

ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Syllabus
van het
Colloquium Recursieve Functies
o.l.v. prof. dr. A. Heyting
1968 - 1969



ZW

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam,
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications; it is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Hoofdstuk I

Inleiding

1. Oorsprong en connecties.

Techniek en wetenschap zijn innig verweven.

De techniek van de wetenschap omvat een arsenaal van standaardmethoden om problemen van een bepaald type op te lossen.

Deze methoden zijn zelf vondsten voortgebracht door het wetenschappelijk onderzoek, dat ze op hun beurt weer als instrument dienen.

In zekere zin houdt elk onderzoeksresultaat een mogelijke methode in.

In de wiskunde zou men elke bewezen stelling als de formulering van een algemene methode kunnen beschouwen. Het technisch aspect van de wiskunde komt echter meer specifiek naar voren in het rekenen: het manipuleren met tekens volgens vastgestelde regels. In de meeste gebieden van de wiskunde is de vraag hoe een bepaalde berekening moet worden uitgevoerd niet triviaal: het gebruikte systeem schrijft niet eenduidig voor hoe men te werk moet gaan. Het rekenen berust er echter op dat voor vele speciale gevallen wel zo'n door stricte regels bepaald algoritme bestaat zodat men zich om die gevallen niet hoeft te bekommeren en zich kan concentreren op het eigenlijke probleem.

De belangrijke rol die de tekensystemen en algoritmen in de wiskunde spelen werd reeds onderkend door Leibnitz, die zei dat men zonder deze "ne peut pas aller loin sans s'égarer". Pas in deze eeuw echter heeft de reflexie zich zover voortgezet dat deze wiskundige hulpmiddelen zelf ook tot object van wiskunde geworden zijn. Merkwaardig is dat ze bijna tegelijkertijd geconcretiseerd worden in de rekenautomaten, waarvan het idee ook reeds lang bestond (Pascal).

2. Formele systemen.

"Die Mathematiker sind eine Art Fransosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache und dann ist es alsobald ganz etwas anderes" (Goethe).

Zo worden tekensystemen als mathematisch object tot formele systemen, algoritmen tot recursieve functies.

Een formeel systeem is bepaald door een aantal basisobjecten en regels volgens welke uit die basisobjecten door toepassing van bepaalde operaties andere objecten (formules) kunnen worden samengesteld.

Zulke systemen, b.v. de "woorden" die uit eindig veel "letters" door concatenatie kunnen worden samengesteld, zijn op zich niet zo bijster interessant. Wat ze zoveel betekenis verleent, is de wijze waarop relaties, predicaten en operaties op de "formules" van zo'n systeem gedefinieerd kunnen worden.

B.v. voor een predicaat bepalen we voor welke basisobjecten het geldt en leggen we vast hoe samenstelling van formules de geldigheid van het predicaat beïnvloedt.

Onder zekere voorwaarden ligt het dan voor de hand aan te nemen dat op deze wijze het al dan niet toekomen van het predicaat aan een formule voor het hele systeem bepaald is.

Zijn de samenstellingsregels zó, dat alleen eenvoudiger formules kunnen worden samengesteld tot een meer gecompliceerde, dan is het niet moeilijk om een algoritme te bedenken waarmee beslist kan worden of het predicaat aan een bepaalde formule toekomt.

In het geval ook meer gecompliceerde formules aanleiding kunnen geven tot een eenvoudiger formule die niet "van onder op" is samen te stellen, garandeert niets ons die beslisbaarheid; de "weg terug" is dan onafzienbaar. Dit geval doet zich voor in vrijwel alle "logische" systemen waar "geldige" volzinformules via bewijsregels een nieuwe "geldige" formule opleveren die vaak veel simpeler is dan de premissen. Het is dan ook een uitzondering als "bewijsbaarheid" beslisbaar is in een systeem.

De relatie van notatiesystemen met het object van de wiskunde is een nog weinig opgehelderde zaak. De formalisering ervan in de modeltheorie verschuift het probleem naar de relatie tussen model en mathematisch object enerzijds en die tussen notatiesysteem en formeel systeem anderzijds.

Er is echter een geval waarin al deze relaties nog maar met moeite van de identiteit te onderscheiden zijn. Beschouwen we een formeel systeem N met (i) één basisobject en (ij) één operatie met de volgende eigenschappen:

- (iij) Toepassen van de operatie levert nooit het basisobject.
- (iv) De samenstelling van elk object van het systeem is eenduidig
- (v) Als iets geldt voor het basiselement en de operatie laat de geldigheid onaangetast, dan geldt het voor alle objecten van het systeem.

We herkennen hier onmiddellijk de axiomes van Peano voor de natuurlijke getallen in.

Maar het bovenstaande verhaal is evengoed op te vatten als beschrijving van het meest elementaire notatiesysteem voor natuurlijke getallen, of als omschrijving van een model of van de natuurlijke getallen als wiskundig object.

Het zal blijken dat alle problemen omtrent algorithmen en berekenbaarheid zich theoretische aan de hand van dit prototype der formele systemen laten behandelen.

Alleen al om tot deze conclusie te komen moeten we echter ook andere systemen in onze beschouwingen betrekken. De relaties, predicaten en operaties die in dit systeem beslisbaar resp. effectief uitvoerbaar zijn spelen echter een centrale rol in de komende beschouwingen.

Ze laten zich herleiden tot berekenbare functies in een of meer variabelen, gedefinieerd op de natuurlijke getallen.

Het gaat er allereerst om dit begrip berekenbaar een wiskundig definieerbaar equivalent toe te voegen.

Bij het "mathematiseren" of zelfs axiomatiseren van zo'n intuïtief begrip blijft altijd de vraag omtrent de relatie van het intuïtieve en het gedefinieerde begrip bestaan.

Meestal kan deze vraag als niet wiskundig worden beschouwd. De beantwoording moet op empirisch of wijsgerig vlak worden gezocht.

Hier echter is de bijbehorende empirie die van de wiskundebeoefening zelf.

De these van Church- die de adequaatheid van de definitie stelt- heeft daarom wel wiskundige betekenis.

§3 Recursieve functies.

Gewoonlijk wordt de optelling voor natuurlijke getallen als volgt gedefinieerd:

$$x + 0 = x$$

$$x + Sy = S(x+y)$$

Waarbij we de natuurlijke getallen bij 0 laten beginnen en S aan elk getal zijn opvolger toevoegt.

Dit is een "definitie door recursie" waarvan we in §2 de samenhang met de opbouw van formele systemen hebben laten zien.

In het decimale systeem dat we gewoonlijk gebruiken voor de notatie van getallen zou de definitie van de optelling gecompliceerder zijn.

Als formeel systeem zouden we de decimale notatie als volgt kunnen beschrijven:

Basisobjecten 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Samenstelling; als X een object is dat van "0" verschilt dan zijn ook $X_0, X_1, X_2, \dots, X_9$ objecten.

De definitie van de optelling wordt dan:

$$\begin{array}{ll} X_0 + Y_0 = (X+Y)_0 & X_1 + Y_0 = (X+Y)_1 \\ & \vdots \\ X_0 + Y_1 = (X+Y)_1 & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ X_0 + Y_9 = (X+Y)_9 & X_1 + Y_9 = ((X+Y)+1)_0 \end{array} \quad \text{etc.}$$

We moeten nog toevoegen: $9 + 1 = 10$

Weer terugkerend naar het S-systeem kunnen we de volgende definities geven:

$$\begin{array}{ll} x.0 = 0 & x^0 = 1 \\ x.Sy = xy+x & x^{Sy} = x^y.x \end{array}$$

We maken hier bij de definitie door recursie gebruik van reeds eerder gedefinieerde functies.

Doordat telkens in het rechterlid een uitdrukking staat die in zekere zin (het grootste voorkomende getal is 1 kleiner) eenvoudiger is dan de uitdrukking in het linker lid, maken deze definities het mogelijk wanneer x en y gegeven zijn als objecten van N , $x+y$, $x.y$, x^y als objecten van N te bepalen.

Het is duidelijk dat nu ook definities als:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ deze eigenschap hebben.}$$

We kunnen nu al een klasse P van berekenbare functies omschrijven.

- i) De constante functie $0(x)=0$ behoort tot P
- ij) S behoort tot P
- iiij) Samenstellingen van P -functies behoren zelf ook tot P
- iv) Als g en a tot P behoren en f is gedefinieerd door

$$f(0, x_1, \dots, x_n) = a(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(Sx, x_1, \dots, x_n) = g(x, f(x, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$$

dan behoort ook f tot P .

P is de klasse der primitief recursieve functies.

Vele in de wiskunde voorkomende functies behoren tot deze klasse.

Nog enkele voorbeelden:

$$\begin{cases} sg(0)=0 \\ sg(Sn)=1 \end{cases} \quad \text{Deze signatuurfunctie stelt}$$

ons in staat aan te tonen dat conditionele definities ons niet buiten de klasse P voeren. B.v.

$$\left[\frac{10}{n} \right] = \begin{cases} 0 & \text{als } n=0 \\ 10 & \text{als } n=1 \\ 5 & \text{als } n=2 \\ 3 & \text{als } n=3 \\ 2 & \text{als } n=4 \text{ of } n=5 \\ 1 & \text{als } n=6 \text{ of } n=7 \text{ of } n=8 \text{ of } n=9 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

kan ook geschreven worden als

$$\left[\frac{10}{n}\right] = \text{sg}(n) \cdot (\text{sg}(11 \dot{-} n) + \text{sg}(6 \dot{-} n) + \text{sg}(4 \dot{-} n) + \\ 2 \text{sg}(3 \dot{-} n) + 5 \text{sg}(2 \dot{-} n)),$$

als we $\dot{-}$ op de volgende wijze definieren:

$$\begin{cases} 0 \dot{-} 1 = 0 \\ Sx \dot{-} 1 = x \\ x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} Sy = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 \end{cases}$$

Het kan voorkomen dat het aantal gevallen dat onderscheiden moet worden van een der veranderlijken afhangt. Dit doet zich b.v. voor als we $f(x,y)$ willen definieren als het kleinste getal z kleiner dan y waarvoor $g(x,z)=0$ en 0 als zo'n getal niet bestaat.

Daartoe definieren we eerste de $\sum$ en Π operator.

$$\sum_{i=0}^0 h(i, x_1 \dots x_k) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{Sn} h(i, x_1 \dots x_k) = \sum_{i=1}^n h(i, x_1 \dots x_k) + h(Sn, x_1 \dots x_k)$$

Π analoog. Nu definieren we $f_0(x,y)$:

$$f_0(x,y) = \sum_{i=0}^y \text{sg}\left(\sum_{j=0}^i g(x,j)\right)$$

en $f(x,y) = f_0(x,y) \cdot \text{sg}(n \dot{-} f_0(x,y))$

Het is nu niet moeilijk meer om functies als p_n (het n^{e} priemgetal) $\Pi(n)$ (het aantal priemgetallen $< n$) enz. te definieeren. Dit zijn dus allemaal primitief recursieve functies.

Anders wordt het wanneer we vragen naar de functie $f(x)$ = het kleinste getal y met $g(x,y) = 0$. Wil deze functie berekenbaar zijn (vooropgesteld dat g b.v. prim. recursief is) dan moeten we ervan verzekerd zijn dat g niet "definiët-positief" is. Maar zelfs als we gronden hebben te geloven dat er voor elke x een getal y bestaat met $g(x,y) = 0$ kan het probleem een bovengrens voor dit getal aan te geven even gecompliceerd zijn als het berekenen van $f(x)$ zelf.

We definiëren nu een klasse R van functies door aan onze schema's (i), (ij), (iiij), (iv) (waarvan we P vervangen door R) nog het volgende schema aan toe te voegen:

(v) Als g tot R behoort en er geldt dat

er voor alle $x_1, \dots, x_n$ een x bestaat met $g(x, x_1, \dots, x_n) = 0$
 en $f(x_1 \dots x_n)$ is gedefinieerd als de kleinste x met die eigenschap, dan behoort f ook tot R .

We noteren $f(x_1, \dots, x_n) = \mu x (g(x, x_1 \dots x_n) = 0)$.

R is de klasse der recursieve (ook wel algemeen recursieve) functies.

Kleene bewees dat als in schema (v) geeist wordt dat g primitief recursief is, dezelfde klasse van functies wordt bepaald.

Ook bewees hij de equivalentie van bovenstaande definitie met een andere die we in de volgende paragraaf zullen ontmoeten.

We zullen daar ook aantonen dat P een echte deellklasse is van R en dat er een veelheid van tussenklassen te definieren is die telkens met gecompliceerdere gevallen van berekenbaarheid overeenkomen.

Colloquium Recursieve Functies. 1968-1969.

Hoofdstuk 2. Turing-Machines.

1. Inleiding.

De theorie der recursieve functies is ontstaan uit de vraag, die processen in de wiskunde, die effectief uitgevoerd kunnen worden, nader te karakteriseren. Een beperkter en meer concreet probleem is dat de karakterisering der effectief berekenbare getaltheoretische functies; het blijkt dat vele verwante problemen hiertoe teruggebracht kunnen worden. Het gaat steeds om de vraag, een algemene methode te vinden, die mechanisch op ieder bijzonder geval toegepast kan worden, dus in het geval van een functie f om een voorschrift, waardoor $f(x)$ voor iedere argumentwaarde x berekend kan worden, eenvoudig door het voorschrift te volgen. De meest voor de hand liggende vorm van een dergelijk voorschrift is die van de primitieve recursie, die in hoofdstuk 1 behandeld is. Daar bleek, dat deze methode ons niet alle effectief berekenbare functies levert. Er moet dus naar een meer omvattende definitie van effectieve berekenbaarheid gezocht worden. Er zijn verschillende dergelijke definities gegeven, die op het eerste gezicht totaal verschillend zijn, maar toch alle equivalent blijken. Dit is een sterk argument voor de belangrijkheid van het gedefinieerde begrip. Een van deze definities is afkomstig van Turing (A.M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. (2) 42 (1936) 230-265). Hij legt de nadruk op het mechanische karakter, dat de toepassing van het algemene voorschrift op de speciale gevallen moet hebben. Het moet mogelijk zijn, die toepassing aan een machine op te dragen.

2. Definitie van een Turing-machine.

Wij denken ons een naar beide zijden onbepaald ver doorlopende band, die in vakjes verdeeld is.

Op ieder vakje kan een van de tekens uit een alfabet $s_1, \dots, s_m$ staan. Voor het gemak gebruiken wij s_0 voor een leeg vakje. Verder bevat de machine een wijzer, die op ieder ogenblik een bepaald vakje van de band aanwijst, en bevindt de machine zich op ieder ogenblik in een van de inwendige toestanden $q_0, \dots, q_n$. De stand van de machine is dus gegeven door:

1. de rij tekens op de band,
2. het aangewezen vakje,
3. de inwendige toestand.

Wat de machine gaat doen, hangt van deze gegevens af. Turing neemt aan, dat de machine een verandering ondergaat, die alleen afhangt van de inwendige toestand en van het teken dat in het aangewezen vakje staat. De verandering kan een van de drie volgende vormen hebben:

- a. Het teken in het aangewezen vakje wordt door een ander vervangen.
- b. De naald verspringt één vakje naar rechts.
- c. De naald verspringt één vakje naar links.

Deze drie soorten veranderingen worden achtereenvolgens aangegeven door kwadrupels van de vorm:

$$a. \quad q_i s_j s_k q_l, \quad b. \quad q_i s_j R q_l, \quad c. \quad q_i s_j L q_l.$$

Lees a: Als de machine in de inwendige toestand q_i verkeert en op het aangewezen vakje het teken s_j staat, dan wordt dit teken veranderd in s_k en gaat de machine over in toestand q_l . Analoog voor b en c.

De technische uitvoering van een Turing-machine zou niet moeilijk zijn (al zou in de praktijk de band een eindige lengte moeten hebben). Voor de wiskundige is dit van geen belang. Hij spreekt van een machine, omdat dit hem een heuristische steun geeft, maar in werkelijkheid werkt hij met het abstracte schema van de machine. Dit schema bestaat uit:

1. de rij symbolen $s_1, \dots, s_m$,
2. de rij symbolen $q_0, \dots, q_n$,
3. een aantal kwadrupels van de vorm a, b of c.

Aan de kwadrupels wordt de eis gesteld, dat geen twee ervan met dezelfde symbolen $q_i s_j$ beginnen.

Een stand van de machine wordt gedefinieerd als een eindige rij symbolen, waaronder ook s_0 mag voorkomen, en waarin precies één q -symbool voorkomt:

$$(*) \quad s_{i_1} \dots s_{i_l} q_j s_h s_{k_1} \dots s_{k_r}.$$

Men kan dit interpreteren als die stand, waarin q_j de inwendige toestand aangeeft, terwijl op de band de tekenrij $s_{i_1} \dots s_{i_l} s_h s_{k_1} \dots s_{k_r}$ staat en het aangewezen vakje datgene is waarin s_h staat. Wegens de eis, die aan de kwadrupels gesteld is, is op de stand (*) hoogstens één kwadrupel van toepassing. Wij laten het aan de lezer over, abstract te formuleren, waarin de uitwerking van een kwadrupel a , b of c op (*) bestaat.

Laat Z een T -machine (afkorting voor Turing-machine) zijn, en U en V twee standen van Z . We schrijven $U \rightarrow V (Z)$, als U in V overgaat door een kwadrupel uit Z . Bij iedere stand U is er hoogstens één stand V waarvoor geldt $U \rightarrow V (Z)$. Gaat men uit van een stand U_1 , dan kan men trachten, $U_2, U_3, \dots$ zo te bepalen, dat $U_i \rightarrow U_{i+1}$ ($i=1,2,\dots$). Hierbij kunnen zich twee gevallen voordoen:

- I. De rij $U_1, U_2, \dots$ eindigt met U_p , waarop geen kwadrupel van toepassing is.
- II. De rij $U_1, U_2, \dots$ gaat steeds door.

In geval I heet de rij $U_1, U_2, \dots, U_p$ een Z -berekening. U_1 is de uitgangstoestand, U_p het resultaat van de berekening.

Wij komen overeen, dat geen kwadrupel met q_0 begint. De machine stopt dus zeker, zodra q_0 optreedt. In plaats van s_0 schrijven wij 0, in plaats van s_1 schrijven wij 1. Het natuurlijke getal n wordt weergegeven door een rij van $n + 1$ tekens; wij schrijven hiervoor 1^{n+1} of $\bar{n}$. Het natuurlijke getal 0 (niet te verwarren met s_0) wordt dus geschreven als 1 en aangeduid door $\bar{0}$.

De rij getallen $n_1, \dots, n_k$ wordt op de band voorgesteld door $\bar{n}_1 \bar{0} \bar{n}_2 0 \dots 0 \bar{n}_k$. Bijvoorbeeld: $(0, 2, 4)$ wordt voorgesteld door $10111011111 = \bar{0}0\bar{2}0\bar{4}$.

Iedere T-machine Z definieert voor ieder aantal veranderlijken k een getaltheoretische functie $\psi_Z^{(k)}$ als volgt: Om $\psi_Z^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ te berekenen, neemt men als uitgangstoestand $q_1 \bar{x}_1 0 \dots 0 \bar{x}_k$. Doet zich geval I voor, dan is $\psi_Z^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ gelijk aan het aantal symbolen 1 in het resultaat van de berekening. In geval II is $\psi_Z^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ niet gedefinieerd. $\psi_Z^{(k)}$ is dus in het algemeen een partiële functie. Bij het werken met partiële functies moet men aan het volgende denken $f(x) - f(x) = 0$ is alleen juist, als $f(x)$ gedefinieerd is; anders is $f(x) - f(x)$ ongedefinieerd. In het algemeen: $f(g(x))$ is gedefinieerd alleen als $g(x)$ en $f(g(x))$ gedefinieerd zijn. Twee partiële functies zijn gelijk, als zij hetzelfde definitiegebied hebben en daarop dezelfde functie voorstellen. Twee T-machines, die gelijke functies definieren waarvoor geldt $\psi_{Z_1}^{(k)} = \psi_{Z_2}^{(k)}$, heten equivalent.

Een T-machine heet regelmatig, als het resultaat van de berekening van een functiewaarde altijd de vorm $q_0 m_1 \dots m_s$ heeft, zodat het als uitgangstoestand voor de berekening van een andere functie kan dienen. Men kan bewijzen, dat iedere T-machine equivalent is met een regelmatige T-machine. Dikwijls is het nuttig, dat de machine alles wat op de band staat laat staan en het resultaat van de berekening daarachter schrijft. Bij iedere T-machine Z kan men Z' vinden, die dit doet en hetzelfde resultaat geeft. In het vervolg stelt Z steeds een regelmatige machine voor en Z' de daarbij op deze wijze gevormde machine.

3. Voorbeelden. Tenzij anders is aangegeven, bestaat het alfabet alleen uit 1. Welke inwendige toestanden er zijn, blijkt voldoende uit de opgeschreven kwadrupels.

Machine S. $q_1 1Rq_1, q_1 01q_2, q_2 1Lq_2, q_2 0Rq_0$.

$\psi_S^{(1)}$ is de opvolgerfunctie S.

Machine K. $q_1 1Rq_1, q_1 0Rq_2, q_2 1Rq_1, q_2 01q_0$.

K schrijft achter een rij getallen een 0.

$\psi_K^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0)$. (met een enigszins veranderde betekenis van ψ).

Machine L. $q_1 1Lq_1, q_1 0Lq_1, q_2 1Lq_2, q_2 0Rq_0$.

L gaat in een rij getallen één getal naar links.

$\bar{x}_1 0 \dots \bar{x}_i 0 q_1 \bar{x}_{i+1} \dots$ wordt $\bar{x}_1 0 \dots q_0 \bar{x}_i 0 \bar{x}_{i+1} \dots$.

Machine R. $q_1 1Rq_1, q_1 0Rq_0$.

R gaat in een rij getallen een getal naar rechts.

Machine M. $q_1 10q_2, q_2 0Rq_0$.

M trekt van het aangewezen getal 1 af (aan de linkerkant).

Machine E. $q_1 1Rq_2, q_2 1Lq_3, q_2 0Lq_4$.

E onderzoekt, of het aangewezen getal 0 is of niet. In het eerste geval is de eindtoestand q_4 , in het tweede geval q_3 .

4. Koppelen van T-machines.

Aanschouwelijk is het duidelijk, wat het betekent, een machine B achter een machine A te koppelen. Men gebruikt dan de uitkomst van A's berekening als uitgangsstand voor B. De abstracte beschrijving van het proces, waardoor uit A en B de machine AB verkregen wordt, is enigszins ingewikkeld, omdat de inwendige toestanden van B daartoe vernummerd moeten worden. Wij verwijzen hiervoor naar Davis, Section 2.1. Een eenvoudig voorbeeld is S^2 , die bij een getal 2 optelt.

Machine S^2 . $q_1 1Rq_1, q_1 01q_2, q_2 1Lq_2, q_2 0Rq_3,$
 $q_3 1Rq_3, q_3 01q_4, q_4 1Lq_4, q_4 0Rq_0$.

(Hetzelfde resultaat kan eenvoudiger verkregen worden!)

Achter E kunnen verschillende machines gekoppeld worden aan q_3 en q_4 , zodat de machine op verschillende wijze verder gaat al naar het aangewezen getal 0 is of niet. Moet na 0 doorgegaan worden met machine A en anders met B, dan duiden wij deze koppeling aan met $E \begin{vmatrix} -A \\ -B \end{vmatrix}$.

Belangrijk is de mogelijkheid van terugkoppeling. Men kan voorschrijven, dat achter een rij gekoppelde machines weer een van de machines van die rij gekoppeld wordt, waarna de rij van die machine af opnieuw doorlopen wordt. Als voorbeeld diene de machine $\text{MKS}^2 \text{LE} \begin{array}{c} -M \\ -MRS \end{array} 3$, waarin na S^3 teruggekoppeld wordt naar L. Deze machine Z definieert $\psi_Z^{(1)}(x) = 3x$.

5. Substitutie en minimalisatie.

Stelling. De verzameling der T-berekenbare functies is gesloten tegenover substitutie en minimalisatie.

Voor het bewijs definieren wij eerst de machine H.

Machine H. $q_1^1 R q_1, q_1^0 R q_2, q_2^0 L q_3, q_2^1 L q_4,$
 $q_3^0 L q_1, q_4^0 L q_4, q_4^1 L q_5, q_5^1 L q_5, q_5^0 R q_0.$

H vult de opening tussen twee getallen, aldus: $q_1 11000111$ wordt $q_0 11110111$.

Nu definieren wij de copieermachines C_m .

$$C_m = \text{KL}^m \text{E} \begin{array}{c} -HR^m S \\ -M'R^m S \end{array}$$

(M' trekt van het aangewezen getal 1 af aan de rechterkant).

C_m copieert achter een rij getallen het m-de getal van achteren af:

$q_1 \bar{n}_1 0 \dots 0 \bar{n}_k$ wordt $\bar{n}_1 0 \dots 0 \bar{n}_k q_0 \bar{n}_{k-m+1}$.

Laat nu $Z_0, Z_1, \dots, Z_m$ Turing-machines zijn waarvoor geldt

$$\psi_{Z_0}^{(m)} = g, \psi_{Z_i}^{(n)} = f_i \quad (i=1, \dots, m).$$

Laat h de functie zijn, die ontstaat door substitutie van $f_1, \dots, f_m$ voor de veranderlijken in g. Beschouw de machine Z' , gedefinieerd door

$$Z' = Z_1^C \text{L}^n \text{Z}_2^C \text{L}^{n-1} \dots Z_m^C \text{L}^{n-m+1} \text{Z}_0^C \text{L}^m \text{Z}_0'$$

Z' berekent h, op de wijze als aan het slot van paragraaf 2 aangeduid.

Nu moet aangetoond worden, dat ook $\mu y(f(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ T-berekenbaar is, zodra dit voor f geldt. Zij $f = \psi_{Z_0}^{(n+1)}$. Definieer Z' door

$$Z' = \text{KL}^n \text{Z}_0^C \begin{array}{c} -C_2 \\ -C_{n+2} \end{array} S$$

$x_1, \dots, x_n$.

Colloquium Recursieve functies 1968-1969.

Hoofdstuk 3. Aequivalentie van Recursieve en totaal T-berekenbare functies

§1. Een tweede definitie van recursieve functies

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de twee operaties substitutie en minimalisatie de T-berekenbaarheid niet aantasten.

Men kan zich nu afvragen of men uitgaande van een eindig aantal T-berekenbare functies, door een eindig aantal keren toepassen van substitutie en minimalisatie, elke andere T-berekenbare functie kan genereren.

We moeten ons nu realiseren dat minimalisatie alleen gedefiniëerd is op totale functies, maar anderzijds niet altijd een totale functie oplevert.

We definiëren nu:

Een totale functie is regulier als zijn minimalisatie weer totaal is en voorts

Een functie is recursief als zij:

ofwel gelijk is aan één van de volgende functies te weten:

$$o(x) = 0$$

$$s(x) = x + 1$$

$$u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

$$x + y$$

$$x - y$$

$$xy$$

ofwel door een eindig aantal toepassingen van substitutie of minimalisatie op regulier-recursieve-functies te genereren is.

Het is duidelijk dat de verzameling der recursieve functies een deelverzameling is van de verzameling der T-berekenbare functies. Op de vraag of er een T-berekenbare functie is, die niet recursief is komen we nog terug.

We kunnen echter in dit stadium al eenvoudig voorstellen dat functies als $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, 0 , $1 - x \lfloor x-y \rfloor$, $\lfloor x/y \rfloor$ en $R(x, y) = x \div y \lfloor x/y \rfloor$ recursieve functies zijn.

§2. Primitieve recursie

In hoofdstuk I definiëerden we eerst de primitief recursieve functies en vervolgens recursieve functies door onze definitie te verruimen. Hier definiëren we eerst recursie en we moeten nu dus aantonen dat de primitief recursieve functies een deelklasse van de recursieve functies vormen.

We definiëren daartoe:

Bestaan er functies h , f en g , die voor alle $x_1, \dots, x_{n+2}$ voldoen aan:

$$h(0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$h(z+1, x_1, \dots, x_n) = g(z, h(z, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$$

dan zegt men dat h door toepassing van de operatie van de primitieve recursie uit f en g te verkrijgen is.

We kunnen bewijzen:

Zijn $f(x_1, \dots, x_n)$ en $g(x_1, \dots, x_{n+2})$ beide totaal en recursief dan is er juist één totale en recursieve functie h , die door primitieve recursie uit f en g te verkrijgen is.

Het bewijs van deze stelling verloopt, afgezien van de existentie en eenduidigheid van h , in grote lijnen als volgt:

We tonen eerst aan dat er drie recursieve functies $K(z)$, $L(z)$ en $I(x, y)$ bestaan zodanig dat voor elke x , y en z geldt:

$$I(K(z), L(z)) = z$$

$$K(I(x, y)) = x$$

$$L(I(x, y)) = y$$

Vervolgens leiden we af dat er bij iedere rij van N integers $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$

1e. twee integers u en v bestaan zodanig dat

$$R[u, 1 + v(i+1)] = a_i \quad (0 \leq i \leq N-1 \text{ en } R(x, y) = x \div y[x/y])$$

2e. er een recursieve functie $T_i(w)$ gedefiniëerd door

$$\lambda i, w \rightarrow R(K(w), 1 + [L(w)(i+1)])$$

bestaat, zodanig dat

$$T_i(I(u,v)) = a_i \quad (0 \leq i \leq N-1, u \text{ en } v \text{ als onder 1e}).$$

We kunnen nu de functie $h(y, x_1, \dots, x_n)$ ontwikkelen in recursieve functies $T_i(w)$ met $i \leq y$ en zo concluderen tot de recursiviteit van h .

Hieruit volgt dat onze twee definities van recursie gelijkwaardig zijn als we bewijzen dat xy , $x \dot{-} y$ en $x + y$ door primitieve recursie uit

$$\lambda x \rightarrow Sx, \lambda x \rightarrow 0, \lambda x_1, \dots, x_n \rightarrow x_i$$

te bewijzen zijn.

Duiden we de klasse der totale T-berekenbare functies aan met T en als in hoofdstuk I de klasse der recursieve functies aan met R en die der primitief recursieve functies met P dan hebben we nu bewezen:

$$T \supset R \supset P.$$

In dit hoofdstuk streven we nu 2 dingen na:

1. aantonen dat geldt $R \supset T$ en dus $R \cong T$
2. aangeven hoe uit P de klasse R te verkrijgen is.

Hiertoe zullen we ons eerst een apparaat van begrippen moeten opbouwen.

§3. Recursieve verzamelingen en predicaten

We noemen een verzameling van n-tuples (primitief) recursief als zijn karakteristieke functie $C_S(x_1, \dots, x_n)$ het is.

DAVIS definieert $C_S(x_1, \dots, x_n)$ als volgt:

$$C_S(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ als } x_1, \dots, x_n \in S$$

$$= 1 \text{ als } x_1, \dots, x_n \notin S.$$

Deze eigenschap wordt dus niet aangetast door het nemen van de vereniging ($\cup$), doorsnee ($\cap$) of het complement ($\bar{}$) van verzamelingen.

Voor een predicaat definiëren we analoog: Een predicaat is (primitief) recursief als zijn karakteristieke functie het is; dit houdt in dat het primitief recursief zijn niet aangetast wordt door de operatoren:

$\vee, \wedge$, en $\sim$.

We voeren nu voor elk $(n+1)$ voudig predicaat $P(y, x_1, \dots, x_n)$ in de functie

$$\lambda z, x_1, \dots, x_n \rightarrow \bigvee_{y=0}^z P(y, x_1, \dots, x_n) \text{ met}$$

$$\bigvee_{y=0}^z P(y, x_1, \dots, x_n) = \min_y [y \leq z \wedge P(y, x_1, \dots, x_n)]$$

waar dit is gedefiniëerd en 0 overal elders.

Nu geldt dat als $P(y, x_1, \dots, x_n)$ (primitief) recursief is $\bigvee_{y=0}^z P(y, x_1, \dots, x_n)$ (primitief) recursief is.

Enkele voorbeelden van primitieve recursieve predicaten en functies zijn bv.

$$x = y, \quad x < y, \quad y \mid x, \quad \text{Pr}(n).$$

§4. Gödel getallen, T predicaten, Normal Form Theorem

De T-berekenbare functies werden ingevoerd met behulp van Turing machines. Deze Turing machines werden beschreven in termen van symbolen (bv. R, L, s_0, q_1), expressies (quadrupels en tape expressies) en rijen expressies zgn. berekeningen.

Aan al deze termen gaan we nu getallen toevoegen.

Voor de symbolen doen we dit volgens onderstaand schema:

$$\begin{aligned} R &\rightarrow 3 \\ L &\rightarrow 5 \\ s_i &\rightarrow 4i + 7 \\ q_i &\rightarrow 4i + 5 \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Vervolgens definiëren we:

Het Gödel getal van een expressie bestaande uit n symbolen is het natuurlijke getal bepaald door

$$\prod_{k=1}^n \text{Pr}(k)^{\alpha_k} \quad (\text{II})$$

waarbij α_k het getal is, dat volgens schema (I) aan het k^e symbool van de expressie is toegevoegd en $\text{Pr}(k)$ het k^e priemgetal in orde van grootte.

Het Gödel getal van een rij van n expressies is het natuurlijk getal gegeven door

$$\prod_{k=1}^n \text{Pr}(k)^{\text{gn}(M_k)}$$

waarbij $\text{gn}(M_k)$ het Gödel getal van de k^e expressie uit de rij is.

Het Gödel getal toegevoegd aan de rij expressies bestaande uit de quadrupels van een Turing machine in willekeurige volgorde zonder herhaling genomen noemen we nu een Gödel getal van die Turing machine.

We voeren nu in het predicaat $T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ met de betekenis z is een Gödel getal van een Turingmachine, die bij uitgangstoestand $q_1(\overline{x_1, \dots, x_n})$ een berekening oplevert, die het Gödel getal y heeft. Dat dit predicaat primitief recursief is kan men bewijzen door het uit te drukken in totale primitieve recursieve functies of predicaten als:

$$1. \lambda n, x \rightarrow \bigvee_{y=0}^x [(\text{Pr}(n)^y | x) \wedge \sim (\text{Pr}(n)^{y+1} | x)] \text{ aangeduid met } n \text{ Gl } x.$$

Dit is duidelijk een totale primitief recursieve functie. We merken op dat als x het Gödel getal van een expressie of rij expressies is het resultaat het getal is volgens schema (I) aan het n^e symbool toegevoegd resp. het Gödel getal van de n^e expressie

$$2. \lambda x \rightarrow \bigvee_{y=0}^x [(y \text{ Gl } x > 0) \wedge \bigwedge_{i=0}^x ((y + i + 1) \text{ Gl } x = 0)] \text{ aangeduid met } LL(x).$$

Dit is eveneens een totale primitief recursieve functie, die als x het Gödel getal van een expressie of rij expressies is het aantal symbolen resp. aantal expressies van x aflevert.

$$3. \text{ De karakteristieke functie } CU(n, x) \text{ van het predicaat } n \text{ Gl } x \neq 11.$$

$$4. \lambda x \rightarrow \sum_{n=1}^{LL(x)} CU(n, x) \text{ aangeduid met } Som(x).$$

Behalve deze functies zijn er nog zo'n 20 andere nodig om $T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ uit te drukken. Voor een compleet bewijs zie DAVIS Section 4-1. In grote lijnen hebben we ongeveer de volgende functies nodig:

Een functie, die nagaat of z een Gödel getal van een Turing machine kan zijn door te verifiëren of het inderdaad een Gödel getal van een rij quadrupels, waarvan geen twee gelijke eerste twee symbolen hebben, is.

Een functie, die controleert of y het Gödel getal van een rij expressies is, waarvan de $i+1^e$ door toepassing van een quadrupel uit z uit de i^e te verkrijgen is en controleert of de eerste expressie gelijk is aan $q_1(\overline{x_1, \dots, x_n})$.

Met de 4 functies, die we ingevoerd hebben, kunnen we weliswaar niet het predicaat $T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ uitdrukken, maar wel de functie $A(y)$ gedefiniëerd volgens:

$$\lambda y \rightarrow \text{Som}(\text{LL}(y) \text{ Gl } y).$$

Dit is dus een totale primitief recursieve functie, die als y een berekening is het resultaat van die berekening geeft.

Op grond van de primitieve recursie van $T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ kunnen we de volgende centrale stelling, door Kleene het normal form theorem genoemd, bewijzen:

$f(x_1, \dots, x_n)$ is dan en slechts dan (partiëel) T-berekenbaar als er een z_0 te vinden is zodanig dat

$$f(x_1, \dots, x_n) = A(\min_y T_n(z_0, x_1, \dots, x_n, y)).$$

Het linkerlid van bovenstaande gelijkheid is nu een recursieve functie; dit houdt in dat we aangetoond hebben:

$$R \supset T$$

gecombineerd met het resultaat uit §2 levert dit $R \cong T$, waarmee de aequivalentie van T berekenbaar en recursief aangetoond is.

Het feit dat we de aequivalentie van twee op het eerste gezicht zo verschillende concepties hebben aangetoond, geeft vertrouwen in de algemeenheid der methode m.a.w. het is denkbaar dat als er een nieuwe definitie van berekenbaar gegeven zou worden we met een dergelijk soort methode de aequivalentie van deze nieuwe definitie met de oude definitie van recursie zouden kunnen geven (absoluut zeker is dit natuurlijk niet).

Uit het Normal Form Theorem volgt tenslotte nog, dat er een Turing machine U moet zijn, die de functie

$$\lambda z, x \rightarrow A(\min_y T(z, x, y))$$

berekent. Deze Turing machine noemen we de Universele Turing machine; hiermee kan men nl. elke partiële berekenbare functie berekenen.

Voor een functie $\psi_{z_0}(x)$ gedefiniëerd door een Turing machine Z_0 geldt

bv. als z_0 een Gödel getal van Z_0 is:

$$\psi_U^{(2)}(z_0, x) = \psi_{Z_0}(x).$$

Colloquium Recursieve funkties 1968 - 1969.

spreker: P. v. Emde Boas

Hoofdstuk 4. Halfberekenbaarheid en relatieve T-berekenbaarheid.§ 1 Halfberekenbare predicaten.

Naast de in Hoofdstuk 4 gedefinieerde klasse van recursieve predicaten zullen we in deze paragraaf een omvanrijker klasse van predicaten definieren. Deze klasse blijkt op vele equivalente wijzen te kunnen worden bepaald. Als definitie kiezen we de volgende:

- (D) Een predicaat $P(x_1, \dots, x_n)$ is halfberekenbaar indien zijn extensie het domein is van een partiele T-berekenbare functie.

We noemen de volgende equivalenties.

- 1) $P(x_1, \dots, x_n)$ is halfberekenbaar
- 2) Er bestaat een T-berekenbaar predicaat $Q(y, x_1, \dots, x_n)$ zodanig dat $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_y Q(y, x_1, \dots, x_n)$
- 3) Er bestaat een getal z_0 zodanig dat $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_y T_n(z_0, x_1, \dots, x_n, y)$ en indien we ons beperken tot predicaten in één variabele, waarvoor de extensie niet leeg is.
- 4) De extensie van P is het beeld van een primitief recursieve functie
- 5) De extensie van P is het beeld van een recursieve functie
- 6) De extensie van P is het beeld van een partieel recursieve functie

Toelichting: 1) $\rightarrow$ 3). Zij P halfberekenbaar dan is er een partiele recursieve functie $f(x_1, \dots, x_n)$ waarvan het domein juist de extensie van P is. Zij z_0 het Gödelnummer van een Turingmachine die f berekent. Dan geldt $f(x_1, \dots, x_n) = t \leftrightarrow t = A(\text{Min}_y T_n(z_0, x_1, \dots, x_n, y))$ en als $f(x_1, \dots, x_n)$ ongedefinieerd is, bestaat er geen y zodat $T_n(z_0, x_1, \dots, x_n, y)$ geldt. Hieruit volgt:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}f \leftrightarrow \exists_y T_n(z_0, x_1, \dots, x_n, y)$$

3) $\rightarrow$ 2) is triviaal.

2) $\rightarrow$ 1) Zij $Q(y, x_1, \dots, x_n)$ een recursief predicaat beschouw dan de functie $f(x_1, \dots, x_n) = \text{Min}_y [C_Q(y, x_1, \dots, x_n) = 0]$ waarbij C_Q de karakteristieke functie van het predicaat Q is.

Het is overigens duidelijk dat een berekenbaar predicaat Q halfberekenbaar is. Er geldt n.l. $\{(x_1, \dots, x_n) | Q(x_1, \dots, x_n)\} = \mathcal{D}_h$ als

$$h = \lambda x_1, x_2 \dots x_n. \text{Min}_y \{C_Q(x_1, \dots, x_n) + y = 0\}$$

Neem nu aan dat P een predicaat in één variabele is en zij z_0 een getal zodat $P(x) \leftrightarrow \exists_y T(z_0, x, y)$. Laat $T(x, y)$ de karakteristieke functie van $T(z_0, x, y)$ zijn en laten de functies J, K en L gekozen zijn als in hoofdstuk 3.

Als de extensie van P niet leeg is bevat deze een kleinste element s_0 . We definieren nu met primitieve recursie de functie f door:

$$\begin{aligned} f(0) &= s_0 \\ f(m+1) &= T(K(m+1), L(m+1)) f(m) + (1 - T(K(m+1), L(m+1))) K(m+1) \end{aligned}$$

We lopen alle paren (x, y) af. De functie f behoudt daarbij de laatst aangenomen waarde tot we een paar (x, y) aantreffen waarvoor $T(z_0, x, y)$ geldt, in dit geval wordt de waarde van f juist die x . Het is na deze toelichting duidelijk dat het beeld van f juist de extensie van het predicaat $\exists_y T(z_0, x, y)$ is. Aldus volgt 3) $\rightarrow$ 4).

4) $\rightarrow$ 5) en 5) $\rightarrow$ 6) zijn triviaal.

6) $\rightarrow$ 2) Zij $f(x) = A(\text{Min}_y T(z_0, x, y))$ een partieel recursieve functie.

$$\text{Dan geldt } t \in \mathcal{R}f \leftrightarrow \exists_x \exists_y [t = A(y) \wedge T(z_0, x, y)] \leftrightarrow$$

$$\exists_u [t = A(L(u)) \wedge T(z_0, K(u), L(u))]$$

Het predikaat $t = A(L(u)) \wedge T(z_0, K(u), L(u))$ is berekenbaar.

Hiermede zijn alle equivalenties aangetoond.

We noemen een verzameling A recursief opsombaar indien A leeg is of A is het beeld onder een recursieve functie. (Deze mag even goed geeist worden

partieel recursief of primitief recursief te zijn). We zien dat recursief opsombare verzamelingen precies overeenkomen met de extensies van half-berekenbare predicaten.

§ 2 Operaties op halfberekenbare predicaten.

Stelling: Zij $P(y, x_1, \dots, x_n)$ halfberekenbaar dan is ook het predicat $\exists_y P(y, x_1, \dots, x_n)$ halfberekenbaar.

Bewijs: $P(y, x_1, \dots, x_n)$ is halfberekenbaar dus er is een T-berekenbaar predicat $Q(y, z, x_1, \dots, x_n)$ zodanig dat

$$P(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_z Q(y, z, x_1, \dots, x_n)$$

Blijkbaar geldt $\exists_y P(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_y \exists_z Q(y, z, x_1, \dots, x_n)$.

De twee existentie quantoren laten zich als boven bij het bewijs van 6) $\rightarrow$ 2) comprimeren tot één existentiele quantor.

Stelling: Zij $P(y, x_1, \dots, x_n)$ halfberekenbaar en zij Q het predicat gedefinieerd door

$$\forall y (y \leq z \rightarrow P(y, x_1, \dots, x_n)) \leftrightarrow Q(z, x_1, \dots, x_n)$$

dan is Q halfberekenbaar.

Bewijs: Stel $P(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \bigcup_u R(u, y, x_1, \dots, x_n)$ met R T-berekenbaar.

De uitspraak $\bigcup_u R(u, y, x_1, \dots, x_n)$ voor iedere y tussen 0 en z is equivalent met de uitspraak dat er een rijtje $u_0, u_1, \dots, u_y, \dots, u_z$ bestaat, zodat $R(u_y, y, x_1, \dots, x_n)$ geldt voor $y = 0, \dots, z$.

Stel nu $w = \prod_{y=0}^z \text{Pr}(y+1)^{u_y}$ Dan geldt $u_y = (y+1) \text{ Gl } w$.

Dit betekent dat

$$Q(z, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_w [\forall y (y \leq z \rightarrow R((y+1) \text{ Gl } w, y, x_1, \dots, x_n))]$$

Het rechterlid heeft duidelijk de vorm $\exists_w [X(w, \dots)]$ met X berekenbaar, en is derhalve halfberekenbaar.

Stelling: Conjunctie en disjunctie van halfberekenbare predicaten zijn halfberekenbaar.

Bewijs: $\exists_y R(y, x_1, \dots, x_n) \wedge \exists_y S(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow$
 $\exists_y \exists_z [R(y, x_1, \dots, x_n) \wedge S(z, x_1, \dots, x_n)]$

het rechterlid is halfberekenbaar (vgl. boven).

$$\exists_y R(y, x_1, \dots, x_n) \vee \exists_y S(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow$$

$$\exists_y [R(y, x_1, \dots, x_n) \vee S(y, x_1, \dots, x_n)]$$

Uit deze betrekkingen volgt de stelling.

Stelling: Zij $f(y_1, \dots, y_n)$ T-berekenbaar en zij $P(y, x_1, \dots, x_n)$ halfberekenbaar dan is ook $P(f(y_1, \dots, y_n), x_1, \dots, x_n)$ halfberekenbaar.

Bewijs: $P(y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_z R(z, y, x_1, \dots, x_n)$ impliceert

$$P(f(y_1, \dots, y_n), x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_z R(z, f(y_1, \dots, y_n), x_1, \dots, x_n)$$

en de klasse van T-berekenbare predicaten is gesloten voor substitutie.

Stelling: Zij P een predicaat zodanig dat zowel P als $\neg P$ halfberekenbaar zijn, dan is P T-berekenbaar.

Bewijs: Stel $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_y Q(y, x_1, \dots, x_n)$ en

$$\neg P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists_y R(y, x_1, \dots, x_n)$$

waarbij Q en R T-berekenbaar zijn.

Voor ieder n -tupel $x_1, \dots, x_n$ is hetzij $P(x_1, \dots, x_n)$ hetzij $\neg P(x_1, \dots, x_n)$ waar. Dit wil zeggen dat er een y bestaat waarvoor hetzij Q hetzij R vervuld is. Daarom is de functie $h(x_1, \dots, x_n) = \text{Min}_y [Q(y, x_1, \dots, x_n) \vee R(y, x_1, \dots, x_n)]$ een totale functie en derhalve T-berekenbaar.

Nu geldt $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(h(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$ dus P is T-berekenbaar. (Deze stelling berust dus essentieel op het principe van het uitgesloten derde.)

Gevolg: Een verzameling A waarvoor zowel A als $N \setminus A$ recursief opsombaar zijn is recursief.

§ 3 Beslissingsproblemen.

Zij $R(x_1, \dots, x_n)$ een predicaat dan kunnen we aan R een beslissingsprobleem associëren en wel het probleem om voor willekeurig gegeven $a_1, \dots, a_n$ met de ons toegewezen hulpmiddelen uit te maken of $R(a_1, \dots, a_n)$ waar is of niet. In het kader van dit colloquium zullen de hulpmiddelen natuurlijk de effectief berekenbare functies, verzamelingen en predicaten en i.h.a. de algorithmen zijn. We zullen het beslissingsprobleem voor R recursief oplosbaar noemen als R recursief is; zo niet dan noemen we het recursief onoplosbaar. Een halfberekenbaar maar niet berekenbaar predicaat bezit dus een recursief onoplosbaar beslissingsprobleem.

In deze paragraaf zullen we enkele recursief onoplosbare beslissingsproblemen en aanverwante problemen behandelen. Al deze problemen herleiden we tot een situatie waarin we een beroep kunnen doen op de volgende stelling:

Stelling: Het predicaat $\exists_y T(x, x, y)$ is halfberekenbaar maar niet berekenbaar.

Bewijs: De halfberekenbaarheid volgt uit het feit dat T zelf berekenbaar is. Stel nu $\exists_y T(x, x, y)$ is berekenbaar. Dan was ook de negatie halfberekenbaar. Dan bestaat er een getal z_0 , zó dat

$$\neg \exists_y T(x, x, y) \leftrightarrow \exists_y T(z_0, x, y)$$

Stel nu $x = z_0$ en er staat een contradictie.

$$\neg \exists_y T(z_0, z_0, y) \leftrightarrow \exists_y T(z_0, z_0, y)$$

Als direct gevolg hebben we:

- 1e) Het beslissingsprobleem van het predicaat $\exists_y T(x, x, y)$ is recursief onoplosbaar.

Het stop-probleem voor een Turing machine: Gegeven een Turing machine en een begintoestand. Probeer nu uit te maken of de machine bij zijn berekening ooit zal stoppen of eeuwig zal blijven rekenen.

- 2e) Er bestaat een Turing machine Z_0 waarvoor het stop-probleem niet recursief oplosbaar is.

Om een exact geformuleerd predicaat te hebben definiëren we voor een Turing machine Z het predicaat $P_Z(x)$ door $P_Z(x) \leftrightarrow x$ is het Gödel nummer van een begintoestand α en er bestaat een afbrekende berekening beginnende met α .

Laat Z_0 een Turing machine zijn die de partieel recursieve functie $\Psi_{Z_0}(x) = \text{Min}_y T(x, x, y)$ berekent.

Dan geldt $x \in \mathcal{D}_{\Psi_{Z_0}} \leftrightarrow \exists_y T(x, x, y)$

terwijl door onze definitie van P_{Z_0} geldt

$$x \in \mathcal{D}_{\Psi_{Z_0}} \leftrightarrow P_{Z_0}(\text{gn}(q_1, \bar{x}))$$

nu is $\text{gn}(q_1, \bar{x})$ zeker recursief. Stel P_{Z_0} is recursief dan zou ook $\exists_y T(x, x, y)$ recursief moeten zijn uod⁰ non. P_{Z_0} is dus niet recursief hetgeen wil zeggen dat het stop-probleem voor Z_0 onoplosbaar is.

Het afdruk-probleem voor een Turing machine: Gegeven een Turing machine Z , een begintoestand en een symbool S_i uit het alfabet van Z . Gevraagd uit te maken of het symbool S_i tijdens de berekening ooit wordt afgedrukt.

- 3e) Er bestaat een Turing machine Z en een symbool S_i zodanig dat het afdruk-probleem voor Z en S_i niet recursief oplosbaar is.

Voor de Turing machine nemen we een modificatie van de machine Z_0 uit 2e). Zij S_k een teken dat niet in het alfabet van Z_0 voorkomt en zij q_N een inwendige toestand die Z_0 niet bezit. Dan vervaardigen we een machine Z_0' die alle quadrupels van Z_0 omvat met daarbij alle quadrupels van de vorm $q_i S_j S_k q_N$ waarvoor q_i en S_j inwendige toestanden van Z_0 resp. tekens uit het alfabet van Z_0 zijn maar waarvoor Z_0 geen quadrupel beginnende met $q_i S_j$ bevat. We zien dat Z_0' hetzelfde doet als Z_0 ; alleen als Z_0 stopt, verricht Z_0' nog een stap waarbij het laatst gelezen teken in S_k wordt veranderd en de machine in de toestand q_N overgaat.

Het is nu duidelijk dat het stop-probleem voor Z_0 en het afdruk-probleem voor Z_0' gelijkwaardig zijn, dus het laatste probleem is recursief onoplosbaar.

We spreken ook over het beslissingsprobleem van een verzameling A . Dit heet recursief (on) oplosbaar als de verzameling A (niet) recursief is.

Zij K de verzameling $K = \{x \mid \exists_y T(x,x,y)\}$ dan is K een recursief oplosbare verzameling waarvoor het beslissingsprobleem niet recursief oplosbaar is.

Zij R een recursief oplosbare verzameling die niet recursief is. Dan is het complement van R , $\bar{R}$ niet recursief oplosbaar, m.a.w. voor iedere recursief oplosbare verzameling $P \subset \bar{R}$ bestaat een getal $x \in \bar{R}$ zodanig dat $x \notin P$. Men kan zich afvragen hoe effectief een dergelijk getal te berekenen is. Hiertoe moeten we de verzameling P "geven". Dit kan niet rechtstreeks, wel kunnen we het Gödel-nummer van een Turing machine geven die P opsomt:

$$P = \langle n \rangle \leftrightarrow P = \{x \mid \exists_y T(n,x,y)\}.$$

We zullen een verzameling R creatief noemen indien er een recursieve functie f bestaat die voor ieder getal n zodanig dan $\langle n \rangle \subset \bar{R}$ een getal $f(n)$ oplevert, zodanig dat $f(n) \notin \langle n \rangle$ en $f(n) \in \bar{R}$.

Stelling: K is creatief.

Bewijs: We nemen $f(n) = n$.

$$\bar{K} = \{x \mid \neg \exists_y T(x, x, y)\} = \{x \mid x \notin \langle x \rangle\}.$$

Stel nu voor zekere n_0 is $\langle n_0 \rangle \subset \bar{K}$. Dan geldt $y \in \langle n_0 \rangle \rightarrow$

$$y \in \bar{K} \rightarrow y \notin \langle y \rangle.$$

Vullen we voor y n_0 zelf in dan zien we

$$n_0 \in \langle n_0 \rangle \rightarrow n_0 \notin \langle n_0 \rangle.$$

Hieruit volgt dat $n_0 \notin \langle n_0 \rangle$ dus $n_0 \in \bar{K}$ en $n_0 \notin \langle n_0 \rangle$.

De keuze van f was dus gerechtvaardigd.

Een belangrijk beslissingsprobleem is het probleem of een gegeven Turing machine een totale functie definieerd. Dit probleem is niet recursief oplosbaar. De verzameling R van de Gödel nummers van de bedoelde Turing machines is niet recursief opsombaar.

Stel R was recursief opsombaar dan bestond er een totale functie f waarvan het beeld gelijk was aan R. (Ga na dat R niet leeg is!) Beschouw nu de functie $A(\text{Min}_y T(f(n), x, y))$. Dit is opnieuw een totale recursieve functie en zo ook de functie $A(\text{Min}_y T(f(x), x, y)) + 1$. Dit is een functie in één variabele dus bestaat er een getal n_0 zodat

$$A(\text{Min}_y T(f(n_0), x, y)) = A(\text{Min}_y T(f(x), x, y)) + 1.$$

Vullen we voor x n_0 in dan volgt een tegenspraak.

Opmerking: In Davis 11-1.3 wordt bewezen dat ook $\bar{R}$ niet recursief opsombaar is.

§ 4 Relatieve beslisbaarheid.

Tot nu toe zijn we bij de definitie van de klassen der T-berekenbare functies resp. de primitief recursieve- en de algemeen recursieve

functies uitgegaan van een minimaal aantal standaard functies om mee te beginnen. Dit waren de constante functie 0, de opvolger functie en de projectie functies. We hebben gezien dat deze functies T-berekenbaar waren en op grond daarvan de aequivalentie van de klassen van T-berekenbare functies en algemeen recursieve functies afgeleid.

Men kan zich afvragen hoe door het toevoegen van nieuw uitgangsfuncties de klasse der (primitief) recursieve functies beïnvloed wordt. Belangrijker is het om na te gaan of het mogelijk is het begrip Turing machine op een zodanige wijze te generalizeren dat een op bovenstaande wijze uitgebreide klasse recursieve functies weer precies de klasse is die door de gegeneraliseerde soort Turing machines berekend kan worden.

Indien de uitbreiding van de klasse der recursieve functies verkregen is door aan de uitgangsfuncties de karakteristieke functie van een verzameling A toe te voegen, bestaat er inderdaad een dergelijke modificatie van het begrip Turing machine.

Hoe moeten we een Turing machine kennis verschaffen over de karakteristieke functie van een verzameling A? We kunnen ons dit als volgt voorstellen: in bepaalde toestanden die tijdens de berekening optreden moet de machine weten of het tussen resultaat (het aantal enen op de band) al dan niet tot de verzameling A behoort. Op grond van het op deze vraag verkregen antwoord besluit de machine hoe hij de berekening zal voortzetten.

We geven dit aan door de Turing machines uit te breiden met een aantal quadrupels van de vorm $q_i S_j q_k q_e$. We eisen hierbij natuurlijk dat in de uitgebreide verzameling quadrupels geen twee quadrupels met dezelfde 2 symbolen beginnen.

Het effect van een dergelijk quadrupel is het volgende: Als de machine in de inwendige toestand q_i verkeert en als het gelezen symbool S_j is "onderzoekt" de machine hoeveel symbolen 1 er op de band staan.

Zo dit aantal een element van A is, dan verandert de machine zijn inwendige toestand in q_k , anders wordt de inwendige toestand q_e .

Het is duidelijk dat het onderzoek naar het aantal enen op de band niet verricht kan worden door een andere Turing machine (in het geval dat A niet recursief is de beoordeling van dit aantal al evenmin). Dit betekent dat we in deze opzet in feite de machine gekoppeld hebben aan een soort "orakel", een onaards mechaniek van hoogst ondoorzichtige samenstelling. (De technische realisering valt evenwel buiten dit colloquium.)

We zullen een functie T_A -berekendbaar of relatief berekendbaar modulo A noemen indien een Turing machine met kennis over de verzameling A bestaat die f berekent.

We zullen een eventueel partiele functie A -recursief (resp. A -primitief recursief) noemen als hij door middel van de operaties substitutie en minimalisatie (resp. begrensde minimalisatie) verkregen kan worden uit de volgende elementaire functies:

- 1) de functie $0(x) = 0$
- 2) de opvolger functie $s(x) = x+1$
- 3) de projectie functies $u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$
- 4) de karakteristieke functie van de verzameling A $C_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in A \\ 1 & \text{als } x \notin A \end{cases}$

De stelling dat de T -berekendbare functies en de recursieve functies dezelfde klasse vormen laat zich nu generalizeren tot de volgende uitspraak.

Stelling: zij f een eventueel partiele functie dan is f T_A -berekendbaar dan en slechts dan als f A -recursief is.

Bewijs: $\rightarrow$ We laten zien dat de karakteristieke functie C_A T_A -berekendbaar is. Hiertoe construeren we de Turing machine G_A die bestaat uit de

volgende quadrupels:

$$q_1 \ 1 \ 0 \ q_1, \ q_1 \ 0 \ q_2 \ q_3, \ q_2 \ 0 \ R \ q_4, \ q_4 \ 1 \ 0 \ q_2,$$

$$q_4 \ 0 \ 0 \ q_0, \ q_3 \ 0 \ R \ q_5, \ q_5 \ 1 \ 0 \ q_3, \ q_5 \ 0 \ 1 \ q_0.$$

Deze machine G_A begint één symbool 1 uit te vegen. Onderzoekt vervolgens of het weergegeven getal al dan niet tot A behoort en zal op grond van het hierop verkregen antwoord op het moment dat hij na het schoonvegen van de band zich zelve uitschakelt een nul of een één afdrukken.

Het bewijs van $\rightarrow$ volgt nu door op te merken dat de nieuwe klasse van Turing machines nog altijd gesloten is voor substitutie en minimalisatie.

* Zoals in het oorspronkelijke bewijs uit Hoofdstuk 3 definieren we de predicaten $T_n^A(z, x_1, \dots, x_n, y)$ die gelden d.e.s.d. als z het Gödel nummer van een Turing machine met kennis van de verzameling A is en als y het Gödelnummer van een berekening van deze machine is, uitgaande van de begintoestand $q_1 \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ 0 \dots 0 \ \bar{x}_n$. Het enige wat we nu te doen hebben is aan het lijstje van primitief recursieve functies dat op opgesteld is om het primitief recursief zijn van

$T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ te bewijzen een primitief recursief predicaat toe te voegen dat nagaat of in de berekening een toestand x in een toestand x^1 is overgegaan met behulp van een van de quadrupels $q_1 \ S_j \ q_k \ q_e$. In de formulering van dit predicaat wordt ergens het predicaat $x \in A$ gebruikt, maar dit is A-recursief want zijn extensie is juist C_A . We zien dan dat de predicaten $T_n^A(z, x_1, \dots, x_n, y)$ A-primitief recursief zijn.

Zij nu f T_A -berekenbaar dan geldt: er is een z_0 zodanig dat

$$f(x_1, \dots, x_n) = A \left(\min_y \{ T_n^A(z_0, x_1, \dots, x_n, y) \} \right)$$

Dus f is A-recursief.

Het is nu mogelijk alle gedefinieerde begrippen te generalizeren tot dezelfde begrippen relatief A. Zo kunnen we spreken van A-halfberekenbaar en A-recursief opsombaar.

Het opnieuw formuleren en opnieuw bewijzen van de equivalenties uit § 1 levert evenmin als bij stellingen uit § 2 essentiële moeilijkheden op.

Analoog als in § 3 definiëren we de verzamelingen $\langle n \rangle_A$ en A' door

$$\langle n \rangle_A = \{x \mid \exists_y T^A(n, x, y)\} \quad \text{en}$$

$$A' = \{x \mid \exists_y T^A(x, x, y)\}$$

We zien dat A' een A-recursief opsombare - maar geen A-recursieve verzameling is. Bovendien is A' A-creatief. Op deze wijze hebben we bij iedere verzameling A een niet A-recursieve verzameling A' aangegeven volgens een vast procedé.

Men kan zich afvragen of het zin heeft een Turing machine aan meer dan één orakel te koppelen. Dit is niet het geval aangezien we de vereniging van eindig veel of aftelbaar veel verzamelingen recursief in 1-1 correspondentie kunnen brengen met een enkele verzameling.

Laten $A_0, \dots, A_{n-1}$ verzamelingen zijn dan definiëren we B door

$$nk + j \in B \text{ (met } 0 \leq j < k) \leftrightarrow n \in A_j$$

Deze definitie laat zich als volgt vertalen op een wijze die duidelijk recursief is:

$$\text{Zij } C(n, m) = \sum_{i=0}^{k-1} (1 \div |m-i|) C_{A_i}(n) (= C_{A_m}(n))$$

$$\text{dan is } C_B(x) = C\left(\left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil, x \div k \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil\right) \text{ en } C_{A_j}(n) = C_B(kn + j)$$

In het geval met aftelbaar oneindig veel orakels nemen we aan dat deze op recursieve wijze gegeven zijn (anders kunnen we er in dit verband niet over praten). Als deze corresponderen met de verzamelingen $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ dan definiëren we $C(n, m)$ door

$$C(n, m) = \sum_{i=0}^m (1 \div |m-i|) C_{A_i}(n) \quad (= C_{A_m}(n))$$

en we definiëren een verzameling B door

$$\text{en } C_B(x) = C(K(x), L(x)) \quad \text{dus } C(n, m) = C_B(I(n, m)).$$

Ook in dit geval bevat de verzameling B alle informatie uit de verzamelingen A_i .

ONBESLISBAARHEID VAN FRAGMENTEN DER REKENKUNDE.

spreker: H.C. Doets

A. Fragmenten der rekenkunde.

1. De formele taal L.

In het vervolg is $\mathcal{N} = \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0$ het systeem der natuurlijke getallen $0, 1, 2, \dots$, tezamen met de optellings-vermenigvuldigings- en opvolger-operatie en het getal nul. We willen een zgn. formele taal L opstellen waarin we beweringen betreffende $\mathcal{N}$ kunnen formuleren. Neem bv. de volgende (ware) bewering:

een getal ongelijk nul heeft een voorganger
 of, om de "logische structuur" van deze bewering wat duidelijker naar voren te laten komen:

voor ieder getal x , als het niet zo is dat $x=0$,
 dan is er een getal y zodat $S(y)=x$ (1)

We kunnen hierin de typische logische operatoren onderscheiden: de quantoren "voor ieder", "er is"; de implicatie-operator "als...dan" en de negatie-operator "het is niet zo, dat". Anderzijds de symbolen '0' en 'S' die speciaal voor $\mathcal{N}$ relevant zijn.

Ook valt het gebruik van veranderlijken ('x', 'y') op.

Een in de logica gebruikelijke semiotische definitie van L zou nu zijn, voor al deze noties corresponderende tekens te kiezen, waaruit we formules, dat zijn tekenrijen, van bijzondere gedaante, zouden kunnen opbouwen.

Een van deze formules zou dan met (1) moeten corresponderen.

Een dergelijke aanpak is niet zonder voetangels en klemmen voor de beginner; en in plaats van een semiotische definitie zullen we een getal-theoretische geven die het domein van de wiskunde dus niet verlaat. Een dergelijke getaltheoretische reductie van semiotische noties is in principe afkomstig van Gödel en staat bekend onder de naam Gödelnummering.

Voor het verkrijgen van de te bespreken resultaten is ze essentieel.

definitie: de operaties van L.

$$(i) \quad v(i) = v_i = 11^{i+1}$$

$$(ii) \quad \underline{0} = 7$$

spreek uit:

de ie-de veranderlijke

nul

(iii)	$\underline{S}(n) = 2 \cdot 3^{n+1}$	spreek uit: es van en
(iv)	$n \oplus m = 2^2 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{m+1}$	en maal em
(v)	$n \oplus m = 2^3 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{m+1}$	en plus em
(vi)	$n \approx m = 2^4 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{m+1}$	en gelijk em
(vii)	$n \rightarrow m = 2^5 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{m+1}$	als en dan em
(viii)	$\neg(n) = 2^6 \cdot 3^{n+1}$	niet en
(ix)	$n \wedge m = \neg(n \rightarrow \neg(m))$	en en em
(x)	$n \vee m = (\neg n) \rightarrow m$	en of em (niet verwarren met (i))
(xi)	$n \leftrightarrow m = (n \rightarrow m) \wedge (m \rightarrow n)$	en dan en dan alleen als om
(xii)	$\bigwedge_{v_i, n} = 2^7 \cdot 3^{v_i} \cdot 5^{n+1}$	voor alle vee-ie, en
(xiii)	$\bigvee_{v_i, n} = \neg(v_i(\neg n))$	er is een vee-ie zodat en

Mbv. deze definitie (die behalve in (ix)-(xi) en (xiii) veel willekeur bevat) kunnen we nu de bewering (1) op voor de hand liggende wijze representeren door het getal

$$\bigwedge_{v_0} (\neg(v_0 \approx 0) \rightarrow \bigvee_{v_1} (\underline{S}(v_1) \approx v_0)) \quad (1)'$$

Met deze representatie in gedachten kunnen we de getallen onderscheiden in "zinnige" en "onzinnige". De twee volgende definities beschrijven twee zinnige getalverzamelingen.

definitie: TERM is de kleinste verzameling $V \subseteq N$ zodat

- (i) $\underline{0} \in V$
- (ii) $v_i \in V$ voor alle $i \in N$ $[\text{VAR} = \{v_i | i \in N\}, \text{ dus } \text{VAR} \subseteq V]$
- (iii) $t \in V$ dan $\underline{S}(t) \in V$
- (iv) $t_1, t_2 \in V$ dan $t_1 \oplus t_2$ en $t_1 \odot t_2 \in V$

TERM is de verzameling termen van L, dat zijn objecten die in L de rol van getallen spelen (toevallig zijn het ook getallen; maar bv. $\underline{0} = 7$, terwijl $\underline{0}$ (dus 7) de rol van 0 speelt). In het vervolg zijn $t, t', \dots$ termen.

$\underline{S}$, $\oplus$ en $\odot$ spelen de rol van opvolger, optelling resp. vermenigvuldiging -

en het is duidelijk dat bv. $n \oplus m \neq n + m$. We zullen echter, ingeval er geen misverstand over kan bestaan dat de argumenten van $\oplus$ of $\odot$ termen zijn, de cirkeltjes en onderstreping eenvoudig weglaten en dus bv. schrijven 'St', ' $t_1 + t_2$ ', ' $t_1 \cdot t_2$ '.

Hoewel termen dus speciale getallen zijn, handhaven wij de semiotische terminologie die in de logica gebruikelijk is; zo kunnen we bv. zeggen " v_k treedt in t op" etc., en hopen dat duidelijk zal zijn wat hiermee wordt bedoeld.

Het volgende lemma vereist precisering maar is voor onze doeleinden precies genoeg:

Lemma: (i) iedere term heeft een éénduidig bepaalde grammaticale structuur
 (ii) TERM is recursief
 (iii) alle syntaktische relaties m.b.t. TERM zijn recursief

In feite kan dit lemma, en een aantal volgende, versterkt worden door "recursief" te vervangen door "primitief recursief".

(i) en (ii) bv. volgen uit het feit, dat de fundamentele operaties $v, \dots, S, \dots$ recursief zijn en dat een getal t een term is desd. als $n \leq t$ en een rijtje $r_0, \dots, r_{n-1}$ bestaan ($r_i \leq t$) zodat $r_{n-1} = t$ en voor alle $i < n$: óf $r_i \in \text{VAR} \cup \{0\}$ óf $\exists j, k < i$ met : óf $r_i = S(r_j)$ óf $r_i = r_j \oplus r_k$ óf $r_i = r_j \odot r_k$.

Vraag: op welke plaatsen in het vervolg van het betoog wordt (i) gebruikt? De volgende definitie introduceert FORM, de klasse van formules, dat zijn objecten die in L de rol van beweringen spelen. (i)' is hiervan een voorbeeld. Voor FORM is een lemma bewijsbaar volstrekt analoog aan dat voor TERM.

definitie: FORM is de kleinste verzameling VCN zodat

- (i) als $t, t' \in \text{TERM}$, dan $t : t' \in V$
- (ii) als $\phi, \psi \in V$ & $x \in \text{VAR}$ dan $\neg \phi, \phi \rightarrow \psi$ en $\bigwedge x \phi \in V$

Zoals de definitie suggereert, in het vervolg zijn $\phi, \psi, \gamma, \dots$ formules en $x, y, z, \dots$ veranderlijken. Voor de noties vrij/gebonden optreden van veranderlijken (dat zijn elementen van VAR) in formules wordt

verwezen naar de litteratuur. Wij zijn vnl. geïnteresseerd in zinnen, dat zijn formules waarin geen veranderlijken vrij voorkomen (bv. alweer, (1)'). We gebruiken nog de volgende afkortingen: $t_1 \neq t_2 = \neg(t_1 \approx t_2)$; $t_1 \leq t_2 = \forall x(x + t_1 \approx t_2)$; en: $\underline{1} = S(\underline{0})$; $\underline{2} = S(\underline{1})$; ... i.h.a. $\underline{n+1} = S(\underline{n})$. (dus $\lambda n. \underline{n}$ is primitief recursief).

Verder zullen we vaak op voor de hand liggende wijze haakjes weglaten.

2. Waarheid en afleidbaarheid in L.

We hebben al gezegd dat L ontworpen was om samenhangen in $\mathcal{N}$ tot uitdrukking te kunnen brengen. De mogelijkheid hiervan volgt uit de observatie dat de predicaten waar en onwaar zinvol van toepassing zijn op de zinnen van L (als we $\mathcal{N}$ in gedachten houden): (1)' is bv. waar (in $\mathcal{N}$) omdat inderdaad ieder getal ongelijk nul een S-voorganger heeft. De waarheidsnotie (t.a.v. $\mathcal{N}$) voor zinnen van L kan op de volgende manier enigszins gepreciseerd worden: een zin ϕ is waar (in $\mathcal{N}$) als de bewering, die uit ϕ ontstaat door de logische operaties op de voor de hand liggende manier op te vatten, ' $\bigwedge v_i$ ' te lezen als 'voor alle $v_i \in N$ ' etc., en $\oplus$, $\odot$, S , $\underline{0}$ op te vatten als namen van operaties in $\mathcal{N}$, waar is.

Tarski (plm. 1930) heeft laten zien, dat deze min of meer vage precisering van onze intuïtie t.a.v. dit waarheidsbegrip op adekwate wijze door een volstrekt exacte definitie kan worden vervangen. Voor onze doeleinden lijken bovenstaande explicaties echter wel voldoende. $\mathcal{N}$ heet de hoofdinterpretatie van L. Andere interpretaties van L ontstaan zodra we de niet-logische noties van L ($\oplus$, $\odot$, S , $\underline{0}$) van een betekenis voorzien door associatie met resp. 2-, 2-, 1- en 0-plaatsige operaties op een niet-lege verzameling.

Een triviaal voorbeeld levert de structuur

$$\mathcal{M} = \langle \{0\}, \{\langle 0, 0, 0 \rangle\}, \{\langle 0, 0, 0 \rangle\}, \{\langle 0, 0 \rangle\}, 0 \rangle$$

(we identificeren n-plaatsige operaties met verzamelingen van (n+1)-tallen). Evenals voor $\mathcal{N}$ is voor $\mathcal{M}$ een waarheidsnotie voor zinnen van L gedefinieerd. Waar op $\mathcal{M}$ is bv. de zin

$$\bigvee v_0 \bigwedge v_1 \bigwedge v_2 \bigvee v_3 (v_0 \approx (v_1 + (v_2 \cdot v_3)))$$

Het volgende punt is de definitie van een gevolgtrekkingsnotie voor L die, net zoals de waarheidsnotie, strookt met onze intuïties. Hiertoe dient de volgende illustratie.

Onderstel gegeven een verzameling M ; $f \in M^M$ en $m \in M$ zodat

- (i) f is 1-1
- (ii) m is niet in het beeld van f .

Onder deze condities willen we aantonen, dat

- (iii) $f(m) \neq f(f(m))$.

Dit kan bv. op de volgende manier gebeuren: onderstel eens, dat wèl $f(m) = f(f(m))$. Dan was wegens (i) $m = f(m)$, hetgeen volgens (ii) uitgesloten is.

Wat toont deze redenering nu wel aan? Wel, dat, ongeacht wat M , f en m nu precies zijn, als ze aan (i) en (ii) voldoen, dan voldoen ze ook aan (iii). Een bewering die bv. niet uit (i) en (ii) afleidbaar is, is de volgende:

- (iv) als x een element van M ongelijk m is, dan is x in het beeld van f

De niet-afleidbaarheid volgt nl. uit het bestaan van een tegenvoorbeeld: neem $M = \mathbb{N}$, $f = \lambda x. x+2$ en $m = 0$, dan is $1 \in \mathbb{N}$, $1 \neq 0$ maar $f(x) \neq 1$ voor alle $x \in \mathbb{N}$. Ondertussen wordt wel aan (i) en (ii) voldaan. I.e., door aan te tonen dat niet alle M , f en m die aan (i) en (ii) voldoen ook aan (iv) voldoen, hebben we bewezen dat (iv) niet uit (i) en (ii) volgt.

Laat nu $\Gamma \cup \{\phi\}$ een verzameling zinnen van L zijn. We zeggen, dat ϕ logisch volgt uit Γ als ϕ waar is in iedere structuur waarin alle zinnen van Γ waar zijn.

Notatie: $\Gamma \models \phi$. Deze definitie is kennelijk volledig in overeenstemming met de illustratie; we hebben nl.

$$\{\bigwedge x \bigwedge y (Sx \sim Sy \rightarrow x \sim y), \bigwedge x (0 \neq Sx)\} \models S0 \neq SS0$$

maar niet

$$\{\bigwedge x \bigwedge y (Sx \sim Sy \rightarrow x \sim y), \bigwedge x (0 \neq Sx)\} \models \bigwedge x (x \neq 0 \rightarrow \bigvee y (x \sim Sy))$$

Merk op, dat $\bigwedge x (x \neq 0 \rightarrow \bigvee y (x \sim Sy))$ waar is in $\mathcal{N}$!

Een hoofdprobleem in de mathematische logica is lange tijd geweest het vinden van een constructief gedefinieerde relatie $\vdash$ (constructief o.m. in de zin van: niet-verzameling-theoretisch gedefinieerd (zoals $\models$)) die $\models$ zo getrouw mogelijk benadert, d.i. zodat

a) als $\Gamma \vdash \phi$ dan $\Gamma \models \phi$ (de consistentie-eigenschap voor $\vdash$)

maar liefst ook

b) als $\Gamma \models \phi$ dan $\Gamma \vdash \phi$ (de volledigheidseigenschap voor $\vdash$).

Eén zo'n relatie werd al door Hilbert gedefinieerd. Dat deze aan a) voldeed was niet moeilijk in te zien. Het bewijs van b) werd echter eerst door Gödel in 1930 geleverd voor het geval dat Γ eindig was (zwakke volledigheid) en later voor willekeurig Γ door Henkin in 1949 (sterke volledigheid).

Zonder in details te treden zullen we deze relatie $\vdash$ beschrijven; voor de uitgebreide definitie wordt naar de litteratuur verwezen.

In de eerste plaats wordt gegeven een recursieve verzameling LA van formules van L, de logische axiomas voor L. Deze hebben de belangrijke eigenschap dat ze universeel geldig d.i. waar in iedere structuur, zijn. Elementen van LA zijn bv.

$\phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow \psi)$ voor formules ϕ, ψ
 $\bigwedge x \phi(x) \rightarrow \phi(t)$ voor zekere formules $\phi(x)$, $x \in \text{VAR}$ en

$t \in \text{TERM}$ (hierin is $\phi(t)$ de formule die uit $\phi(x)$ ontstaat door overal x door t te vervangen; de 'x' en 't' zijn tussenhaakjes achter ϕ vermeld om aan te geven dat ze in $\phi(x)$ resp. $\phi(t)$ voorkomen).

Laat nu Σ een verzameling zinnen van L zijn. Een afleiding uit Σ van de lengte n is een rijtje formules $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ zodat voor alle $i < n$ geldt: $\phi_i \in \Sigma$ of $\phi_i \in \text{LA}$ of $j, k, < i$ bestaan zodat $\phi_j = (\phi_k \rightarrow \phi_i)$.

Definitie: $\text{AF}_{\Sigma}(m) \equiv m$ is het nummer (in een gebruikelijke zin) van een afleiding uit Σ .

Lemma: (i) AF_{Σ} is een relatie recursief in Σ
 (ii) i.h.b. als Σ recursief is, dan is AF_{Σ} recursief.

Het bewijs volgt gemakkelijk uit een van de preciese definities van afleiding en het feit dat LA recursief is.

Definitie: ϕ heet afleidbaar uit Σ (notatie: $\Sigma \vdash \phi$ of $\vdash_{\Sigma} \phi$) als

$\exists m (AF_{\Sigma}(m) \ \& \ \phi = m_{l(m)})$: hierin is m_k het k -de element van het rijtje gerepresenteerd door m en $l(m)$ de lengte van dat rijtje.

Lemma: (i) $\vdash_{\Sigma}$ is Σ -recursief opsombaar

(ii) i.h.b. als Σ recursief (of zelfs recursief opsombaar) is, dan is $\vdash_{\Sigma}$ recursief opsombaar.

Het bewijs volgt direct uit Davis' Theorem 5.1.2

De onderhavige voordracht heeft het doel een antwoord te geven op de volgende vraag, die we eerst nu kunnen formuleren: wanneer is $\vdash_{\Sigma}$ recursief? Eén van de resultaten zal zijn, dat een eindige, logisch zeer zwakke Σ bestaat zodat voor alle $\Sigma' \supset \Sigma$, $\vdash_{\Sigma'}$ niet recursief is (tenzij $\{n \mid \vdash_{\Sigma, n}\} = \mathbb{N}$).

We keren nog even terug naar de adekwaatheid van $\vdash$ m.b.t. $\models$, i.e. de eigenschappen a) en b). Dat a) geldt is eenvoudig in te zien. Onderstel eens dat bv. $\Sigma \vdash \phi$. Dan bestaat een afleiding $\phi_0, \dots, \phi_{n-1} = \phi$ uit Σ . Met inductie naar i bewijst men dan gemakkelijk, dat $\forall i < n (\Sigma \models \phi_i)$. Voor $i = n-1$ volgt dan het gevraagde resultaat. Dat b) geldt is moeilijker in te zien, en we verwijzen voor het bewijs naar de litteratuur. a) en b) maken het ons mogelijk, het aantonen van afleidbaarheid in L te vervangen door min of meer informele argumentaties zoals in de illustratie vóór de definitie van $\models$. Hoewel dit natuurlijk ten koste van de exactheid gaat, wordt de begrijpelijkheid hierdoor verhoogd. T.b.v. de formalisten onder u: $\models$ is volstrekt elimineerbaar in het verdere betoog, tast de resultaten niet aan en werd alleen om didactisch-heuristische redenen ingevoerd.

3. De theorieën R , Q , P en $\underline{N}$.

Definitie: (a) een theorie is een verzameling zinnen T zodat $T \vdash \phi \rightarrow \phi \in T$ voor alle zinnen ϕ . De elementen van T heten de theoremas van T .

- (b) $\sum CT$ heet axiomatiek voor T als $T = \{\phi \mid \phi \text{ zin} \ \& \ \sum \vdash \phi\}$
 De elementen van $\sum$ heten de axiomas van $\sum$.
- (c) T heet (eindig-)(recursief-)(recursief opsombaar-)(etc.-) axiomatiseerbaar als een (eindige)(recursieve)(recursief opsombare)(etc.) axiomatiek voor T bestaat.

We zullen vaak formules als axiomas presenteren die geen zinnen zijn. Men moet er dan net zoveel universele quantoren vóór denken als de formule vrije veranderlijken bevat. De theorie P (Peano's rekenkunde) werd opgesteld om de theorie van de natuurlijke getallen met hun basisoperaties te "organiseren". Met het oog daarop zijn de volgende noties relevant.

Definitie: een theorie T heet

- (i) consistent als voor geen zin ϕ , $\phi \in T$ zowel als $\neg \phi \in T$
 (ii) volledig als voor iedere zin ϕ , óf $\phi \in T$ óf $\neg \phi \in T$
 (iii) volledig m.b.t. een structuur $\mathcal{M}$ als $T = \{\phi \mid \phi \text{ zin} \ \& \ \phi \text{ waar in } \mathcal{M}\}$

Een inconsistente (d.i. niet-consistente) theorie is weinig interessant omdat er bv. geen structuur bestaat waarin alle zinnen van de theorie waar zijn. Merk op, dat een theorie die volledig is m.b.t. een structuur ook volledig tout court is en dat iedere volledige theorie consistent is. Uit de volledigheidstelling van Gödel voor L volgt dat iedere volledige theorie volledig is m.b.t. tenminste één structuur.

Ingeval van P doet zich natuurlijk de vraag voor, of P volledig is m.b.t. $\mathcal{N}$.

Het volgende lemma laat zien dat de volledigheidskwestie voor een recursief opsombaar geaxiomatiseerde theorie samenhangt met het decisieprobleem voor de theorie.

Lemma: Als (i) $\sum$ is een recursief opsombare verzameling zinnen van L
 (ii) $T = \{\phi \mid \phi \text{ zin} \ \& \ \sum \vdash \phi\}$ is volledig
 dan is T recursief.

bewijs: a) T is recursief opsombaar;

$$\begin{aligned} \text{b) } N-T &= \{\phi \mid \phi \text{ geen zin of niet } \vdash \phi\} \\ &= \{\phi \mid \phi \text{ geen zin of } \vdash \neg \phi\} \text{ is recursief opsombaar} \end{aligned}$$

a) & b) & Davis' Theorem 5.1.5; T is recursief.

We geven nu de axiomatieken $\{R_i^{n,m} \mid 1 \leq i \leq 5 \text{ \& } n, m \in \mathbb{N}\}, \{Q_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$
 $\{P_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$ die de theorieën R, Q en P definieren.

$$R: R_1^{n,m} : \underline{n} + \underline{m} \approx \underline{n + m}$$

$$R_2^{n,m} : \underline{n} \cdot \underline{m} \approx \underline{nm}$$

$$R_3^{n,m} : \underline{n} \not\approx \underline{m} \text{ (alleen als } n \neq m)$$

$$R_4^n : x \leq \underline{n} \quad (x \approx \underline{0} \vee x \approx \underline{1} \vee \dots \vee x \approx \underline{n})$$

$$R_5^n : x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x$$

$$Q: Q_1 : Sx \approx Sy \rightarrow x \approx y$$

$$Q_2 : \underline{0} \not\approx Sx$$

$$Q_3 : x \not\approx \underline{0} \rightarrow \bigvee y (x \approx Sy)$$

$$Q_4 : x + \underline{0} \approx x$$

$$Q_5 : x + Sy \approx S(x + y)$$

$$Q_6 : x \cdot \underline{0} \approx \underline{0}$$

$$Q_7 : x \cdot Sy \approx x \cdot y + x$$

$$P: P_i = Q_i \text{ voor } i = 1, 2, \dots, 7$$

$$P_8^\phi : \phi(0) \wedge \bigwedge x (\phi(x) \rightarrow \phi(Sx)) \rightarrow \bigwedge x \phi(x) \quad (\phi \in \text{FORM}, x \text{ vrij in } \phi)$$

(in feite kan men sommige van de P-axiomas uit de andere afleiden;
 en deze zijn dus overbodig. Zie TMR)

$$N: \underline{N} = \{\phi \mid \phi \text{ zin \& } \phi \text{ waarin } \mathcal{N}\}$$

Stelling: $R \subseteq Q \subseteq P \subseteq N$

bewijs: Voor de eerste inclusie wordt verwezen naar Tarski-Mostowski-

Robinson blz. 53 e.v.; de rest is triviaal, misschien m.u.v. $P_8^\varphi \in N$

Voor details betreffende de inclusies en axiomatiseerbaarheid, zie TMR
 blz. 55.

B. Representeerbaarheid. Een derde Karakterisering der Recursieve Functies.

1. Definities van representeerbaarheid en een gevolg.

Om te beginnen een terminologische opmerking. Wat hier representeerbaar genoemd zal worden, noemen TMR definieerbaar. Sinds de vlucht die de modeltheorie na het verschijnen van TMR heeft genomen, wordt deze term meestal in een semantische zin gebruikt, reden waarom ik hem vermijd. Wil men diverse verfijningen van deze notie beschouwen, dan is de terminologie van Feferman (Fund. Math. 49 (1969/61) p.51) nuttig. In het vervolg van deze §(1) is T een willekeurige theorie in L. Functies en relaties zijn altijd getaltheoretisch en overal gedefinieerd.

Definitie: (i) de functie f heet representeerbaar in T als $\phi \in \text{FORM}$ bestaat met

$$\bigwedge x [\phi(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k, x) \leftrightarrow x \approx \underline{f(n_1, \dots, n_k)}] \in T \text{ voor alle } \underline{n}_i \in N.$$

(ii) de relatie R heet representeerbaar in T als $\phi \in \text{FORM}$ bestaat met

- a) $R(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k) \rightarrow \phi(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k) \in T$
- b) $\sim R(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k) \rightarrow \neg \phi(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k) \in T$ voor alle $\underline{n}_i \in N$.

Stelling: (i) als R representeerbaar is in T, dan is K_R , de karakteristieke functie van R , representeerbaar in T.

(ii) als $0 \notin T$ en K_R is representeerbaar in T, dan is R representeerbaar in T.

Bewijs: kies R voor 't gemak 1-plaatsig. Deze beperking is niet ernstig.

(i) laat $\phi(x)$ R representeren en

$$\psi(x, y) = (\phi(y) \wedge x \approx 0) \vee (\neg \phi(y) \wedge x \approx 1)$$

ψ representeert K . Kies nl. $n \in N$ en onderscheid:

- a) $R(n)$. Dan is $\phi(\underline{n}) \in T$, dus is $\bigwedge x (\psi(x, n) \leftrightarrow x \approx 0) \in T$
- b) $\sim R(n)$. Dan is $\neg \phi(\underline{n}) \in T$ en $\bigwedge x (\psi(x, n) \leftrightarrow x \approx 1) \in T$.

(ii) Als $\phi(x,y)$ K_R representeert, neem $\psi(x) = \phi(x, \underline{0})$.

ϕ representeert R : kies weer $n \in \mathbb{N}$ en onderscheid:

a) $R(n)$. Dan is $K_R(n) = 0$ en $\phi(\underline{n}, \underline{0}) \in T$.

b) $\sim R(n)$. Dan is $K_R(n) = 1$ en $\phi(\underline{n}, \underline{0}) \rightarrow \underline{0} \approx \underline{1} \in T$.

Maar $\underline{0} \not\approx \underline{1} \in T$ en dus $\neg \phi(\underline{n}, \underline{0}) \in T$.

2. Het representeren van recursieve functies.

R is een in zekere zin minimale theorie waarvoor de volgende belangrijke stelling geldt:

Stelling: (i) Als $R \subseteq T$ en α representeert A in T dan is iedere A -recursieve functie representeerbaar in T .

(ii) I.h.b. is iedere recursieve functie representeerbaar in T als $R \subseteq T$.

Bewijs: Het is voldoende te laten zien dat iedere recursieve functie representeerbaar is in R . We gebruiken Davis' definition 3.1.1/2, p.41 en bewijzen het resultaat met inductie

(1) $S = \lambda x. x+1$ is representeerbaar door $y \approx x+1$. Laat nl. $n \in \mathbb{N}$. Uit R_1 volgt

$$\bigwedge y (y \approx n+1 \leftrightarrow y \approx n+1) \in R$$

(2) $U_i^k = \lambda x_1 \dots x_k (x_i)$ is representeerbaar door $x \approx y$. Want

$$\bigwedge x (x \approx \underline{i} \leftrightarrow x \approx U_i^k(n_1, \dots, n_k)) \in R$$

(3) $+$ is representeerbaar door $x \approx y+z$. Wegens R_1 geldt nl.

$$\bigwedge x (x \approx n+m \leftrightarrow x \approx n+m) \in R$$

(4) $\leq$ is representeerbaar door $(z+x \approx y \vee (y \leq z \wedge x \approx \underline{0}))$ want

$$\bigwedge x (\underline{m}+x \approx \underline{n} \vee (\underline{n} \leq \underline{m} \wedge x \approx \underline{0}) \leftrightarrow x \approx \underline{n}-\underline{m}) \in R$$

Het enige niet geheel triviale gedeelte hierin is

$$\bigwedge x (\underline{m}+x \approx \underline{n} \rightarrow x \approx \underline{n}-\underline{m}) \in R$$

Voldoende opdat dit geldt is

$$\bigwedge x (\underline{m}+x \approx \underline{n} \wedge x \leq \underline{n} \rightarrow x \approx \underline{n}-\underline{m}) \in R$$

en dit volgt eenvoudig m.b.v. R_4 , R_1 en R_3 .

(5) $\cdot$ is representeerbaar door $x \approx y \cdot z$, want het volgt uit R_2 , dat

$$\bigwedge x (x \approx \underline{n} \cdot \underline{m} \leftrightarrow x \approx \underline{nm}) \in R$$

(6) substitutie. Laten f en g (voor 't gemak 1-plaatsig) gerepresenteerd worden door ϕ en ψ .

Neem $\gamma(x,y) = \bigvee z (\phi(x,z) \wedge \psi(z,y))$. Onze hypothesen luiden:

- (i) $\bigwedge z (\phi(\underline{n},z) \leftrightarrow z \approx f(\underline{n})) \in R$ voor alle n
(ii) $\bigwedge y (\phi(\underline{m},y) \leftrightarrow y \approx g(\underline{m})) \in R$ voor alle n . Dat nu geldt
(iii) $\bigwedge y (\gamma(\underline{n},y) \leftrightarrow y \approx g(f(\underline{n}))) \in R$ voor alle n

volgt uit het feit dat de volgende vijf formules in R equivalent zijn: $\gamma(\underline{n},y)$;

$$\bigvee z (\phi(\underline{n},z) \wedge \psi(z,y)) : \bigvee z (z \approx f(\underline{n}) \wedge \psi(z,y)) : \\ \psi(f(\underline{n}),y) : y \approx g(f(\underline{n})).$$

- (7) minimalisering. Laat f (voor het gemak 2-plaatsig) gerepresenteerd worden door ϕ en $\bigvee n \exists k (f(n,k) = 0)$.

Neem $\psi(x,y) = \phi(x,y,0) \wedge \bigwedge z (z \leq y \wedge \phi(x,z,0) \rightarrow z \approx y)$

Onze hypothese luidt:

- (i) $\bigwedge u (\phi(\underline{n},\underline{m},u) \leftrightarrow u \approx \underline{\mu}(\underline{n},\underline{m})) \in R$; en we moeten aantonen, dat

$$(ii) \bigwedge y (\psi(\underline{n},y) \leftrightarrow y \approx \mu k(f(\underline{n},k) = 0)) \in R.$$

Laat dus $n \in N$ en $p = \mu k(f(\underline{n},k) = 0)$; dan is

$f(\underline{n},0) \neq 0, \dots, f(\underline{n},p-1) \neq 0$ en $f(\underline{n},p) = 0$ dus met R_3 volgt:

$$\neg \phi(\underline{n},0,0), \dots, \neg \phi(\underline{n},p-1,0), \phi(\underline{n},p,0) \in R \quad (1)$$

$$a) \bigwedge y [\phi(\underline{n},y,0) \wedge \bigwedge z (z \leq y \wedge \phi(\underline{n},z,0) \rightarrow z \approx y) \rightarrow y \approx p] \in R$$

Wegens R_5 is $y \leq p \forall p \leq y \in R$; we zullen eerst laten zien dat in R , $y \approx p$ volgt uit

$$\phi(\underline{n},y,0) \quad (2)$$

$$y \leq p \quad (3)$$

Met R_4 volgt uit (3): $y \approx 0 \vee \dots \vee y \approx p-1 \vee y \approx p$.

De eerste p alternatieven vallen echter af wegens (2) en (1). Dus volgt $y \approx p$.

Vervolgens tonen we aan dat in R , $y \approx p$ volgt uit

$$\bigwedge z (z \leq y \wedge \phi(\underline{n},z,0) \rightarrow z \approx y) \quad (4)$$

$$p \leq y \quad (5)$$

Wegens (4) is i.h.b.: $p \leq y \wedge \phi(\underline{n},p,0) \rightarrow p \approx y$: en met (5) en (1) volgt nu $p \approx y$.

$$b) \bigwedge y (y \approx p \rightarrow \phi(\underline{n},y,0)) \in R. \text{ Dit volgt direct met (1)}$$

$$c) \bigwedge y (y \approx p \rightarrow \bigwedge z (z \leq y \wedge \phi(\underline{n},z,0) \rightarrow z \approx y)) \in R.$$

Voldoende hiervoor is kennelijk:

$$\bigwedge z (z \leq p \wedge \phi(\underline{n},z,0) \rightarrow z \approx p) \in R.$$

Hiertoe kan het bewijs, dat (2) en (3) ~~y₀~~ impliceren,
gecopieerd worden na vervanging van y door z .

Hiermee is de stelling bewezen. Merk op, dat het bewijs op
grondige wijze de R-axiomas heeft gebruikt.

3. Een derde karakterisering der recursieve functies.

Vermoedelijk zal onderstaande nooit in het colloquium van pas komen, maar
het resultaat is interessant en ligt bovendien direct voor het grijpen.

Stelling: Als (i) T is een recursief opsombaar geaxiomatiseerde consistente
theorie in L
(ii) de functie f is representeerbaar in T
dan is f recursief.

Bewijs: Als f bv. door ϕ wordt gerepresenteerd, dan gaat men eenvoudig
na, dat

$$a) f(n_1, \dots, n_k) = m \leftrightarrow \phi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k}, \underline{m}) \in T$$

$$b) f(n_1, \dots, n_k) \neq m \leftrightarrow \neg \phi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k}, \underline{m}) \in T.$$

Hierin stellen de rechterleden recursief opsombare relaties voor
in $n_1, \dots, n_k$ en m (want T is recursief opsombaar en
 $\lambda n_1 \dots n_k m. \phi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k}, \underline{m})$ is primitief recursief) die (zie de
linkerleden) elkaars complement zijn.

Dus is $f = \lambda n_1 \dots n_k. \mu m (f(n_1, \dots, n_k) = m)$ recursief.

Gevolg: een functie is recursief desd. als hij representeerbaar is in een
consistente, recursief opsombaar geaxiomatiseerde uitbreiding van R .

Dat deze uitbreiding in grote mate willekeurig is, toont de belangrijkheid
van de recursiviteitsnotie eens te meer aan.

Wij merken nog op, dat bovenstaande karakterisering direkt voor relativering
in de zin van Davis in aanmerking komt.

C. Onbeslisbaarheid, Onvolledigheid.

1. Essentiele onbeslisbaarheid van R .

Definitie: a) $S(n, \phi)$ is de formule die uit ϕ ontstaat door overal v_0 door
 $\underline{n}$ te vervangen.

$$b) D = \lambda \phi S(\phi, \phi)$$

Lemma: D is recursief.

Dit volgt direct uit resultaten impliciet in A(1).

De volgende stelling is fundamenteel voor het vervolg (vgl. TMR p.46/47):

Stelling: Als T een consistente theorie in L is en $R_3 \notin T$, dan zijn D en T niet beiden in T representeerbaar.

Bewijs: Onderstel eens, dat D en T wel representeerbaar zijn, door

bv. δ en τ , i.e.

$$(i) \bigwedge x (\delta(\underline{n}, x) \leftrightarrow x \underline{D(n)} \in T)$$

$$(ii) \begin{cases} n \in T \rightarrow \tau(\underline{n}) \in T \\ n \notin T \rightarrow \neg \tau(\underline{n}) \in T. \end{cases}$$

We mogen wel onderstellen dat v_0 niet in deze formules voorkomt.

Neem nu

$$\psi(v_0) = \bigwedge x (\delta(v_0, x) \rightarrow \neg \tau(x)) \text{ en laat } p = \psi(v_0).$$

Dan is

$$D(p) = \psi(p) = \bigwedge x (\delta(p, x) \rightarrow \neg \tau(x)) \text{ wegens de def. van D.}$$

Wij onderscheiden de mogelijkheden a) en b):

a) $D(p) \in T$. Dan is (ii) $\tau(D(p)) \in T$

$$\bigvee x (x \approx D(p) \wedge \tau(x)) \in T$$

$$\text{en met (i)} \bigvee x (\delta(p, x) \wedge \tau(x)) \in T \text{ dus } \neg D(p) \in T.$$

Tegenspraak met de consistentie van T.

b) $D(p) \notin T$. Dan is weer wegens (ii): $\neg \tau(D(p)) \in T$

$$\bigwedge x (x \approx D(p) \rightarrow \neg \tau(x)) \in T$$

$$\text{en, met (i): } \bigwedge x (\delta(p, x) \rightarrow \neg \tau(x)) \in T$$

dus $D(p) \in T$, eveneens een tegenspraak.

De onderstelling dat D en T representeerbaar zijn in T is dus onhoudbaar.

Opm.: $\psi(p)$ drukt a.h.w. uit, dat de zin die uit $\psi(v_0)$ ontstaat door vervanging van v_0 door p (d.i. $\psi(p)$) geen theorema is. Dwz. $\psi(p)$ is een moderne versie van de leugenaarparadox - die hier geen paradox oplevert maar een nuttige stelling zoals uit het volgende blijkt.

Definitie: de theorie T heet essentieel onbeslisbaar als iedere consistente theorie $T' \supseteq T$ (recursief) onbeslisbaar is.

Gevolg: R is essentieel onbeslisbaar. (Church 1936)

Gevolg: N is niet recursief en dus niet recursief opsombaar axiomatiseerbaar.

Gevolg: iedere recursief opsombaar geaxiomatiseerde consistente uitbreiding van R is onvolledig. (Gödel 1931, "eerste onvolledigheidsstelling")

Opm.: we vestigen er de aandacht op, dat al deze resultaten afhangen van de specifieke, vooraf gekozen Gödelnummering. Men gaat echter eenvoudig na, dat alle resultaten doorgaan als men er voor zorgt de fundamentele operaties recursief te kiezen.

2. Effektiviteit van Gödel's eerste stelling.

De eerste drie zinnen van M.B.Pour-El's artikel (effective extensible theories) zeggen dat er een effectief proces (i.e. recursieve functie) is, dat, uitgaande van (het nummer van) een recursief opsombare axiomatiek Σ voor een consistente extensie T van R , een in T onbeslisbare zin ϕ berekent. (ϕ heet onbeslisbaar in T als $\phi \notin T$ en $\neg \phi \notin T$; T is onvolledig desd. als er een in T onbeslisbare zin bestaat.)

Gödel zelf beschreef hiervoor twee methoden.

- a) een eenvoudige, die echter alleen werkte ingeval T ω -consistent was, hetgeen een essentiële beperking inhield;
- b) een ingewikkelde. Dit is in wezen Gödel's tweede onvolledigheidsstelling, die zegt dat sommige formaliseringen in L van de bewering " T is consistent" (een zuiver getaltheoretische uitspraak) in T onbewijsbaar zijn. De onbeslisbaarheid volgt echter weer alleen onder extra condities.

De eerste methode werd in 1936 door Rosser op een ingenieuze wijze verfijnd zodanig dat de extra conditie van ω -consistentie door gewone consistentie kon worden vervangen.

Opm.: T heet ω -consistent als geen zin $\forall x \phi(x) \in T$ bestaat zodat eveneens $\neg \phi(\underline{n}) \in T$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voldoende opdat T ω -consistent is, is dat $T \subseteq \mathbb{N}$. Men krijgt een onbeslisbare zin als bedoeld onder a) door een herhaling van de ideeën van de stelling uit §1. Neem nl. voor γ een formule die de afleidbaarheidsrelatie $AF_{\sum}(m) \ \& \ \phi = m_1(m)$ voor T in T representeert en laat $\tau = \forall x \neg \gamma(x, y)$. De onbeslisbare zin wordt natuurlijk $\psi(\underline{\psi})$. Wat resteert is de beschrijving van het proces dat op een uniforme manier bij iedere $\sum$ de bijbehorende γ moet leveren. Dat dit geen principiële moeilijkheden oplevert volgt o.m. uit het bewijs van de stelling uit B2 dat impliceert dat de relatie "representeert f in T" invariant is t.a.v. verschillende extensies T van R.

3. Extensie

De eindige axiomatiseerbaarheid van Q maakt deze theorie bijzonder geschikt als een hulpmiddel bij het overdragen van de onbeslisbaarheids- en onvolledigheidsresultaten op andere theorieën. Zo volgt bv. de onbeslisbaarheid der eerste order logica (Church 1936) vrijwel direkt. De syntaktische transformaties die bij dit overdragen worden gebruikt worden beschreven in TMR hfdstk 1. Voor uitbreidingen van de daar behandelde interpretatiemethode zie bv. Shoenfield's "Mathematical Logic" §6.9.

Colloquium Recursive functies 1968-1969

spreker: Prof. Dr. A. Heyting

Hoofdstuk 5§1 De iteratiestelling

Laat r een Gödelnummer zijn van $\lambda x_1 \dots x_n y f(x_1, \dots, x_n, y)$, dus $f = [r]_{n+1}$. Een Gödelnummer van $\lambda x_1 \dots x_n f(x_1, \dots, x_n, y)$ is een functie van r en y , $\gamma_n(r, y)$.

Is M de machine, die $[r]_{n+1}$ berekent, dan wordt $[\gamma_n(r, y)]_n$ berekend door de machine $M^1 = K S^y L^n M$. (zie blz. 12). Men heeft dus een algemene methode om, bij gegeven y , $\gamma_n(r, y)$ te berekenen. Hieruit mag men concluderen, dat γ_n een recursieve functie is. Om dit bewijs te preciseren, moet men nagaan, uit welke kwadrupels M^1 is opgebouwd.

Dit zijn:

- 1^e. De 4 kwadrupels van K .
- 2^e. y maal de kwadrupels van S ; het x^e stel hieruit is:

$$q_{2x+1} \quad 1 \quad R \quad q_{2x+1}$$

$$q_{2x+1} \quad 0 \quad R \quad q_{2x+2}$$

$$q_{2x+2} \quad 1 \quad R \quad q_{2x+1}$$

$$q_{2x+2} \quad 0 \quad R \quad q_{2x+3}.$$
- 3^e. n maal de kwadrupels van L .
- 4^e. De kwadrupels van M .

Men gaat nu na, welke bijdragen ieder van deze kwadrupels tot $\gamma_n(r, y)$ geeft, vormt het product van deze bijdragen en constateert dat γ_n een primitief recursieve functie is.

Door inductie naar m bewijst men de iteratiestelling:

Stelling

Zij $\lambda x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = [r]_{n+m}$,
 $\lambda x_1 \dots x_n f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = [\gamma_{n,m}(r, y_1, \dots, y_m)]_n$.
 Voor $\gamma_{n,m}$ kan een recursieve functie gekozen worden.

§ 2 De these van Church.

Wanneer men een algemene methode heeft aangegeven om een functie voor willekeurig gegeven waarden van zijn argumenten te berekenen, mag men dan daaruit concluderen dat de functie recursief is? De bewering dat dit geoorloofd is, staat bekend als de these van Church.

Men kan niet verwachten, een bewijs te vinden voor de these van Church, omdat het begrip "algemene berekeningsmethode" niet scherp genoeg gedefinieerd is. Er zijn wel argumenten aan te voeren, die de these plausibel maken. De voornaamste zijn:

1. Alle tot dusver gevonden berekenbare functies zijn recursief.

Dit argument is zwak, want lange tijd heeft men vermoed, dat alle berekenbare functies primitief recursief moesten zijn, omdat alle bekende berekenbare functies primitief recursief waren.

2. Verschillende definities van het begrip "recursieve functie", uitgaande van ver uiteenliggende preciseringen van het intuïtieve begrip van berekenbaarheid, bleken equivalent te zijn.

Dit argument bewijst in ieder geval, dat het begrip "recursieve functie" belangrijk is.

De kwestie verschijnt in een nieuw licht, als men de omkering van de these van Church beschouwt. Is iedere recursieve functie berekenbaar? Is iedere recursieve verzameling beslisbaar? Enige voorbeelden maken dit twijfelachtig.

1. Iedere eindige verzameling is recursief.

Iedere deelverzameling van een eindige verzameling is eindig, dus recursief.

De volgende verzamelingen A en B zijn dus recursief:

$A = \emptyset$ als het vermoeden van Fermat juist is;

$A = \{x \mid x < 100\}$ als het vermoeden van Fermat onjuist is;

$B = \{x \mid \text{er is een niet-triviale oplossing voor } u^x + v^x = w^x \text{ en } x < 10^{10}\}.$

2. Iedere constante functie is recursief. De hieronder gedefinieerde functie f is dus recursief:

$f = \lambda x 0$ als het vermoeden van Fermat juist is;

$f = \lambda x 1$ als het vermoeden van Fermat onjuist is.

Toch is volgens de intuïtieve opvatting noch A noch B effectief beslisbaar en f niet effectief berekenbaar.

De verklaring van deze paradox ligt hierin, dat de theorie der recursieve functies behandeld wordt als een onderdeel van de gewone wiskunde en dat daarin de gewone logika wordt gebruikt. f heet recursief als er een T-machine bestaat, die f berekent, maar dit wil niet zeggen, dat men die machine ook werkelijk kan aangeven. De omkering van de these van Church geldt slechts voor dit gewijzigde begrip van berekenbaarheid.

Ook voor de these van Church zelf kan men dit gewijzigde begrip gebruiken. De these is geen stelling en kan dus niet gebruikt worden om te bewijzen dat een functie recursief is. Zij heeft wel grote heuristische waarde. Bovendien is dikwijls gemakkelijk in te zien hoe een redenering, die op grond van de these van Church gevoerd is, in een streng bewijs kan worden omgezet; het is dan meestal niet nodig, dat bewijs in details door te voeren. Een voorbeeld hiervan zagen wij hierboven in het bewijs van de iteratiestelling.

§ 3 Toepassingen van de iteratiestelling.

Uit de iteratiestelling voor functies leidt men gemakkelijk een iteratiestelling voor relaties af.

Als $R(x,y) \leftrightarrow \forall z T_2(r,x,y,z)$, dan geldt ook $R(x,y) \leftrightarrow \forall z T_1(\gamma_1(r,y),x,z)$.

Men heeft dus:

$$(1) \forall z T_2(r,x,y,z) \leftrightarrow \forall z T_1(\gamma_1(r,y),x,z).$$

Envenzo:

$$(2) \forall u T_3(r,x,y,z,n) \leftrightarrow \forall u T_2(\gamma_2(r,z),x,y,u).$$

Als bijzonder geval van (1) noteren wij

$$(3) \forall u T_2(z,x,z,u) \leftrightarrow \forall u T_1(\delta(z),x,u),$$

waarin $\delta(z) = \gamma_1(z,z)$.

Laat nu R een ternaire recursief opsombare relatie zijn en e een Gödelgetal van $R(z,x,\delta(y))$, zodat

$$(4) R(z,x,\delta(y)) \leftrightarrow \forall u T_3(e,x,y,z,u) \leftrightarrow \forall u T_2(\phi(z),x,y,u),$$

waarin $\phi(z) = \gamma_2(e,z)$.

$$R(z,x,\delta(\phi(z))) \leftrightarrow \forall u T_2(\phi(z),x,z,u) \leftrightarrow \forall u T_1(\delta(\phi(z)),x,u)$$

volgens (3).

Stelling

Bij iedere ternaire recursief opsombare relatie R kan men een (primitief) recursieve functie ψ vinden, zodat

$$R(z, x, \psi(z)) \leftrightarrow x \in \{\psi(z)\}_1.$$

Een dergelijke stelling noemt men een "fixed point theorem" (dekpuntstelling?).

Opmerkingen:

1. Ook de iteratiestelling en de dekpuntstelling kunnen gerelativeerd worden t.o.v. een verzameling A.
2. De dekpuntstelling kan uitgebreid worden tot relaties tussen meer veranderlijken.

Colloquium recursieve functies.

Spreker: W.P. de Roever.

Onbeslisbaarheid van enige theorieën (naar gepubliceerd en ongepubliceerd werk van Rabin en Scott).

§1 Inleiding

Def: Een wiskundige taal L is de vz zinnen op de gebruikelijke wijze opgebouwd uit

- 1^o een aftelbaar aantal variabelen
- 2^o voor elke n een gegeven aantal n -aire functies en n -aire predikaten, eventueel geen voor bepaalde n , doch = komt onder de binaire predikaten voor.
- 3^o $\wedge, \vee, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Een taal voor een theorie T , $L(T)$, is een wiskundige taal waarin alle stellingen van T uit te drukken zijn.

Een structuur (of model) voor een wiskundige taal L , is een structuur (of model) waarin alle n -aire functies en predikaten, op = na, geïnterpreteerd zijn.

$UG(T)$: de verzameling zinnen van $L(T)$ geldig in alle modellen voor $L(T)$.
Zij T axiomatiseerbaar.

$Th(T)$: de verzameling zinnen van $L(T)$ geldig in alle modellen voor $L(T)$ die aan de (niet logische) axioma's voor T voldoen.

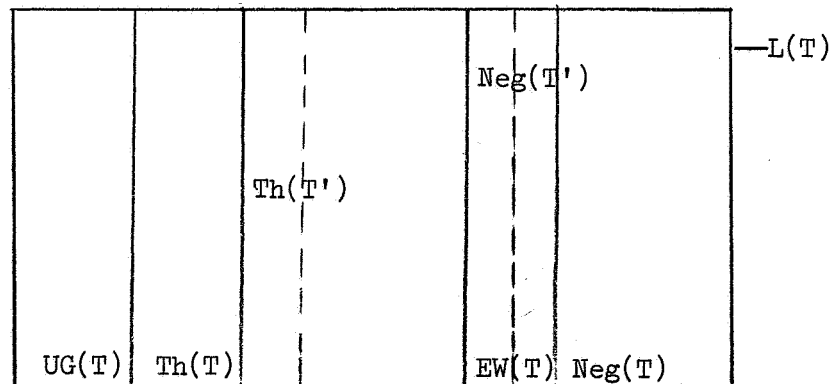
$EG(T)$: de verzameling zinnen van $L(T)$ geldig in alle eindige modellen voor $L(T)$ die aan de (niet logische) axioma's voor T voldoen.

$EW(T)$: $L(T) - EG(T)$

$Neg(T)$: die zinnen uit $L(T)$ waarvan de ontkenning tot $Th(T)$ behoort.

Zij T' een consistente uitbreiding van T .

Diagram:



N.B.: In het vervolg zal ik bij gebruik van "recursieve verzameling" of "recursieve functie" aannemen, dat de gebruikte wiskundige taal vertaald is in een taal als behandeld door Doets.

Volgens Gödel is de verzameling der universeel geldige zinnen in de praedikatenkalkulus recursief axiomatiseerbaar, dus recursief opsombaar.

Ik zal bewijzen dat de praedikatencalculus (PK) onbeslisbaar is. Men kan zich afvragen of EG(PK) axiomatiseerbaar of beslisbaar is.

Voorbeeld: "Elke lineair geordende verzameling bevat een grootste", geldt alleen voor eindige modellen,
 "Elk lichaam is commutatief" evenzo.

Natuurlijk zijn analoge vragen voor elke theorie te stellen.

Ik zal een methode van onbeslisbaarheid voor theorieën T behandelen waarin EG(T) niet recursief is.

§ 2

Def: De disjuncte verzamelingen X en Y heten recursief inseparabel of ook wel, recursief niet te scheiden, als er geen recursieve verzameling S bestaat met $X \subset S$ en $Y \cap S = \emptyset$

St.1 In PK geldt $UG(PK)$ en $EW(PK)$ zijn recursief inseparabel.

Gevolg: $EG(PK)$ niet recursief.

Gevolg: PK is onbeslisbaar (Church).

Deze stelling drukt a.h.w. uit dat UG en EW zo in elkaar grijpen, dat ze niet m.b.v. een mechanisch procedé te scheiden zijn en levert dus een verklaring voor de onbeslisbaarheid der PK op.

Voor het bewijs van St.1 is de volgende stelling voldoende:

St.2 Er bestaat een eindig geaxiomatiseerde theorie Ω waarvoor geldt:

$UG(\Omega)$ en $EW(\Omega)$ recursief inseparabel.

Bewijs van "voldoende":

In het onderstaande geef ik met Ω ook de eindige conjunctie van de axioma's van Ω aan.

Waren $UG(PK)$ en $EW(PK)$ recursief separabel,
dan waren $\{ \Omega \rightarrow \phi \mid \phi \in Th(\Omega) \} \subset UG(PK)$ en
 $\{ \Omega \rightarrow \phi \mid \phi \in EW(\Omega) \} \subset EW(PK)$ dit ook, in tegenspraak met st.2.

Bewijs st.2: voorlopig voldoet het te weten dat Ω een fragment der rekenkunde is waarin termen S^m_0 voorkomen; eindige modellen voor Ω komen met beginsegmenten van Novereen. Ik zal diepgaand gebruik maken van de later te bewijzen stelling:

St.3 : Bij elke recursief opsombare verzameling $X \subset \mathbb{N}$ bestaat een formule $\phi(x)$ zodat voor $m \in \mathbb{N}$ equivalent zijn:

- (i) $m \in X$
- (ii) $\phi(S^m_0)$ is waar in een eindig model voor Ω .
- (iii) $\phi(S^m_0)$ is waar in alle oneindige modellen voor Ω .

Opm.: st.3 drukt a.h.w. uit dat iedere recursief opsombare verzameling d.m.v. eindige modellen voor Ω te benaderen is.

Bewijs van "UG(Ω) en EW(Ω) recursief inseparabel".

Laten E_0 en E_1 twee disjunctie recursief opsombare inseparabele deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn (het bestaan hiervan komt bij de bespreking van Myhill's artikel ter sprake).

Laten ϕ_0 en ϕ_1 hun representerende formules zijn in de zin van st.3.

$$\psi(s_o^m) \equiv [(\Omega \wedge \phi_1(s_o^m)) \rightarrow \phi_0(s_o^m)] \quad (\in L(\Omega).)$$

(i) $m \in E_0$ dus $m \notin E_1$. Volgens st.3 bestaat er geen eindig model voor Ω dat aan $\phi_1(s_o^m)$ voldoet. $\psi(s_o^m)$ dus waar in alle eindige modellen voor Ω (volgens de waarheidstafels). Een model voor $\Omega \wedge \phi_1(s_o^m)$ moet dus oneindig zijn;

$\phi_0(s_o^m)$ is volgens st.3 waar in alle oneindige modellen, dus geldt:
 $m \in E_0 \implies \psi(s_o^m) \in \text{UG}(\Omega).$

(ii) $m \in E_1$. Volgens st.3 bestaat er een eindig model waarin $\phi_1(s_o^m)$ waar is; $m \notin E_0$, dus in dat model is $\phi_0(s_o^m)$ onwaar en dus $\psi(s_o^m)$, dus geldt:

$$m \in E_1 \implies \psi(s_o^m) \in \text{EW}(\Omega).$$

$\lambda m. \psi(s_o^m)$ is een effectief te construeren injectie, bij vertaling in $L(\mathbb{N})$ dan volgens de these van Church een recursieve injectie.

Hieruit volgt dat $\{\psi(s_o^m) | m \in E_0\}$ en $\{\psi(s_o^m) | m \in E_1\}$ recursief inseparabel en dus $\text{UG}(\Omega)$ en $\text{EW}(\Omega)$ recursief inseparabel zijn.

GED.

Axiomastelsel voor Ω met symbolen $=, 0, \leq, S, +, -^\circ$.

- $$\begin{aligned} \Omega 1. \quad & 0 \leq x \\ \Omega 2. \quad & x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \\ \Omega 3. \quad & x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \\ \Omega 4. \quad & x \leq Sx \\ \Omega 5. \quad & y \leq x \vee Sx \leq y \\ \text{NB: } \Omega 6. \quad & x = Sx \rightarrow y \leq x \\ \Omega 7. \quad & x + 0 = x \\ \Omega 8. \quad & x + Sy = S(x+y) \\ \Omega 9. \quad & x \cdot 0 = 0 \\ \Omega 10. \quad & x \cdot Sy = x \cdot y + x \end{aligned}$$

Onder de modellen komen II: $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \dots \circ$ $\rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \dots \circ$
 $\circ$ $n \quad n+1$

en alle beginsegmenten van N : $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet$
 n

Onder gebruikelijke axioma's voor $\mathbb{N}$ komt voor:

- (i) $x \leq y \vee y \leq x$ (R5), volgt direct uit Ω_4 , Ω_5 , Ω_3 .
(ii) $Sx = Sy \rightarrow x = y$ (Q1). Geldt als $x \neq Sx \wedge y \neq Sy$ dus x noch y aan de top.
 $x \neq Sx \rightarrow x < Sx$ (Ω_4)
 $x < z \rightarrow Sx \leq z$ (Ω_5). Dus Sx uniek bepaald.
(iii) $x \neq 0 \rightarrow \forall y (x = Sy)$. Neem als model voor Ω , $N \cup \infty$ hierin geldt $\neg \forall y (\infty = Sy)$.

Ω is het zo veranderde axiomastelsel Q , dat zowel eindige modellen als oneindige modellen verschillend van $\mathbb{N}$ voorkomen:

$$N = \langle \omega, 0, S, +, \cdot, \leq \rangle$$
 , de hoofdinterpretatie
$$N_n = \langle \{0, \dots, n\}, 0, S_n, +_n, 0_n, \leq_n \rangle \text{ met}$$

- $$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & S_n x = \min(n, Sx) \\ \text{(ii)} \quad & x +_n y = \min(n, x + y) \\ \text{(iii)} \quad & x \cdot_n y = \min(n, x \cdot y) \\ \text{(iv)} \quad & x \leq_n y \iff x \leq y \text{ voor } x, y \leq n. \end{aligned}$$

De volgende lemma's zal ik niet bewijzen:

lemma 1. Elk eindig model voor Ω van machtingheid $n+1$ is isomorf met N_n .

lemma 2. Elk oneindig model voor Ω heeft een beginsegment isomorf met N .

lemma 3. Zij P een polynoom in k variabelen, dan geldt

$$P_{N_n}(x_0, \dots, x_{k-1}) = \min(n, P_n(x_0, \dots, x_{k-1})).$$

(m.b.v. inductie te bewijzen).

Bewijs van stelling 3: bij elke recursief opsombare verzameling X in $\mathbb{N}$ bestaat een formule $\phi(x)$, zodanig, dat voor $m \in \mathbb{N}$ equivalent zijn:

- (i) $m \in X$
- (ii) $\phi(S^n 0)$ is waar in een eindig model van Ω
- (iii) $\phi(S^n 0)$ is waar in alle oneindige modellen van Ω .

Volgens Davis (blz. 113) bestaat er voor elke recursief opsombare verzameling X polynomen $P(v_0, v_1, \dots, v_n)$ en $Q(v_0, \dots, v_n)$ zodanig dat $m \in X$ d.e.s.d.a. de formule

$$F \equiv \forall v_1 \wedge v_2 [v_2 \leq v_1 \rightarrow \forall v_3 v_4 \dots v_n [v_3 \leq v_1 \wedge \dots \wedge v_n \leq v_1 \wedge P(S^m 0, v_1, \dots, v_n) = Q(S^m 0, v_1, \dots, v_n)]]$$

waar is in $\mathbb{N}$ (in feite is dit resultaat voor ons gebruik enigszins veranderd; Davis werkt in $\mathbb{Z}$).

Merk op dat F een recursief opsombaar predikaat is met slechts één onbegrensde existentieel gequantificeerde variabele n.l. v_1 ;

F wordt veranderd voor gebruik in modellen voor Ω door te eisen:

(a) $S^n(0) \neq S^{n+1}(0)$ en (b) $P \neq SP$, opdat $P = Q$ d.e.s.d. geldt in een model als $P = Q$ voor N :

$$\phi((v_0) = (v_0 \neq Sv_0 \wedge \forall v_1 \wedge v_2 [v_2 \leq v_1 \rightarrow \forall v_3, \dots, v_n (v_3 \leq v_1 \wedge \dots \wedge v_2 \leq v_1 \wedge P' = Q' \wedge P \neq SP')]))$$

(P' betekent: $P(v_0, v_1, \dots, v_n)$ evenzo voor Q')

(i) $\iff$ (iii) omdat alle modellen met N beginnen (lemma 2)

(i) $\iff$ (ii) omdat $\neq$ in $\phi(v_0)$ de eindige modellen die aan $\phi(v_0)$ voldoen dwingt voldoende van N te hebben d.w.z. SP en Sv_0 te bevatten. (en lemma 3).

§3 Voorbeeld van een algemene methode om onbeslisbaarheid van de ene theorie uit een andere onbeslisbare theorie af te leiden.

Uit §2 St. 1 (: UG(PK) en EW(PK) zijn recursief inseparabel) zal ik aan het einde van deze paragraaf afleiden:

Stelling 4: Voor de theorie van een binaire relatie R geldt: UG(R) en EW(R) recursief inseparabel.

Allereerst veronderstel ik dat in PK de predikaten aftelbaar zijn en het aantal variabelen n_i van een predikaat $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ een recursieve functie is van 't rangnummer i (ik wil n.l. de n_i predikaten P_i in $L(R)$ interpreteren; daarvoor is een constructieve opsomming van de predikaten en hun variabelen noodzakelijk).

Zij M een model voor een binaire relatie over de verzameling B .

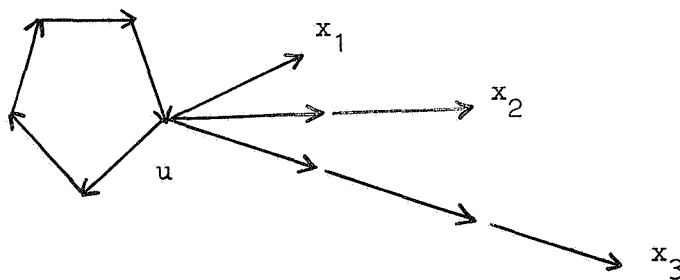
(Def) $D(x) = \neg \forall y (xRy)$

(Def) $xR^1 y = xRy$, $xR^{n+1} y = \exists z (xR^n z \wedge zR^1 y)$

Zij $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ een predikaat van PK, dan interpreteer ik dit in M als:

(Def) $F_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \equiv \forall u (uR^i x_1 \wedge uR x_1 \wedge \dots \wedge uR^{n_i} x_{n_i})$

Plaatje voor interpretatie van $P_5(x_1, x_2, x_3)$ in $L(R)$:



In M kan ik nu een model N voor PK construeren:

$N = (A, \{F_i\})$ met $A = \{x \mid D(x) \text{ waar en } x \in B\} \subseteq B$ en F_i de gedefinieerde interpretatie voor P_i , $i \in \mathbb{N}$.

Omgekeerd kan ik, uitgaande van een model N' voor PK een model M' voor R construeren door "op elke $x_1, \dots, x_{n_i}$ waarvoor $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ geldt een lus als in 't plaatje te zetten". Uit M' kan ik N' op boven beschreven wijze terugwinnen:

Dus geldt:

Hulpstelling 1: Bij gebruik van bovenbeschreven methoden geldt:

- (i) Voor elk model M van R kan ik een model N voor PK en
- (ii) Voor elk model N' voor PK kan ik een model M' voor R construeren waarin N' terug te vinden is.

(Def) Zij σ een zin en $P(x)$ een lineair predikaat, dan versta ik onder $\sigma^{(P)}$, σ gerelativeerd tot het predikaat $P(x)$, de zin die uit σ geconstrueerd wordt door

- (i) alle expressies van de vorm $\bigwedge x \Psi$ door $\bigwedge x (P(x) \rightarrow \Psi)$ en
- (ii) alle expressies van de vorm $\bigvee x \Psi$ door $\bigvee x (P(x) \wedge \Psi)$ te vervangen.

Informeel:

"Deze definitie drukt a.h.w. uit dat $\sigma^{(P)}$ een zin is waarvan de geldigheid uitsluitend afhangt van de geldigheid van σ wanneer ik de variabelen in σ voorkomend beperkt tot $\{q \mid P(q) \text{ is waar}\}$ laat variëren, want in plaats van expressies $\bigwedge x \Psi$ in σ op hun geldigheid te onderzoeken onderzoek ik bij $\sigma^{(P)}$ expressies van de vorm voor alle x , als $p(x)$ geldt, geldt dan Ψ ; analoog voor $\bigvee (x) (P(x) \wedge \Psi)$ ".

Dit wordt tot uitdrukking gebracht in:

Hulpstelling 2: Relativeer ik σ tot $D(x)$ dan geldt

$\sigma^{(D)}$ waar in M d.e.s.d.a. σ waar in N .

Bewijs: Eerst ga ik de vorm van σ na m.b.v. de volgende inductieve definitie van een formule van PK (waarvan de verzameling met FORMULE(PK) wordt aangeduid):

- (i) $P_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in \text{FORMULE}(\text{PK})$
- (ii) als $\phi, \psi \in \text{FORMULE}(\text{PK})$ dan $\phi \rightarrow \psi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \neg \phi, \phi \leftrightarrow \psi \in \text{FORMULE}(\text{PK})$
- (iii) $\phi \in \text{FORMULE}(\text{PK}), x \in \text{VAR}, x$ komt in ϕ voor, dan $\forall x \phi, \bigwedge x \phi \in \text{FORMULE}(\text{PK})$.

Ik zal bewijzen: zij $n_1, \dots, n_k \in A = \{x \mid D(x) \text{ waar}\}$ en σ k -plaatsig

dan geldt: $\sigma^{(D)}(n_1, \dots, n_k)$ waar in $M (=) \sigma(n_1, \dots, n_k)$ waar in N .

Daar een zin geen vrije variabelen bevat geldt dan: $\sigma^{(D)}$ waar in $M \iff \sigma$ waar in N . Het is voldoende deze bewering voor (i), (ii) en (iii) van bovenstaande definitie te controleren.

(i) $\sigma = P_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = \sigma^{(D)}$. P_i wordt als F_i geïnterpreteerd in M .

d.w.z. $P_i(n_1, \dots, n_k)$ waar in N d.e.s.d.a. $F_i(n_1, \dots, n_k)$ waar in M .

(ii) geldt de bewering voor ϕ en ψ dan ook voor $\phi \wedge \psi$ (Triviaal);

geldt de bewering voor ϕ dan ook voor $\neg \phi$ (Triviaal); Hieruit volgt de

(iii) $\sigma(n_1, \dots, n_k) = \forall x \psi(x, n_1, \dots, n_k)$; volgens de inductie bewering voor $\neg, \vee, \leftrightarrow$.
hypothese,

geldt de bewering voor ψ :

$\psi^{(D)}(n, n_1, \dots, n_k)$ waar in $M \iff \psi(n, n_1, \dots, n_k)$ waar in N .

$\forall x (D(x) \wedge \psi^{(D)}(x, n_1, \dots, n_k))$ waar in $M \iff$

$\forall n \in A : \psi^{(D)}(n, n_1, \dots, n_k)$ waar in $M \iff$

$\forall n \in A : \psi(n, n_1, \dots, n_k)$ waar in $N \iff$

$\forall x \psi(x, n_1, \dots, n_k)$ waar in N .

Hulpstelling 3. (i) $\sigma \in \text{UG}(\text{PK})$ d.e.s.d.a. $\sigma^{(D)} \in \text{UG}(\text{R})$ en
(ii) $\sigma \in \text{EW}(\text{PK})$ d.e.s.d.a. $\sigma^{(D)} \in \text{EW}(\text{R})$.

Gevolg: Stelling 4, daar relativieren tot D constructief, dus volgens de these van Church na vertaling in $L(N)$ (zie Doets' "Fragmenten der rekenkunde") recursief.

Bewijs van hulpst. 3 : ($\Rightarrow$)

- (i) Zij M een willekeurig model voor R . Te bewijzen valt dan $\sigma^{(D)}$ waar in M . Hulpstelling 1 zegt dat ik uit M een model voor PK , N kan construeren. Hulpstelling 2 zegt " $\sigma^{(D)}$ waar in $M \iff \sigma$ waar in N (en dit laatste geldt daar $\sigma \in UG(PK)$)).
- (ii) Zij σ weerlegbaar in N een model voor PK .
 Uit N kan ik volgens hulpst. 1 een model M voor R construeren, waarvoor geldt (hulpst. 2): $\sigma^{(D)}$ waar in M d.e.s.d.a. σ waar in N .
 σ is onwaar in $N \Rightarrow \sigma^{(D)}$ onwaar in M .

M behoeft, bij eindige N , niet eindig te zijn. Het aantal predikaten, dat in σ voorkomt is echter eindig. Ware in N slechts dit aantal predikaten geïnterpreteerd, dan was σ daar reeds onwaar. Voeg aan de basisverzameling van N slechts die 'lussen' toe (zie plaatje), die bij deze predikaten horen en interpreteren R daarin op de beschreven wijze, dan is $\sigma^{(D)}$ in dit eindige model reeds weerlegbaar.

- (i) Zij gegeven $\sigma^{(D)} \in UG(R)$ en N een willekeurig model voor PK dan kan ik volgens hulpst. 1 bij N een model M voor R construeren waarin N weer terug te vinden is en geldt (hulpst. 2).
 σ waar in N d.e.s.d. als $\sigma^{(D)}$ waar in M (dat is aangegeven).
- (ii) Is $\sigma^{(D)}$ weerlegbaar in M , dan is σ weerlegbaar in het m.b.v. hulpst. 1 uit M geconstrueerde model N voor PK . Bij eindige M is N altijd eindig.

Q.E.D.

Literatuur: Michael O. Rabin : "A simple method for undecidability proofs and some applications" in : "Logic, methodology and philosophy of science", Y. Bar-Hillel.

§ 4. Voorbeeld van een eindig geaxiomatiseerde, essentieel onbeslisbare theorie.

St. 5 Zij $\Omega^* = \Omega + \bigwedge_x [x \neq \rightarrow \bigvee_y [Sy = x]]$. De theorie van Ω^* is essentieel onbeslisbaar. (Ω^* is een uitbreiding van Q).

Gevolg: De theorie van N is niet axiomatiseerbaar en onbeslisbaar.

Voor het bewijs van St. 5 is 't voldoende een theorie R te vinden waarvan Ω^* een uitbreiding is, met:

St. 6 Th(R) en Neg(R) recursief inseparabel.

Bewijs: Axiomastelsel van R (vgl blz. 42 van de syllabus van dit colloquium).

$$(i) \quad x \leq S^n o \iff x = o \vee \dots \vee x = S^n o$$

$$(ii) \quad S^n o \neq S^m o \text{ voor } n \neq m$$

$$(iii) \quad S^n o + S^m o = S^{n+m} o$$

$$(iv) \quad S^n o \cdot S^m o = S^{n \cdot m} o$$

Opm. Elk model voor R is oneindig.

$$(D) (i) \quad S_a x = y \iff ((Sx \leq a \wedge y = Sx) \vee (Sx \leq a \wedge y = a))$$

$$(ii) \quad x +_a y = z \iff ((x + y \leq a \wedge z = x + y) \vee (x + y \leq a \wedge z = a))$$

$$(iii) \quad x \cdot_a y = z \iff ((x \cdot y \leq a \wedge z = x \cdot y) \vee (x \cdot y \leq a \wedge z = a))$$

(D) $\phi^{(a)}$ is de formule uit ϕ , een zin van R verkregen door ϕ tot het predikaat $x \leq a$ te relativeren en S_1 , $+$, $\cdot$ door S_a , $+_a$, $\cdot_a$ te vervangen.

Laten E_0 en E_1 en ϕ_0 en ϕ_1 , gekozen zijn als in het bewijs van stelling 3.

$$\psi'_m \equiv \bigwedge_a (\Omega^{(a)} \wedge \phi_1^{(a)} (S^m o) \rightarrow \phi_0^{(a)} (S^m o)) \text{ (EL(R))}$$

$$\Omega^{(a)} \wedge \phi_1^{(a)} (S^m o) \rightarrow \phi_0^{(a)} (S^m o) \text{ is de geldigheid van}$$

$$\Omega \wedge \phi_1 (S^m o) \rightarrow \phi_0 (S^m o) \text{ in dat model van de theorie } \Omega,$$

waarvan de ondeliggende verzameling

$$\{0, S o, \dots, S^n o = a\} \text{ is, want:}$$

- (i) $\Omega^{(a)}$ is de conjunctie van $\Omega_1^{(a)} + \dots + \Omega_n^{(a)}$, waarin $\Omega_i^{(a)}$ als gedefinieerd.

Door de hypothese $\Omega^{(a)}$ wordt aan de eerste $n + 1$ elementen van $\{0, \dots, S^n 0 = a\}$ van een (oneindig) model van R "de structuur" van model van Ω verleend.

- (ii) $\Phi_i^{(a)}(S_a^m 0)$, $i = 0, 1$, is een uitspraak over $\{x \mid x \leq a\}$ - zie §3 hulpst. 2 - en is de interpretatie van $\Phi_i(S^m 0)$ in het desbetreffende model, zie (i) van Ω .

$m \in E_0 \Rightarrow (\Omega \wedge \Phi_1(S^m 0) \rightarrow \Phi_0(S^m 0))$ universeel geldig (St. 2) i.h.b. in de door a bepaalde beginsegmenten voor willekeurige a uit een willekeurig model.

Dus: $m \in E_0 \Rightarrow \Psi'_m \in \text{Th}(R)$.

$m \in E_1$. Te bewijzen valt $\neg \Psi'_m \in R$. Zij M een model voor R

$$\neg \Psi'_m = \neg \bigwedge_a (\dots) = \bigvee_a \neg (\dots).$$

Volgens St. 2 bestaat er een eindig model voor Ω waarin $\Phi_1(S^m 0)$ waar, $\Phi_0(S^m 0)$ onwaar ($m \notin E_0$!)

en dus $\Omega \wedge \Phi_1(S^m 0) \rightarrow \Phi_0(S^m 0)$ onwaar. Zij $n + 1$ het aantal zijner elementen en kies $a = S^n 0$. Volgens het bovenstaande geldt dan $(\Omega^{(a)} \wedge \Phi_1^{(a)}(S_a^m 0) \rightarrow \Phi_0^{(a)}(S_a^m 0))$ onwaar in M dus

$$\neg \Psi'_M = \bigvee_a \neg ((\Omega^{(a)} \wedge \Phi_1^{(a)}(S_a^m 0) \rightarrow \Phi_0^{(a)}(S_a^m 0)) \text{ waar in } M).$$

M was willekeurig gekozen.

Q.E.D.

Opmerking: Analyse van bovenstaand bewijs levert op, dat bij keuze van

Ψ'_n als volgt:

$$\bigwedge_a (a \leq a \wedge \Omega_1^{(a)} \wedge \dots \wedge \Omega_n^{(a)} \wedge \Phi_1^{(a)}(S^m 0)) \rightarrow \Phi_0^{(a)}(S^m 0), \text{ ik alle bij}$$

bovenstaande redenering gebruikte axioma's al als hypothese in Ψ'_m opgenomen heb en dan geldt:

$m \in E_0 \Rightarrow \Psi'_m \in \text{UG}(R)$; hieruit volgt: St. 6*: $\text{UG}(R)$ en $\text{Neg}(R)$ zijn recursief inseparabel en dus is R essentieel onbeslisbaar.

Hoofdstuk 5Creatieve Verzamelingen

(Litt.: John Myhill: Creative Sets.

Zeitschr. f. Math. Logic und Grundlagen d. Math.

Bd. 1 S. 97-108 (1955)).

1. Recursief Opsombare Verzamelingen

Een verzameling natuurlijke getallen is recursief opsombaar dan en slechts dan als ze het beeld is van een partieel recursieve functie (van één variabele).

We zullen de klasse der recursief opsombare verzamelingen aanduiden met F .

Stelling. Er bestaat een rij $\{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ zodanig dat:

- a) Iedere verzameling uit de rij is recursief opsombaar.
- b) Iedere recursief opsombare verzameling komt minstens één keer voor in de rij.
- c) De relatie $x \in w_y$ is recursief opsombaar.

In het vervolg is w_n steeds de recursief opsombare verzameling uit $\{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ met index n .

Stelling. Bij iedere w_n en bij ieder willekeurig natuurlijk getal m bestaat er een partieel recursieve functie $h(n,m)$ zodanig dat $h(n,m) > m$ en tevens $w_{h(n,m)} = w_n$.

Het bewijs van beide stellingen is gemakkelijk te leveren als we voor de index n van w_n het Gödelgetal van een T-berekenbare functie nemen die w_n als beeld heeft.

Als n geen Gödelgetal is, dan is $w_n = \emptyset$.

In F bestaan de volgende deelklassen.

De klasse der recursieve verzamelingen, aangeduid met E ;

De klasse der creatieve verzamelingen, aangeduid met H ;

(D) $\alpha \in H \iff$ er bestaat een partieel recursieve functie f zó dat als

$w_n \cap \alpha = \emptyset$ dan is $f(n)$ gedefinieerd en er geldt

$f(n) \in \alpha \cup w_n$;

De klasse der simpele verzamelingen, aangeduid met Z .

- (D) $\alpha \in Z \iff \alpha'$ oneindig en α' bevat géén oneindige recursief opsombare verzamelingen.

De klasse der mesoïsche verzamelingen, aangeduid met J .

- (D) $\alpha \in J \iff_D \alpha \in F \setminus (H \cup E \cup Z)$.

dus: $F = E \cup H \cup Z \cup J$.

Stelling. E , H , Z en J zijn niet-leeg en onderling disjunct.

2. Wiskundige Systemen

Door het toekennen van Gödelnummers aan symbolen en rijen van symbolen uit een systeem, gaan alle problemen van dat systeem over in problemen betreffende verzamelingen natuurlijke getallen.

- (D) Een verzameling formules is een wiskundig systeem als de erbij behorende verzameling Gödelgetallen recursief opsombaar is.

We zullen een wiskundig systeem aanduiden met Σ en zijn verzameling Gödelgetallen met σ .

- (D) Σ heet beslisbaar als σ recursief is, anders onbeslisbaar.

We hebben gezien (in Hoofdstuk 5) dat er een Σ bestaat waarin iedere recursief opsombare verzameling gepresenteerd is.

We zullen nu nog eens twee stellingen opschrijven die als uitgangspunt dienen voor een karakterisering van creatieve verzamelingen.

Stelling I. Een formeel systeem waarin iedere recursief opsombare verzameling gerepresenteerd is, is onbeslisbaar.

- (D) Σ_0 heet vertaalbaar in Σ als er een effectieve methode bestaat die iedere formule ϕ_0 uit Σ_0 afbeeldt op een ϕ uit Σ , zodanig dat ϕ bewijsbaar is in Σ d.e.s.d. als ϕ_0 bewijsbaar is in Σ_0 .

Stelling II. Is Σ_0 onbeslisbaar en vertaalbaar in Σ dan is ook Σ onbeslisbaar.

- (D) Een verzameling α heet reducibel in een verzameling β (notatie: $\alpha R_m \beta$) als er een recursieve functie f bestaat met
- $$x \in \alpha \iff f(x) \in \beta.$$

Gevolg: Stelling. Σ_0 is vertaalbaar in Σ d.e.s.d. als $\sigma_0 R_m \sigma$.

Stelling. $\alpha \in H, \alpha R_m \beta, \beta \in F \implies \beta \in H.$

Bewijs: $\alpha \in H \implies$ er is een partieel recursieve functie f zó dat

$$w_n \subset \alpha' \implies f(n) \notin w_n + \alpha.$$

$\alpha R_m \beta \implies$ er is een recursieve functie g zó dat

$$x \in \alpha \iff g(x) \in \beta.$$

Zij nu $w_m \subset \beta'$ (w_m mag leeg zijn!).

We zoeken een element uit $\beta' \setminus w_m$.

Er bestaat een recursieve functie k zó dat

$$w_{k(m)} = \{x \mid g(x) \in w_m\}, \text{ dan } w_{k(m)} \subset \alpha'.$$

Hieruit volgt

$$f(k(m)) \in \alpha' \setminus w_{k(m)}$$

$$\text{en } g(f(k(m))) \notin w_m \cup \beta. \quad \text{q.e.d.}$$

Stelling. $\alpha \in H, \mathcal{L}$ is een wiskundig systeem waarin α gerepresenteerd is.

Dan is ook $\sigma \in H.$

Bewijs: Stel ϕ is een formule uit $\mathcal{L}$ die α representeert, d.w.z. $\phi(x)$

$$\text{waar } \iff x \in \alpha.$$

Dan is er een recursieve functie $f(x)$ die het Gödelgetal van $\phi(x)$ uitrekent met:

$$x \in \alpha \iff f(x) \in \sigma.$$

$$\text{Dus } \alpha R_m \sigma.$$

Pas nu de vorige stelling toe, q.e.d.

Stelling. Als de onbeslisbaarheid van $\mathcal{L}$ te bewijzen is met stelling I of stelling II, dan is σ creatief.

3. Reduceerbaarheid van Creatieve Verzamelingen

(D) Twee verzamelingen α en β heten onderling reducibel als $\alpha R_m \beta$ en

$$\beta R_m \alpha.$$

$$(\text{notatie: } \alpha \equiv_m \beta).$$

(D) $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ heten onderling vertaalbaar als $\sigma_1 \equiv_m \sigma_2$.

We gaan bewijzen dat alle creatieve verzamelingen onderling reducibel zijn.

Stelling. Een recursief opsombare verzameling α is creatief dan en slechts dan als er een totaal recursieve functie g bestaat waarvoor geldt:

$$w_n \subset \alpha' \implies g(n) \notin w_n \cup \alpha.$$

Bewijs: $\alpha \in H \iff \alpha \in F$ en er is een partieel recursieve functie f met $w_n \in \alpha' \implies f(n)$ gedef. en $f(n) \notin w_n \cup \alpha$.

We moeten dus laten zien dat f uit te breiden is tot een totaal recursieve functie.

Stel $\alpha = w_k$, definieer $h(n)$ als volgt:

$$w_{h(n)} = w_k \cap w_n.$$

Dan is h recursief.

Definieer $g(x)$ door:

$g(x) = f(x)$ als $w_{h(n)} = \emptyset$ (dan is f gedefinieerd).

Als $w_{h(x)} \neq \emptyset$ dan is $g(x)$ gelijk aan het eerste getal dat ik vindt, hetzij door opsomming van $w_{h(x)}$, hetzij door berekening van $f(x)$.

Dan voldoet $g(x)$ aan het geëiste.

Hiermee is $\implies$ bewezen.

$\iff$ is triviaal.

Stelling. $\alpha \in F, \beta \in H \rightarrow \alpha R_m \beta$.

Bewijs: Er is een totaal recursieve functie g met:

$$w_n \subset \beta' \implies g(n) \notin w_n + \beta.$$

Beschouw de ternaire recursief opsombare relatie:

$$\phi(x, y, z) = x \in \alpha \wedge y = g(z).$$

Dan bestaat er een recursieve functie t met:

$$y \in w_{t(z)} \iff z \in \alpha \wedge y = g(t(z)). \text{ (dekpunt stelling).}$$

Hieruit volgt:

$z \in \alpha \implies w_{t(z)} = \{g(t(z))\}$, maar dan ligt $g(t(z))$ volgens de constructie van g (vorige stelling) in β .

$$z \notin \alpha \implies w_{t(z)} = \emptyset \implies g(t(z)) \notin \beta.$$

$$\text{Of: } z \in \alpha \iff g(t(z)) \in \beta \iff \alpha R_m \beta. \text{ q.e.d.}$$

Gevolg:

Stelling. $x \in H \implies \{\alpha \mid \alpha \equiv_m x\} = H$.

Stelling. Alle wiskundige systemen waarvan de onbeslisbaarheid te bewijzen is met I of II zijn onderling vertaalbaar.

4. 1-1 Reduceerbaarheid van Creatieve Verzamelingen.

(D) Een verz. α heet 1-1 reduceerbaar in een verz. β als er een één-éénduidige recursieve functie f bestaat waarvoor geldt:

$$x \in \alpha \iff f(x) \in \beta .$$

(notatie $\alpha R_1 \beta$).

(D) $\sum_1$ heet één-éénduidig vertaalbaar in $\sum_2$ als $\sigma_1 R_1 \sigma_2$.

(D) α en β heten onderling 1-1 reduceerbaar als geldt:

$$\text{zowel } \alpha R_1 \beta \text{ als } \beta R_1 \alpha .$$

(notatie: $\alpha \equiv_1 \beta$).

(D) $\sum_1$ en $\sum_2$ heten onderling één-éénduidig vertaalbaar als $\sigma_1 \equiv_1 \sigma_2$.

Stelling. Er bestaan recursief opsombare verzamelingen α , β , γ en δ waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \alpha R_m \beta \wedge \neg \alpha R_1 \beta , \\ \gamma \equiv_m \delta \wedge \neg \gamma \equiv_1 \delta . \end{aligned}$$

Gevolg: Vertaalbaarheid is niet voldoende voor één-éénduidige vertaalbaarheid; Onderlinge vertaalbaarheid is niet voldoende voor onderlinge één-éénduidige vertaalbaarheid.

In deze paragraaf zullen we aantonen dat creatieve verzamelingen wél onderling 1-1 reduceerbaar zijn.

Hiertoe bewijzen we eerst twee hulpstellingen:

Stelling. $\alpha \in H \iff$ Er bestaat een strikt monotoon stijgende totaal recursieve functie g^* waarvoor geldt:

$$w_n \subset \alpha' \iff g^*(n) \notin w_n \cup \alpha .$$

Bewijs: Zij h een recursieve functie gedefinieerd door:

$$w_{h(n)} = w_n \cup \{g(n)\} .$$

Dan volgt uit de definitie van g :

$w_n \subset \beta' \Rightarrow \{g h^m(n)\}_{m=0}^\infty$ is een oneindige rij getallen waarin geen twee gelijke voorkomen, die alle in $(w_n \cup \alpha)^1$ liggen.

Definieer nu:

$$\begin{aligned} g^*(0) &= g(0) , \\ g^*(k+1) &= g h^m(k+1) \text{ als het getal } m \text{ te vinden is met:} \\ &\quad g h^m(k+1) > g^*(k) ; \\ &\quad g^*(k) + 1 \text{ anders.} \end{aligned}$$

Dan voldoet g^* aan het geëiste. q.e.d.

N.B. g^* is dus één-éénduidig.

Stelling. Zij $\phi(x,y,z)$ een ternaire recursief opsombare relatie.

Dan bestaat er een strikt monotoon stijgende functie t^* waarvoor geldt:

$$x \in w_{t^*(z)} \iff \phi(x,z,t^*(z)).$$

Bewijs: Zij $h(n,m)$ de recursieve functie gedef. door:

$$w_{h(n,m)} = w_n \wedge h(n,m) > m, \text{ voor willekeurige } n \text{ en } m.$$

$\phi(x,y,z)$ rec. opsombaar $\implies$ er is een recursieve functie t met:

$$x \in w_{t(z)} \iff \phi(x,z,t(z)).$$

Kies nu: $t^*(0) = t(0)$

$$t^*(k+1) = h(k+1, t^*(k)), \text{ dan voldoet } t^*. \quad \text{q.e.d.}$$

Stelling. a) $\alpha \in F, \beta \in H \implies \alpha R_1 \beta$.

b) $x \in H \implies \{\alpha \mid \alpha \equiv_1 x\} = H$

c) Alle wiskundige systemen waarvan de onbeslisbaarheid bewezen is met (I) of (II) zijn onderling één-éénduidig vertaalbaar.

5. Isomorfismen van creatieve verzamelingen.

Van twee systemen $\sum_1$ en $\sum_2$ waarvoor geldt $\sigma_1 \equiv_1 \sigma_2$, kunnen we nog niet zeggen dat ze notationale varianten van elkaar zijn. Immers er kan een formule σ_2 in $\sum_2$ zijn die niet in het beeld van de vertaling van $\sum_1$ in $\sum_2$ ligt. Ligt ϕ_2 wél in het beeld dan hoeft terugvertaling naar $\sum_1$ nog niet de oorspronkelijke formule op te leveren.

(D) Een recursieve functie f heet een recursieve permutatie als geldt:

(i) f is één-éénduidig.

(ii) Het beeld onder f is de verzameling van alle natuurlijke getallen.

(D) Twee verzamelingen α en β heten isomorf als er een recursieve permutatie f bestaat met $f(\alpha) = \beta$.

(notatie: $\alpha \equiv \beta$).

(D) $\sum_1$ heet een notationale variant van $\sum_2$ als $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.

We zullen nu bewijzen dat onderlinge 1-1 reduceerbaarheid hetzelfde is als isomorfie.

(D) Een eindige rij getallenparen $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$ heet een eindige correspondentie tussen de verzamelingen α en β als geldt:

- (i) $x_i = x_j \iff y_i = y_j \quad (1 \leq i, j \leq k)$
 (ii) $x_i \in \alpha \iff u_i \in \beta \quad (\quad " \quad " \quad " \quad)$

Stelling. Als $\alpha R_1 \beta$, dan bestaat er bij iedere eindige correspondentie $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$ tussen α en β een totaal recursieve functie f zó dat bij iedere $m = x_{k+1}$, een $f(m) = y_{k+1}$ met: $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{k+1}$ is weer een eindige correspondentie tussen α en β .

Bewijs: (zie: Hartley Rogers: Hst. 7 §4)

Stelling. $\alpha \equiv_1 \beta \iff \alpha \equiv \beta$.

Bewijs: $\iff$ is triviaal

$\implies \alpha \equiv_1 \beta$, er zijn twee 1-1 recursieve functies f en g met:

$x \in \alpha \iff f(x) \in \beta$

$x \in \beta \iff g(x) \in \alpha$.

constueer de rij $\{(x_i, y_i)\}$ als volgt:

$x_0 = 0$, $y_0 = f(0)$.

stel $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^k$ gevonden, $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^k$ is een eindige correspondentie.

geval 1: k even.

zoek met behulp van vorige stelling x_{k+1} zó, dat

$\{(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, \frac{k}{2})\}$ wéér een eindige correspondentie is.

geval 2: k oneven, zoek nu y_{k+1} zó dat $(\frac{k-1}{2}, y_{k+1})$ toegevoegd

aan $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^k$ wéér een eindige correspondentie is.

Dan geldt:

$y_k = k(x_k)$ voor een recursieve permutatie k , en tevens $k(\alpha) = \beta$,

dus $\alpha \equiv \beta$.

Stelling. a) Twee wiskundige systemen $\sum_1$ en $\sum_2$ met $\sigma_1 \equiv_1 \sigma_2$ zijn notationale varianten.

b) Twee onbeslisbare wiskundige systemen, waarvan de onbeslisbaarheid bewezen is met I of II zijn notationale varianten van elkaar.

Colloquium Recursive Functions 1968 - 1969.

Spreker: P.C. Baayen.

Hoofdstuk 9 EFFECTIEF UIT TE BREIDEN THEORIEËN

(Litt.: Marian Boykan Pour - El, Effectively extensible theories
Journal of Symbolic Logic 33 (1968), 56-58)

1. Vorbereidende opmerkingen.

Wij zullen gebruik maken van de recursiestelling in een iets scherper formulering dan die in (het eerste) hoofdstuk 5 (pag. 50 e.v). Met name hebben we nodig dat in de dekpuntsstelling van pag. 53 de primitief recursieve functie ψ strikt monotoon genomen kan worden. Dat dit zo is volgt uit het aldaar gegeven bewijs. Op pag. 50 worden nl. functies γ_n ingevoerd als volgt:

als z het Gödelgetal is van een Turingmachine M , dan zij
 $\gamma_n(z, y)$ het Gödelgetal van de machine $M' = KS^y L^n M$.

Hieruit volgt onmiddellijk dat iedere γ_n strikt monotoon is, zowel in z als in y .

Voor $n \in \mathbb{N}$ zij nu ω_n de recursief opsombare verzameling die op pag. 53 (en bij DAVIS) met $\{n\}$, wordt aangegeven, en die gedefinieerd is als het definitiegebied van de partieel recursieve functie van 1 variabele die berekend wordt door de Turingmachine met Gödelgetal n :

$$\omega_n = \{x : \forall y T_1(n, x, y)\}.$$

De dekpuntsstelling (op pag. 53) zegt nu, dat bij iedere ternaire recursief opsombare relatie R een primitief recursieve functie ψ te vinden is, zodat

$$x \in \omega_{\psi(i)} \iff R(i, x, \psi(i)).$$

De functie ψ wordt als volgt verkregen. Zij e het Gödelgetal van een Turingmachine M zodanig dat de extensie van R precies het definitiegebied van ψ_M^3 (vgl. p. 11) is:

$$R(i, x, n) \iff \forall y T_3(e, i, x, n, y).$$

Zij $\phi = \lambda z \gamma_2(e, z)$ en $\delta = \lambda z \gamma_1(z, z)$. Dan kan men $\psi = \delta \phi$ nemen (het bewijs staat op p. 52) Maar deze ψ is strikt monotoon, omdat γ_2 en γ_1 het zijn.

Een tweede opmerking betreft een reeds door vorige sprekers gebruikt feit:

Er is een recursieve functie ϕ zodanig dat voor alle i

$$\omega_i = \text{waardegebied van } [\phi(i)]_i,$$

(De notatie $[r]_n$ is ingevoerd op pag. 50 als afkorting voor $\psi_{z(r)}^n$, waar $z(r)$ de Turingmachine is met Gödelgetal r ; c/.DAVIS pag. 145).

Aanwijzing voor een bewijs:

In het bewijs van de implicatie $(3) \Leftrightarrow (4)$ van de stelling in hoofdstuk 4 §1 (pp 21/22) wordt bij iedere i expliciet een (primitief) recursieve functie f_i geconstrueerd met ω_i als waardegebied. Deze procedure is echter niet effectief. We definiëren ϕ als volgt: $\phi(i)$ is het kleinste gödelnummer van een turingmachine die de volgende berekening uitvoert uitgaande van een getal x :

1) Doe $K(x)$ stappen in de berekening van

$$[i]_1 (L(x))$$

2) Als de berekening dan juist afgebroken is: geef uitkomst $L(x)$,
begin anders opnieuw.

Opmerking. $[\phi(i)]_i$, zal meestal niet totaal zijn. Voor een procedure die een totale functie levert als $\omega_i \neq \phi$ zie Rogers pag. 60 (ϕ zelf is wel totaal). Zo wordt bij iedere i effectief een Turingmachine met Gödelgetal $\phi(i)$ bepaald die f_i berekent:

$$x \in \omega_i \Leftrightarrow \forall z \{x = U(\mu y T(\phi(i), z, y))\}$$

en dat is juist wat we wensten.

2. Grondbegrippen.

Definitie 1. Een theorie is een geordend viertal $\mathcal{T} = \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$ met $T \subset W \subset F \subset \mathbb{N}$ en $\text{neg} \in F^F$, dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

- (i) W en F zijn recursief, T is recursief opsombaar;
- (ii) neg is recursief, strikt monotoon, en $\text{neg } [\bar{W}] \subset W$,
- (iii) $\wedge \phi (\phi \in T \Leftrightarrow \text{neg } \text{neg } \phi \in T)$.

Als $\mathcal{T} = \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$ een theorie is, dan zij $R = R_{\mathcal{T}}$ de verzameling $\text{neg}^{-1} [T]$.

Definitie 2. Een presentatie voor een theorie $\mathcal{T} = \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$ is een geordend paar $\langle \alpha, B \rangle$, waarbij

- (i) $\alpha \subset T$, α recursief opsombaar;
- (ii) B is een recursief opsombare rij $(B_0, B_1, \dots)$ van recursief opsombare relaties; de rang k_n van B_n is tenminste 2, en $B_n \subset F^{k_n}$;
- (iii) $\phi \in T \Leftrightarrow (\phi \in W \text{ en er is een eindige rij } \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n = \phi \text{ met voor alle } i : \phi_i \in \alpha \text{ of } B_n(\phi_i, \phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_{k_n-1}}))$
voor zekere n en voor zekere $i_1 < \dots < i_{k_n-1} < i$).

Definitie 3. Als $\langle \alpha, B \rangle$ een presentatie is van een theorie $\mathcal{T} = \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$, dan zij $\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_n)$ de theorie $\langle F, W, T(\alpha, B; \omega_n), \text{neg} \rangle$ met

$$T(\alpha, B; \omega_n) = \{ \phi \in W : \text{er is een eindige rij } \phi_1, \dots, \phi_n = \phi \text{ met} \\ \text{voor alles } \phi_{i_1} \in \alpha \cup \omega_n \text{ of } B_n(\phi_{i_1}, \phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_{k_n-1}}) \\ \text{voor zekere n en voor zekere } i_1 < \dots < i_{k_n-1} < i \}$$

In plaats van $R_{\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_n)}$ schrijven we $R(\alpha, B; \omega_n)$ (bij vaste gegeven $\mathcal{T}$).

Definitie 4. $\mathcal{T}$ heet consistent als $T \cap R = \emptyset$. Als $\langle \alpha, B \rangle$ een presentatie is van $\mathcal{T}$, dan heet $\mathcal{T}$ essentieel consistent m.b.t. $\langle \alpha, B \rangle$ als voor elke $\omega_n \in W$ en elke $k \in W \setminus R(\alpha, B; \omega_n)$ geldt: $\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_n)$ consistent $\Rightarrow \mathcal{T}(\alpha, B; \omega_n \cup \{k\})$ consistent.

AFSPRAAK: In het vervolg beschouwen we alleen essentieel consistente theorieën en presentaties.

Definitie 5. Een effectieve-onscheidbaarheidsfunctie (e.o.f.) voor een verzamelingenpaar (α, β) is een recursieve functie g (van twee variabelen) met de eigenschap

$$\alpha \subset \omega_i \wedge \beta \subset \omega_j \wedge \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \implies g(i,j) \notin \omega_i \cup \omega_j.$$

Het paar (α, β) heet effectief onscheidbaar (e.o.) als α en β recursief opsombaar en disjunct zijn, en er een e.o.f. voor (α, β) bestaat. Een theorie $\mathcal{T}$ heet effectief onscheidbaar (e.o.) als (T,R) e.o. is.

Voorbeelden.

(a) Zij $\alpha = \{n : [n]_1, (n) = 0\}$ en $\beta = \{n : [n]_1, (n) = 1\}$. Deze verzamelingen zijn zeker r.o. en disjunct. We zullen aantonen dat (α, β) e.o. is door een (zelfs primitief recursieve) e.o.f. aan te geven.

Zij ϕ de recursieve functie genoemd aan het eind van §1, zodat dus $\omega_i = [\phi(i)]_1, [N]$, voor alle i . We definiëren een functie η als volgt

$$\eta(n,x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x = [\phi(K(n))]_1(y) \wedge \bigwedge_{z=0}^y (x \neq [\phi(L(n))]_1(z)); \\ 0 \text{ als } x = [\phi(L(n))]_1(y) \wedge \bigwedge_{z=0}^y (x \neq [\phi(K(n))]_1(z)); \\ \text{ongedefinieerd in alle overige gevallen.} \end{cases}$$

(Voor de definitie van de primitief recursieve functies K, L zie men pag. 15). Aangezien η (partieel) recursief is, bestaat er volgens de iteratiestelling (pag. 50 e.v.) een primitief recursieve functie f zodanig dat $\lambda x \eta(n,x) = [f(n)]_1$. Zij nu g de primitief recursieve functie

$$g = \lambda ij.f(I(i,j)).$$

Deze g is een e.o.f. voor (α, β) . Want stel $\alpha \subset \omega_i, \beta \subset \omega_j, \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$. We moeten aantonen: $g(i,j) \notin \omega_i \cup \omega_j$.

Stel eerst $g(i,j) \in \omega_i$. Zij $n = I(i,j)$, zodat $K(n) = i$ en $L(n) = j$. Dan $f(n) = f(I(i,j)) = g(i,j) \in \omega_i$, en dus $\forall y \{f(n) = [\phi(K(n))]_1(y)\}$ en ook (daar $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$) $f(n) \in \omega_j$, dus $\neg \forall y \{f(n) = [\phi(L(n))]_1(y)\}$.

Maar dit betekent dat $\gamma(n, f(n)) = 1$, d.w.z. $[f(n)]_1(f(n)) = 1$.
 Er volgt dat $g(i, j) = f(n) \in \beta \subset \omega_j$, in strijd met de aanname dat $g(i, j) \in \omega_i$.

Evenzo: $g(i, j) \in \omega_j \Rightarrow [f(n)]_1(f(n)) = 0 \Rightarrow g(i, j) = f(n) \in \omega_i$,
 hetgeen onmogelijk is.

(b) Wij zullen nu een e.o. theorie $\mathcal{T}_0$ construeren, uitgaande van het e.o. paar (α, β) uit (a). Laat $F_0 = W_0 = \mathbb{N}$, $\text{neg} = \lambda n(2n)$ en

$$T_0 = \{2^{2m}3^n : n \in \alpha \text{ en } m \in \mathbb{N}\} \cup \{2^{2n+1}3^n : n \in \beta \text{ en } m \in \mathbb{N}\}.$$

Dan is $\mathcal{T}_0 = \langle F_0, W_0, T_0, \text{neg} \rangle$ inderdaad een theorie, met

$$R_0 = \{2^{2m+1}3^n : n \in \alpha \text{ en } m \in \mathbb{N}\} \cup \{2^{2m}3^n : n \in \beta \text{ en } m \in \mathbb{N}\}.$$

Kennelijk zijn T_0 en R_0 r.o. en disjunct. Het paar (T_0, R_0) is e.o., want als $\mathcal{S}$ een recursieve functie is zodanig dat voor alle i

$$x \in \omega_{\mathcal{S}(i)} \iff 3^x \in \omega_i$$

dan is

$$h = \lambda ij.3^{g(s(i), s(j))}$$

een e.o.f. voor (T_0, R_0) (hierbij is g de primitief recursieve functie uit (a)).

N.B. Een presentatie voor $\mathcal{T}$ is $\langle \alpha, B \rangle$ waar $\alpha = T_0$ en $B = (\phi, \phi, \dots)$.

M.b.t. deze presentatie is $\mathcal{T}$ essentieel consistent: als $\omega_n \subset W$ zodat

$\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_n)$ consistent is, en als $k \in W \setminus R(\alpha, B; \omega_n)$, zeg $k = 2^m \cdot k_0$ met k_0 oneven, dan is

$$T(\alpha, B; \omega_n \cup \{k\}) = T(\alpha, B; \omega_n) \cup \{2^s k_0 : \mathcal{S} \in \mathbb{N} \text{ en } s-m \text{ even}\}$$

en

$$R(\alpha, B; \omega_n \cup \{k\}) = R(\alpha, B; \omega_n) \cup \{2^s k_0 : s \in \mathbb{N} \text{ en } s-m \text{ oneven}\}.$$

Hieruit volgt gemakkelijk dat $T(\alpha, B; \omega_n \cup \{k\}) \cap R(\alpha, B; \omega_n \cup \{k\}) = \emptyset$.

Definitie 6. Een theorie $\mathcal{T} = \langle T, W, F, \text{neg} \rangle$ heet consistent effectief onscheidbaar (c.e.o.) als er een recursieve functie g bestaat met de volgende eigenschap:

Wanneer $\mathcal{T}^* = \langle F, W, T^*, \text{neg} \rangle$ een consistente uitbreiding is van $\mathcal{T}$ (d.w.z. $T \subset T^*$) met $T^* = \omega_i$ en $R^* = R_{\mathcal{T}^*} = \omega_j$, dan $g(i, j) \in W \setminus \omega_i \cup \omega_j$.

Opmerking 1. Iedere e.o. theorie is c.e.o.

Immers zij g een e.o.f. voor (T, R) . Zij h een recursieve functie zodanig dat voor alle i

$$\omega_{h(i)} = \omega_i \cup (N \setminus W),$$

en zij $g_o = \lambda i j. g(h(i), j)$. Als nu $\mathcal{T}^*$ een consistente uitbreiding is van $\mathcal{T}$, met $T^* = \omega_i$ en $R^* = \omega_j$, dan zal $g_o(i, j) \notin \omega_{h(i)} \cup \omega_j$, en dus $g_o(i, j) \in W \setminus (\omega_i \cup \omega_j)$.

Opmerking 2. Iedere consistente uitbreiding van een e.o. theorie is e.o.

Definitie 7. Een presentatie $\langle \alpha, B \rangle$ van een theorie $\mathcal{T}$ heet effectief uit te breiden (e.u.) als $\mathcal{T}$ consistent is en er een recursieve f bestaat met de volgende eigenschap:

$$\omega_i \subset W \wedge T(\alpha, B; \omega_i) \cap R(\alpha, B; \omega_i) = \emptyset \Rightarrow f(i) \in W \setminus \{T(\alpha, B; \omega_i) \cup R(\alpha, B; \omega_i)\}.$$

Een theorie $\mathcal{T}$ heet effectief uit te breiden (e.u.) als $\mathcal{T}$ een e.u. presentatie heeft.

Definitie 8. Een presentatie $\langle \alpha, B \rangle$ van een theorie $\mathcal{T}$ heet zwak effectief uit te breiden (z.e.u.) als $\mathcal{T}$ consistent is en er een recursieve f bestaat met de volgende eigenschap

$$\left. \begin{array}{l} \omega_i \subset W \text{ en } \omega_i \text{ heeft ten hoogste één element} \\ \text{en } T(\alpha, B; \omega_i) \cap R(\alpha, B; \omega_i) = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow f(i) \in W \setminus \{T(\alpha, B; \omega_i) \cup R(\alpha, B; \omega_i)\}$$

Opmerking 3. Iedere e.u. theorie is z.e.u.

Definitie 9. Als $\mathcal{T} = \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$ een theorie is, en $S \subset W$, dan zij

$$S^\circ : = S \setminus \text{neg } [W]$$

Definitie 10. Stel α, β zijn disjuncte recursief opsombare verzamelingen, en γ is een recursieve verzameling met $\alpha \cup \beta \subset \gamma$. Het paar (α, β) heet effectief onscheidbaar m.b.t. γ als er een recursieve f bestaat zodanig dat

- (i) $f[N \times N] \subset \gamma$;
- (ii) $\alpha \subset \omega_i \subset \gamma \wedge \beta \subset \omega_j \subset \gamma \wedge \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \Rightarrow f(i, j) \notin \omega_i \cup \omega_j$.

3. Gelijkwaardigheid van e.u., z.e.u., e.o. en c.e.o.

Lemma 1. Zij $\mathcal{T}_1 = \langle F_1, W_1, T_1, \text{neg}_1 \rangle$ een willekeurige (essentieel consistente!) theorie, en $\mathcal{T}_2 = \langle F_2, W_2, T_2, \text{neg}_2 \rangle$ een z.e.u. theorie. Er is een strikt monotone recursieve f met de volgende eigenschappen:

- (i) $f[W_1] \subset W_2$;
- (ii) $f[T_1] \subset T_2$;
- (iii) $f[R_1] \subset R_2$;
- (iv) $f[W_1 \setminus (T_1 \cup R_1)] \subset W_2 \setminus (T_2 \cup R_2)$;

Bewijs.

Zij $\langle \alpha, B \rangle$ een e.u. presentatie van $\mathcal{T}_2$, en zij g_0 een recursieve functie met de eigenschap $(*_0)$.

$$\left. \begin{array}{l} |\omega_i| \leq 1 \text{ en } \omega_i \subset W_2 \text{ en} \\ T(\alpha, B; \omega_i) \cap R(\alpha, B; \omega_i) = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow g_0(i) \in W_2 \setminus \left\{ T(\alpha, B; \omega_i) \cup R(\alpha, B; \omega_i) \right\}$$

Definieer eerst g_1 door

$$g_1(i) = \begin{cases} g_0(i) & \text{als } |\omega_i| \leq 1 \wedge \omega_i \subset W_2 \wedge T(\alpha, B; \omega_i) = \emptyset ; \\ \mu n (n \in W_2) & \text{voor alle andere } i. \end{cases}$$

Dan is ook g_1 recursief, met de eigenschap $(*_1)$ waarvan een omschrijving uit $(*_0)$ verkregen wordt door voor iedere g_0 te substitueren g_1 , terwijl bovendien $g_1[N] \subset W_2$.

We definiëren nu g_2 door

$$\begin{cases} g_2(0) = g_1(0) \\ g_2(n+1) = (\text{neg}_2)^{2n} g_1(n+1). \end{cases}$$

Dan is g_2 recursief, $g_2|W \subset W_2$, g_2 heeft de eigenschap $(*_2)$ die uit $(*_0)$ verkregen wordt door iedere g_0 door g_2 te vervangen, en g_2 is bovendien strikt monotoon.

Uit de dekpuntsstelling volgt dat er een strikt monotone recursieve functie t bestaat zodanig dat voor alle i

$$x \in \omega_{t(i)} \iff [i \in R_1 \wedge x = g_2(t(i))] \vee [i \in T_1 \wedge x = \text{neg}_2 g_2(t(i))].$$

Ook de functie $f = g_2 \circ t$ is weer strikt monotoon en recursief, terwijl zeker $f[W_1] \subset W_2$. Deze f voldoet ook aan de verder gestelde voorwaarden (ii), (iii) en (iv).

$$(ii) \quad f[T_1] \subset T_2.$$

Stel $i \in T_1$. Dan $\omega_{t(i)} = \{\text{neg}_2 g_2(t(i))\}$. Te bewijzen: $f(i) = g_2(t(i)) \in T_2$, of, hiermee gelijkwaardig: $\text{neg}_2 g_2(t(i)) \in R_2$. Stel dit ware niet het geval; daar $\langle \alpha, B \rangle$ essentieel consistent is was dan $\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_{t(i)})$ consistent, en er zou volgen

$$(!) \quad g_2(t(i)) \notin T(\alpha, B; \omega_{t(i)}) \vee R(\alpha, B; \omega_{t(i)}).$$

We weten echter dat $g_2(t(i)) \in R(\alpha, B; \omega_{t(i)})$: tegenspraak.

$$(iii) \quad f[R_1] \subset R_2.$$

Stel $i \in R_1$. Dan $\omega_{t(i)} = \{g_2(t(i))\}$. Te bewijzen: $f(i) = g_2(t(i)) \in R_2$. Stel niet; dan is $\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_{t(i)})$ consistent, met $g_2(t(i)) \in T(\alpha, B; \omega_{t(i)})$, in strijd met (!)

$$(iv) \quad f[W_1 \setminus (R_1 \cup T_1)] \subset W_2 \setminus (R_2 \cup T_2).$$

Stel $i \in W_1 \setminus (R_1 \cup T_1)$. Dan is $\omega_{t(i)} = \emptyset \subset W_2$, en dus is zeker $\omega_{t(i)}$ consistent met $\langle \alpha, B \rangle$, zodat

$$f(i) = g_2(t(i)) \in W_2 \setminus [T(\alpha, B; \omega_{t(i)}) \vee R(\alpha, B; \omega_{t(i)})] =$$

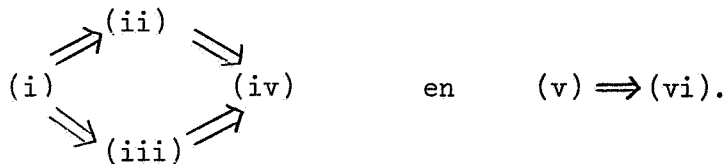
$$= W_2 \setminus (T_2 \cup R_2).$$

Stelling 1. Zij $\mathcal{T}$ een (essentieel consistente) theorie. De volgende uitspraken over $\mathcal{T}$ zijn alle equivalent:

- (i) iedere presentatie van $\mathcal{T}$ is e.u. ;
- (ii) $\mathcal{T}$ is (e.u.) (d.w.z. tenminste één presentatie van $\mathcal{T}$ is e.u.);
- (iii) iedere presentatie van $\mathcal{T}$ is z.e.u. ;
- (iv) $\mathcal{T}$ is z.e.u. ;
- (v) $\mathcal{T}$ is e.o. ;
- (vi) $\mathcal{T}$ is c.e.o.

Bewijs.

Het is evident (zeker na §2 opm. 1) dat



We behoeven dus slechts aan te tonen dat $(iv) \Rightarrow (v)$ en $(vi) \Rightarrow (i)$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Zij $\mathcal{T}_0$ de e.o. theorie uit § 2 voorbeeld (b), en zij $\mathcal{T}$ z.e.u. Volgens lemma 1 is er een strikt monotone recursieve f met $f[\mathbb{N}] \subset W$, $f[T_0] \subset T$, $f[R_0] \subset R$ en $f[\mathbb{N} \setminus (T_0 \cup R_0)] \subset W \setminus (T \cup R)$.

Zij h de e.o.f. voor (T_0, R_0) aangegeven in § 2, en zij g een recursieve functie met, voor elke i ,

$$x \in \omega_{g(i)} \iff f(x) \in \omega_i$$

(de existentie van zo'n g volgt o.a. uit de dekpuntsstelling).

We definiëren een recursieve functie t als volgt:

$$t = \lambda i j. f(h(g(i), g(j))).$$

Bewering: t is een e.o.f. voor $\mathcal{T}$. Inderdaad: stel $T \subset \omega_i$, $R \subset \omega_j$ en $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$. We moeten aantonen: $t(i, j) \notin \omega_i \cup \omega_j$. Neem bijv. aan dat $t(i, j) \in \omega_i$, d.w.z. $f(h(g(i), g(j))) \in \omega_i$. Dan $h(g(i), g(j)) \in f^{-1}(\omega_i) = \omega_{g(i)}$. Dit is echter onmogelijk: $h(g(i), g(j)) \notin \omega_{g(i)} \cup \omega_{g(j)}$.

(N.B. $T \subset \omega_i \Rightarrow T_0 \subset \omega_{g(i)}$; evenzo $R_0 \subset \omega_{g(j)}$; en $\omega_{g(i)} \cap \omega_{g(j)} = \emptyset$).

(vi) $\Rightarrow$ (i). Stel nu $\mathcal{T}$ is c.e.o. ; zij (α, B) een presentatie voor $\mathcal{T}$. Zij g een recursieve functie met de eigenschap : als $\mathcal{T}^*$ een consistente uitbreiding is van $\mathcal{T}$, en $T^* = \omega_i$, $R^* = \omega_j$, dan $g(i,j) \in W \setminus (\omega_i \cup \omega_j)$.

Laat s, t recursieve functies zijn zodanig dat voor alle i

$$\omega_s(i) = T(\alpha, B; \omega_i),$$

$$\omega_t(i) = R(\alpha, B; \omega_i).$$

Definieer $f = \lambda i. g(s(i), t(i))$. Dan is f recursief, en als $\omega_i \subset W$ en $T(\alpha, B; \omega_i) \cap R(\alpha, B; \omega_i) = \emptyset$, dan $f(i) \in W \setminus \{T(\alpha, B; \omega_i) \cup R(\alpha, B; \omega_i)\}$.

Dus (α, B) is e.u.

Gevolg. Iedere consistente uitbreiding van een z.e.u. theorie is e.u.

4. Behoud van negatie/implicatie.

Lemma 2 Als $\mathcal{T}$ een e.o. theorie is dan is (T^0, R^0) e.o. met betrekking tot W^0 .

Bewijs.

Er is een recursieve functie ψ zodanig dat

$$x \in W \Rightarrow \psi(x) \in W^0 \wedge x = \text{neg}^{(n)} \psi(x) \text{ (voor zekere } n),$$

omdat bij iedere $x \in W^0$ bepaald kan worden dat van de vorm $\text{neg}^{-n}(x)$ is.

Er is ook een recursieve functie s zodanig dat, voor elke i, j ,

$$\omega_s(i,j) = \{\text{neg}^{2n} x : x \in \omega_i \wedge n \in \mathbb{N}\} \cup \{\text{neg}^{2n+1} x : x \in \omega_j \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Aangezien $\mathcal{T}$ e.o. is bestaat er een recursieve e.o.f., g , voor (T, R) .

Zij nog h een recursieve functie zodanig dat, voor alle i ,

$$\omega_h(i) = \omega_i \cup (W \setminus W).$$

Wij definiëren een recursieve functie f als volgt:

$$f = \lambda i j \psi (g(h(s(i,j), s(j,i))))$$

Dan is $f[\mathbb{N} \times \mathbb{N}] \subset W^0$; en als $T^0 \subset \omega_i \subset W^0$, $R^0 \subset \omega_j \subset W^0$, $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, dan $T \subset \omega_s(i,j) \subset W$, $R \subset \omega_s(j,i) \subset W$ en $\omega_s(i,j) \cap \omega_s(j,i) = \emptyset$, en dus

$$g(h(s(i,j), s(j,i))) \in W \setminus \{\omega_{s(i,j)} \vee \omega_{s(j,i)}\},$$

en

$$f(i,j) = \psi(g(h(s(i,j), s(j,i)))) \in W \setminus (\omega_i \vee \omega_j).$$

Lemma 3. Stel α, β zijn disjuncte recursief opsombare deelverzamelingen van een recursieve verzameling γ . Indien (α, β) e.o. is m.b.t. γ , dan bestaat er een strikt monotone recursieve functie zodanig dat

$$\alpha \subset \omega_{K(n)} \subset \gamma \wedge \beta \subset \omega_{L(n)} \subset \gamma \implies f(n) \in \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \vee \omega_{L(n)}).$$

Bewijs.

Zij g een recursieve functie zodanig dat $\alpha \subset \omega_i \subset \gamma \wedge \beta \subset \omega_j \subset \gamma$ impliceert dat $g(i,j) \in \gamma \setminus (\omega_i \vee \omega_j)$. Zij verder h een recursieve functie zodanig dat voor alle i, j

$$x \in \omega_{h(i,j)} \iff x \in \omega_i \vee \left[\bigvee_{n=1}^j (x+1 = nG1j) \right]$$

Wij definiëren een recursieve functie $\mathcal{S}$ (door recursie) als volgt:

$$\mathcal{S}(0, n) = g(K(n), L(n)) ;$$

$$\mathcal{S}(m+1, n) = g(h(K(n), \prod_{t=0}^m \text{Pr}(t+1)^{\mathcal{S}(t, n)+1}), L(n))$$

Zij r de recursieve functie

$$r = \lambda x y. \mu m \left[\bigvee_{k=0}^{m-1} (\mathcal{S}(k, x) = s(m, x)) \vee \mathcal{S}(m, x) > y \right]$$

Tenslotte zij f gedefinieerd door

$$f(0) = \mathcal{S}(0, 0)$$

$$f(n+1) = \max \{f(n) + 1, \mathcal{S}(r(n+1), f(n)), n+1\}$$

Dan is f strikt monotoon; we zullen aantonen dat deze f voldoet aan de gestelde eisen.

Zij daarom $\alpha \subset \omega_{K(n)} \subset \gamma \wedge \beta \subset \omega_{L(n)} \subset \gamma$, waar $n > 0$. In dat geval zal

$$s(0,n) = g(K(n), L(n)) \in \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)}) ;$$

$$s(1,n) = g(h(K(n), 2^{\beta(0,n)+1}), L(n)) \in$$

$$\in \gamma \setminus (\omega_{h(K(n), 2^{\beta(0,n)+1})} \cup \omega_{L(n)}) =$$

$$= \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)} \cup \{\beta(0,n)\}) ;$$

.....

$$\beta(m+1, n) \in \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)} \cup \{\beta(0,n), \beta(1,n), \dots, \beta(m,n)\}).$$

Hieruit volgt dat $\beta(m_1, n) \neq \beta(m_2, n)$ als $m_1 \neq m_2$, en dus ook dat $m'_n := r(n, f(n-1)) = \mu m [\beta(m,n) > f(n.1)]$.

Uit de definitie van f volgt dan dat

$$f(n) = \beta(m, n) \in \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)} \cup \{s(0,n), \dots, s(m-1,n)\})$$

$$\subset \gamma \setminus (\omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)}).$$

Lemma 4. Zij $\mathcal{T}_1$ consistent en $\mathcal{T}_2$ e.i. Er bestaat een strikt monotone recursieve functie $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodanig dat

$$g[W_1^0] \subset W_2^0 ;$$

$$g[T_1^0] \subset T_2^0 ;$$

$$g[R_1^0] \subset R_2^0 ;$$

$$g[W_1^0 \setminus (T_1^0 \cup R_1^0)] \subset W_2^0 \setminus (T_2^0 \cup R_2^0).$$

Bewijs.

Volgens lemma 2 is (T_2^0, R_2^0) e.o. met betrekking tot W_2^0 . Volgens lemma 3 bestaat er dus een strikt monotone recursieve functie f zodanig dat

$$T_2^0 \subset \omega_{K(n)} \subset W_2^0 \wedge R_2^0 \subset \omega_{L(n)} \subset W_2^0 \implies f(n) \in W_2^0 \setminus \omega_{K(n)} \cup \omega_{L(n)}$$

Toepassing van de dekpuntsstelling (in een iets algemenere vorm dan we tot nu toe gebruiken; het bewijs op pag. 52 is echter gemakkelijk aan te passen) levert ons een strikt monotone, primitief recursieve functie t die voldoet aan

$$\begin{cases} x \in \omega_L(t(i)) \iff [i \in T_1^0 \wedge x = f(t(i)) \wedge x \in W_2^0] \vee x \in R_2^0 ; \\ x \in \omega_K(t(i)) \iff [i \in R_1^0 \wedge x = f(t(i)) \wedge x \in W_2^0] \vee x \in T_2^0 . \end{cases}$$

Zij $g = \lambda i. f(t(i))$. Dan is g de gezochte (kennelijk strikt monotone recursieve) afbeelding. Immers

$$(i) \quad i \in T_1^0 \implies R_2^0 \subset \omega_L(t(i)) \subset \{f(t(i))\} \cup R_2^0 \wedge \omega_K(t(i)) = T_2^0 \implies$$

$$\implies f(t(i)) \notin W_2^0 \setminus (\omega_K(t(i)) \cup \omega_L(t(i))) \implies g(i) = f(t(i)) \in T_2^0.$$

$$(ii) \quad i \in R_1^0 \implies \omega_L(t(i)) = R_2^0 \wedge T_2^0 \subset \omega_K(t(i)) \subset \{f(t(i))\} \cup T_2^0 \implies$$

$$f(t(i)) \notin W_2^0 \setminus (\omega_K(t(i)) \cup \omega_L(t(i))) \implies g(i) = f(t(i)) \in R_2^0.$$

$$(iii) \quad i \in W_1^0 \setminus (T_1^0 \cup R_1^0) \implies \omega_L(t(i)) = R_2^0 \wedge \omega_K(t(i)) = T_2^0 \implies$$

$$\implies g(i) = f(t(i)) \in W_2^0 \setminus (T_2^0 \cup R_2^0).$$

Uit (i), (ii) en (iii) volgt: $i \in W_1^0 \implies g(i) \in W_2^0$.

Eveneens met de methoden van MYHILL kan men (inderdaad!) bewijzen:

Lemma 5. Als $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ beide e.o. theorieën zijn, dan is er een strikt monotone recursieve g zodanig dat

$$g[W_1^0] = W_2^0 ;$$

$$g[T_1^0] = T_2^0 ;$$

$$g[R_1^0] = R_2^0 ;$$

$$g[W_1^0 \setminus (T_1^0 \cup R_1^0)] = W_2^0 \setminus (T_2^0 \cup R_2^0).$$

Van het bewijs van Lemma 5 (dat mede berust op lemma 4) zien wij hier af.

Stelling 2. Zij $\mathcal{T}_1$ een consistente theorie en $\mathcal{T}_2$ een e.o. theorie. Dan is er een strikt monotone recursieve functie f met de volgende eigenschappen:

- (i) $f[\overline{W}_1] \subset W_2$;
- (ii) $f[\overline{T}_1] \subset T_2$;
- (iii) $f[\overline{R}_1] \subset R_2$;
- (iv) $f[\overline{W}_1 \setminus (T_1 \cup R_1)] \subset W_2 \setminus (T_2 \cup R_2)$.

en bovendien

$$(v) \quad \phi \in W_1 \implies f(\text{neg}_1 \phi) = \text{neg}_2 f(\phi).$$

Bewijs.

Zij f_0 een functie als beschreven in lemma 4, en zij ψ een recursieve functie zodanig dat

$$x \in W_1 \implies \psi(x) \in W_1^0 \wedge x = \text{neg}_1^n \psi(x) \text{ voor zekere } n$$

(cf. het bewijs van lemma 2.) Als we, voor $x \in W_1$ $v(x)$ definiëren als de exponent n zodanig dat $x = \text{neg}_1^{v(x)} \psi(x)$, dan is v effectief berekenbaar, dus (these van CHURCH) recursief. We definiëren, voor $x \in W_1$:

$$(*) \quad f(x) = \text{neg}_2^{v(x)} f_0(\psi(x)) ;$$

deze f is recursief en heeft de gevraagde eigenschappen.

Stelling 3. Stel $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ zijn beide e.o. Dan is er een strikt monotone recursieve functie f met de volgende eigenschappen:

- (i) $f[\overline{W}_1] = W_2$;
- (ii) $f[\overline{T}_1] = T_2$;
- (iii) $f[\overline{R}_1] = R_2$;
- (iv) $f[\overline{W}_1 \setminus (T_1 \cup R_1)] = W_2 \setminus (T_2 \cup R_2)$;
- (v) $\phi \in W_1 \implies f(\text{neg}_1 \phi) = \text{neg}_2 f(\phi)$.

Bewijs.

Zij f_0 een functie als beschreven in lemma 5 ; dan kan men weer f op W_1 definiëren door (*).

Men kan, naar aanleiding van "gewone" theorieën, een implicatie voor een theorie $\mathcal{T}$ definiëren als een recursieve functie

$$\text{imp} : F \times F \longrightarrow F$$

die in elk van zijn variabelen strikt monotoon is, en die daarbij aan speciale voorwaarden moet voldoen, zoals

$$\phi \in T \wedge \text{imp}(\phi, \psi) \in T \implies \psi \in T \quad (\text{modus ponens})$$

Er zijn e.o. theorieën $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ met implicatie zodanig dat geen enkele 1-1- duidige recursieve functie f met de in stelling 3 beschreven eigenschappen ook nog imp invariant laat.

Voorbeeld.

Stel (α, β) is een e.o. verzamelingepaar, met $0 \notin \alpha \cup \beta$ en $1 \notin \alpha \cup \beta$. Zij $\mathcal{P}$ een propositielogica met een aftelbaar oneindige rij atomaire proposities $P_0, P_1, P_2, \dots$, met een of ander volledig stelsel axiomata (b.v. alle tautologieën), en met modus ponens als enige bewijsregel. Zij $\mathcal{P}_a$ de "theorie" (we gebruiken "theorie" hier in de meer gebruikelijke zin, niet in de technische interpretatie van def. 1) die uit $\mathcal{P}$ ontstaat door toevoeging van de axiomata

$$P_n \quad (n \in \alpha) \quad ; \quad \neg P_n \quad (n \in \beta) .$$

Zij $\mathcal{P}_b$ de "theorie" die uit $\mathcal{P}_a$ ontstaat door toevoeging van het axioma

$$P_0 \longrightarrow P_1$$

Zij $\mathcal{T}_1$ de Gödelgetal - vertaling van $\mathcal{P}_b$, en $\mathcal{T}_2$ de Gödelgetal - versie van $\mathcal{P}_a$. Daarbij zij $\pi(n)$ het Gödelgetal van P_n (natuurlijk is π recursief); als verder ϕ_i het Gödelgetal is van een formule F_i ($i = 1, 2$) dan zij $\neg \phi_i$ het Gödelgetal van " $\neg F_i$ " en $\text{imp}(\phi_1, \phi_2)$ het Gödelgetal van " $F_1 \longrightarrow F_2$ ".

De theorieën $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ zijn e.o. ; er is immers een recursieve functie g zodanig dat $\alpha \subset \omega_i \wedge \beta \subset \omega_j \wedge \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \implies g(i, j) \notin \omega_i \cup \omega_j$.

Als nu s een recursieve functie is zodanig dat

$$n \leftarrow \omega_{s(i)} \iff \pi(n) \in \omega_i$$

dan zal $T_1 \subset \omega_i$ of $T_2 \subset \omega_i \implies \alpha \subset \omega_{s(i)}$, en evenzo $R_1 \subset \omega_j$ of $R_2 \subset \omega_j \implies \beta \subset \omega_{s(j)}$. Als bovendien $\omega_i \wedge \omega_j = \emptyset$, dan $\omega_{s(i)} \wedge \omega_{s(j)} = \emptyset$, dus $g(s(i), s(j)) \notin \omega_{s(i)} \cup \omega_{s(j)}$, dus

$$\pi(g(s(i), s(j))) \notin \omega_i \cup \omega_j.$$

Stel nu f is een 1-1- duidige recursieve functie f met de in stelling 3 opgesomde eigenschappen (i) - (v). We zullen aantonen dat f dan imp niet invariant laat. Stel nl. dat wèl altijd

$$f(\text{imp}(\phi_1, \phi_2)) = \text{imp}(f(\phi_1), f(\phi_2)).$$

Daar zowel in W_1 als in W_2 de $\pi(n)$ precies de getallen zijn die niet te schrijven zijn in de vorm $\text{neg}(k)$ of $\text{imp}(k_1, k_2)$ met $k, k_1, k_2 \in W_1$ resp. W_2 , volgt dat iedere $f(\pi(n))$ zelf een $\pi(m)$ is. I.h.b. zij $f(\pi(0)) = \pi(m_0)$ en $f(\pi(1)) = \pi(m_1)$. Dan

$$f[-T_1] \ni f(\text{imp}(\pi(0), \pi(1))) = \text{imp}(\pi(m_0), \pi(m_1)) \notin T_2,$$

in tegenspraak met de aanname dat $f[-T_1] = T_2$.

5. Theorieën met fragmenten van de rekenkunde.

In dit laatste gedeelte beschouwen we speciale theorieën, die interpreteerbaar zijn als fragmenten van de rekenkunde. Laten we uitgaan van de formele taal L van pag. 34 e.v. Deze taal is uit te breiden door toevoeging van predicaat-variabelen; men kan bijvoorbeeld definiëren

$$P_n^m = 2^8 \cdot 3^{m+1} \cdot 5^{n+1}$$

(lees: de n -de m -tallige predicaat-variabele) en, als $m > 0$,

$$P_n^m(V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_m}) = 2^9 \cdot 3^{P_n^m} \cdot 5^{V_{i_1}} \cdot \dots \cdot p_{m+2}^{V_{i_m}}.$$

Daarnaast kan men nog constanten van allerlei aard toevoegen.

In de syntaxis zullen dan ook de klassen TERM, FORM etc. uitgebreid worden. Wij beschouwen hier nu theorieën $\mathcal{T} \langle F, W, T, \text{neg} \rangle$ waarbij F de verzameling FORM is in zo'n uitbreiding van de formele taal L, W de deelklasse van F bestaande uit alle volzinnen (formules zonder vrije term-variabelen), T de verzameling van alle theoremata van een in deze taal geformuleerde axiomatische theorie, en neg de functie $\neg$.

Laten we een dergelijke theorie een normale theorie noemen, en een presentatie ervan via een uitbreiding van een der gebruikelijke axiomastelsels voor de predicaatenlogica met gelijkheid, en de gebruikelijke bewijsregels, een normale presentatie.

We definiëren representeerbaarheid van een functie in een normale theorie $\mathcal{T}$ ietwat anders dan op pag. 43 :

Definitie 11. Een functie f (van één variabele) heet representeerbaar in een normale theorie $\mathcal{T}$ als er een $\phi \in F$ bestaat met precies twee vrije variabelen μ, σ , zodanig dat voor alle n en p

- (i) $f(n) = p \implies \phi(\underline{n}, \underline{p}) \in T$;
- (ii) $f(n) \neq p \implies \phi(\underline{n}, \underline{p}) \in R$;
- (iii) $\bigwedge u \bigwedge v \{ \phi(\underline{n}, u) \wedge \phi(\underline{n}, v) \rightarrow u = v \} \in T$.

Stelling 4. Zij $\mathcal{T}$ een normale theorie waarin de axiomata R_4^n en R_5^n (pag. 42) gelden, en waarin iedere primitief recursieve functie f van één variabele gerepresenteerd kan worden, en zij $\langle \alpha, B \rangle$ een normale presentatie van $\mathcal{T}$. Dan is er een $\phi \in F$ (met één vrije variabele) met de volgende eigenschap:

$$\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_i) \text{ consistent} \implies \phi(i) \in W \setminus \{T(\alpha, B; \omega_i) \cup R(\alpha, B; \omega_i)\}.$$

Bewijs.

Zij (α, β) het e.o. paar uit § 2 voorbeeld (a), met primitief recursieve e.o.f. g, en stel a, b zijn primitief recursieve functies met $a[\mathbb{N}] = \alpha$ en $b[\mathbb{N}] = \beta$ (cf. hoofdstuk 4 § 1). Laat A, B $\in F$ resp. a en b representeren in $\mathcal{T}$, en laat

$$\Psi(y) \equiv \bigvee_x \{ A(x, y) \wedge \bigwedge z (z \leq x \rightarrow \neg B(x, z)) \}.$$

We willen aantonen dat

$$n \in \alpha \implies \psi(\underline{n}) \in T \quad ; \quad n \in \beta \implies \neg \psi(\underline{n}) \in T.$$

Neem eerst aan dat $n \in \alpha$. Dan is er een k_0 met $a(k_0) = n$, terwijl (voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt: $b(k) \neq n$ (immers $b(k) \in \beta$ en $\alpha \cap \beta = \emptyset$). Er volgt dat

$$A(\underline{k}_0, \underline{n}) \in T$$

en, voor alle k ,

$$\neg B(\underline{k}, \underline{n}) \in T \quad ;$$

met gebruikmaking van R_4^n volgt dat

$$\psi(\underline{n}) = \forall x \{A(x, \underline{n}) \wedge \bigwedge z (z \leq x \longrightarrow \neg B(z, \underline{n}))\} \in T.$$

Neem vervolgens aan dat $n \in \beta$. Dan $a(k) \neq n$ voor alle k terwijl $b(k_0) = n$ voor zekere k_0 , zodat voor alle k

$$\neg A(\underline{k}, \underline{n}) \in T$$

terwijl ook

$$B(\underline{k}_0, \underline{n}) \in T.$$

Trivialiter volgt dat

$$\underline{k}_0 \leq x \longrightarrow \{\underline{k}_0 \leq x \wedge B(\underline{k}_0, \underline{n})\}$$

Waar is, en dus ook

$$\underline{k}_0 \leq x \longrightarrow \forall z (z \leq x \wedge B(z, \underline{n})).$$

Ook is waar

$$x \leq k_0 \longrightarrow \neg A(x, \underline{n}),$$

en via axioma R_5^n volgt nu dat

$$\bigwedge x \{ \neg A(x, \underline{n}) \vee \forall z (z \leq x \wedge B(z, \underline{n})) \} \in T.$$

Dan ook

$$\psi(\underline{n}) = \neg \forall x \{ A(x, \underline{n}) \wedge \bigwedge z (z \leq x \longrightarrow \neg B(z, \underline{n})) \} \in T.$$

Wij definiëren nu

$$\alpha^* = \{n : \psi(\underline{n}) \in T\} \quad ; \quad \beta^* = \{n : \neg \psi(\underline{n}) \in T\}.$$

Dan geldt blijkbaar:

$$n \in \alpha^* \iff \Psi(\underline{n}) \in T$$

en evenzo

$$n \in \beta^* \iff \Psi(\underline{n}) \in R.$$

Wij nemen nu primitief recursieve functies t en z zodanig dat voor alle i, n :

$$n \in \omega_{t(i)} \iff \Psi(\underline{n}) \in T(\alpha, B; \omega_i),$$

$$n \in \omega_{r(i)} \iff \Psi(\underline{n}) \in R(\alpha, B; \omega_i);$$

hun existentie volgt o.a. uit de dekpuntsstelling. De primitief recursieve functie $\lambda i g(t(i), r(i))$ wordt in $\mathcal{T}$ gerepresenteerd door een formule $\Gamma(x, y)$; we definiëren

$$\Phi(x) \equiv \forall y (\Gamma(x, y) \wedge \Psi(y)).$$

Deze Φ heeft de gestelde eigenschap.

Zij nl. $\mathcal{T}(\alpha, B; \omega_i)$ consistent. Neem eerst eens aan dat $\Phi(\underline{i}) \in T(\alpha, B; \omega_i)$. Zij $k = g(t(i), r(i))$; dan zal

$$\Gamma(\underline{i}, \underline{k}) \in T \subset T(\alpha, B; \omega_i);$$

ook

$$\Phi(\underline{i}) = \forall y \{ \Gamma(\underline{i}, y) \wedge \Psi(y) \} \in T(\alpha, B; \omega_i),$$

en omdat (α, B) een normale presentatie is moet dan ook

$$\forall y \{ \Gamma(\underline{i}, y) \wedge \Gamma(\underline{i}, \underline{k}) \wedge \Psi(y) \} \in T(\alpha, B; \omega_i).$$

Onze definitie van representatie impliceert echter dat

$$\wedge y \{ \Gamma(\underline{i}, y) \wedge \Gamma(\underline{i}, \underline{k}) \rightarrow y = \underline{k} \} \in T \subset T(\alpha, B; \omega_i),$$

en dus zal

$$\Gamma(\underline{i}, \underline{k}) \wedge \Psi(\underline{k}) \in T(\alpha, B; \omega_i).$$

I.h.b. volgt dat $\Psi(\underline{k}) \in T(\alpha, B; \omega_i)$, en dus dat $k \in \omega_{t(i)}$. Maar dit in tegenspraak met het feit dat

$$k = g(t(i), r(i)) \notin \omega_{t(i)} \cup \omega_{r(i)}$$

(dit laatste is het geval omdat $\alpha \subset \alpha^* \subset \omega_{t(i)}$ en $\beta \subset \beta^* \subset \omega_{r(i)}$, terwijl uit de consistentie van $\mathcal{F}(\alpha, B; \omega_i)$ volgt dat $\omega_{t(i)} \cap \omega_{r(i)} = \emptyset$). Evenzo leidt de aanname dat $\Phi(\underline{i}) \in R(\alpha, B; \omega_i)$ tot het contradictoire resultaat $k \in \omega_{r(i)}$. Daarmee is dan bewezen dat inderdaad

$$\Phi(\underline{i}) \in W \setminus \{T(\alpha, B; \omega_i) \vee R(\alpha, B; \omega_i)\}.$$

Colloquium Recursieve Functies 1968-1969

Spreker: J.V.M. van der Grinten

Hoofdstuk 10: Sterke reduceerbaarheid.

(litt.: Hartley Rogers, Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill, 1967)

1. Inleiding

Bij het begin van de behandeling van gedeelten uit het boek van Rogers is het nodig enkele van zijn notaties te geven:

Rogers	Davis	betekenis
$\phi, \psi, \dots$		partiële functies
$f, g, \dots$		totale functies
C_A	$C_A(\text{Davis}) = 1 - C_A$	de karakteristieke functie van A: $C_A(x) = 1$ als $x \in A$ $C_A(x) = 0$ als $x \notin A$.
ϕ_x	$[x]_1$	de partieel recursieve functie in 1 var. met index x.
W_x	$\{x\}_1$	recursief opsombare verzameling, gegeven als domein van ϕ_x . $W_x = \omega_x$ (hoofdstuk 9).
τ, π_1, π_2	J, K, L	τ is de paarfunctie. $\pi_1(\tau(x, y)) = x; \pi_2(\tau(x, y)) = y.$
$\langle x, y \rangle$		$\tau(x, y)$
K	K	$\{x \mid x \in W_x\}$
K_0		$\{\langle x, y \rangle \mid x \in W_y\}$

Het begrip reduceerbaarheid kunnen we als volgt informeel benaderen:

Probleem X heet reduceerbaar tot probleem Y als een oplossing voor Y ook effectief een oplossing voor X oplevert. Beschouwen we nu het beslissingsprobleem voor verzamelingen $A \subset \mathbb{N}$ en $B \subset \mathbb{N}$, dan heet het beslissingsprobleem voor A reduceerbaar tot het beslissingsprobleem voor B of kortweg:

A reduceerbaar tot B, als voor elke x het antwoord op de vraag " $x \in A$?" effectief verkregen wordt m.b.v. de veronderstelde oplossing van het beslissingsprobleem voor B.

Notatie: $A \leq_r B$. De relatie $\leq_r$ is reflexief en transitief. Als $A \leq_r B$ & $B \leq_r A$ dan zeggen we: A is r-equivalent met B.

Notatie: $A \equiv_r B$. De relatie $\equiv_r$ is een equivalentierelatie. Voor iedere A heet de equivalentieklasse $d(A) = \{B \mid B \equiv_r A\}$ de graad van onoplosbaarheid van A m.b.t. $\leq_r$ of de r-graad van onoplosbaarheid van A. Men kan zeggen: A heeft de r-graad $d(A)$, of: A ligt in de r-graad $d(A)$.

De partiële ordening van de r-graden van onoplosbaarheid heet de r-reduceerbaarheidsordening.

Voor recursief opsombare (r.o) verzamelingen kunnen we nog invoeren:

A is volledig m.b.t. $\leq_r$ of: A is r-volledig als:

1. A is r.o.
2. $(\forall B) [B \text{ is r.o.} \implies B \leq_r A]$.

M.a.w. A is r-volledig als A onder de r.o. verzamelingen de hoogste r-graad van onoplosbaarheid heeft.

In het vervolg zal de relatie $\leq_r$ op verschillende manieren gepreciseerd worden: $\leq_r$ wordt achtereenvolgens vervangen door $\leq_1$, $\leq_m$, $\leq_{tt}$ en $\leq_T$.

2. M-reduceerbaarheid en 1-reduceerbaarheid.

Definitie 1. A is 1-reduceerbaar tot B (notatie: $A \leq_1 B$) als er een 1-1 recursieve functie f is zodanig dat: $(\forall x) [x \in A \iff f(x) \in B]$.

Definitie 2. A is m-reduceerbaar tot B (notatie: $A \leq_m B$) als er een recursieve functie f is zodanig dat: $(\forall x) [x \in A \iff f(x) \in B]$.

Opmerking: $\leq_1$ en $\leq_m$ staan in het engels voor one-one reducible resp. many-one reducible. Zij heten de sterke reduceerbaarheidsordeningen.

Definitie 3. A is 1-equivalent met B (notatie: $A \equiv_1 B$) als $A \leq_1 B$ & $B \leq_1 A$.

Definitie 4. A is m-equivalent met B (notatie: $A \equiv_m B$) als $A \leq_m B$ & $B \leq_m A$.

Voorbeeld 1. Zij $A = \{x \mid W_x \text{ is oneindig}\}$ en $B = \{x \mid \phi_x \text{ is totaal}\}$.

Dan geldt: $A \equiv_m B$.

Voor het bewijs hebben we een versterking nodig van de op p.74 genoemde eigenschap dat er een recursieve functie g is met $(\forall x) [\mathcal{R}\phi_{g(x)} = \mathcal{D}\phi_x]$.

Lemma 1. Er is een recursieve functie f zodanig dat voor alle x geldt: $\phi_{f(x)}$ is een 1-1 partieel recursieve functie $\mathcal{R}\phi_{f(x)} = \mathcal{D}\phi_x$, en $\mathcal{D}\phi_{f(x)}$ is een beginsegment van N.

Bewijs. Een geschikt gekozen procédé, bv. dat op p.74, om de berekeningen voor $\phi_x(0), \phi_x(1), \phi_x(2), \dots$ in zekere zin tegelijk uit te voeren, een zogenaamd "dovetailing"-procédé, maakt dat alle afbrekende berekeningen na een eindig aantal dovetailing-stappen en in welbepaalde volgorde klaarkomen.

Definieer nu de functie η door aan $\eta(0), \eta(1), \eta(2), \dots$ als waarde resp. het $1^e, 2^e, 3^e, \dots$ element uit $\mathcal{D}\phi_x$ in de bovengenoemde volgorde te geven. η is partieel recursief (These van Church). Omdat de instructies voor η uniform van x afhangen is er een godelnummer a zodanig, dat $\eta(n) = \phi_a^{(2)}(x, n)$ voor alle n. Uit de iteratiestelling volgt nu dat er een recursieve functie f is zodanig, dat $\eta(n) = \phi_{f(x)}(n)$. $\phi_{f(x)}$ heeft de gewenste eigenschappen.

Bewijs van voorbeeld 1.

1. $A \leq_m B$. Neem voor f de functie uit Lemma 1 dan geldt voor iedere x:

W_x is oneindig $\iff \phi_{f(x)}$ is totaal; en dus: $x \in A \iff f(x) \in B$.

2. $B \leq_m A$. Definieer bij gegeven x een functie ψ als volgt:

$$\psi(n) = \begin{cases} 1 & \text{als geldt: } \bigwedge_{k \leq n} k \in W_x \\ \text{ongedefinieerd} & \text{overigens.} \end{cases}$$

Juist als bij Lemma 1 volgt dat ψ partieel recursief is en gelijk is aan

$\phi_{f'(x)}$ waarbij f' recursief is. Voor iedere x geldt nu:

ϕ_x is totaal $\iff W_{f'(x)}$ is oneindig; en dus: $x \in B \iff f'(x) \in A$

Stelling 1. a. $\leq_1$ en $\leq_m$ zijn reflexief en transitief

b. $A \leq_1 B \implies A \leq_m B$

c. $A \leq_1 B \implies \bar{A} \leq_1 \bar{B}$

d. $A \leq_m B \implies \bar{A} \leq_m \bar{B}$

e. $A \leq_m B$ & B recursief $\implies A$ recursief.

f. $A \leq_m B$ & B r.o. $\implies A$ r.o.

g. $A \leq_1 B$ & B recursief $\implies A$ recursief

h. $A \leq_1 B$ & B r.o. $\implies A$ r.o.

Bewijs. a, b, c, d, zijn triviaal.

e. Stel $A \leq_m B$ d.m.v. f dan geldt $C_A = C_B \circ f$ en C_B rec. $\implies C_A$ rec.

f. Stel $A \leq_m B$ d.m.v. f dan geldt: $A = f^{-1}(B)$

B r.o. $\implies B = \mathcal{D}\psi$ voor zekere partieel recursieve $\psi \implies A = \mathcal{D}\psi f \implies A$ r.o.

g en h volgen onmiddellijk uit b, e en f.

De equivalentieklassen t.o.v. $\equiv_1$ en $\equiv_m$ heten 1-graden resp. m-graden. Uit stelling 1 blijkt dat alle verzamelingen die in een van de sterke reduceerbaarheidsordeningen beneden een recursieve of recursief opsombare verzameling liggen zelf recursief resp. recursief opsombaar zijn. Als direct gevolg geldt nu: wanneer een graad één recursieve of r.o. verzameling bevat, dan bevat hij uitsluitend recursieve resp. r.o. verzamelingen en heet daarom recursieve graad resp. r.o. graad.

Stelling 2. a. Er zijn $\aleph_0$ recursieve 1-graden.

b. N en ϕ zijn onvergelijkbaar m.b.t. $\leq_m$

c. A rec. & $B \neq \phi$ & $B \neq N \implies A \leq_m B$

d. Er zijn 3 recursieve m-graden.

Bewijs. a. Voor eindige recursieve verzamelingen A en B waarbij de machtigheid van A groter is dan die van B geldt: $A \not\leq_1 B$. Er zijn dus minstens $\aleph_0$ (en dus precies $\aleph_0$) recursieve 1-graden.

b. Triviaal.

c. Definieer f als volgt: $f(x) = p \cdot C_A(x) + p' \cdot (1 - C_A(x))$, waarbij p en p' de kleinste elementen van B resp. $\bar{B}$ zijn dan geldt: $x \in A \iff f(x) \in B$.

d. volgt uit b en c.

Definitie 5. $A \text{ join } B = \{y \mid \exists x(y=2x \& x \in A)\} \cup \{y \mid \exists x(y=2x+1 \& x \in B)\}$.

Stelling 3. a. De m -reduceerbaarheidsordening is een bovenhalftralie.

b. De r.o. graden vormen een bovenhalftralie in de m -red.ordening.

Bewijs. a. 1. $A \leq_m A \text{ join } B$ d.m.v. $\lambda x:2x$; $B \leq_m A \text{ join } B$ d.m.v. $\lambda x:2x+1$

2. Stel $A \leq_m C$ d.m.v. f en $B \leq_m C$ d.m.v. g .

Definieer h door:
$$\begin{cases} h(2x) = f(x) \\ h(2x+1) = g(x) \end{cases}$$
 Dan geldt: $A \text{ join } B \leq_m C$ d.m.v. h .

Dus $d(A \text{ join } B) = \sup(d(A), d(B))$.

b. Te bewijzen: A r.o. & B r.o. $\implies A \text{ join } B$ r.o. Dit volgt direct uit definitie 5.

Opmerking: de 1-reduceerbaarheidsordening is geen bovenhalftralie.

Stelling 4. (Myhill) $A \equiv B \iff A \equiv_1 B$.

Voor het bewijs hebben we een definitie en een lemma nodig.

Definitie 6. Een eindige correspondentie tussen A en B is een 1-1-correspondentie tussen een eindig aantal elementen van A en B en tussen een eindig aantal elementen van $\bar{A}$ en $\bar{B}$ (zie ook p.72).

Lemma 2. Zij $A \leq_1 B$ dan is iedere eindige correspondentie tussen A en B effectief met een paar uit te breiden tot een nieuwe eindige correspondentie tussen A en B .

Bewijs. Zij $A \leq_1 B$ d.m.v. f en een eindige correspondentie tussen A en B gegeven door $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ met $x_i \in A \iff y_i \in B$. Beschouw x' met $x' \neq x_i$ ($i=1, \dots, n$). Daar f 1-1 is zijn de beelden van $x_1, \dots, x_n, x'$ onder f alle verschillend. Neem als y' het eerste beeld onder f verschillend van $y_1, \dots, y_n$ dat men vindt: bepaal eerst $f(x')$; is $f(x') = y_{k_1}$, bepaal dan $f(x_{k_1})$; enzovoorts eventueel tot $f(x_{k_n})$.

Bewijs van Stelling 4.

$\implies$: Zij $A \equiv B$ d.m.v. f d.w.z. f is 1-1 op N en $f(A) = \bar{B}$ (zie p.71 voor definitie)

Dus $A \leq_1 B$. Ook f^{-1} is een recursieve permutatie, dus $f^{-1}(B) = A$ en $B \leq_1 A$.

$\Leftarrow$: Zij $A \leq_1 B$ d.m.v. g en $B \leq_1 A$ d.m.v. h . Gevraagd een recursieve permutatie p die A op B afbeeldt. We maken p als lijst van paren door een eindige correspondentie tussen A en B steeds uit te breiden:

stap 0 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Begin de lijst met:} & (0, g(0)) \\ \text{Is } g(0) \neq 0, \text{ voeg dan toe:} & (x_0, 0) \end{array} \right.$

stap k $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Is } k \text{ als linkerelement afwezig, voeg dan toe:} & (k, y_k) \\ \text{Is } k \text{ als rechterelement afwezig, voeg dan toe:} & (x_k, k) \end{array} \right.$

y_k is het bij k behorende rechterelement, m.b.v. g en lemma 2 bepaald.

x_k is het bij k behorende linkerelement, m.b.v. h en lemma 2 bepaald.

3. 1-volledigheid en m -volledigheid

Definitie 7. A is 1-volledig als: A r.o. & $(\forall B)[B \text{ r.o.} \Rightarrow B \leq_1 A]$

Definitie 8. A is m -volledig als: A r.o. & $(\forall B)[B \text{ r.o.} \Rightarrow B \leq_m A]$

Stelling 5. K_0 is 1-volledig.

Bewijs Zij U het domein van de universele Turingmachine dwz. $U = \{(x, y) | x \in W_y\}$.

Er geldt $K_0 = \tau(U)$ dus K_0 is r.o. Zij B een willekeurige r.o. verzameling.

$B = W_{y_0}$ voor zekere y_0 . Dan geldt: $(\forall x)[x \in B \Leftrightarrow \langle x, y_0 \rangle \in K_0]$. $\tau(x, y)$ is recursief en 1-1 op N in 2 variabelen, dus $\tau(x, y_0)$ is recursief en 1-1 in N in x . Dus $B \leq_1 K_0$ d.m.v.: $f(x) = \tau(x, y_0)$.

Stelling 6. K is 1-volledig.

Bewijs a. We bewijzen $K_0 \leq_m K$. Definieer een functie ψ als volgt:

$$\psi(x, z) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \in K_0 & \text{voor alle } z. \\ \text{ongedefinieerd als } x \notin K_0 & \text{voor alle } z. \end{cases}$$

Merk op dat de waarde van ψ niet van z afhangt.

Zij $K_0 = W_{k_0}$. Om $\psi(x, z)$ te berekenen heeft men slechts $\phi_{k_0}(x)$ te berekenen.

ψ is dus partieel recursief. Verder is er volgens de iteratiestelling een recursieve functie f met $\psi(x, z) = \phi_{f(x)}(z)$.

Resultaat: $x \in K_0 \Leftrightarrow f(x) \in W_{f(x)} \Leftrightarrow f(x) \in K$ en dus $K_0 \leq_m K$.

b. Als nu f niet 1-1 is dan vervangen we f als volgt door f^* . Zij $h(x, y)$ een recursieve functie met voor alle x de eigenschap: $h(x, y) > y$ en $W_{h(x, y)} = W_x$ voor alle y .

Definieer nu f^* door:
$$\begin{cases} f^*(0) = f(0) \\ f^*(x+1) = h(f(x+1), f^*(x)) \end{cases}$$

f^* is streng monotoon dus 1-1, en recursief. Weer geldt:

$x \in K_0 \iff f^*(x) \in W_{f(x)} \iff f^*(x) \in W_{f^*(x)} \iff f^*(x) \in K$, en dus $K_0 \leq_1 K$.

Definitie 9. D_x is de eindige verzameling met canonieke index x

dwz.
$$\begin{cases} D_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \iff x = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n}. \\ D_0 = \phi. \end{cases}$$

Lemma 3. Als $K \leq_m A$ en A is r.o. dan is er een recursieve functie g zodanig, dat voor alle x geldt:

$$\begin{cases} D_x \neq \phi \ \& \ D_x \subset A \implies g(x) \in A - D_x \\ D_x \neq \phi \ \& \ D_x \subset \bar{A} \implies g(x) \in \bar{A} - D_x \end{cases}$$

Bewijs

1. Zij $K \leq_m A$ d.m.v. f dan is $f(K)$ oneindig want $f(K)$ eindig zou impliceren K recursief (st. 1 e)
2. K is r.o. dus er is een recursieve functie die K opsomt. Door compositie met f ontstaat een recursieve functie die $f(K)$ opsomt.
3. Definieer nu ψ als volgt:

$$\psi(x, z) = \begin{cases} f(z) \text{ als } D_x \cap A \neq \phi \\ f(z) \text{ als } D_x \cap A = \phi \ \& \ f(z) \in D_x \\ \text{ongedefinieerd overigens.} \end{cases}$$

A is r.o. dus $D_x \cap A = \phi$ is een r.o. predicaat. Dus ψ is volgens de These van Church partieel recursief en volgens de iteratiestelling is er een recursieve functie h met $\psi(x, z) = \phi_{h(x)}(z)$ dwz. $\mathcal{D}\psi = W_{h(x)}$.

We hebben nu: $W_{h(x)} = \begin{cases} N & \text{als } D_x \cap A \neq \phi \\ f^{-1}(D_x) & \text{als } D_x \cap A = \phi \end{cases}$

4. Bij gegeven D_x definiëren we g als volgt:

$$g(x) = \begin{cases} fh(x), \text{ als } fh(x) \notin D_x \\ \text{het eerst gevonden element } y \text{ in de opsomming van } f(K) \\ \text{waarvoor geldt: } y \notin D_x, \text{ als } fh(x) \in D_x \end{cases}$$

g is recursief en voor alle x geldt: $g(x) \notin D_x$. Verder geldt:

$$[D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A] \implies W_{h(x)} = N \implies h(x) \in W_{h(x)} \implies h(x) \in K \implies g(x) \in A$$

en ook:

$$[D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A}] \implies W_{h(x)} = f^{-1}(D_x) \stackrel{*}{\implies} h(x) \notin f^{-1}(D_x) \\ \implies [h(x) \notin W_{h(x)} \ \& \ fh(x) \notin D_x] \implies [h(x) \in K \ \& \ fh(x) \notin D_x] \implies g(x) \in \bar{A}.$$

Stelling 7 A m -volledig $\iff A$ 1 -volledig.

Bewijs $\Leftarrow$: Triviaal

$\Rightarrow$: Stel A is m -volledig. Dan is A r.o. en er is een recursieve functie f zodat $K \leq_m A$ d.m.v. f . Vanwege stelling 6 is het nu voldoende aan te tonen dat $K \leq_1 A$.

Definieer f^1 als volgt:

$$1. f^1(0) = f(0)$$

$$\text{Stel } D_{x_n} = \{f^1(0), f^1(1), \dots, f^1(n)\}.$$

$$2. f^1(n+1) = f(n+1) \text{ als } f(n+1) \notin D_{x_n}$$

D_{x_n} kan dus elementen uit A zowel als $\bar{A}$ bevatten. Als $f(n+1) \in D_{x_n}$ dan gebruiken we lemma 3:

Stel $D_{x_0} = \{f(n+1)\}$. Bereken $g(x_0)$. Als $g(x_0) \notin D_{x_n}$ dan $f^1(n+1) = g(x_0)$.

Stel anders $D_{x_1} = \{f(n+1), g(x_0)\}$ en bereken $g(x_1)$; $g(x_1) \notin D_{x_n} \implies f^1(n+1) = g(x_1)$.

Zet anders dit proces voort.

Er is zeker een k met: $k < n$ en $D_{x_k} = \{f(n+1), g(x_0), \dots, g(x_{k-1})\}$,

waarvoor geldt: $g(x_k) \notin D_{x_n}$. Dus definieer:

$$3. f^1(n+1) = g(x_k) \text{ als } f(n+1) \in D_{x_n}.$$

f^1 is recursief en 1 - 1 en voor alle n geldt: $n \in K \iff f(n) \in A \iff f^1(n) \in A$.

Dus $K \leq_1 A$ d.m.v. f^1 .

Samenvatting

a. Stelling 7 toont aan dat de m -volledige graad en de 1 -volledige graad samenvallen. Wegens Stelling 4 vormen zij één isomorfietype (equivalentieklasse t.o.v. $\equiv$) en wegens Stelling 6 geldt nu:

$$A \text{ } m\text{-volledig} \iff A \text{ } 1\text{-volledig} \iff A \equiv K.$$

*) want $h(x) \in f^{-1}(D_x) \implies h(x) \in K \implies fh(x) \in A$, en $h(x) \in f^{-1}(D_x) \implies fh(x) \in D_x$, zodat $D_x \cap A \neq \emptyset$ in strijd met $D_x \subset \bar{A}$.

b. Zij H de klasse der creatieve verzamelingen. In het hoofdstuk over creatieve verzamelingen is in feite al bewezen:

$$H = 1\text{-graad van } K = 1\text{-volledige graad.}$$

4. Cylinders.

Definitie 10. A is een cylinder als $A \equiv B \times N$ voor zekere B waarbij $B \times N = \tau(B, N)$ d.w.z. $B \times N = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in B \& y \in N \}$.

Stelling 8. a. $A \leq_1 A \times N$
 b. $A \times N \leq_m A$
 c. $A \equiv_m A \times N$
 d. A is cylinder $\iff (\forall B) [B \leq_m A \implies B \leq_1 A]$
 e. $A \leq_m B \iff A \times N \leq_1 B \times N$
 f. A is cylinder $\iff A \times N \leq_1 A \iff A \equiv A \times N$

Bewijs. a. d.m.v. $f(x) = \tau(x, 0)$

b. d.m.v. $f(x) = \pi_1(x)$.

c. Triviaal.

d. $\implies$: Zij $A \equiv C \times N$ en $B \leq_m A$. Dan $B \leq_m C$ d.m.v. zekere f (c)

Zij $f^1(x) = \tau(f(x), x)$. Dan $B \leq_1 C \times N$ d.m.v. f^1 en dus $B \leq_1 A$.

$\impliedby$: Stel $(\forall B) [B \leq_m A \implies B \leq_1 A]$.

$A \times N \leq_m A$ (b) en dus $A \times N \leq_1 A$. $A \leq_1 A \times N$ (a) en dus $A \equiv_1 A \times N$.

Uit Stelling 4 volgt nu: $A \equiv A \times N$ en dus A is een cylinder.

e. $\implies$: Stel $A \leq_m B$ d.m.v. f en definieer g door $g(x) = \tau(f\pi_1(x), x)$

g komt overeen met de afbeelding: $\langle m, n \rangle \rightarrow \langle f(m), \langle m, n \rangle \rangle$.

g is recursief en 1-1.

Dus $A \times N \leq_1 B \times N$ d.m.v. g .

$\impliedby$: Stel $A \times N \leq_1 B \times N$. Dan $A \leq_1 A \times N \leq_1 B \times N \leq_m B$. Dus $A \leq_m B$.

f. Def. 10, a en d.

Noem $A \times N$ de cylindrisering van A .

Iedere m -graad $d(A)$ bevat 1 of meer 1-graden. We kunnen er nu een aangeven nl.: alle cylinders uit $d(A)$ plus de cylindriseringen van alle verzamelingen uit $d(A)$. Wegens St. 8a is deze 1-graad maximaal t.o.v. de in $d(A)$ bevatte 1-graden.

5. Productieve verzamelingen.

Definitie 11. A is productief als er een partieel recursieve functie ψ is met: $(\forall x)[W_x \subset A \implies \psi(x) \text{ is gedefinieerd} \ \& \ \psi(x) \in A - W_x]$
 ψ heet een productieve partiële functie voor A.

Stelling 9. a. A productief $\implies$ A is niet r.o.

b. A productief & $A \leq_m B \implies B$ productief

Bewijs. a. Triviaal.

b. Zie het bewijs van de eerste stelling op p.68. De recursief opsombaarheid van α en β wordt daar niet gebruikt.

Stelling 10. a. A productief $\implies$ A bevat een oneindige r.o. deelverzameling.

b. A productief $\implies$ A bevat een oneindige recursieve deelverzameling.

Bewijs. a. Zij A productief d.m.v. ψ .

Er zijn recursieve functies f en h zodanig dat voor alle x en y geldt:

$$W_{f(x,y)} = W_x \cup W_y, \text{ en } W_{h(x)} = \{x\}.$$

Zij nu z_0 een getal met: $W_{z_0} = \emptyset$. Definieer een functie k als volgt:

$$\begin{cases} k(0) = z_0. \\ k(n+1) = f(h\psi k(n), k(n)). \end{cases}$$

Dan geldt voor alle n: $W_{k(n)} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, waarbij x_n het juist d.m.v. ψ bepaalde element is.

Definieer $g = \psi k$ dan is g recursief en somt een oneindige r.o. verzameling in A op.

b. Definieer g^* als volgt:

$$\begin{cases} g^*(0) = g(0) \\ g^*(n+1) = g(\mu y | f(y) > g(x) |) . \end{cases}$$

g^* is recursief en strikt monotoon stijgend en somt dus een oneindige recursieve verzameling in A op.

Stelling 11. A productief $\implies$ er is een recursieve functie f die voor A een productieve partiële functie is.

Bewijs. Zij A productief d.m.v. ψ ; ψ is partieel recursief. Er is een recursieve functie g zo, dat:

$$W_{g(z,x)} = \begin{cases} W_x & \text{als } z \in K \\ \phi & \text{als } z \notin K. \end{cases}$$

Zij nu $k_0, k_1, \dots$ een opsomming van K. Definieer dan f als volgt:
Voer voor iedere x "gelijktijdig" de berekeningen voor $\psi(x)$, $\psi g(k_0, x)$, $\psi g(k_1, x)$, ... uit en geef aan f(x) de eerst gevonden waarde.

1. f is een productieve partiële functie voor A want: $W_x \subset A \Rightarrow W_{g(k_i, x)} \subset A$
 $i = 0, 1, 2, \dots$

2. f is totaal. Stel $f(x_0)$ divergeert voor zekere x_0 d.w.z. $\psi g(y, x_0)$ divergeert voor alle $y \in K$. Beschouw de r.o. verzameling:

$B = \{y \mid \psi g(y, x_0) \text{ convergeert}\}$. We hebben $y \in \bar{K} \Rightarrow W_{g(y, x_0)} = \phi$ en dus $\bar{K} \subset B$.

Uit de aanname zou volgen $\bar{K} = B$, wat een contradictie is.

Hoofdstuk 11

(Lit.: H. Rogers, Jr.: Theory of Recursive Functions
and Effective Computability.

McGraw-Hill, New York etc., 1967.

(Ch. 8, p. 105-126)).

1. Simpele verzamelingen

In deze paragraaf willen we nader ingaan op het verband tussen 1- en m- reduceerbaarheid. Van belang hierbij zijn de simpele verzamelingen.

Definitie 1.1. A heet simpel als

- (i) A is recursief opsombaar,
- (ii) $\bar{A}$ is oneindig,
- (iii) $\bar{A}$ bevat geen oneindige, recursief opsombare deelverzameling.

Stelling 1.1.

- a) A simpel $\Rightarrow$ A niet recursief.
- b) A simpel $\Rightarrow$ A niet creatief.
- c) A simpel $\Rightarrow$ A niet m-volledig.
- d) A simpel $\Rightarrow$ A is geen cylinder.

Bewijs.

- a) Als A recursief is, dan is $\bar{A}$ recursief opsombaar. Als $\bar{A}$ nu bovendien oneindig is, dan volgt uit Def. 1.1 dat A dan niet simpel kan zijn.
- b) Als A creatief is, dan bevat $\bar{A}$ een oneindige, recursief opsombare deelverzameling (Hfdst. 10, Stelling 10).
- c) Als A m-volledig is, dan is A creatief, zoals volgt uit Hfdst. 10, Stelling 9b).
- d) Stel $A \equiv C \times \mathbb{N}$. Dan is $\bar{A} \neq \emptyset$; dus

$$\overline{C \times \mathbb{N}} = \bar{C} \times \mathbb{N} \neq \emptyset$$

en $\bar{C} \neq \emptyset$. Zij $m \in \bar{C}$. Dan is $\{m\} \times \mathbb{N}$ een oneindige recursief opsombare deelverzameling van $\bar{C} \times \mathbb{N}$. Dus A kan niet simpel zijn.

Definitie 1.2. A heet mezoïsch als

- (i) A is recursief opsombaar,
- (ii) A is niet recursief,
- (iii) A is niet creatief,
- (iv) A is niet simpel.

De volgende stellingen tonen aan, dat er inderdaad een simpele en een mezoïsche verzameling bestaan.

Stelling 1.2. (Post). Er bestaat een simpele verzameling.

Bewijs.

Zij $C = \{ \langle x, y \rangle \mid (y \in W_x) \wedge (y > 2x) \}$. Dan is C recursief opsombaar. Er bestaat dan een eeneenduidige recursieve functie ϕ waarvan het definitiegebied $\mathcal{D}\phi$ een beginsegment van $\mathbb{N}$ is, zodanig dat $C = \mathcal{R}\phi$ (= de waardenverzameling van C).

We definiëren nu:

$$\psi(x) = \pi_2 \phi(\mu z (\pi_1(\phi(z)) = x)).$$

Zij nu $S = \mathcal{R}\psi$.

(Minder formeel kan men S als volgt definiëren.

Zij $C' = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in C \text{ en } (\forall z) ((z \neq y \text{ en } \langle z, z \rangle \in C) \Rightarrow \langle x, z \rangle \text{ komt na } \langle x, y \rangle \text{ in de opsomming die } \phi \text{ geeft van } C)) \}$.

Dan is $S = \{ y \mid (\exists x) (\langle x, y \rangle \in C') \}$.

We tonen aan dat S simpel is.

- (i) Uit de definitie van ψ volgt dat ψ een partieel recursieve functie is. Dus S is recursief opsombaar.
- (ii) Uit de constructie van S volgt dat ten hoogste k van de getallen $\{0, 1, \dots, 2k\}$ tot S behoren.
Dus $\bar{S}$ is oneindig.
- (iii) Zij $B = W_{x_0}$ een oneindige recursief opsombare verzameling. Dan bevat B getallen groter dan $2x_0$. Er is dus een $z \in B$, zó dat $\langle x_0, z \rangle \in C'$. Dit betekent $z \in B \cap S$, en dus $B \cap S \neq \emptyset$.

Stelling 1.3. Er bestaat een mezoïsche verzameling.

Bewijs.

Zij A simpel. We tonen nu aan dat $A \times \mathbb{N}$ mezoïsch is. Allereerst is $A \times \mathbb{N}$ recursief opsombaar, maar niet recursief (immers $A \leq_1 A \times \mathbb{N}$). Verder is $A \times \mathbb{N}$ niet simpel (Stelling 1.1.d)). Tenslotte is $A \times \mathbb{N}$ niet creatief; immers, men bewijst eenvoudig:
 $A \times \mathbb{N}$ creatief $\Rightarrow A$ creatief.

Een gevolg van Stelling 1.2. is de volgende

Stelling 1.4. $\leq_1$ en $\leq_m$ zijn verschillend op de recursief opsombare, niet recursieve verzamelingen.

Bewijs.

We beschouwen de verzameling S uit het bewijs van Stelling 1.2.

Op grond van Hfdst. 10 Stelling 8 b) geldt: $S \equiv_m S \times \mathbb{N}$. Daar S simpel is, is $S \not\equiv_1 S \times \mathbb{N}$ (St. 1.1.d)) en dus (Myhill) $S \not\equiv_1 S \times \mathbb{N}$. Daar wel geldt: $S \leq_1 S \times \mathbb{N}$ (Hfdst. 10, St. 8a)), is blijkbaar $S \times \mathbb{N} \leq_1 S$.

Een enkele m -graad bevat dus in het algemeen een aantal verschillende 1-graden. Voor de m -graad van een simpele verzameling geldt de volgende stelling.

Stelling 1.5. (Dekker). De m -graad van een simpele verzameling bevat een aftelbare collectie van 1-graden, die lineair geordend is onder $\leq_1$, waarvan het ordetype gelijk aan dat van $\mathbb{Z}$ en die geheel uit simpele verzamelingen bestaat.

Bewijs.

Wij bewijzen eerst het volgende lemma.

Lemma. Laten A en B recursief opsombare verzamelingen zij zó dat

$$B = A \cup \{m\}, m \in \bar{A}.$$

Dan geldt:

- a) A simpel $\iff B$ simpel.
- b) Als A simpel is, dan geldt:
 $B \leq_1 A$, $A \leq_m B$, $A \not\leq_1 B$.

Bewijs van het lemma.

a) Triviaal.

b) Zij $n \in \bar{A}$, $n \neq m$. Definieer f door:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq m, \\ n & \text{als } x = m. \end{cases}$$

Dan is f recursief en dus $A \leq_m B$.

Zij C een oneindige recursieve deelverzameling van A , en zij p een recursieve permutatie die $C \cup \{m\}$ op C afbeeldt. Definieer g door:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \notin C \cup \{m\}, \\ p(x) & \text{als } x \in C \cup \{m\}. \end{cases}$$

Dan is g recursief en eeneenduidig; dus $B \leq_1 A$.

Stel nu dat $A \leq_1 B$. Dan zou $A \equiv B$ (Stelling van Myhill) d.w.z. er zou een recursieve permutatie h bestaan die A op B afbeeldt.

Dan zou $\{h^k(m) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ een oneindige recursief opsombare deelverzameling van $\bar{A}$ zijn.

Dit is onmogelijk daar A simpel is.

Hiermee is het lemma bewezen.

Het bewijs van stelling verloopt nu als volgt.

Zij A een simpele verzameling. Zij $\{a_0, a_1, \dots\}$ een oneindige deelverzameling van A en zij $\{b_0, b_1, \dots\}$ een oneindige deelverzameling van $\bar{A}$. Op grond van het lemma heeft dan de collectie $\dots, A \cup \{b_0, b_1\}, A \cup \{b_0\}, A, A \setminus \{a_0\}, A \setminus \{a_0, a_1\}, \dots$ de gewenste eigenschappen.

2. tt- en btt- reduceerbaarheid.

Beschouw de verzamelingen K en $\bar{K}$. K is recursief opsombaar, maar $\bar{K}$ niet (zie stelling op p. 28 en Hfdst. 10, Stelling 9a)). Op grond van Hfdst. 10, Stelling 1f) is dan $\bar{K}$ niet $\leq_m K$.

En uit Hfdst. 10, Stelling 1d) volgt dat K niet $\leq_m \bar{K}$. We zien dus dat K en $\bar{K}$ $\leq_m$ -onvergelijkbaar zijn. Men kan verder aantonen dat K , $\bar{K}$, $K \text{ join } \bar{K}$ en $K \times \bar{K}$ alle tot een verschillende m -graad behoren. Deze vier verzamelingen zijn echter in intuïtieve zin tot elkaar te reduceren. De relatie $\leq_m$ scheidt dus te veel verzamelingen. Dit is dan ook de reden waarom we zwakkere vormen van reduceerbaarheid gaan invoeren.

Definitie 2.1. Zij I de verzameling (de Boole'se algebra) $\{0,1\}$.

Een afbeelding

$$\alpha : I^k \longrightarrow I$$

heet een Boole'se funktie. Een geordend paar

$$((x_1, \dots, x_k), \alpha)$$

waarbij $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ en $\alpha : I^k \longrightarrow I$ een Boole'se funktie is, heet een tt-conditie (truth-table condition) van lengte k .

We zullen zeggen dat een verzameling A voldoet aan de tt-conditie

$((x_1, \dots, x_k), \alpha)$ als geldt:

$$\alpha(c_A(x_1), \dots, c_A(x_k)) = 1.$$

Het is duidelijk dat men een effectieve code kan construeren die de verzameling van de tt-conditie's afbeeldt op $\mathbb{N}$. We kiezen nu een vaste code met deze eigenschap, zodat het zinvol is te spreken over de tt-conditie met code-nummer x (of : de tt-conditie x) als $x \in \mathbb{N}$.

Definitie 2.2. A heet tt-reduceerbaar (truth-table reducible) tot B (notatie : $A \leq_{tt} B$) als er een recursieve funktie f bestaat, zó dat voor alle x geldt:

$$x \in A \iff B \text{ voldoet aan de tt-conditie } f(x).$$

A heet btt-reduceerbaar (bounded truth-table reducible) tot B (notatie: $A \leq_{btt} B$) als er een recursieve funktie f en een natuurlijk getal m bestaan, zó dat voor alle x geldt:

(i) de lengte van de tt-conditie $f(x)$ is $\leq m$,

(ii) $x \in A \iff B$ voldoet aan de tt-conditie $f(x)$.

Voorbeeld.

$A = K \times \bar{K}$ is btt-reduceerbaar tot $B = K$ door f als $f(x)$ de tt-conditie

$((\pi_1(x), \pi_2(x)), \alpha)$ is, waarbij

$$\alpha(w_1, w_2) = 1 \iff w_1 = 1, w_2 = 0.$$

Stelling 2.1. $\leq_{tt}$ en $\leq_{btt}$ zijn reflexief en transitief.

Bewijs.

We tonen aan dat $\leq_{tt}$ transitief is.

Zij $A \leq_{tt} B$ door f en zij $B \leq_{tt} C$ door g .

Laat $f(x)$ zijn de tt-conditie

$$((y_1, \dots, y_m), \alpha).$$

Laat $g(y_i)$ zijn de tt-conditie

$$((z_{i1}, \dots, z_{in_i}), \beta_i) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Dan is $A \leq_{tt} C$ door h , waarbij $h(x)$ is

$$((z_{11}, \dots, z_{1n_1}, z_{21}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{m n_m}),$$

$$\lambda w_{11} \dots \alpha(\beta_1(w_{11}, \dots), \beta_2(w_{21}, \dots), \dots, \beta_m(w_{m1}, \dots))).$$

Definitie 2.3. $A \equiv_{tt} B$ als $A \leq_{tt} B$ en $B \leq_{tt} A$. Een equivalentieklasse van de relatie $\equiv_{tt}$ heet een tt-graad.

Definitie 2.4. A heet tt-volledig als

- (i) A is recursief opsombaar,
- (ii) als B recursief opsombaar is, dan is $B \leq_{tt} A$.

Op analoge wijze definieert men:

btt-graad en btt-volledig.

Stelling 2.2.

$$a) \quad A \leq_m B \implies A \leq_{btt} B \implies A \leq_{tt} B.$$

$$b) \quad A \leq_{btt} \bar{A} \text{ (en dus } A \equiv_{btt} \bar{A}).$$

- c) Als $A \leq_{tt} C$ en $B \leq_{tt} C$, dan is
 $A \text{ join } B \leq_{tt} C$ en ook $A \times B \leq_{tt} C$.
- d) Als B recursief is en $A \leq_{tt} B$, dan is A
 recursief.
- e) Als A recursief is, dan is $A \leq_{btt} B$, voor alle B .

Bewijs.

- a) Zij $A \leq_m B$ via f . Dan is $A \leq_{btt} B$ door h als
 $h(x)$ de tt -conditie

$$((f(x)), \alpha)$$

is, waarbij $\alpha: I \rightarrow I$ de identieke afbeelding ($\alpha = 1$) is.

- b) $A \leq_{btt} \bar{A}$ door f als $f(x)$ de tt -conditie

$$((x), \alpha)$$

is, waarbij $\alpha: I \rightarrow I$ gedefinieerd is door $\alpha(w) = 1 + w$.

- c) Zij $A \leq_{tt} C$ door f en zij $B \leq_{tt} C$ door g .

Laat $f(x)$ zijn de tt -conditie

$$((u_1, \dots, u_k), \alpha),$$

en laat $g(y)$ zijn de tt -conditie

$$((v_1, \dots, v_l), \beta)$$

Dan is $A \times B \leq_{tt} C$ door h , als $h(\langle x, y \rangle)$ is

$$((z_1, \dots, z_{k+l}), \gamma),$$

waarbij

$$\gamma(w_1, \dots, w_{k+l}) = 1 \Leftrightarrow \alpha(w_1, \dots, w_k) = 1$$

en

$$\beta(w_{k+1}, \dots, w_{k+l}) = 1.$$

- d) Als $A \leq_{tt} B$ door f , dan is
 $A = \{x \mid B \text{ voldoet aan de } tt\text{-conditie } f(x)\}.$

- e) Zij A recursief. Kies f nu zó dat voor de Boole's functie α
 van de tt -conditie $f(x)$ geldt:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A, \\ 0 & \text{als } x \notin A. \end{cases}$$

Stelling 2.3. De verzameling van de tt-graden is een naar boven gericht halftralie onder $\leq_{tt}$. De recursieve verzamelingen vormen precies één tt-graad, die het kleinste element is van dit halftralie.

Bewijs.

De kleinste bovengrens van A en B is A join B.

De tweede bewering volgt uit Stelling 2.2. d) en e).

Opmerkingen.

1. Uit Stelling 2.2. a) volgt dat iedere btt-graad is samengesteld uit een aantal m-graden.
2. Uit Stelling 2.2. b) volgt:

$$K \equiv_{btt} \bar{K}.$$

We zien hieruit dat een btt-graad tegelijk zowel recursief opsombare als niet recursief opsombare verzamelingen kan bevatten. Bovendien volgt hieruit dat $\leq_{btt}$ en $\leq_m$ (als relaties op de deelverzamelingen van $\mathbb{N}$) niet gelijk zijn.

3. Van Stelling 2.2. b) geldt de volgende verscherping:
 $\{A \mid A \leq_{btt} B\}$ (en ook $\{A \mid A \leq_{tt} B\}$) is een Boole'se algebra van verzamelingen.

4. Een verband tussen $\leq_m$ en $\leq_{btt}$ legt de volgende stelling:

Als $B \neq \emptyset$ en $B \neq \mathbb{N}$ is, dan geldt voor alle C:

$C \leq_{btt} B \iff C$ behoort tot de Boole'se algebra van verzamelingen voortgebracht door het stelsel $\{A \mid A \leq_m B\}$.

Voor het bewijs, zie Rogers, p. 317.

Bij het bewijs wordt de volgende equivalentie gebruikt.

$C \leq_{btt} B \iff$ er bestaan een recursieve functie f en een Boole'se functie α , zó dat voor alle x geldt: f(x) is een tt-conditie met Boole'se functie α , en B voldoet aan f(x) d.e.s.d. als $x \in C$.

Wij gaan nu de restricties van $\leq_m$, $\leq_{btt}$ en $\leq_{tt}$ tot de recursief opsombare verzamelingen nader met elkaar vergelijken.

Stelling 2.4. (Post) . Er bestaat een verzameling die zowel simpel als tt-volledig is.

Bewijs.

Zij S de verzameling uit het bewijs van Stelling 1.2.

Uit de constructie van S volgt:

als $S_x = \{2^x - 1, 2^x, 2^x + 1, \dots, 2^{x+1} - 3, 2^{x+1} - 2\}$,
dan is, voor alle x ,

$$\bar{S} \cap S_x \neq \emptyset.$$

Definieer:

$$S^* = S \cup \left(\bigcup_{x \in K} S_x \right).$$

Dan is S^* recursief opsombaar. En $\bar{S}^*$ is oneindig, omdat $\bar{K}$ oneindig is.
Dus S^* is simpel.

Op grond van de definitie van S en S^* geldt:

$$x \in K \iff S_x \subset S^*$$

We definiëren nu de tt-conditie $f(x)$ ($x \in \mathbb{N}$) als

$$((2^x - 1, \dots, 2^{x+1} - 2), \alpha),$$

waarbij

$$\alpha(w_1, \dots, w_m) = 1 \iff w_1 = \dots = w_m = 1;$$

de lengte van de tt-conditie $f(x)$ is dus $m = 2^x$.

Dan geldt, voor iedere A :

$$A \text{ voldoet aan de tt-conditie } f(x) \iff S_x \subset A.$$

We zien:

$$x \in K \iff S^* \text{ voldoet aan de tt-conditie } f(x).$$

Dus: $K \leq_{tt} S^*$.

Als nu A een recursief opsombare verzameling is, dan is $A \leq_m K$ (Hfdst. 10, Stelling 6 en 7), dus $A \leq_{tt} K$. Dus $A \leq_{tt} S^*$.

Dus S^* is tt-volledig.

Gevolg. $\leq_m$ en $\leq_{tt}$ verschillen op de recursief opsombare verzamelingen.

Bewijs.

De verzameling S^* is simpel, dus niet m -volledig (Stelling 1.1. c)),
maar wel tt-volledig.

In het bewijs van Stelling 2.4. werd aangetoond:

$K \leq_{tt} S^*$ door f , waarbij de lengte van de tt -conditie $f(x)$ gelijk was aan 2^x . We kunnen dus niet beweren: K is btt -reduceerbaar tot S^* . Als dit zou gelden, dan zou S^* (simpel en) btt -volledig zijn. Dit is evenwel in strijd met de volgende stelling (die we niet zullen bewijzen).

Stelling 2.5. (Post). A btt -volledig $\Rightarrow A$ niet simpel.

Bewijs.

Zie Rogers, p. 114-117.

Gevolg. $\leq_{btt}$ en $\leq_{tt}$ verschillen op de recursief opsombare verzamelingen.

Bewijs.

S^* is simpel, dus niet btt -volledig, maar S^* is wel tt -volledig (Stelling 2.4.).

De volgende stelling is een verscherping van het Gevolg bij Stelling 2.4.

Stelling 2.6. (Fischer). $\leq_m$ en $\leq_{btt}$ verschillen op de recursief opsombare, niet recursieve verzamelingen.

Bewijs.

S_x en S^* zijn als in het bewijs van Stelling 2.4.

Er geldt: $S^* \times S^* \leq_{btt} S^*$ (volgt uit Stelling 2.2. c)).

Stel nu dat $S^* \times S^* \leq_m S^*$. Dan bestaat er een recursieve funktie g , zó dat

$$x \in S^* \text{ en } y \in S^* \iff g(x,y) \in S^*.$$

Definieer nu de recursieve funktie f als volgt:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = g(1,2)$$

$$f(2) = g(g(3,4), g(5,6))$$

$$f(3) = g(g(g(7,8), g(9,10)), g(g(11,12), g(13,14))).$$

Dan geldt:

$$f(x) \in S^* \iff S_x \subset S^*.$$

Daar

$$x \in K \iff S_x \subset S^*,$$

geldt:

$$x \in K \iff f(x) \in S^*.$$

Dit betekent

$$K \leq_m S^*.$$

Daar K 1-volledig, dus m -volledig is (Hfdst. 10, Stelling 6 en 7) is S^* ook m -volledig.

Daar S^* simpel is, kan S^* niet m -volledig zijn. (Stelling 1.1. c)).

Dit is een tegenspraak.

De volgende stelling geeft een gedeeltelijk antwoord op de vraag: hoeveel m -graden bevat een zekere tt -graad en wat is het ordetype van deze m -graden (onder $\leq_m$) ?

Stelling 2.7. (Fischer). De volledige tt -graad bevat een aftelbare collectie van m -graden, die lineair geordend is onder $\leq_m$ en waarvan het ordetype gelijk is aan dat van $\mathbb{N}$.

Bewijs.

S^* en S_x zijn weer als in het bewijs van Stelling 2.4.

Beschouw de verzamelingen:

$$A_0 \equiv S^*$$

$$A_1 \equiv S^* \times S^*$$

$\vdots$

$$A_k \equiv S^* \times S^* \times \dots \times S^* \text{ (met } 2^k \text{ factoren).}$$

Er geldt dan:

$$A_0 \leq_1 A_1 \leq_1 A_2 \leq_1 \dots,$$

en ook

$$A_0 \equiv_{tt} A_1 \equiv_{tt} A_2 \equiv_{tt} \dots$$

We bewijzen nu: $j > i \Rightarrow A_j \not\leq_m A_i$.

Stel dat $A_j \leq_m A_i$ voor zekere i en j met $j > i$. Op soortgelijke wijze als in het bewijs van Stelling 2.6 kan men een recursieve functie f definiëren, zó dat

$$f(x) \in A_i \iff S_x \subset S^*.$$

Hieruit volgt dan:

$$K \leq_m A_i.$$

Omdat $A_i \leq_{btt} S^*$, geldt verder

$$K \leq_{btt} S^*.$$

Dit is evenwel in strijd met Stelling 2.5, daar S^* simpel is.

Hoofdstuk 12Turing Reduceerbaarheid

(Lit.: H. Rogers, Jr.: Theory of Recursive Functions
and Effective Computability.

Mc. Graw-Hill, New York etc., 1967.

(Ch. 9, p. 127-145)).

1. Inleiding

Uit het volgende voorbeeld zal blijken dat de tt-reduceerbaarheid het intuïtieve reduceerbaarheidsbegrip niet geheel representeert; intuïtief is een verzameling A nl. reduceerbaar tot een verzameling B indien gegeven een methode ter berekening van c_B hieruit c_A berekend kan worden. We vergelijken hiertoe de verzameling

$$K = \{x \mid x \in W_x\} = \{x \mid \phi_x(x) \text{ convergeert}\}$$

met de verzameling

$$\tilde{K} = \{x \mid (\exists y) [\phi_x(x) = y \ \& \ K \text{ voldoet aan tt-conditie } y]\}.$$

Het is duidelijk dat $\tilde{K}$ intuïtief reduceerbaar is tot K, immers als gegeven is dat z tot K behoort en dus $\phi_z(z)$ convergeert, dan definieert $\phi_z(z)$ een tt-conditie voor welke is na te gaan of K hieraan voldoet. ($\tilde{K} \subseteq K$ dus het andere geval is triviaal).

Echter:

Stelling 1.1 $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$.

Bewijs. Stel $\tilde{K} \leq_{tt} K$. Wegens H 10 st. 2.2b is dan ook $\overline{\tilde{K}} \leq_{tt} K$, zeg via ϕ_{x_0} . D.W.Z.:

$$x_0 \in \overline{\tilde{K}} \Leftrightarrow K \text{ voldoet aan tt-conditie } \phi_{x_0}(x_0).$$

Wegens de definitie van $\tilde{K}$ is nu echter $x_0 \in \tilde{K}$.

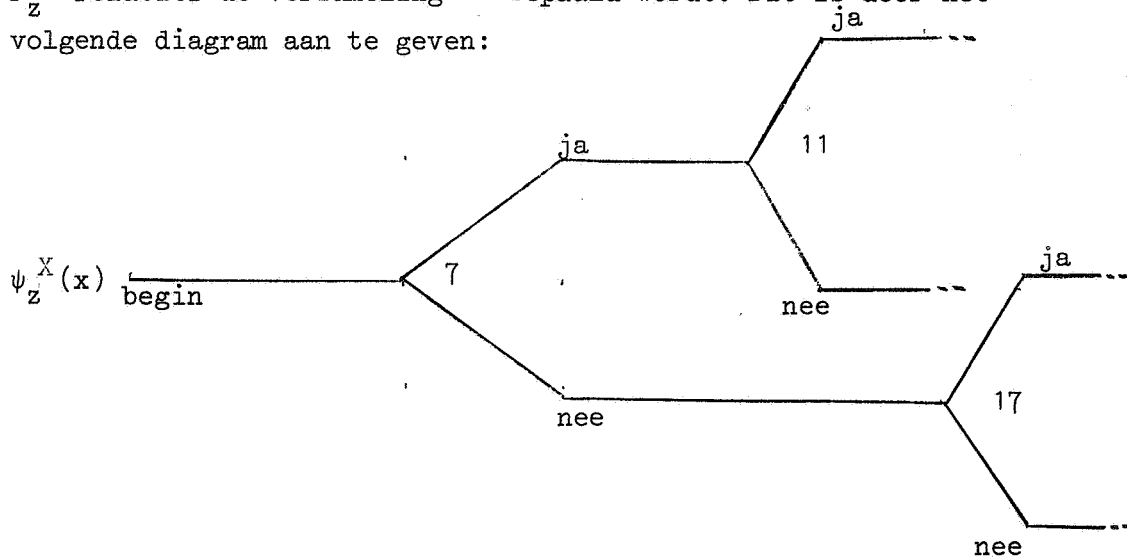
Tegenspraak!

Beschouwen we bovengenoemde reduceerbaarheidsbegrippen $A \leq_{tt} B$ en $A \leq_{int} B$ nader, dan blijkt dat we bij dit intuïtieve reduceerbaarheidsbegrip bij de berekening van $c_A(z)$ op een mogelijk van z afhankende wijze gebruik maken van informatie over $c_B(z)$, terwijl bij tt -reduceerbaarheid voor alle z dezelfde berekening wordt uitgevoerd. Ter formalisatie van dit intuïtieve reduceerbaarheidsbegrip is van $c_A(z)$ voor beschrijving van de berekeningsprocedure een relatieve algorithmenodig. Daartoe zijn verscheidene mogelijkheden; een daarvan is reeds geïntroduceerd in H4§4 nl. de Turingmachine met orakel. We zullen nu de relatieve algorithmen definiëren gebruik makende van het partiële functiebegrip. Om een inzicht te krijgen in de werking van deze definitie schetsen we deze aan de hand van de Turing-machine-karakterisering.

Schets van de relatieve algorithmen:

Maak een effectieve lijst van alle Turingmachines met orakel:

$\{ P'_z \}_z$. Zij ψ_z de partiële functie die door de berekening van P'_z relatief de verzameling X bepaald wordt. Dit is door het volgende diagram aan te geven:



Voor de input x start de machine P'_z tot het orakel wordt geraadpleegd. In het diagram is dit "is 7 in X". Al naar gelang het antwoord is, gaat de berekening verder. Iedere tak in het diagram bepaalt twee verzamelingen

$D' = \{ w \mid \text{de vraag "is } w \text{ in X" is op de tak bevestigend beantwoord} \}$
en

$D'' = \{ w \mid \text{de vraag "is } w \text{ in X" is op de tak ontkennend beantwoord} \}.$

Voor iedere eindigende tak zijn de verzamelingen D' en D'' eindig, dus zijn verzamelingen uit de kanonieke opsomming van alle eindige verzamelingen [zie p.99]. Het diagram van machine P'_z met input x genereert dus een verzameling

$V = \{ \langle y, u, v \rangle \mid \text{het diagram bevat een eindigende tak met}$

$$D' = D_u \text{ en } D'' = D_v \text{ en output } y \}$$

Dit is een recursief opsombare verzameling.

Dus er is een recursieve functie f zó dat

$$V = R f.$$

Deze opsomming hangt af van z en x . Volgens de dekpuntsstelling

[p.53] is er dus een recursieve functie g , zo dat

$R g = \{ \langle x, y, u, v \rangle \mid \text{in diagram van } P'_z \text{ met input } x$
is een eindigende tak met $D' = D_u, D'' = D_v$ en
output $y \}$

Pas nu H10 lemma 1 [p.95] toe. D.w.z. er is een recursieve functie h zó dat

$$Rg = W_{h(z)}$$

We kunnen ψ_z^X dus karakteriseren met bepaalde recursief opsombare verzamelingen.

§2. Relatieve recursiviteit.

We zullen nu deze relative algorithmen formaliseren m.b.v. geschikte recursief opsombare verzamelingen.

Definitie 2.1 (a) $\langle x, y, u, v \rangle$ is consistent als $D_u \cap D_v = \emptyset$

(b) $\langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle$ en $\langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle$ heten compatibel
als $D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset$.

Definitie 2.2. W_z is regulier als

- (i) iedere $\langle x, y, u, v \rangle \in W_z$ is consistent.
- (ii) twee verschillende elementen $\langle x_1, y_1, u_1, v_1 \rangle$ en $\langle x_2, y_2, u_2, v_2 \rangle$ van W_z zijn niet compatibel.

Opm: Uit het diagram in §1 volgt direkt dat de bovengedefinieerde $W_{h(z)}$ regulier is.

Stelling 2.1 Er is een recursieve functie ρ zo dat voor alle z geldt:

- (i) $W_{\rho(z)}$ is regulier
- (ii) W_z regulier $\Rightarrow W_z = W_{\rho(z)}$

Bewijs. Zij z gegeven, en daarmee de partiële functie ϕ_z .

Volgens H10 lemma 1 is er een 1-1 recursieve functie f zó dat

het waardegebied van $\phi_{f(z)} = \text{domein } \phi_z (=W_z)$.

Daar de paarfunctie τ een 1-1 afbeelding van $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is, kunnen we de elementen van het waardegebied $\phi_{f(z)}$ opvatten als quadrupels $\langle x, y, u, v \rangle$, waarbij u en v indices zijn van eindige verzamelingen. Verwijder uit deze quadrupels alle inconsistente en met een voorganger compatibele elementen. Het resultaat bepaalt ρ .

Definitie 2.3 $\phi_z^* = \{ \langle x, y \rangle \mid (\exists u, v) [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{\rho(z)} \text{ \& } D_u \subset X \text{ \& } D_v \subset \bar{X}] \}$.

We moeten nagaan of ϕ_z^* juist gedefinieerd is en of bovenstaande inderdaad overeenkomt met de schets in §1. Het eerste volgt uit de regulariteit van $W_{\rho(z)}$, immers:

stel $\exists x$ zó dat $\phi_z^*(x) = y_1$, en $\phi_z^*(x) = y_2$, met $y_1 \neq y_2$.

Dan $\exists u_1, v_1$, zodat $\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \in W_{\rho(z)}$ en $D_{u_1} \subset X$ en $D_{v_1} \subset \bar{X}$ en $\exists u_2, v_2$, zodat $\langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_{\rho(z)}$ en $D_{u_2} \subset X$ en $D_{v_2} \subset \bar{X}$

daar $W_{\rho(z)}$ regulier is, geldt wegens $D_{u_1} \cap D_{v_2} = D_{u_2} \cap D_{v_1} = \emptyset$, dat

$\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle = \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle$; conclusie $y_1 = y_2$.

In §1 zagen we dat $\phi_z^X(x)$ eenduidig werd bepaald door een quadrupel $\langle x, y, u, v \rangle$ met output y , waarbij $D_u \subset X$ en $D_v \subset \bar{X}$, wat precies overeenkomt met bovenstaande.

We kunnen vervolgens vroeger ingevoerde begrippen gaan relativeren:

- (i) Een functie η heet partieel A-recursief als
 $(\exists z) [\eta = \phi_z^A]$
- (ii) Een functie f heet A-recursief als
 $(\exists z) [f = \phi_z^A \text{ en } \phi_z^A \text{ is totaal}]$.
- (iii) Een verzameling A heet recursief in B als c_A B-recursief is.
- (iv) Een verzameling A heet recursief opsombaar in B als
 $A = \emptyset$ of $(\exists f) [f \text{ B-recursief en } A = \text{range } f]$
- (v) Zij R een k -voudige en S een l -voudige relatie, dan is
 R recursief (rec.op somb) in S als $\tau^k(R)$ recursief (rec.opsomb)
is in $\tau^l(S)$.

Stelling 2.2

- (i) A recursief $\Rightarrow \phi_z^A$ is partieel recursief.
- (ii) A recursief in $B \Leftrightarrow A$ en $\bar{A}$ zijn recursief opsombaar in B .
- (iii) f is A-recursief $\Leftrightarrow f$ is recursief in A .
- (iv) ϕ partieel A-recursief $\Leftrightarrow \phi$ recursief opsombaar in A .
- (v) A recursief in $B \Leftrightarrow c_A$ recursief in $B \Leftrightarrow c_A$ recursief in c_B
 $\Leftrightarrow A$ recursief in c_B .

Bewijs: (i) daar A recursief is, is de hele berekening recursief.

(ii) t/m (iv) zie de bewijzen van de analoge niet-relatieve uitspraken.

(v) volgt uit de definities en (iii).

Gevolg. Voor iedere totale funktie f geldt:

f recursief opsombaar in A $\Leftrightarrow$ f recursief in A.

Bewijs f rec.opsombaar in A en totaal $\stackrel{(iv)}{\Leftrightarrow}$ f partieel A-recursief en totaal $\Leftrightarrow$ f A-recursief $\stackrel{(iii)}{\Leftrightarrow}$ f recursief in A.

Definitie 2.4 $W_z^A = \text{domein } \phi_z^A$

Op analoge wijze als in H10 kunnen we het volgende bewijzen:

Lemma 2.1 Er is een 1-1 recursieve funktie f zó dat

$$(\forall z) \left[\mathcal{R}_{\phi_z^A} = D \phi_z^A \right]$$

Definitie 2.5 de jump-operator is gedefinieerd als

$$K^A = \{ x \mid \phi_x^A(x) \text{ convergeert} \} = \{ x \mid x \in W_x^A \}$$

Stelling 2.3 $(\forall A)(\exists B) \left[B \text{ recursief opsombaar in } A, B \text{ niet recursief in } A \right]$.

Opm: Vroeger is bewezen dat K een recursief opsombare, niet recursieve verzameling is.

Bewijs. We zullen aantonen dat $B = K^A$ aan de eisen voldoet.

Wegens voorgaand lemma volgt uit de definitie van K^A dat K^A recursief opsombaar is in A.

Stel K^A is recursief in A, dan is volgens stelling 2.2 (ii) ook $\overline{K^A}$ recursief opsombaar in A, d.w.z.,

$$(\exists x_0) \left[\overline{K^A} = \mathcal{R}_{\phi_{x_0}^A} \right].$$

Wegens voorgaand lemma is dan $\overline{K^A} = W_{x_1}^A$ voor zekere x_1 , maar dit levert volgens de definitie van K^A de tegenspraak:

$$x_1 \in \overline{K^A} \Leftrightarrow x_1 \in K^A.$$

§ 3. Turing-reduceerbaarheid.

Definitie 3.1. A heet Turing-reduceerbaar tot B (notatie $A \leq_T B$) indien A recursief is in B.

Voorbeeld. $\tilde{K} \leq_T K$, immers daar de procedure die $\tilde{K}$ definieert als deelverzameling van K effectief is, is $\tilde{K}$ recursief in K.

Stelling 3.1 $\leq_T$ is reflexief en transitief.

Bewijs. Zij $A \leq_T B$ en $B \leq_T C$, dwz. $c_A = \phi_{z_1}^B$ en $c_B = \phi_{z_2}^C$.

Beschouw de verzamelingen $W_{\rho}(z_1)$ en $W_{\rho}(z_2)$. Neem de output y_1 van $\phi_{z_1}^B(x)$ als input voor $\phi_{z_2}^C$. Dit definieert y_2 en een verzameling $\{ \langle x, y_2, u, v \rangle \mid D_u = D_{u_1} \cup D_{u_2} \text{ \& } D_v = D_{v_1} \cup D_{v_2} \}$

Dit levert een z_3 met $c_A = \phi_{z_3}^C$.

Definitie 3.2. $A \equiv_T B$ als $A \leq_T B$ en $B \leq_T A$. De equivalentieklassen $\equiv_T$ heten T-graden.

Definitie 3.3. A heet T-volledig als

- (i) A recursief opsombaar
- (ii) als B recursief opsombaar is, dan is $B \leq_T A$.

Stelling 3.2 (i) $A \leq_{tt} B \Rightarrow A \leq_T B$.

(ii) $A \leq_T C$ en $B \leq_T C \Rightarrow A \text{ join } B \leq_T C$;

bovendien is $A \times B \leq_T C$.

(iii) Als B recursief is en $A \leq_T B$, dan is A recursief.

Bewijs. (i) en (ii) volgen onmiddellijk uit de definities.

(iii) volgens §2 st. 2.2 (i) is c_A een partieel recursieve functie dus A is recursief.

Stelling 3.3. De verzameling der Turinggraden is een naar boven gericht halftralie onder $\leq_T$. De recursieve verzamelingen vormen precies een T-graad, die het kleinste element van het halftralie is.

Bewijs. A join B is de kleinste bovengrens van A en B.

De tweede bewering volgt uit st.3.2(i) en (iii) en H¹¹ st.2.2.e.

Opm. In H¹¹ zagen we dat $\leq_{tt}$ en $\leq_m$ verschillen op de recursief opsombare verzamelingen.

Uit stelling 3.2 (i) volgt dat een T-graad bestaat uit tt-graden.

In §1 hebben we gezien dat de T-graad van K bestaat uit meer dan één tt-graad. In een volgende § zullen we nader ingaan op het verschil tussen tt- en T-reduceerbaarheid.

§ 4. Hypersimpele verzamelingen.

De verschillen tussen $\leq_1$, $\leq_m$, $\leq_{btt}$ en $\leq_{tt}$ traden op bij de recursief opsombare, niet recursieve verzamelingen. Hierbij speelden de simpele verzamelingen een rol. Deze waren gedefinieerd als:

A simpel $\Leftrightarrow$ A recursief opsombaar

$\overline{A}$ oneindig

$\overline{A}$ bevat geen oneindige recursief opsombare deelverzameling.

We definieren nu:

B heet immuun als

(i) B is oneindig

(ii) B bevat geen oneindige rec.opsombare deelverzameling, m.a.w.

$(\forall C) [(C \text{ oneindig en } C \text{ rec.opsomb.}) \Rightarrow C \cap \overline{B} \neq \emptyset]$.

Definitie 4.1. Zij A een oneindige verzameling met de elementen $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$; f majoreert A indien $(\forall n) [f(n) \geq z_n]$.

Definitie 4.2 A is hyperimmuun als

- (i) A is oneindig
- (ii) er is geen recursieve functie f die A majoreert.

Voorbeeld. Zij $\{ f_0, f_1, \dots \}$ de verzameling van alle recursieve functies. Definieer een functie g door

$$\begin{cases} g(0) = f_0(0) + 1 \\ g(n+1) = \mu z [z > g(n) \ \& \ z > f_{n+1}(n+1)] \end{cases}$$

Dan is Rg een hyperimmune verzameling.

Stelling 4.1 A hyperimmuun $\Rightarrow$ A immuun.

Bewijs. Stel A niet immuun. Dan is er een oneindige recursief opsombare deelverzameling B van A. Zij $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ de elementen van B en zij g de recursieve functie met $B = \text{Range } g$.

D.w.z. $\forall z_i \exists x \text{ met } g(x) = z_i$.

Zij $x_i = \min \{ x \mid g(x) = z_i \}$

Definieer $f(n) = g(x_n)$. Dan is f recursief en $f(n) \geq z_n$, in tegenspraak met de hyperimmunititeit van A.

Naar aanleiding van de relatie tussen de begrippen simpel en immuun, definiëren we het begrip hypersimpel.

Definitie 4.3 A heet hypersimpel indien A recursief opsombaar is en $\bar{A}$ hyperimmuun.

Opm. 1. A hypersympel $\Rightarrow$ A simpel.

Opm. 2. De verzameling S uit H 11 st.1.2 is een simpele doch niet hypersimpele verzameling, want $\bar{S}$ wordt gemajoreerd door $\lambda x [2x]$

Stelling 4.2 (Kuznecov, Medvedev, Uspenskii).

A hyperimmuun $\Leftrightarrow$ A is oneindig en

$$\neg (\exists \text{ recursieve } f) [(\forall u) [D_{f(u)} \cap A \neq \emptyset] \ \& \ (\forall u) (\forall v) [u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset]] .$$

Bewijs. " $\Rightarrow$ ". Stel $\exists f$ als in de bewering. Dan $(\forall u) [D_{f(u)} \neq \emptyset]$

Definieer de functie g door

$$g = \lambda y [\text{maximale element van } \bigcup_{i=1}^y D_{f(i)}]$$

Dan is g recursief. Zij $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ de rangschikking naar grootte van de elementen van A. Daar $D_{f(n)} \cap A \neq \emptyset \exists i$ met $z_i \in D_{f(n)}$.

Uit $(\forall u, v) [u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \emptyset]$ volgt dat $i \leq n$.

Gevolg: $g(n) \geq z_i \geq z_n$, dus g majoreert A. Tegenspraak.

" $\Leftarrow$ ". Stel g is een recursieve functie die A majoreert. Definieer een recursieve functie h door

$$\begin{cases} h(0) = g(0) \\ h(n+1) = g(h(n) + 1). \end{cases}$$

Beschouw het stelsel verzamelingen

$$\begin{cases} D^{(0)} = \{0, 1, \dots, h(0)\} \\ D^{(n+1)} = \{h(n) + 1, \dots, h(n+1)\} \quad , n=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Definieer de functie f door $D_{f(n)} = D^{(n)}$, dan is f recursief.

Voor alle n is $h(n+1)$ het grootste element van $D^{(n+1)}$, immers

voor alle m geldt $g(m) \geq z_m \geq m$, dus $g(h(n)+1) \geq h(n) + 1$.

Daarmee is aan de eis $(u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \neq D_{f(v)})$ voldaan.

Daar $\bigcup_{i=0}^{n+1} D^{(i)}$ een opsomming geeft van alle getallen $\leq h(n+1)$ en $h(n+1) = g(h(n) + 1) \geq z_{h(n)+1}$, bevat $\bigcup_{i=0}^{n+1} D^{(i)}$ minstens $h(n) + 2$ elementen van A.

Verder is $\bigcup_{i=0}^n D^{(i)} = \{0, 1, \dots, h(n)\}$, dus heeft slechts $h(n) + 1$ elementen.

M.a.w. $D^{(n+1)}$ bevat minstens één element van A.

De existentie van deze f wordt echter door het gegeven tegengesproken.

Stelling 4.3 (Dekker)

Zij A een recursief opsombare, niet recursieve verzameling.

Dan is er een hypersimpele verzameling B die Turing-equivalent is met A.

Bewijs. Daar A recursief opsombaar is, is er volgens H 10 lemma 1 een 1-1 recursieve functie f zodat $A = \mathcal{R}_f$.

Zij $B = \{x \mid (\exists y) [x < y \text{ \& } f(y) \leq f(x)]\}$

We zullen aantonen dat B aan de voorwaarden voldoet.

- (i) Uit de dekpuntstelling volgt de recursieve opsombaarheid van B.
- (ii) $B \leq_{tt} A$. Wegens de 1-1 duidelijkheid van f geldt:

$$x \in B \iff \exists y > x \text{ met } f(y) < f(x). \quad (*)$$

Zij de verzameling $C^{(x)}$ gedefinieerd door

$$C^{(x)} = \{0, 1, \dots, f(x)\} - \{f(0), f(1), \dots, f(x)\}.$$

Dan is (*) equivalent met

$$x \in B \iff A \cap C^{(x)} \neq \emptyset.$$

De voorwaarde $A \cap C^{(x)} \neq \emptyset$ is echter te schrijven als een tt-conditie $((w_1, \dots, w_m), \alpha)$ met

$\alpha(c_A(w_1), \dots, c_A(w_m)) = 1$, waarbij m bepaald is door het aantal elementen van $C^{(x)} \cap A$.

- (iii) $A \leq_T B$. Bij gegeven z moeten we bepalen of z al dan niet element is van A. Zij $a_0, a_1, \dots, a_z$ de eerste z+1 getallen van $\mathbb{N}$ die geen element van B zijn, dwz.

$$(\forall y) [y > a_i \implies f(y) > f(a_i)].$$

Beschouw de verzameling $\{f(0), f(1), \dots, f(a_z)\}$

Daar $a_{i+1} > a_i$ is $f(a_{i+1}) > f(a_i)$ dus $f(a_z) \geq z$. (**)

Indien $z \in A$ dan $\exists y$ met $z = f(y)$, dan is wegens (**) $y \leq a_z$.

Voor $z \notin A$ is $z \notin \{f(0), \dots, f(a_z)\}$.

M.a.w. we hebben een effectieve methode om c_A relatief c_B te bepalen, ofwel $A \leq_T B$.

- (iv) Stel er is een recursieve functie g die $\bar{B}$ majoreert. Zij $a_0 < a_1 < \dots$ de elementen van $\bar{B}$. Volgens de definitie van g is dan $g(x) \geq a_x$ voor alle x. In (iii) hebben we gezien $x \in A \iff x \in \{f(0), f(1), \dots, f(a_x)\}$; daar bovendien $A = \mathcal{R}_f$, geldt zeker $x \in A \iff x \in \{f(0), f(1), \dots, f(g(x))\}$.

M.a.w. we hebben hier een effectieve test voor $A \Rightarrow A$ recursief.

Tegenspraak!

(v) $\bar{B}$ is oneindig. Stel $\bar{B}$ is eindig, dus recursief, dus recursief opsombaar. Daar B recursief opsombaar is volgt dan B recursief. Echter dan volgt met $A \leq_T B$ uit st.3.2(iii) dat A recursief is; tegenspraak.

We concluderen uit (i),(iv) en (v), dat B hypersimpel is en uit (ii) en (iii) dat $A \equiv_T B$.

Gevolg. (i) Iedere niet recursieve, recursief opsombare T-graad bevat een simpele verzameling.

(ii) Voor iedere niet recursieve, recursief opsombare verzameling A is er een hypersimpele verzameling B met $B \leq_{tt} A$.

Bewijs. Dit volgt direkt uit st. 4.3 en opm.1 na def.4.3.

§5. Turing en truth-table reduceerbaarheid.

Definitie 5.1 $\tilde{A} = \{ x \mid (\exists y) [\phi_x(x) = y \ \& \ A \text{ voldoet aan de tt-conditie } y] \}$.

Stelling 5.1. Zij $\alpha(K)$ de T-graad van K, dan bevat $\alpha(K)$ geen verzameling A met de eigenschap

$$(\forall B) [B \in \alpha(K) \rightarrow B \leq_{tt} A].$$

Bewijs. We zullen aantonen dat voor $A \in \alpha(K)$ geldt

$$\tilde{A} \in \alpha(K) \text{ en } \tilde{A} \not\leq_{tt} A.$$

(i) $A \leq_1 \tilde{A}$, immers:

Bij gegeven x zij de constante funktie ψ gedefinieerd door de voorwaarde $(\forall y) [\psi(y) = \text{tt-conditie } \langle \langle x \rangle, \alpha \rangle]$, waarbij α de Boole'se identiteit is op I. Dan is er een recursieve funktie f zó dat $\psi = \phi_{f(x)}$; f is vanwege de 1-1 toevoeging van de tt-condities aan $\mathbb{N}$ zelfs eenduidig. Verder geldt:

$f(x) \in \tilde{A} \Leftrightarrow A$ voldoet aan de tt-conditie $\phi_{f(x)}(f(x))$,
 m.a.w. $\alpha(c_A(x)) = 1$, dus $c_A(x) = 1$, of te wel $x \in A$.
 Dus $f(x) \in \tilde{A} \Leftrightarrow x \in A$, dus $A \leq_1 \tilde{A}$.

(ii) $\tilde{A} \not\leq_{tt} A$.

Stel $\tilde{A} \leq_{tt} A$, dan is ook $\tilde{A} \leq_{tt} A$ (H 11 st.2.2 b en H 11 st.2.1),
 zeg via ϕ_{x_0} voor zekere x_0 .

Dan geldt:

$x_0 \in \tilde{A} \Leftrightarrow A$ voldoet aan tt-conditie $\phi_{x_0}(x_0)$.

Maar volgens de definitie van $\tilde{A}$ is dit equivalent met $x_0 \in \tilde{A}$.

Tegenspraak.

(iii) $\tilde{A} \leq_T A$. Voor een effectieve test of $z \in \tilde{A}$ maken we gebruik van
 het feit dat $A \in \alpha(K)$, d.w.z. $c_K = \phi_{z_0}^A$.

Voor $z \notin K$ is $\phi_x(z)$ niet convergent, dus $z \notin \tilde{A}$.

Voor $z \in K$ is $\phi_z(z)$ te berekenen en we kunnen testen of A aan de
 tt-conditie $\phi_z(z)$ voldoet.

Conclusie: Uit (i) en (iii) volgt dat $\tilde{A} \in \alpha(K)$.

Definitie 5.2 Zij β een T-graad. De tt-graad $\alpha \in \beta$ heet tt-maximaal
 als iedere tt-graad α' van β in de tt-ordening α precedeert.

Gevolg 5.1.1. Zij α de T-graad van K en β een T-graad met $\alpha \leq_T \beta$,
 dan bevat β geen maximale tt-graad.

Bewijs. volgt onmiddellijk uit st.5.1 en def. 5.2.

Gevolg 5.1.2. Iedere T-graad boven die van K bevat een oneindige
 rij tt-graden die lineair geordend zijn volgens $\leq_{tt}$ en ordetype
 $\aleph$ hebben.

Bewijs. We geven het bewijs voor de T-graad α van K .

Nu is $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$ en $\tilde{K} \in \alpha$. Zij α_0 de tt-graad van K in α .

Beschouw $A_1 = K \text{ join } \tilde{K}$, dan geldt $A_1 \in \alpha$ en wegens st.5.1. is

$\tilde{A}_1 \not\leq_{tt} A_1$, terwijl $\tilde{A}_1 \in \alpha$. Zij α_1 de tt-graad van A_1 in α . Dan is
 $\alpha_0 \leq_{tt} \alpha_1$. Definieer de verdere elementen van de rij met inductie.

Opm.1 We beperken ons nu tot de recursief opsombare verzamelingen. De T-graad van K bevat volgens 5.1.2. geen maximale tt-graad, maar bevat wel een maximale recursief opsombare tt-graad, immers uit de m-volledigheid van K volgt direkt dat de tt-graad van K volledig is, d.w.z. maximaal onder de recursief opsombare verzamelingen.

Opm.2. $\tilde{K}$ is niet recursief opsombaar. Dit volgt direkt uit de tt-volledigheid van K en $\tilde{K} \not\leq_{tt} K$.

Stelling 5.2 (Post)

A tt-volledig $\Rightarrow$ A niet hypersimpel.

Bewijs. Het bewijs van deze stelling hangt nauw samen met het bewijs van H 10 st.2.5.

Zie Rogers p 141-143.

Gevolg $\leq_{tt}$ en $\leq_T$ verschillen op de recursief opsombare verzamelingen.

Bewijs. Volgens de stelling van Dekker is er bij K een hypersimpele verzameling B met $B \equiv_T K$.

Daar K tt-volledig is, geldt $B \leq_{tt} K$.

Stel $K \leq_{tt} B$, dan $B \equiv_{tt} K$, dus B tt-volledig. Maar dan is volgens st.5.2 B niet hypersimpel; tegenspraak.

De Turing reduceerbaarheid was gedefinieerd als

$$A \leq_T B \Leftrightarrow (\exists z) [c_A = \phi_z^B].$$

In de volgende stelling wordt de tt-reduceerbaarheid op een dergelijke manier gekarakteriseerd.

Stelling 5.3 (Nerode)

De volgende drie beweringen zijn equivalent:

- (i) $A \leq_{tt} B$.
- (ii) $(\exists z) [c_A = \phi_z^B \ \& \ (\forall X) [\phi_z^X \text{ is een karakteristieke functie}]]$.
- (iii) $(\exists z) [c_A = \phi_z^B \ \& \ (\forall X) [\phi_z^X \text{ is totaal}]]$.

Bewijs.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) triviaal

(i) $\Rightarrow$ (ii) Zij $A \leq_{tt} B$ door f .

Definieer voor alle X de partieel recursieve functie ψ door

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \left\{ \begin{array}{l} \text{wel} \\ \text{niet} \end{array} \right\} \text{ voldoet aan tt-conditie } f(x) \\ 0 & \end{cases}$$

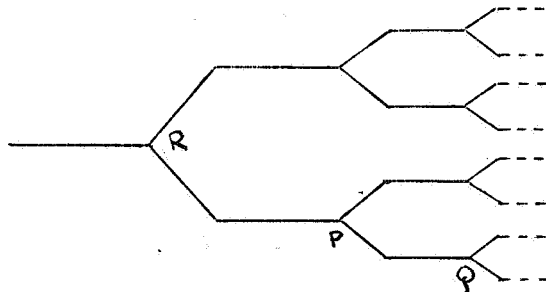
Dan is $\psi = \phi_{z_0}^X$ voor zekere z_0 en $c_A = \alpha_{z_0}^B$ terwijl $\phi_{z_0}^X$ een karakteristieke functie is.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Zij z_1 , zó dat $c_A = \phi_{z_1}^B$ en $\phi_{z_1}^X$ totaal voor alle X .

Zij x willekeurig. Beschouw dan het diagram bepaald door $\phi_{z_1}^X(x)$. Daar $\phi_{z_1}^X$, totaal is voor alle X , is iedere tak van dit diagram eindig.

Lemma Indien een diagram I geen oneindige takken heeft, is het diagram eindig.

Bewijs: zij I het volgende diagram.



Bij elk splitsingspunt P van het diagram, kunnen we de verzamelingen D' en D'' beschouwen. De splitsingspunten zijn partieel te ordenen als volgt:

$$P \leq Q \Leftrightarrow D'(P) \subset D'(Q) \text{ \& } D''(P) \subset D''(Q)$$

S heet subdiagram van I als

$$S \subset I \text{ en } (\forall P) [P \in S \Rightarrow \{ Q \mid Q \leq P \} \subset S].$$

Bij elk punt P van I kunnen we een subdiagram

$$S^{(P)} = \{ Q \mid Q \leq P \text{ of } P \leq Q \}$$

beschouwen. De verzameling $S^* = \{ P \mid I^{(P)} \text{ bevat oneindig veel punten} \}$

is weer een subdiagram van I en geen enkel punt van S^* is eindpunt van een tak van S^* , m.a.w. S^* , bevat geen eindige tak.

Stel I bevat oneindig veel punten, dan bevat $S^{(R)}$ oneindig veel punten, dus $R \in S^*$. Daar S^* geen eindige takken bevat is er een in R beginnende oneindig voortlopende tak in S^* , dus ook in I .

Dit is in tegenspraak met het gegeven.

We vervolgen nu het bewijs van de stelling en concluderen uit het lemma dat het diagram voor $\phi_z^X(x)$ slechts eindig veel punten bevat.

Zij $V = \{ x_1, x_2, \dots, x_k \}$ de verzameling getallen, waarnaar in het diagram wordt geïnformeerd, geordend volgens grootte. Dit levert het k -tupel voor de tt-conditie $f(x) = ((x_1, \dots, x_k), \alpha)$.

Definieer de verzameling $Y = Y(w_1, \dots, w_k) \subseteq V$ door

$$x_i \in Y \iff w_i = 1.$$

Zij nu $\alpha(w_1, \dots, w_k) = \min(1, \phi_z^Y(x))$.

We moeten nagaan of inderdaad geldt dat

$$x \in A \iff B \text{ voldoet aan tt-conditie } f(x).$$

Daar $\phi_z^{B \vee V}(x) = 0 \iff \phi_{z_1}^B(x) = 0$ geldt:

$$(\alpha) \quad x \in A \Rightarrow \phi_{z_1}^B(x) = 1 \Rightarrow \phi_{z_1}^{B \vee V}(x) \neq 0 \text{ dus}$$

$$\alpha(c_B(x_1), \dots, c_B(x_k)) = \min(1, \phi_{z_1}^{B \vee V}(x)) = 1.$$

m.a.w. B voldoet aan tt-conditie $f(x)$.

$$(\beta) \quad x \notin A \Rightarrow \phi_{z_1}^B(x) = 0 \Rightarrow \phi_{z_1}^{B \vee V}(x) = 0 \text{ dus } \alpha(c_b(x_1), \dots, c_b(x_k)) = 0,$$

m.a.w. B voldoet niet aan tt-conditie $f(x)$.

Conclusie: $A \leq_{tt} B$, hetgeen te bewijzen was.

Opm; In H11 hebben we gezien dat er een recursief opsombare, niet recursieve verzameling is, die tt-volledig, maar niet m-volledig is (deze verzameling was simpel). In het gevolg van stelling 5.2 is aangetoond dat er een r.o., niet recursieve verzameling is, die T-volledig maar niet tt-volledig is (deze verz. was hypersimpel)

We kunnen nu op analoge wijze de vraag stellen: is er een recursief opsombare, niet recursieve verzameling die niet T-volledig is? Dit is bekend geworden als het probleem van Post, dat in 1956 werd opgelost door Friedberg en Muchnik. Dit zal in het volgende hoofdstuk worden behandeld.

Colloquium Recursieve Functies (1968)-1969)

Spreker K.K. Koksma.

Hoofdstuk 13 Het probleem van Post.

1. Inleiding

In het vorige hebben we gezien dat er minstens 2 recursief opsom-
bare T-graden zijn nl. $d_T(\phi)$ en $d_T(K)$. Het probleem van Post is nu
de vraag of er nog andere recursief opsombare T-graden zijn dan
twee. Het zal blijken dat deze er zijn, maar we zullen eerst laten
zien dat een constructieve methode om deze graden op te sporen faalt.

Het gaat er dus om een verzameling B te vinden zodanig dat

$B \notin d_T(\phi)$ en $B \notin d_T(K)$.

$B \notin d_T(\phi)$ betekent

$$(\forall x) [\bar{B} \neq W_x]$$

Dit houdt in dat er bij iedere x een getal y te vinden is dat ofwel
in W_x ligt en niet in $\bar{B}$ ofwel in $\bar{B}$ ligt en niet in W_x ; m.a.w.

$$(\forall x) (\exists y) [y \in B \Leftrightarrow y \in W_x]$$

Kunnen we het getal y bij iedere x volgens een recursieve methode
vinden dan noemen we B constructief niet-recursief.

$$\therefore B \text{ constructief niet-recursief} \Leftrightarrow (\exists \text{ recursieve } f)(\forall x) [f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in W_x]$$

Dat we met constructief niet-recursieve verzamelingen het probleem
van Post niet kunnen oplossen is een gevolg van:

stelling 1 Is een getallenverzameling recursief opsombaar en con-
structief niet recursief dan is zij ook creatief.

Bewijs Het begrip creatief zijn we al vele malen tegengekomen
(blz. 27 & blz. 67). A creatief hield volgens de definitie
in A recursief opsombaar & $(\exists y) (\forall x) [W_x \cap A = \emptyset \Rightarrow$
 $x \in W_y \text{ \& } \phi_y(x) \notin A \cup W_x]$ Daar $f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x \text{ \& }$
 $W_x \cap A = \emptyset$ impliceert $f(x) \notin A \cup W_x$ volgt de stelling onmiddellijk.

Zoals op blz. 101 vermeld liggen alle creatieve verzamelingen in $d_1(K)$ en dus afortiori in $d_T(K)$. Dit houdt in dat een verzameling die niet in $d_T(K)$ ligt, nooit constructief niet-recursief kan zijn. Het feit dat $B \not\leq_T A$ kunnen we op grond van de stelling dat B dan en slechts dan recursief in A is als B en $\bar{B}$ beide recursief opsombaar in B zijn als volgt aangeven:

$$B \not\leq_T A \iff (\forall x) [\bar{B} \neq W_x^B]$$

m.a.w.

$$B \not\leq_T A \iff (\forall x) (\exists y) [y \in A \iff y \in W_x^B]$$

Ook hier definiëren we:

$$B \text{ constructief niet-recursief in } A \iff (\exists \text{ recursieve } f)(\forall x) [f(x) \in B \iff f(x) \in W_x^A]$$

Dat een verzameling B die constructief niet recursief in K is het probleem van Post niet kan oplossen volgt uit

Stelling 2 Zijn A en B beide recursief opsombaar en is B constructief niet-recursief in A dan is A recursief.

Bewijs Zie Rogers pp 162, 163.

Voor een inzicht in de richting, waarin we een oplossing van het probleem van Post moeten zoeken zijn nog van belang:

Stelling 3 Zijn A en B recursief opsombaar en is B constructief niet-recursief in A dan is A recursief en B creatief.

Bewijs: Voor het eerste deel zie stelling 2.

$$(1) \quad B \text{ constructief niet-recursief in } A \iff (\exists \text{ rec } f)(\forall x) [f(x) \in B \iff f(x) \in W_x^A]$$

Daar A recursief $\Rightarrow (\exists \text{ rec } g) [W_y^A = W^A g(y)]$ met $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 Zij $h: \lambda y [f(g(y))]$

Dan:

$$(1) \iff (\exists \text{ rec } h) \forall g(y) [f(g(y)) \in B \iff f(g(y)) \in W_{g(y)}^A]$$

Daar g "op" is:

$$(1) \iff (\exists \text{ rec } h) (\forall y) [h(y) \in B \iff h(y) \in W_y]$$

Stelling 4 Er bestaan recursief opsombare verzamelingen A en B zodanig dat A niet-recursief in B is ofschoon A niet constructief niet-recursief in B is.

Bewijs In het vorige hoofdstuk is het bestaan van een simpele verzameling aangetoond. A simpel betekent: A is een coinfinite, recursief opsombare verzameling, die met elke andere oneindige recursief opsombare verzameling een niet lege doorsnede heeft. Dit houdt onder meer in dat A niet recursief is (in $B = \emptyset$). Dat A ook niet constructief niet-recursief is volgt uit de stelling dat een simpele verzameling niet creatief is (Zie hoofdstuk 11 stell. 1.1.b).

2. De stelling van Friedberg-Muchnik.

In het vorige hoofdstuk werd vermeld dat het domein van een willekeurige partiëel recursieve functie relatief t.o.v. een verzameling D (hier eindig) als volgt kon worden gekarakteriseerd:

$$W_z^D = \left\{ x \mid (\exists y)(\exists u)(\exists v) [\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e(z)} \text{ \& } D_u \subset D \text{ \& } D_v \subset \bar{D}] \right\}$$

met $e(z)$ recursief, $W_{e(z)}$ regulier en $(\forall \text{ reguliere } A)(\exists z) [A = W_{e(z)}^D]$.

Deze karakterisering rechtvaardigt het volgende algoritme - uniform in z en D om W_z^D op te sommen: Som $W_{e(z)}$ op en als $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e(z)}$ test of $D_u \subset D$ en $D_v \subset \bar{D}$; Zoja voeg x toe aan de opsomming van W_z^D .

In dit hoofdstuk bedoelen we met "binnen n stappen in de opsomming van W_z^D ", dat het algoritme zover doorgevoerd is, dat er n machinestappen in de opsomming van $W_{e(z)}$ gedaan zijn.

We kunnen nu de volgende hulpstelling formuleren:

Stelling 2.1 Zij $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ met $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ en $(\forall n) [A_n \text{ eindig}]$;
 Zij $a \in W_z^A$ dan is er een m zodanig dat
 $(\forall n) [n \geq m \Rightarrow a \text{ komt binnen } n \text{ stappen in de opsom-}$
 $\text{ming van } W_z^{A_n} \text{ voor}]$.

Bewijs: $a \in W_{z_\infty}^A \Rightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v) [\langle a, y, u, v \rangle \in W_{e(z)} &$
 $D_u \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ \& } D_v \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n]$
 Dit houdt enerzijds in $(\forall n) [D_v \subset \bar{A}_n]$ en anderzijds
 $(\exists p)(\forall n) [n \geq p \Rightarrow D_u \subset A_n]$.
 Hieruit volgt $(\forall n) [n \geq p \Rightarrow a \in W_z^{A_n}]$.
 Komt a binnen q stappen voor in de opsomming van W_z^A ,
 dan komt a ook binnen q stappen voor in $W_z^{A_n}$ mits $n \geq p$.
 Zij $m = \max(p, q)$ dan geldt:

$(\forall n) [n \geq m \Rightarrow a \text{ komt binnen } n \text{ stappen in de}$
 $\text{opsomming van } W_z^{A_n} \text{ voor}]$. q.e.d.

We gaan nu over tot het bewijs volgens de methode van Friedberg van de stelling van Friedberg en Muchnik.

Stelling 2.2 (Friedberg-Muchnik)

Er bestaan 2 recursief opsombare verzamelingen A en B zodanig dat
 $A \not\leq_T B$ en $B \not\leq_T A$.

Bewijs:

Voor het bewijs moeten we een methode aangeven om A en B op te sommen en de existentie aantonen van twee functies f en g zodanig dat:

$(\forall x) [f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B]$ en $(\forall x) [g(x) \in B \Leftrightarrow g(x) \in W_x^A]$

De methode om A en B op te sommen wordt gegeven door het algoritme (I). Bovendien tonen we daarin en passant het bestaan van f en g aan; f en g zijn op grond van stelling 1.2 niet recursief.

Ter inleiding diene het volgende:

We gaan uit van 2 lijsten de A-lijst en de B-lijst. Beide bestaan ze uit de natuurlijke getallen in opklimmende volgorde onder elkaar geschreven. We werken de lijsten "macroscopisch" gezien van boven naar onder af. Voor het vastleggen van de funktief f en g gebruiken we 2 oneindige verzamelingen merktekens: voor f in de A-lijst $[0]_1, [1]_1, \dots, [k]_1$ en voor g in de B-lijst $[0]_2, [1]_2, \dots, [k]_2$. Bij de $2n+1^e$ stap wordt een getal in de A-lijst met merkteken $[n]_1$ gemerkt. (Bij stap $2n+2$ een getal uit de B-lijst). Een merkteken kan eventueel in latere stappen nog een eindig aantal keren naar beneden worden verschoven.

Ten allen tijde kan een getal uit een lijst ten hoogste door één merkteken gemerkt zijn en kunnen geen 2 getallen uit dezelfde lijst zijn gemerkt met hetzelfde merkteken. De waarde van $f(n)$ resp $g(n)$ is nu het getal in de eindstand door $[n]_1$ resp $[n]_2$ gemerkt. In elke oneven (even) stap testen we volgens een bepaald criterium of er weer een getal aan de verz A (of B) moet worden toegevoegd. Zo ja dan zetten we naast het getal aangewezen door het geselecteerde merkteken aangewezen een plus.

Min en plus vervullen een andere rol dan merktekens. Krijgt een getal eenmaal een plus dan houdt het die. Een min kan eventueel nog in een plus veranderen. Zetten we naast een getal, y zeg, op dat moment gemerkt door $[x]_1$ een plus dan moeten we voorzorgen nemen dat als $[x]_1$ niet meer verschuift $y \in W_x^B$; dit doen we door het zetten van een aantal minnen in de B-lijst. We zullen dan uiteraard moeten aantonen dat naast deze getallen nog geen plus stond en dat als $[x]_1$ niet meer verschuift geen van deze minnen in een plus kan veranderen.

We definiëren verder voor gebruik in het algoritme:

$$1. A_0 = B_0 = \emptyset$$

$$A_n = \{x \mid \text{naast } x \text{ in de A-lijst staat een plus na de } n^e \text{ stap}\}.$$

$$B_n = \{x \mid \text{naast } x \text{ in de B-lijst staat een plus na de } n^e \text{ stap}\}.$$

2. Een getal in de A(of B lijst) is vrij als eronder +, - of merkteken voorkomt.

3. Een getal is vacant als er geen plus naast staat.

Het algoritme luidt nu als volgt:

Stap 1 Merk 0 in de A-lijst met $[0]_1$

Stap 2 Merk 0 in de B-lijst met $[0]_2$

.....

Stap 2n+1 Merk het eerste vrije getal in de A-lijst met $[n]_1$.

Geef de getallen nu gemerkt door

$[0]_1, [1]_1, \dots, [n]_1$ aan met $a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$.

Bereken n stappen in de opsomming van $W_0^{B_{2n}}, \dots, W_n^{B_{2n}}$.

Zij $a_j^{(n)}$ het kleinste element van $\{a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}\}$ dat vacant is en voorkomt in de opsomming van $W_j^{B_{2n}}$.

Is er geen getal dat hieraan voldoet ga dan over tot de volgende stap. Is er wel zo'n $a_j^{(n)}$ dan geldt op grond van de karakterisering aan het begin van deze paragraaf:

I

$$a_j^{(n)} \in W_j^{B_{2n}} \iff (\exists y)(\exists u)(\exists v) [a_j^{(n)} \in W_{e(z)}], \\ D_u \subset B_{2n}, D_v \subset \overline{B_{2n}}$$

Zet nu een plus naast $a_j^{(n)}$ in de A-lijst en een min naast alle elementen van D_v in de B-lijst.

(opm. daar $D_v \cap B_{2n} = \emptyset$ stonden daar nog geen plussen).

Is $j < n$ verschuif dan alle merktekens $[i]_2$ met $j \leq i < n$ in de B-lijst naar beneden naar vrije getallen

Stap 2n+2 Maak een copie van de tekst voor Stap 2n+1.

Vervang overal $A \rightarrow B$

$$[\]_1 \rightarrow [\]_2$$

$$B \rightarrow A$$

$$[\]_2 \rightarrow [\]_1$$

$$a^{(n)} \rightarrow b^{(n)}$$

$$i < n \rightarrow i \leq n$$

Voer de tekst als resultaat van de vervanging verkregen uit.

Essentieel in het algoritme is dat ieder merkteken slechts een eindig aantal malen verschoven wordt. Dit is eenvoudig te bewijzen met volledige inductie want $[0]_1$ verschuift nooit en $[0]_2$ hoogstens 1 maal. Neem nu aan $(\forall j) [j < n] [j]_1$ verschuift $V_1(j)$ keer en $[j]_2$ verschuift $V_2(j)$ keer, $V_1(j)$ en $V_2(j)$ eindig

Dan geldt $V_1(n) \leq \sum_{j=0}^{n-1} V_2(j)$ en $V_2(n) \leq \sum_{j=0}^{n-1} V_1(j) + \sum_{j=0}^{n-1} V_2(j)$ m.a.w.

$[n]_1$ en $[n]_2$ verschuiven een eindig aantal keer.

Uitvoering van het algoritme levert dus op de verzameling $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ en de verzameling $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$. Bovendien ook de functies f en g waarvoor geldt dat $f(x)$ resp $g(x)$ het getal is in eindstand gemerkt door $[x]_1$ resp $[x]_2$. Dat $A \perp_{\mathbb{T}} B$ volgt nu als we bewijzen:

$$(\forall x) [f(x) \in A \iff f(x) \text{ heeft een plus} \iff f(x) \in W_x^B]$$

Nu stel $f(x)$ is de eindstand van $[x]_1$ en stel $f(x) \in A$; dan krijgt $f(x)$ in een of andere stap een plus. Geen enkele min die in diezelfde stap in de B-lijst wordt geschreven kan in een plus veranderen, omdat alle $[k]_2$ met $x \leq k$ beneden al dergelijke minnen gezet worden en als $[k]_2$ met $k < x$ een min in een plus zou veranderen zou $[x]_1$ weer verschoven worden in tegenspraak met het feit dat $[x]_1$ in eindstand stond. Omgekeerd stel $f(x) \in W_x^B$. Daar $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ en $B_1 \subset B_2 \subset \dots$

geldt volgens stelling 2.1 dat er een m is zodanig dat

$$(\forall n) [n \geq m \implies f(x) \text{ komt binnen } n \text{ stappen in de opsomming van } W_x^B]$$

Dit houdt in dat in elke $(2n+1)^e$ stap $f(x)$ "kandidaat" staat voor een plus en die alleen niet krijgt als er een kleiner getal ook "kandidaat" staat.

Aangezien er maar een eindig aantal getallen kleiner zijn dan $f(x)$ en een getal als het eenmaal een plus heeft nooit meer kandidaat is voor nog één, krijgt $f(x)$ dus een keer een plus. Het bewijs $B \perp_{\mathbb{T}} A$ gaat analoog.

Uit de stelling van Friedberg-Muchnik volgt:

Stelling 2.3 Er zijn meer dan 2 recursief opsombare T-graden.

(nl. $d_T(A)$, $d_T(B)$ en $d_T(\phi)$)

Stelling 2.4 Er bestaan 2 recursief opsombare verzamelingen die on-
vergelijkbaar zijn t.o.v. $\leq_1$, $\leq_m$ en $\leq_{tt}$.

Generalisatie van het bewijs van stelling 2.2 levert:

Er bestaan $\aleph_0^n$ recursief opsombare T graden.

Er bestaan $\aleph_0^n$ recursief opsombare tt-graden.

3. Enige verwante stellingen.

Stelling 3.1 (Young). Er bestaan 2 recursief opsombare verzamelingen die geen kleinste bovengrens hebben in de 1-reduceerbaarheidsordening.

Bewijs:

In grote trekken loopt het bewijs als volgt:

- (1) Op grond van stelling 2.2 en de stelling van Dekker uit het vorige hoofdstuk weten we $(\exists A) (\exists B) [A \text{ simpel}, B \text{ simpel}, A \not\leq_T B, B \not\leq_T A]$
- (2) $A \text{ join } B$ is een bovengrens voor A en B die tevens simpel is
- (3) Neem nu aan er is een kleinste bovengrens C.
- (4) Uit (3) en (2) volgt C is simpel
- (5) We construeren nu voor zekere m $C \cup \{m\}$ en bewijzen dat dit weer een bovengrens voor A en B is.
- (6) Op grond van het lemma op blz. 105 geldt nu $C \not\leq_1 C \cup \{m\}$ in tegenspraak met (3), waarmee de stelling dan bewezen is.

We bewijzen nu achtereenvolgens (2), (4) en (5).

- (2) $A \leq_1 A \text{ join } B$ via $\lambda x [2x]$, $B \leq_1 A \text{ join } B$ via $\lambda x [2x+1]$

Als $A \text{ join } B$ nu niet simpel zou zijn $\Rightarrow (\exists z) A \text{ join } B \cap W_z = \emptyset$

Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen W_z bevat oneindig veel even getallen $\Rightarrow (\exists p) [W_p = \{x \mid 2x \in W_z\}]$

Hieruit zou volgen $W_p \cap A = \emptyset$ hetgeen strijdig is met A simpel.

$\therefore A \text{ join } B$ is simpel.

(4) Uit (3) volgt $C \leq_1 A \text{ join } B$. Zeg via $p(x)$.

Is C nu niet simpel $\Rightarrow (\exists p) [W_p \cap C] = \emptyset$; We weten $(\exists \text{ recursieve } h)$

$[R_h = W_p]$ maar dan $R_{f,h} \cap A \text{ join } B = \emptyset$ in tegenspraak met $A \text{ join } B$ simpel.

$\therefore C$ is simpel

(5) Zij $A \leq_1 C$ via f en $B \leq_1 C$ via g . We kunnen f en g nu zo kiezen dat $f(A) = C$ en $g(B) = C$.

Nu $\bar{C} - f(N) \neq \emptyset$ en $\bar{C} - g(N) \neq \emptyset$; anders $C \equiv_1 A$ of $C \equiv_1 B$ in tegenspraak met het feit dat A en B onvergelykbaar zijn. Neem

$m \in \bar{C} - f(N)$ en $n \in \bar{C} - g(N)$.

Dan $A \leq_1 C \cup \{m\}$ via f en $B \leq_1 C \cup \{m\}$.

$\therefore C \cup \{m\}$ is een bovengrens voor A en B .

Het bewijs van de stelling volgt nu op grond van (6).

Stelling 3.2 (Shoenfield). Zij C recursief opsombaar maar niet recursief. Dan bestaan er in de T-graad van C 2 disjuncte recursief opsombare verzamelingen, die recursief inseparabel zijn.

Bewijs Zij f een recursieve functie die C opsomt zonder herhalingen. Definieer een partiële functie ψ als volgt:

$\psi(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ als $(\exists z)(\exists w) [f(z) = x \ \& \ w < z \ \& \ P_y \text{ met input } \langle x, y \rangle \text{ levert } \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ als output in } w \text{ stappen}]$ (II)

Het predicaat tussen haken is duidelijk recursief opsombaar; aangezien dit niet wordt aangetast door tweemaal een existentiële

quantor ervoor te zetten is ψ partiëel recursief. Beschouw de 2 disjuncte recursief opsombare verzamelingen $A = \{x \mid \psi(x) = 1\}$ en $B = \{x \mid \psi(x) = 0\}$.

Deze zullen nu blijken te voldoen aan de voorwaarden in de stelling genoemd.

We bewijzen eerst $A \leq_T C$.

Gegeven een methode om uit te maken of $x \in C$, dan kunnen we als volgt nagaan of $\langle x, y \rangle \in A$:

Als $x \notin C$ dan $\langle x, y \rangle \notin A$. Anders als $x \in C$ bepaal dan $z = f^{-1}(x)$ en kijk of P_y met input $\langle x, y \rangle$ het resultaat 0 oplevert binnen z stappen

Zoja, dan $\langle x, y \rangle \in A$, zo nee $\langle x, y \rangle \notin A$.

Het bewijs $B \leq_T C$ gaat analoog.

Vervolgens bewijzen we $C \leq_T A$.

Gegeven een methode om uit te maken of $x \in A$, dan kunnen we als volgt nagaan of $x \in C$:

Kies y_0 zodat $\phi_{y_0} = \lambda z [\bar{0}]$. Als $\langle x, y_0 \rangle \in A$ dan $x \in C$; Bepaal anders als $\langle x, y_0 \rangle \notin A$ het aantal stappen u nodig om $\phi_{y_0}(\langle x, y_0 \rangle)$ te berekenen uit instructies P_{y_0} en ga na of $f(z) = x$ voor een of andere $z \leq u$.

Zoja $x \in C$, zo nee $x \notin C$.

Het bewijs $C \leq_T B$ gaat analoog. We mogen dus concluderen

$A \equiv_T B \equiv_T C$.

Tot slot bewijzen we A en B zijn recursief inseparabel. Dit bewijzen we uit het ongerijmde.

∴ Stel A en B recursief inseparabel

∴ $(\exists \text{ recursieve } h) [\text{range } h = \{0, 1\}, h(A) = 1, h(B) = 0]$.

Zij $h = \phi_{y_1}$.

Dan $(\exists \text{ recursieve } g) [g(x) = \text{de lengte van de berekening van } P_{y_1} \text{ met input } \langle x, y_1 \rangle]$.

We kunnen nu C als volgt karakteriseren:

$$x \in C \iff (\exists z) [z \leq g(x) \text{ \& } f(z) = x] \quad (\text{III})$$

$\Leftarrow$ triviaal;

$\Rightarrow$ bewijzen we uit het ongerijmde stel $z \leq g(x) \text{ \& } f(z) = x$

dan op grond van (II) $(\exists x, y_1) [\phi_{y_1}(\langle x, y_1 \rangle) = 0 \iff \phi_{y_1}(\langle x, y_1 \rangle) = 1]$

(III) houdt echter in C recursief in strijd met het gegeven.

∴ A en B zijn recursief inseparabel, waarmee de stelling bewezen is.