lineaire Analyse" (1967-1968)

Spreker: H.G.J. Pijls

§13. Het spectrum van een begrensde lineaire operator.

Definitie 1. Laat L een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ zijn en laat A een lineaire afbeelding van L in zichzelf zijn. Een getal $\lambda \in \mathbb{C}$ heet eigenwaarde van A als er een vector $f \neq 0$ in L bestaat met $A f = \lambda f$; elke f met $A f = \lambda f$ heet eigenvector bij λ.

Voorbeeld

Als A een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^n$ in zichzelf is (A is te representeren als een complexe n x n-matrix) dan geldt:

λ is eigenwaarde van A d.e.s.d. als $\det(A-\lambda I) = 0$.

(I is de eenheidsmatrix)

Stelling 1. Laat A een lineaire begrensde hermitische operator zijn op een Hilbertruimte H (H is een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$), dan gelden de volgende beweringen:

a) als $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde van A is, dan is λ reëel.

b) als λ_i eigenwaarde van A met eigenvector f_i is $(i = 1,2)$, waarbij $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan is $f_1 \perp f_2$.

c) als L een lineaire deelruimte van H is die invariant is onder A (i.e. $A(L) \subset L$), dan is ook $L^{\perp}$ invariant onder A.

bewijs:

a) Er is een $f \neq 0$ in H met $A f = \lambda f$.

Dus: $\lambda(f,f) = (A f, f) = (f, A f) = \overline{\lambda}(f, f)$.

Daar $f \neq 0$ is, volgt: $\lambda = \overline{\lambda}$.

b) Uit a) volgt dat λ_1 en λ_2 reëel zijn.
Dus: $\lambda_1(f_1,f_2) = (A f_1,f_2) = (f_1, A f_2) = \lambda_2(f_1,f_2)$.
Daar $\lambda_1 \neq \lambda_2$ is, volgt: $(f_1, f_2) = 0$.
c) Voor alle $f \in L$ geldt: $A f \in L$.
Als $g \in L^{\perp}$, dan is $(A f, g) = 0$ voor alle $f \in L$; en dus ook $(f, A g) = 0$ voor alle $f \in L$, i.e. $A g \in L^{\perp}$.

Laat A een begrensde lineaire operator op een Hilbertruimte H zijn en laat I de identieke operator op H zijn.
Uit Def. 1 volgt:
is geen eigenwaarde van $A \longleftrightarrow N(A-\lambda I) = (0)$.
(i.e. $A-\lambda I$ is eeneenduidig)
Ofwel:
λ is geen eigenwaarde van $A \longleftrightarrow$ de lineaire operator $(A-\lambda I)^{-1}$ bestaat (het definitiegebied van deze operator is $D((A-\lambda I)^{-1}) = R(A-\lambda I)$);
we merken hierbij op:
a) $(A-\lambda I)^{-1}$ is niet noodzakelijk begrensd op $D((A-\lambda I)^{-1})$.
b) $D((A-\lambda I)^{-1}) = R(A-\lambda I)$ is een lineaire deelruimte van H, die niet noodzakelijk gesloten is.
Deze overwegingen geven aanleiding tot de volgende definitie

<u>Definitie 2</u>. Laat A een begrensde lineaire operator op H zijn, dan heet $\lambda \in \mathbb{C}$ een "<u>regulier punt van A</u>" als geldt:
(i) $(A-\lambda I)^{-1}$ bestaat
(ii) $(A-\lambda I)^{-1}$ is begrensd op $D((A-\lambda I)^{-1})$
(iii) $R(A-\lambda I)$ is dicht in H.
Het <u>spectrum van A</u> is de verzameling van alle punten die niet regulier zijn.

<u>Definitie 3</u>. Een lineaire operator A op een Hilbertruimte H heet <u>naar beneden begrensd</u> als er een constante $c > 0$ bestaat zodanig dat $||A\ f|| \geq c\ ||f||$ voor alle $f \in H$.

<u>Lemma</u>. Als B een begrensde lineaire operator op H is, dan geldt:

a) B is naar beneden begrensd $\Longleftrightarrow \begin{cases} B^{-1} \text{ bestaat en is begrensd} \\ \text{op } D(B^{-1}) = R(B). \end{cases}$

b) B is naar beneden begrensd $\Longrightarrow$ R(B) is gesloten.

bewijs:

a) $\Longrightarrow$ Er is een constante $c > 0$ zó dat

$||B\ f|| \geq c\ ||f||$ voor alle $f \in H$. (*)

Dus B^{-1} bestaat (en is gedefinieerd op R(B)).

Als $B\ f = g$, dan is $f = B^{-1}\ g$. Uit (*) volgt dan:

$||B^{-1}g\ || \leq \frac{1}{c}\ ||g||$ voor alle $g \in R(B)$. (**)

Dus B^{-1} is begrensd op R(B).

$\Longleftarrow$ Als $B\ f = g$ en als B^{-1} bestaat, dan is duidelijk dat (*) uit (**) volgt.

b) Stel $g \in \overline{R(B)}$

Er is dan een rij (f_n) in H zó dat $\lim_{n\to\infty} B\ f_n = g$.

De rij $(B\ f_n)$ is dus een fundamentaalrij.

Nu is B naar beneden begrensd i.e. er is een constante $c > 0$ zó dat

$||B\ f|| \geq c\ ||f||$ voor alle $f \in H$.

Uit de relatie:

$||f_n - f_m\ || \leq \frac{1}{c}\ ||\ B\ f_n - B\ f_m\ ||$

volgt dat ook de rij (f_n) een fundamentaalrij is dus convergeert, stel naar f (i.e. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$).

Daar B begrensd is volgt hieruit $\lim_{n\to\infty} B\ f_n = B\ f$.

Dus $B\ f = g$ en $g \in R(B)$. Dus R(B) is gesloten.

Gevolg. Laat A een begrensde lineaire operator op H zijn.
Dan geldt:

a) is een regulier punt van A <==> $(A-\lambda I)$ is naar beneden begrensd en $R(A-\lambda I)$ is dicht in H.

b) λ is een regulier punt van A $\Rightarrow R(A-\lambda I) = H$

bewijs:

a) Dit volgt uit Def. 2 en het vorige lemma a).

b) Als λ een regulier punt van A is, dan volgt uit a), dat $(A-\lambda I)$ naar beneden begrensd is. Vanwege het vorige lemma b) is dan $R(A-\lambda I)$ gesloten. Daar $R(A-\lambda I)$ dicht is in H, volgt dat $R(A-\lambda I) = H$

Opmerking

We hebben bewezen:

λ is een regulier punt van A $\Rightarrow N(A-\lambda I) = (0)$ en $R(A-\lambda I) = H$ (i.e. $A-\lambda I$ is een eeneenduidige afbeelding van H op zichzelf)

Het omgekeerde hiervan blijkt ook waar.

Dit volgt uit de volgende

Stelling: Als B een eeneenduidige begrensde lineaire afbeelding van H op zichzelf is dan is B naar beneden begrensd (dus B^{-1} is continu).
Deze stelling is een gevolg van de stelling van de gesloten grafiek, een van de grondstellingen van de lineaire analyse.

We bekijken nu het speciale geval dat $\dim H < \infty$ is.

Stelling 2. Als $\dim H < \infty$ is (dan is $H = \mathbb{C}^n$ voor zekere n), dan geldt

a) iedere lineaire deelruimte van H is gesloten.

b) iedere lineaire operator op H is begrensd.

c) $N(A-\lambda I) = (0) \iff R(A-\lambda I) = H$.

bewijs:

c) Dit volgt uit de volgende Stelling uit de lineaire algebra:

<u>Stelling</u> Als T een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^n$ in zichzelf is, dan geldt:

dim N(T) + dim R(T) = n

<u>Gevolg</u>. Laat A een lineaire operator op een eindig-dimensionale Hilbertruimte H zijn. Dan geldt:

$\lambda \in \mathbb{C}$ is eigenwaarde van A $\Longleftrightarrow$ λ behoort tot het spectrum van A.

<u>bewijs</u>:

We moeten bewijzen:

λ is geen eigenwaarde van A $\Longleftrightarrow$ λ is een regulier punt van A.

Uit Def.2 volgt onmiddellijk: als λ een regulier punt van A is, dan is λ geen eigenwaarde van A.

Als nu omgekeerd λ geen eigenwaarde van A is dan is $N(A-\lambda I) = (0)$ dus $(A-\lambda I)^{-1}$ bestaat. Daar H eindigdimensionaal is, is $(A-\lambda I)^{-1}$ begrensd op $R(A-\lambda I)$, terwijl ook $R(A-\lambda I) = H$ (Stell.2).

Dus λ is een regulier punt van A.

<u>Voorbeeld 1</u>.

We beschouwen de operator A: $l^2 \to l^2$ die gedefinieerd wordt door $A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ (de shift-operator). Het punt $0 \in \mathbb{C}$ is geen eigenwaarde van A, maar behoort wel tot het spectrum van A (A is naar beneden begrensd omdat $||A\,x|| = ||x||$ voor alle $x \in l^2$; maar R(A) is niet dicht in l^2)

<u>Voorbeeld 2</u>.

Laat (α_k) een begrensde rij van complexe getallen zijn. We definiëren de afbeelding A: $l^2 \to l^2$ als volgt: $A(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) =$

$= (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_k x_k, \ldots)$

Voor k = 1,2, ..., definiëren we:

$e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kj}, \ldots)$ met $e_{kj} = \delta_{kj}$.

Er gelden de volgende beweringen:

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ is eigenwaarde van A $\Longleftrightarrow$ er is een k zó dat $\lambda = \alpha_k$.

bewijs:

$\Longleftarrow$ Iedere α_k is eigenwaarde van A (immers $Ae_k = \alpha_k\, e_k$).

$\Longrightarrow$ Stel $\lambda \neq \alpha_k$ voor alle k terwijl $A\,x = \lambda\, x$ voor zekere $x \in l^2$.

Nu is $(A-\lambda I)x = ((\alpha_1-\lambda)x_1,\ (\alpha_2-\lambda)\, x_2,\ \ldots)$.

Dus $(\alpha_k-\lambda)x_k = 0$ voor alle k. Dus $x = 0$. Dus λ is geen eigenwaarden van A.

b) Zij V de afsluiting van de verzameling $\{\alpha_k | k = 1,2,\ \ldots\}$.

Dan is het spectrum van A gelijk aan V.

bewijs:

We tonen eerst aan dat ieder punt λ dat limietpunt is van de verzameling $\{\alpha_k | k = 1,2,\ \ldots\}$ behoort tot het spectrum van A.

Als λ een limietpunt van de verzameling $\{\alpha_k | k = 1,2,\ \ldots\}$ is, dan is er eenrij $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ zo dat $\alpha_{k_i} \to \lambda$ als $i \to \infty$.

Daar $\| (A-\lambda I)\, e_{k_i} \| = |\alpha_{k_i} - \lambda| \to 0$ als $i \to \infty$ is $(A-\lambda I)$ niet naar beneden begrensd, dus λ behoort tot het spectrum van A.

Nu tonen we aan dat ieder punt $\lambda \notin V$ regulier voor A is.

Als $\lambda \notin V$ dan is er een getal $d > 0$ zó dat $|\alpha_k - \lambda| \geq d$ voor alle k (V is gesloten, zelfs compact).

Dan is $\| (A-\lambda I)x \| \geq d\, \|x\|$ voor alle $x \in l^2$, dus $(A-\lambda I)$ is naar beneden begrensd.

Verder is $R(A-\lambda I) = H$; immers als $y = (y_1, y_2, \ldots)$ $\in l^2$, dan is ook $x = \left(\frac{y_1}{\alpha_1-\lambda}, \frac{y_2}{\alpha_2-\lambda}, \ldots\right)$ element van l^2(ga na), terwijl $(A-\lambda I)x = y$.

<u>Opgaven</u>

1. Bewijs, dat iedere compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$ spectrum is van een zekere begrensde operator op L^2.
2. De operator $A: L^2\ ([a,b]) \longrightarrow L^2\ ([a,b])$ wordt gedefiniëerd door $A\ f(x) = x\ f\ (x)\quad (f \in L^2([a,b]))$

   Bewijs dat A geen eigenwaarden heeft.

   Bewijs dat het spectrum van A gelijk is aan $[a,b]$.

§14 Compacte Operatoren.

In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat operatoren op een oneindigdimensionale Hilbertruimte essentieel andere spectraal eigenschappen (i.e. eigenschappen van het spectrum) kunnen bezitten als operatoren op een eindigdimensionale Hilbertruimte. We gaan nu een klasse van operatoren beschouwen waarvan het spectrum zeer veel "lijkt" op dat van operatoren in een eindigdimensionale Hilbertruimte nl. de klasse van de compacte operatoren.

<u>Stelling 1.</u> Laat H een Hilbertruimte zijn en laat $S = \{x \mid ||x|| \leq 1\}$ de gesloten eenheidsbol in H zijn.
Dan geldt:
S is compact $\Longleftrightarrow$ dim H < ∞.
bewijs:
$\Longleftarrow$ Als dim H eindig is, dan is $H = \mathbb{C}^n$ voor zekere n.
S is dan compact op grond van de stelling van Bolzano-Weierstrass.
$\Longrightarrow$ Als dim H oneindig is dan is er zeker een orthonormale rij $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ in S. Daar $||e_n - e_m||^2 = 2$ als $n \neq m$, bezit $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ geen deelrij die convergent is. Dus S is niet compact.

<u>Opmerking</u>
We hebben verder de volgende equivalentie:
S is compact $\Longleftrightarrow$ als B een begrensde verzameling van H is dan is B relatief compact (i.e. $\overline{B}$ is compact).
bewijs:
$\Longleftarrow$ S is begrensd en gesloten.
$\Longrightarrow$ Als B een begrensde verzameling is, dan geldt:
$\overline{B} \subset \{x \mid ||x|| \leq n\}$ voor zekere n. Uit deze opmerking volgt nu de bewering.

<u>Definitie 1.</u> Een lineaire operator $K : H \to H$ van een Hilbertruimte H in zichzelf heet <u>compact</u> als geldt:
als B een begrensde verzameling is dan is K(B) relatief compact (i.e. $\overline{K(B)}$ is compact).

Lemma. Zij K : H → H een lineaire operator van een Hilbertruimte H in zichzelf.

De volgende beweringen zijn dan equivalent:

a) T is compact.

b) Als (f_n) een begrensde rij is, dan heeft de rij (Kf_n) een convergente deelrij.

c) T (S) is relatief compact $(S = \{x| \ ||x|| < 1\})$.

bewijs:

Het bewijs volgt onmiddellijk uit de definities en de volgende opmerking: een verzameling $A \subset H$ is relatief compact d.e.s.d als iedere rij (f_n) in A een convergente deelrij heeft).

Stelling 2.

a) Als K een compacte operator is, dan is K begrensd.

b) Als K compact en T begrensd is, dan zijn KT en TK compact.

bewijs:

a) Als K niet begrensd is, dan is er een rij (f_n) met $||f_n|| = 1$ en $||Kf_n|| > n$; de rij (Kf_n) heeft dan geen convergente deelrij.

b) Als $\{f_n\}$ begrensd is, dan is $\{Tf_n\}$ begrensd.
Als (Kf_n) convergent is, dan is (TKf_{n_k}) convergent.
Uit deze twee opmerkingen volgt de bewering.

Opmerking

Het omgekeerde van a) geldt niet. Immers de eenheidsoperator I in een oneindigdimensionale Hilbertruimte H is begrensd maar niet compact (dit volgt uit Stell.1).

Definitie 2. Een lineaire operator T : H → H heet van eindige rang als de beeldverzameling R(T) van T eindig-dimensionaal (R(T) is altijd een lineaire deelruimte van H).

Stelling 3. Zij K een lineaire operator op H. Onderstel dat K begrensd èn van eindige rang is. Dan is K compact.

bewijs:

Is (f_n) een begrensde rij, dan is (Kf_n) een begrensde rij in een eindigdimensionale ruimte en heeft dus een convergente deelrij.

Opgave
Ga na dat een lineaire operator die van eindige rang is niet noodzakelijk begrensd hoeft te zijn.

Stelling 4. Zij K een compacte operator op H. Dan geldt:
als de rij (f_n) zwak convergent is, dan is (Kf_n) convergent.
bewijs:
Laat $f_n \rightharpoonup f$. Dan is ook: $Kf_n \rightharpoonup Kf$ (Stell.4 blz.59).
We moeten nu aantonen: $Kf_n \longrightarrow Kf$.
Stel dat deze bewering niet juist zou zijn. Dan is er een deelrij (f_n') zó dat $||Kf_n' - Kf|| > \varepsilon$ voor zekere $\varepsilon > 0$.
Daar (f_n') zwak convergent is, is $\{f_n'\}$ begrensd (dit volgt uit de stelling van Banach-Steinhaus). Dus $\{Kf_n'\}$ is relatief compact.
Laat (Kf_n'') een deelrij van (Kf_n'') zijn die in sterke (dus ook in zwakke) zin convergeert, stel naar g (dus $Kf_n'' \longrightarrow g$).
Daar $Kf_n'' \rightharpoonup Kf$, volgt $g = Kf$ (uniciteit van de zwakke limiet).
Dus $Kf_n'' \longrightarrow Kf$. Dit is in tegenspraak met: $||Kf_n' - Kf|| > \varepsilon > 0$.
Hiermee is de stelling bewezen.

Stelling 5. Zij K een lineaire operator op een Hilbertruimte H.
Laat K begrensd en $K^* K$ compact zijn.
Dan is K compact.
bewijs:
Neem een willekeurige begrensde rij (f_n) in H. Dan heeft $(K^* Kf_n)$ een convergente deelrij. Door (f_n) te vervangen door een geschikte deelrij kunnen we dus bereiken dat $(K^* Kf_n)$ convergent is. We hebben dan:

$$\begin{aligned} ||Kf_n - Kf_m||^2 &= (K(f_n - f_m), K(f_n - f_m)) \\ &= (K^* K(f_n - f_m), f_n - f_m) \\ &\leq ||K^* K(f_n - f_m)|| \; ||f_n - f_m|| \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat (Kf_n) een fundamentaalrij is.
Dus K is compact.

Gevolg Als K compact is, dan is K^* compact.

bewijs:

Daar K begrensd is, K^* begrensd. Dan is K K^* compact.
Nu is K $K^* = (K^*)^* (K^*)$ compact. Dus K^* is compact op grond van Stell.5.

We formuleren nu een lemma uit de topologie dat we nodig hebben voor de volgende stelling; we zullen dit lemma niet bewijzen.

<u>Lemma</u> Zij R een metrische ruimte en zij A een deelverzameling van R. Dan geldt: als A relatief compact is, dan bestaan bij elke $\varepsilon > 0$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_k$ zó dat A overdekt wordt door de ε- omgevingen $U_\varepsilon(x_1), \ldots, U_\varepsilon(x_k)$.
Als A volledig is dan geldt ook het omgekeerde.

<u>Opmerking</u> Men mag steeds veronderstellen dat de punten $x_1, \ldots, x_k$ tot A behoren. Immers, zij $\varepsilon > 0$ en zij A overdekt door $U_{\varepsilon/2}(x_1), \ldots, U_{\varepsilon/2}(x_k)$; laten we nu die $\varepsilon/_2$-bollen weg die geen punt met A gemeen hebben en kiezen we in de overblijvende bollen punten $y_1, \ldots, y_k \in A$, dan wordt A overdekt door $U_\varepsilon(y_1), \ldots, U_\varepsilon(y_k)$.

<u>Definitie 3.</u> Een rij K_n van begrensde lineaire operatoren op H heet <u>convergent</u> naar een begrensde lineaire operator K als $\lim_{n \to \infty} ||K_n - K|| = 0$.

Notatie: $\lim_{n \to \infty} K_n = K$.

<u>Opmerking</u> Voor $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} K_i = K$ schrijft men $\sum_{i=0}^{\infty} K_i = K$.

<u>Stelling 6.</u> Laten K, K_n $(n = 1,2, \ldots)$ lineaire operatoren op H zijn. Zij K begrensd en K_n compact voor $n = 1,2,\ldots$
Zij verder $K = \lim_{n \to \infty} K_n$. Dan is ook K compact.
bewijs:
Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Zij S de eenheidsbol in H. Laat n_0 een index zijn met $||K - K_{n_0}|| < \varepsilon/2$. Er zijn dan eindig veel punten $f_1, \ldots, f_k$, zó dat $K_{n_0}(S)$ overdekt wordt door de bollen $U_{\varepsilon/2}(f_1), \ldots, U_{\varepsilon/2}(f_k)$.
Voor $f \in S$ is $||K f - K_{n_0} f|| < \varepsilon/2$. Dus K f behoort tot een van de bollen $U_\varepsilon(f_i)$.

Dit betekent dat K (S) overdekt wordt door de eindig veel bollen $U_\varepsilon(f_1), \ldots, U_\varepsilon(f_k)$. Dus K (S) is relatief compact.
Dus K is compact.

<u>Stelling 7.</u> Zij K een begrensde lineaire operator op H.
Laat $H_1, H_2, \ldots$ een afbrekende of een oneindige rij van onderling orthogonale eindigdimensionale lineaire deelruimten zijn en laat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ een bijbehorende rij van complexe getallen zijn die voldoet aan:

(i) $\lambda_k \neq 0$ voor alle k
(ii) als de rij (λ_k) oneindig is, dan is $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$.

Laat verder gelden:

(i) als $g \in H_k$, dan is $K g = \lambda_k g$.
(ii) als $g \perp H_k$ voor elke k, dan is $K g = 0$.

Dan is de zo gedefinieerde operator K compact.

bewijs:
Uit het gegeven volgt: $N(K) = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k \right)^{\perp}$.

We voeren in: $H_0 = N(K)$ en $\lambda_0 = 0$.
Dan is $H_0, H_1, H_2, \ldots$ een stelsel orthogonale gesloten deelruimten van H (N(K) is gesloten en H_k is eindigdimensionaal dus gesloten als $k \geq 1$).
Er geldt: $H = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$.
Als $f \in H$ dan is $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f$ als P_k de projectie op H_k is.

(Stell.4 blz.31)
Nu is $K P_k f = \lambda_k P_k f$($k = 0, 1, 2, \ldots$).
Daar K begrensd is, geldt:

$$K f = K \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} P_k f\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} K P_k f\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k f$$

De convergentie van de laatste reeks volgt uit de herleiding, als ook uit de convergentie van de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} ||\lambda_k P_k f||^2$ (Stell.1. blz.30), die weer berust op de convergentie van $\sum_{k=0}^{\infty} ||P_k f||^2$ en de relatie $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$.

We definiëren nu K_n voor $n = 1,2, \ldots$ als volgt:

$$K_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k.$$

Dan is K_n begrensd:

$$||K_n f||^2 = ||\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k f||^2 \leq c^2 \sum_{k=0}^{n} ||P_k f||^2 \leq c^2 ||f||^2$$

als $c = \sup_{\lambda} |\lambda_k|$.

Daar K_n ook van eindige rang is, volgt dat K_n compact is (Stell.3).
We bewijzen nu: $\lim_{n \to \infty} K_n = K$.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies dan n_0 zó dat $|\lambda_k| \leq \varepsilon$ voor $k > n_0$.
Dan geldt:

voor $n > n_0$ is $||(K - K_n) f||^2 = ||\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k P_k f||^2$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||\lambda_k P_k f||^2 \leq \varepsilon^2 ||f||^2.$$

Dus K is compact (Stell.6).
Verder hebben we bewezen: $K = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k$.

Opmerking

Op analoge wijze als in Voorb.2 §13 kan men bewijzen:

a) het spectrum van K is gelijk aan de afsluiting van de verzameling $\{\lambda_k \mid k = 1,2, \ldots\}$.

b) als $\lambda \in \mathbb{C}$ eigenwaarde is van K, dan is $\lambda = \lambda_k$ voor zekere k.

15. Spectraalanalyse van compacte hermitische operatoren.

Laat K een begrensde lineaire operator op H zijn. Stel $\lambda \in \mathbb{C}$ is een eigenwaarde van K. De bij λ behorende eigenruimte $(=N(A-\lambda I))$ is dan gesloten, dus weer een Hilbertruimte en heeft dus een orthonormale basis. Als K bovendien hermitisch is, dan geldt:
$N(A-\lambda_1 I) \perp N(A-\lambda_2 I)$ als $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (Stell. 1 §13).
We hebben nu de volgende

Stelling 1. Zij K een compacte hermitische operator op H en zij $\rho > 0$ willekeurig. Dan zijn er slechts eindig veel eigenvectoren $f_1, f_2, \ldots, f_k$ zó dat geldt: (i) $|\lambda_i| \geq \rho$ voor $i = 1,2, \ldots ,k$ als λ_i de eigenwaarde bij f_i is.
(ii) $(f_i, f_j) = 0$ als $i \neq j$.

bewijs:
Stel dat er een oneindige rij $f_1, f_2, \ldots$ is met de eigenschappen (i) en (ii). We normeren de vectoren f_i zo dat $||f_i||= 1$ voor alle i.
Dan is de rij (f_i) begrensd. Verder is voor $i \neq j$

$$||K f_i - K f_j ||^2 = || \lambda_i f_i - \lambda_j f_j ||^2 \geq 2\rho^2$$

Dan heeft de rij $(K f_i)$ geen convergente deelrij.
Tegenspraak.

Gevolg 1. Als $\lambda \neq 0$ dan is dim $N (A - \lambda I) < \infty$.

Gevolg 2. Als er oneindig veel eigenwaarden zijn, dan vormen deze een rij (dus er zijn slechts aftelbaar veel eigenwaarden) en deze rij nadert tot 0.

bewijs:
Voor elke $\varepsilon > 0$ zijn er slechts eindig veel eigenwaarden λ van K met $|\lambda| \geq \varepsilon$.

We hebben voorwaarden afgeleid waaraan eventuele eigenwaarden van een compacte hermitische operator moeten voldoen. We gaan nu de existentie van eigenwaarden bewijzen.

We merken allereerst op dat iedere eigenwaarde λ van een begrensde lineaire operator A voldoet aan: $|\lambda| \leq ||A||$ (dat A geen eigenwaarde λ met $|\lambda| > ||A||$ kan hebben, volgt uit het feit dat steeds $||A\, f|| \leq ||A||\ ||f||$).

<u>Stelling 2.</u> Zij K een compacte hermitische operator op H. Dan heeft K een eigenwaarde λ met $|\lambda| = ||K||$.
bewijs:
We mogen aannemen dat $K \neq 0$. We hebben:
$||K|| = \sup_{||f||=1} |(Kf,f)|$ (zie Gevolg van Stell. 3 op blz. 45)
Verder is (Kf,f) steeds reëel (zie Stell.3 op blz. 45).
Er bestaat dus een rij (f_n) met:
$||f_n|| = 1$ $(n = 1,2, \ldots)$ en $\lim_{n\to\infty} (Kf_n,f_n) = ||K||$
of
$\lim_{n\to\infty} (Kf_n,f_n) = -||K||$

Door zonodig K door -K te vervangen is te bereiken dat $\lim_{n\to\infty} (Kf_n,f_n) = = ||K||$. Omdat de rij (f_n) begrensd is en K compact is, bestaat er een deelrij (f_{n_i}) van (f_n) zó dat (Kf_{n_i}) convergeert, stel naar g.

Stel nu $\lambda = ||K||$. Dan is:
$$||K\ \ - \lambda f_n||^2 = (Kf_n, Kf_n) - 2\lambda (Kf_n,f_n) + \lambda^2(f_n,f_n)$$
$$\longrightarrow ||g||^2 - 2\lambda ||K|| + \lambda^2 = ||g||^2 - \lambda^2 \qquad \text{als } n \to \infty .$$

Dus $||g||^2 - \lambda^2 \geq 0$, dus $||g|| \geq \lambda$.
Anderzijds is $||Kf_n|| \leq ||K||\ ||f_n|| = \lambda$ voor alle n.

Dus $||g|| \leq \lambda$.
We zien dus: $||g|| = \lambda$.

Dit heeft twee gevolgen:

a) Daar $K \neq 0$, dus $||K|| > 0$ is, is $||g|| > 0$, dus $g \neq 0$.

b) Verder geldt: $\lim_{n \to \infty} ||Kf_n - \lambda f_n|| = 0$.

Daar $\lim_{n \to \infty} Kf_n = g$, volgt: $\lim_{n \to \infty} \lambda f_n = g$ ofwel $\lim_{n \to \infty} f_n = \frac{1}{\lambda} g$.

Uit $\lim_{n \to \infty} ||Kf_n - \lambda f_n|| = 0$ volgt dan $K(\frac{1}{\lambda}g)-g) = 0$ ofwel $Kg = \lambda g$.

Dus λ is eigenwaarde van K.

We bewijzen nu voor hermitische operatoren de omkering van Stell. 7 §14.

<u>Stelling 3. (spectraalstelling voor compacte hermitische operatoren).</u>
Laat K een compacte hermitische operator op een Hilbertruimte H zijn.
Er bestaat dan een rij H_1, H_2, ... (eindig of oneindig) van onderling orthogonale eindigdimensionale lineaire deelruimten en een bijbehorende rij λ_1, λ_2, ... van onderling verschillende reëele getallen $\neq 0$ met

(i) $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$ $(k = 1,2, \ldots)$

(ii) als de rij (λ_k) oneindig is, dan is $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$

zodanig dat $K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ als P_k de projectie op H_k is.

bewijs:

Onderstel $K \neq 0$.

a) Op grond van Stell. 2 bestaat er een eigenwaarde λ_1 van K met $|\lambda_1| = ||K||$; dus $\lambda_1 \neq 0$.

Laat H_1 de bij λ_1 behorende eigenruimte zijn; dan is H_1 eindigdimensionaal.

Als $H_1^{\perp} = (0)$ (dit kan alleen optreden als H zelf eindigdimensionaal is), is $K = \lambda_1 I$ en we zijn klaar.

We nemen dus aan dat $H_1^{\perp} \neq (0)$. Daar H_1 blijkbaar invariant is onder K en K hermitisch is, is ook $H_1^{\perp}$ invariant onder K (Stell. 1c) §13).

De restrictie K_1 van K tot $H_1^{\perp}$ is dan een compacte hermitische operator van de Hilbertruimte $H_1^{\perp}$ in zichzelf.

Als $K_1 = 0$ dan is $K = \lambda_1 P_1$ en we zijn klaar.

b) Laten we dus veronderstellen dat $K_1 \neq 0$. Er bestaat dan een eigenwaarde λ_2 van K_1 (dus van K) met $|\lambda_2| = ||K||$; verder geldt:

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) $\lambda_2 \neq 0$ (daar $K_2 \neq 0$).

(iii) $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ (daar $||K_1|| \leq ||K||$).

Daar K hermitisch is en $\lambda_1 \neq \lambda_2$, staat de eigenruimte H_2 van λ_2 loodrecht op H_1; i.e. $H_2 \subset H_1^{\perp}$.

Verder is H_2 eindigdimensionaal.

Daar $H_1 \oplus H_2$ invariant is onder K, is ook $(H_1 \oplus H_2)^{\perp}$ invariant onder K.

De restrictie K_2 van K tot $(H_1 \oplus H_2)^{\perp}$ is dan een compacte hermitische operator van $(H_1 \oplus H_2)^{\perp}$ in zichzelf.

Als nu $K_2 = 0$, wat bijv. het geval is als $(H_1 \oplus H_2)^{\perp} = (0)$, dan is $K = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ als P_2 de projectie op H_2 is; en we zijn klaar.

c) Laten we dus aannemen dat $K_2 \neq 0$. Dan bestaat er een eigenwaarde λ_3 van K_2 met $|\lambda_3| = ||K_2||$.

De eigenruimte H_3 bij λ_3 is eindigdimensionaal en $H_3 \perp H_2$ en $H_3 \perp H_1$.

Dit proces voortzettend vinden we een stelsel (H_k) van onderling orthogonale eindigdimensionale deelruimten en een stelsel (λ_k) van bijbehorende reëele getallen met:(i)$\lambda_k \neq \lambda_1$ als $k \neq 1$

(ii)$\lambda_k \neq 0$ voor alle k

(iii)$|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ voor alle k

En er is voldaan aan: als $g \in H_k$ dan is $Kg = \lambda_k g$ voor alle k. Als K_n de restrictie van K tot $(H_1 \oplus \ldots \oplus H_n)^{\perp}$ is dan is $|\lambda_{n+1}| = ||K_n||$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

a) Het proces breekt, doordat $K_n = 0$ voor zekere n (als dim H < ∞ is, dan zal dit zeker optreden doordat $(H_1 \oplus \ldots \oplus H_m)^{\perp} = (0)$ voor zekere m).

Laat P_k de projectie op H_k zijn en laat Q_k de projectie op $(H_1 \oplus \ldots \oplus H_k)^{\perp}$ zijn.

Voor alle $f \in H$ is dan

$$f = \sum_{k=1}^{n} P_k f + Q_n f$$

en dus $$Kf = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k f.$$

Dus $K = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$

b) Het proces breekt niet af; dus $K_n \neq 0$ voor alle n.

In dit geval geldt: $\lim_{n\to\infty} \lambda_k = 0$ (Gevolg 2 van Stell. 1).

Voor $f \in H$ geldt dan:

$$Q_n f = f - \sum_{k=1}^{n} P_k f \quad \in (H_1 \oplus \ldots \oplus H_n)^{\perp}$$

en dus

$$K_n Q_n f = K f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k f .$$

Dus: $$||Kf - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k f || = ||K_n Q_n f|| \leq |\lambda_{n+1}| \, ||f||.$$

Daar $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, volgt hieruit: $K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$.

Verder geldt: $N(K) = (\bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k)^{\perp}$ (i.e. $Kf = 0 \Longleftrightarrow f \perp H_k$ voor alle k).

Dit volgt uit de relatie: $||Kf||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \, ||P_k f||^2$ en uit

het feit dat $\lambda_k \neq 0$ voor alle k.

Hiermee is de stelling bewezen.

Gevolg. Als K een compacte hermitische operator op H is dan is er een orthonormale basis van H bestaande uit eigenvectoren van K.

Stelling 4. Laat K een begrensde lineaire operator zijn. Dan geldt:

K is compact $\Longleftrightarrow$ K is limiet van begrensde lineaire operatoren van eindige rang.

bewijs:

$\Longleftarrow$ Dit volgt uit Stell.3 en Stell.6 uit §14.

$\Longrightarrow$ Dit volgt uit Stell.4 en de volgende opmerking:

$K = K_1 + i\,K_2$ met $K_1 = \frac{1}{2}(K + K^*)$ en $K_2 = \frac{1}{2i}(K - K^*)$
en K_1 en K_2 zijn compacte hermitische operatoren (de compactheid van K_1 en K_2 volgt uit het Gevolg van Stell.5 §14).

§16. Een toepassing.

We zullen in deze paragraaf niet alles bewijzen, maar wel alle stellingen vermelden die bij de bewijzen gebruikt worden.

We beginnen met een maattheoretische inleiding.

Definitie 1. Een verzameling van $N \subset \mathbb{R}$ heet een nulverzameling als er voor alle $\varepsilon > 0$ een rij van intervallen $(a_i, b_i]$ $(i = 1,2, \ldots)$ bestaat zó dat

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

Zij $I = [a,b]$ een interval van $\mathbb{R}$.

Stelling 1. Laten f en g meetbare functies op I zijn.
Dan geldt:

$$\int_I \left| f(x) - g(x) \right| dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \text{ voor bijna alle } x \in I$$

(dit betekent: voor alle $x \in I$ buiten een zekere nulverzameling).

Defintie 2. Een meetbare functie f heet sommeerbaar over I als $\int_I |f(x)|\,dx < \infty$, kwadratisch sommeerbaar over I als $\int_I |f(x)|^2\,dx < \infty$.

Stelling 2. (Fubini).
Zij $f\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ sommeerbaar
(i.e. $\int_{I \times I} |f(x,y)|\,dxdy < \infty$),

Dan geldt:

a) Voor alle $x \in I$ buiten een zekere nulverzameling is de functie $f_x : y \mapsto f(x,y)$ sommeerbaar.

b) De functie

$$x \mapsto \int_I f(x,y)\, dy$$

(die bijna overal op I gedefinieerd is) is sommeerbaar.

c) Er geldt: $\int_I \left(\int_I f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{I \times I} f(x,y)\, dxdy.$

We zullen tenslotte nog het volgende lemma nodig hebben.

<u>Lemma</u>. Is $f : I \to \mathbb{C}$ sommeerbaar, dan is ook de functie

$I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ sommeerbaar.

$(x,y) \mapsto f(y)$.

Laat nu $k(x,y) \in L^2(I \times I)$.
Voor $f \in L^2(I)$ en $x \in I$ definiëren we:

$$(Kf)(x) = \int_I k(x,y)\, f(I)\, dy$$

Dan geldt het volgende:

a) $(Kf)(x)$ is gedefinieerd voor bijna alle $x \in I$ (dus Kf bepaalt een equivalentieklasse van meetbare functies; zie Voorb. 1 op blz.35).

bewijs:
Daar $\int_{I \times I} |k(x,y)|^2 d\,x\, dy$ bestaat, volgt uit Stell.2. dat de functie $y \mapsto k(x,y)$ voor bijnà alle $x \in I$ kwadratisch sommeerbaar is.

Uit het bovenstaande lemma en uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, volgt dat

$$\int_I k(x,y)\, f'(y)\, dy$$

voor bijna alle $x \in I$ bestaat.

b) $Kf \in L^2(I)$.

bewijs:

We moeten aantonen dat de functie

$x \longmapsto \int_I k(x,y)\, f(y)\, dy$ kwadratisch sommeerbaar is.

Deze functie is meetbaar en volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt:

$$|(Kf)(x)|^2 = \left|\int_I k(x,y)\, f(y)\, dy\right|^2 \le$$

$$\le \int_I |k(x,y)|^2\, dy \int_I |f(y)|^2\, dy \qquad (*)$$

Volgens Stell.2 is $x \longmapsto \int_I |k(x,y)|^2\, dy$ sommeerbaar.

Hieruit volgt de bewering.

c) De zo gedefinieërde operator $K : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ is begrensd en $||K|| \le ||k||$ $\left(||k|| \text{ is de norm van } k \text{ in } L^2(I)\right)$.

bewijs:

Uit $(*)$ volgt:

$$||Kf||^2 \le ||k||^2\, ||f||^2.$$

d) Als $k(x,y)$ de operator K definieert, dan definieert de functie $\overline{k(y,x)}$ de operator K^*.

bewijs:

De functie $f(y)\, \overline{g(x)} \in L^2\,(I \times I)$ als $f, g \in L^2\,(I$.

Dus $k(x,y)\, f(y)\, \overline{g(x)}$ is sommeerbaar.

Volgens Stell.2 is dan

$$(Kf,g) = \int_I \left(\int_I k(x,y)\, f(y)\, dy\right) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_I f(x) \left(\int_I k(y,x)\, \overline{g(y)}\, dy\right) dx = (f, K^* g).$$

<u>Stelling 3.</u> Als (ϕ_k) $(k = 1,2, \ldots)$ een orthonormale basis van $L^2(I)$ is, dan is het stelsel functies (ϕ_{kl}) $(k,l = 1,2, \ldots)$ waarbij

$$\phi_{kl}(x,y) = \phi_k(x)\, \phi_l(y)$$

een orthonormale basis van $L^2(I \times I)$.

bewijs:

De (ϕ_{kl}) vormen een orthonormaal stelsel (ga dit na).

Om aan te tonen dat het stelsel (ϕ_{kl}) een basis is, gebruiken we Stell. 7 (5), blz.36).

Als $f \in L^2(I \times I)$ dan is

$$||f||^2 = \int_I \left[\int_I |f(x,y)|^2\, dx\right] dy.$$

Uit Stell.2 en het feit dat de (ϕ_k) een basis vormen volgt:

$$||f||^2 = \int_I ||f_y||^2\, dy \quad \left(f_y(x) = f(x,y)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \left| \int_I f(x,y)\, \overline{\phi_k(x)} dx \right|^2 dy$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \int_I \left[\int_I f(x,y)\, \overline{\phi_k(x)}\, dx\, \overline{\phi_l(y)}\right] dy \right|^2$$

$$= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left| \int_I \int_I f(x,y)\, \overline{\phi_{kl}(x,y)}\, dx\, dy \right|^2$$

<u>Stelling 4.</u> De boven gedefinieerde operator K is compact.

bewijs:

Daar $k \in L^2$ $(I \times I)$, is (zie Stell.7 (3) op blz.36).

$$k = \sum_{i,j} (k\phi_{ij})\phi_{ij}.$$

Dit betekent: $k_n \longrightarrow k$ in $L^2(I \times I)$; ofwel

$$||k - k_n|| \longrightarrow 0 \text{ als } n \longrightarrow \infty,$$

als

$$k_n = \sum_{i,j=1}^{n} (j,\phi_{ij})\ \phi_{ij}.$$

Dus $||K - K_n|| \longrightarrow 0$ als $n \longrightarrow \infty$ i.e. $\lim K_n = K$.
Nu is K_n begrensd en van eindige rang:

$$(K_n f)(x) = \int_a^b f(y) \sum_{i,j=1}^{n} (k,\phi_{ij})\ \phi_i\ (x)\ \phi\ (y)\ dy$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (k,\phi_{ij})\ (f,\overline{\phi_j})\ \phi_i(x).$$

Dus K is compact.

De theorie van de compacte operatoren is dus toepasbaar op integraal- en ook differentiaalvergelijkingen.

Fredholm-integraalvergelijking.

$$\int_a^b k(x,y)\ f(y)\ dy = \lambda f(y) \quad (k \in L^2(I \times I).$$

Differentiaalvergelijking.

We beschouwen op $[a,b]$ de volgende differentiaalvergelijking:

$$Ly = \lambda y$$

waarbij

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x)$$

met randvoorwaarden $U_\nu(y) = 0$ $(\nu = 1, \ldots ,n)$;
hierbij is U_ν voor $\nu = 1, \ldots, n$ een homogene lineaire vorm met constante coëfficienten in $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$

zodanig dat

$$\det U_\nu(y_i) \neq 0$$

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

als $y_1, \ldots, y_n$ een lineair onafhankelijk stelsel van oplossingen van $Ly = \lambda y$ is.

Onder deze voorwaarden geldt:

de oplossing y van

$$Ly = \lambda y$$
$$U_\nu(y) = 0$$

voldoet aan een integraalvergelijking:

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y\,(\xi)\, d\xi$$

($G(x,\xi)$ heet de Greense functie).