stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 76 APRIL

SYLLABUS ORIËNTEREND COLLOQUIUM MAATTHEORIE

1969 - 1970

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Oriënterend Colloquium Maattheorie (1969-1970)

Spreker: J. van de Lune

1. Inleiding

In de maattheorie ontmoet men o.a. het probleem van de generalisatie van het begrip "lengte van een interval". Men tracht daarbij te komen tot een algemene notie "maat van een puntverzameling".
Men zal het er op grond van intuïtieve overwegingen wel over eens kunnen worden dat zo'n algemeen maatbegrip aan bijvoorbeeld de volgende eisen zal moeten voldoen:

1. Als A een verzameling is met maat $m(A)$, dan moet $m(A)$ een reëel getal ≥ 0 zijn.
2. Als A_1 en A_2 verzamelingen zijn zodanig dat $A_1 \subset A_2$ dan moet $m(A_1) \leq m(A_2)$.
3. Als de verzamelingen A_1 en A_2 disjunct zijn dan moet gelden

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

4. De maat van een interval $[a,b]$ met $a \leq b$ moet gelijk zijn aan $b - a$. In het bijzonder: de maat van een verzameling bestaande uit één punt moet 0 zijn.

Met betrekking tot deze zeer voor de hand liggende eisen moet worden opgemerkt dat het niet mogelijk is op de reële rechte $\mathbb{R}$ een maatbegrip in te voeren zodanig dat aan elke deelverzameling A van $\mathbb{R}$ een reëel getal $m(A)$ wordt toegevoegd, terwijl bovendien aan alle bovenstaande eisen wordt voldaan. Toch behoeft men zich hierdoor niet te laten ontmoedigen. Het zal blijken dat het wel mogelijk is op een zeer uitgebreide klasse van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ een maat te definiëren die aan bovengenoemde vier eisen voldoet. Meer nog: men kan eis 3 daarbij nog verscherpen tot:

3^*. Als $A_1, A_2, A_3, \ldots$ een aftelbare rij paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is, dan moet gelden

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Het zo verkregen maatbegrip "op $\mathbb{R}$" zullen we de Lebesguemaat op $\mathbb{R}$ noemen.
Vooral de modificatie $\underline{3}^*$ van eis $\underline{3}$ heeft uiterst belangrijke consequenties voor de analyse. Het begrip "Lebesguemaat" geeft namelijk aanleiding tot een integraalbegrip dat in menig opzicht algemener is dan het welbekende integraalbegrip van Riemann. Voor Lebesgue-integralen geldt bijvoorbeeld: Indien $f_1, f_2, f_3, \ldots$ een rij integreerbare funkties is op het interval $[0,1]$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ voor elke $x \in [0,1]$, dan is de (puntsgewijze) limietfunktie $f(x)$ ook integreerbaar op $[0,1]$ als bovendien bekend is voor alle $x \in [0,1]$ en alle natuurlijke getallen n dat geldt $|f_n(x)| \leq M$. De lezer geve zelf een voorbeeld waaruit blijkt dat bovenstaande bewering niet juist is voor Riemannintegralen.

In dit colloquium zullen we ons evenwel niet speciaal bezighouden met de introductie van een maat op $\mathbb{R}$, maar zullen trachten een stuk algemene maattheorie op te bouwen die dan op bijzondere gevallen kan worden toegepast.

Alvorens hiertoe over te gaan, geven we nog een korte recapitulatie van enige verzamelingstheoretische begrippen en stellingen waarvan in het vervolg van dit colloquium veelvuldig gebruik zal worden gemaakt.

2. Verzamelingsleer

Def. 2.1 a) Zij $\{A_\rho\}_\rho$ een collectie verzamelingen (waarbij ρ een niet-lege en niet noodzakelijk aftelbare indexverzameling doorloopt), dan is de vereniging van deze verzamelingen, notatie $\bigcup_\rho A_\rho$, de verzameling van die elementen x die tot minstens één der verzamelingen A_ρ behoort.
b) De doorsnede van de verzamelingen uit bovengenoemde collectie, notatie $\bigcap_\rho A_\rho$, is de verzameling van die elementen x, die tot ieder van de verzamelingen A_ρ behoort.

Def. 2.2. Een verzameling A is bevat in een verzameling B, notatie $A \subset B$, indien ieder element van A ook element is van B.
Een verzameling A omvat een verzameling B, notatie $A \supset B$, indien $B \subset A$.
Als de verzamelingen A en B voldoen aan $A \subset B$ en $B \subset A$, dan heten A en B gelijk, notatie $A = B$.

Def. 2.3. De lege verzameling, notatie $\emptyset$, is de verzameling die geen enkel element bevat.

Opmerking. Voor iedere verzameling A geldt: $\emptyset \subset A$.

Def. 2.4. De verzamelingen A en B heten disjunct, indien $A \cap B = \emptyset$.

Stelling 2.1. De bewerkingen $\cup$ en $\cap$ zijn associatief en commutatief.
Opm. Dat $A \cup B = B \cup A$ en $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ volgt direkt uit de definitie van $\cup$. Evenzo voor de doorsnede. Ga na.

Stelling 2.2. Als A en $\{A_\rho\}_\rho$ deelverzamelingen zijn van een verzameling X, dan geldt

$$A \cap \left(\bigcup_\rho A_\rho\right) = \bigcup_\rho (A \cap A_\rho).$$
$$A \cup \left(\bigcap_\rho A_\rho\right) = \bigcap_\rho (A \cup A_\rho).$$

Het bewijs volgt onmiddellijk uit de definities.

Def. 2.5. Het complement (in X) van een deelverzameling A van X, notatie A^c, is de verzameling van die elementen van X, die geen element zijn van A.

Def. 2.6. Zij A en B deelverzamelingen van X, dan is het verschil van A en B, notatie $A \setminus B$, de verzameling van die elementen van A die geen element zijn van B.

Opgave. Bewijs

1) $A \setminus B = A \cap B^c$.

2) $\left(\bigcup_\rho A_\rho\right)^c = \bigcap_\rho A_\rho^c$.

3) $\left(\bigcap_\rho A_\rho\right)^c = \bigcup_\rho A_\rho^c$.

Def. 2.7. Het symmetrisch verschil $A \Delta B$ van twee verzamelingen A en B is gedefinieerd door

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Def. 2.8. Zij $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ een rij deelverzamelingen van X, dan is de limes superior van de rij $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de verzameling van die elementen van X, die tot oneindig vele A_n behoren; notatie $\lim\sup A_n$.

De <u>limes inferior</u> van de rij $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, notatie $\liminf A_n$, is de verzameling van die elementen x van X waarvoor geldt

$$\exists n_x \text{ zodat } x \in A_n \text{ voor } n \geq n_x.$$

Indien $\liminf A_n = \limsup A_n$ dan heet de rij $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>convergent</u>.

<u>Opgaven</u>. 1. Bewijs $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
Is ook $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$?

2. $A^c \Delta B^c = A \Delta B$ en $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. Ga na.

3. Ga na dat voor iedere rij verzamelingen $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X $\liminf A_n$ en $\limsup A_n$ bestaan.

4. Bewijs dat $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$,

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

5. Bepaal $\limsup A_n$ en $\liminf A_n$ indien
a) $A_{n+1} \subset A_n$ voor alle $n \geq 1$;
b) $A_n \subset A_{n+1}$ voor alle $n \geq 1$.

<u>Stelling 2.3</u>. Zij $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ een gegeven collectie deelverzamelingen van X, dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ te schrijven als vereniging van paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen.

Bewijs. Definieer $F_1 = E_1$,
$$F_{n+1} = E_{n+1} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$$
Dan is $F_i \cap F_j = \emptyset$ voor $i \neq j$.
Bovendien geldt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

immers:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Rightarrow \exists n_1 \text{ met } x \in F_{n_1} \Rightarrow x \in E_{n_1} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

en

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \exists n_1 \text{ met } x \in E_{n_1}. \text{ Zij } n_2 = \min\{n_i \mid 1 \leq n_i \leq n_1\}.$$

Dan

$$x \in E_{n_1} \Rightarrow x \in E_{n_2} \Rightarrow x \in F_{n_2} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Hiermee is de bewering bewezen.

Def. 2.9. Een ring R is een niet-lege klasse van deelverzamelingen van X zodanig dit geldt

$$E, F \in R \Rightarrow E \cup F \in R \text{ en } E \setminus F \in R.$$

Voorbeelden.

1. De powerset $\mathcal{P}(X)$ van X, d.i. de collectie van alle deelverzamelingen van X, is een ring.
2. De collectie van alle eindige verenigingen van rechts open en links gesloten intervallen op de reële rechte is een ring.
3. De collectie bestaande uit alleen de lege verzameling is een ring.

Eigenschappen van een ring.

1. Daar R niet leeg is, is er een verzameling $A \in R$; daarmee is ook de verzameling $A \setminus A = \emptyset \in R$.
2. Bovendien is daar we $E \cap F$ kunnen schrijven als verschil van elementen van R, nl.

$$E \cap F = (E \cup F) \setminus \{(E \setminus F) \cup (F \setminus E)\},$$

ook $E \cap F \in R$.

3. Met volledige inductie bewijst men

indien $E_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dan is $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in R$.

Analoog is ook $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in R$.

4. Zij $\{R_\alpha\}_\alpha$ een collectie ringen, dan is $\mathcal{R} = \bigcap_\alpha R_\alpha$ een ring. We merken hierbij op dat $\mathcal{R}$ niet leeg is, immers $\emptyset \in R_\alpha$ voor alle α.

<u>Stelling 2.4</u>. Zij $\mathcal{E}$ een collectie deelverzamelingen van X, dan is er een unieke ring $\mathcal{R}_0$ zodat $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_0$ en voor iedere ring R met $\mathcal{E} \subset R$ geldt $\mathcal{R}_0 \subset R$.

Opmerking. De ring $\mathcal{R}_0$ heet wel de ring <u>gegenereerd</u> door $\mathcal{E}$, en wordt genoteerd door $R(\mathcal{E})$.

Bewijs. Beschouw de collectie $\{R_\alpha\}_\alpha$ van alle ringen die $\mathcal{E}$ omvatten; deze is niet leeg want $\mathcal{P}(X) \in \{R_\alpha\}_\alpha$. Dan is volgens eigenschap 4 $\mathcal{R}_0 = \bigcap_\alpha R_\alpha$ weer een ring. Dat $\mathcal{R}_0$ voldoet aan $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_0$ en aan de eis dat voor alle R met $\mathcal{E} \subset R$ geldy $\mathcal{R}_0 \subset R$ is triviaal. De uniciteit van $\mathcal{R}_0$ bewijzen we als volgt:
Stel $\mathcal{R}_1$ is een ring die ook aan bovenstaande eisen voldoet en $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_0$.
Dan is $R^* = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0$ ook een ring.
Daar $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_1$ én $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_0$ is $\mathcal{E} \subset R^*$.
Dus geldt zowel $\mathcal{R}_0 \subset R^*$ als $\mathcal{R}_1 \subset R^*$.
M.a.w. enerzijds is $\mathcal{R}_0 \subset R^* \subset \mathcal{R}_0$ en anderzijds $\mathcal{R}_1 \subset R^* \subset \mathcal{R}_1$ zodat $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1$.
Tegenspraak.

<u>Def. 2.10</u>. Een <u>σ-ring</u> S is een ring, waarvoor geldt:

$$E_i \in S,\ i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S.$$

Voorbeelden.

<u>1</u>. $\mathcal{P}(X)$ is een σ-ring.

<u>2</u>. De klasse van alle aftelbare deelverzamelingen van de reële rechte is een σ-ring.

<u>3</u>. De klasse van alle begrensde deelverzamelingen van de reële rechte is wel een ring, doch geen σ-ring.

<u>Stelling 2.5</u>. Als $E_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, dan is $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in S$.

Bewijs. Zij $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, dan is $E \in S$.
Nu is

$$(*) \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E \setminus \{\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \setminus E_i)\}.$$

De verzamelingen $E \setminus E_i$ behoren tot S, dus ook

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \setminus E_i) \in S.$$

Uit (*) volgt nu

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in S.$$

Gevolg. Zij $E_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, dan is $\limsup_i E_i \in S$ en $\liminf_i E_i \in S$.

Bewijs. Uit de schrijfwijze $\limsup E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{i} E_k$ en stelling 2.5 volgt de bewering voor lim sup onmiddellijk.

Analoog voor $\liminf E_i$.

Def. 2.11. De σ-ring $S(\mathcal{E})$ gegenereerd door een collectie verzamelingen $\mathcal{E}$ is de doorsnede van alle σ-ringen die $\mathcal{E}$ omvatten.

Opmerking. Dat $S(\mathcal{E})$ een ring is, is bewezen in eigenschap 4. We moeten nog nagaan dat als $E_i \in S(\mathcal{E})$, $i = 1, 2, \ldots$ dan is ook $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S(\mathcal{E})$.

Nu is $E_i \in S(\mathcal{E}) \subset S$ voor iedere σ-ring S die $\mathcal{E}$ omvat, dus $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$ voor iedere σ-ring S die $\mathcal{E}$ omvat, m.a.w. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S(\mathcal{E})$.

Opgaven.

6. Zij E een vaste deelverzameling van X.
   a. Zij $\mathcal{E}$ de collectie verzamelingen bestaande uit alleen E, $\mathcal{E} = \{E\}$. Bepaal de ring die $\mathcal{E}$ genereert.
   b. Zij $\mathcal{E}$ de collectie verzamelingen die E omvatten,

   $$\mathcal{E} = \{F \mid F \supset E\}.$$

   Bepaal de ring en de σ-ring die $\mathcal{E}$ genereert.
7. Zij $\mathcal{E}$ de klasse van verzamelingen die precies twee punten van X bevatten; bepaal de ring en de σ-ring die $\mathcal{E}$ genereert.
8. Zij $\mathcal{E}$ een niet-lege klasse van verzamelingen in X, dan kan iedere verzameling in $S(\mathcal{E})$ worden overdekt door aftelbaar veel deelverzamelingen uit $\mathcal{E}$.

Spreker: J.M. Geijsel

3. Maat op een ring

We noteren de reële rechte door $\mathbb{R}$ en definiëren $\mathbb{R}^* = \{\mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)\}$.
In $\mathbb{R}^*$ hebben we de volgende rekenregels, waarbij we $a \in \mathbb{R}$ veronderstellen:

$a + (+\infty) = +\infty$

$a + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) = 0$

$$a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{als } a > 0 \\ -\infty & \text{als } a < 0 \\ 0 & \text{als } a = 0 \end{cases}$$

$a(-\infty) = (-a)(+\infty)$.

Optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{R}^*$ zijn commutatief. Vraag: is de optelling in $\mathbb{R}^*$ ook associatief; en de vermenigvuldiging?
Verder definiëren we $\frac{a}{+\infty} = 0$ voor $a \in \mathbb{R}$, terwijl $\frac{a}{b}$ niet gedefiniëerd is in de gevallen $\begin{cases} a \in \bar{\mathbb{R}}, \ b = 0 \\ |a| = |b| = \infty. \end{cases}$

Def. 3.1. Een additieve verzamelingsfunktie μ is een afbeelding van een deelcollectie $\mathcal{E}$ van $\mathcal{P}(X)$ naar $\mathbb{R}^*$, waarvoor geldt: Als $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, zó dat $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$ en $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dan is $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Def. 3.2. De verzamelingsfunktie μ heet aftelbaar additief indien voor iedere rij $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ zó dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ en $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, geldt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Def. 3.3. Een maat op een ring R is een op R gedefiniëerde niet-negatieve aftelbaar additieve verzamelingsfunktie μ, waarvoor geldt $\mu(\emptyset) = 0$.

Def. 3.4. Een maat μ op een ring R heet σ-eindig indien er voor iedere verzameling $E \in R$ een rij verzamelingen E_n, $n = 1, 2, \ldots$ in R bestaat zodanig dat

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ en } \mu(E_n) < \infty, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Stelling 3.1. Indien μ een maat is op de ring R, en E,F verzamelingen zijn in R, zó dat $E \subset F$, dan is $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Bewijs. $F = E \cup (F \setminus E)$.

$F \setminus E \in R$, dus daar $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ geldt:

$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

In het vervolg is R een ring met maat μ.

Stelling 3.2. Als $E_1, E_2 \in R$ zó dat $E_2 \subset E_1$ en $\mu(E_2) < \infty$. Dan is $\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$.

Bewijs. $E_1 = E_2 \cup (E_1 \setminus E_2)$.

Volgens de definitie van μ is dus

$$\mu(E_1) = \mu(E_2) + \mu(E_1 \setminus E_2).$$

Daar $\mu(E_2) < \infty$ is $\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$.

Stelling 3.3. Zijn E en E_n, $n = 1, 2, \ldots$ verzamelingen in R zó dat $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, dan geldt:

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Bewijs. Definieer de verzamelingen

$$F_n = E \cap E_n,$$

$$G_1 = F_1,$$

$$G_n = F_n \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n),\ n \geq 2.$$

Dit zijn verzamelingen in R en $G_n \subset F_n \subset E_n$. Dus volgens stelling 3.1 is

$$(*) \qquad \mu(G_n) \leq \mu(F_n) \leq \mu(E_n).$$

Nu is $E = E \cap \bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n = \bigcup_n G_n$.

De verzamelingen G_n zijn paarsgewijs disjunct, dus volgens de σ-additiviteit van μ is

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n).$$

Tezamen met (**) volgt hieruit

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

<u>Stelling 3.4.</u> Zij $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ een collectie paarsgewijs disjuncte verzamelingen van R; $E \in R$ zodanig dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$.

Dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E).$$

Bewijs. Voor iedere $N \geq 1$ is $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$ bevat in de ring R en $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \subset E$.

Volgens stelling 3.1 is

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) \leq \mu(E).$$

Dus voor alle $N \geq 1$ geldt

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) \leq \mu(E).$$

Daar $\mu(E_n) \geq 0$ voor alle n, geldt ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E).$$

<u>Gevolg 1.</u> Zij $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij verzamelingen in R zó dat $E_n \subset E_{n+1}$ en $E = \bigcup_n E_n \in R$. Dan geldt:

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Bewijs. Definieer $F_1 = E_1$,

$$F_n = E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i),\ n \geq 2.$$

Dan zijn de F_n paarsgewijs disjunct en $\bigcup_n F_n = \bigcup_n E_n = E$.

Uit stelling 3.3 volgt

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n),$$

uit stelling 3.4 volgt

$$\mu(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

Dus

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n).$$

Anderzijds is

$$E_N = \bigcup_{n=1}^{N} F_n,$$

dus

$$\mu(E_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n),$$

zodat

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_n).$$

<u>Gevolg 2</u>. Zij $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij verzamelingen in R zodat $E_{n+1} \subset E_n$. Zij $\mu(E_1) < \infty$ en $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in R$.

Dan geldt

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Bewijs. We merken eerst op dat $E \subset E_n \subset E_1$ voor alle n, dus

$$\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \mu(E_1) < \infty.$$

Definieer nu $F_n = E_1 \setminus E_n$, dan is

$$F_n \in R,\ F_n \subset F_{n+1} \text{ en } \bigcup_n F_n = E_1 \setminus E.$$

We kunnen dus gevolg 1 toepassen en concluderen

$$(*) \qquad \mu(E_1 \setminus E) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Daar $\mu(E) < \infty$ is volgens stelling 3.2

$$\mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \mu(E).$$

Anderzijds volgt uit de definitie van F_n en $\mu(E_n) < \infty$, dat

$$\mu(F_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n),$$

zodat

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Invullen in (*) levert

$$\mu(E_1) - \mu(E) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Daar $\mu(E_1) < \infty$ volgt nu

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Voorbeelden

1. We hebben gezien dat $\mathcal{P}(X)$ een σ-ring is.

   Zij p een vast punt in X. Definieer nu de verzamelingsfunktie μ: $\mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^*$ als volgt:

$$\mu(E) = 1 \text{ als } p \in E,$$

$$\mu(E) = 0 \text{ als } p \notin E.$$

   Dan is μ een maat op $\mathcal{P}(X)$. Immers:

   Dat $\mu(E) \geq 0$ is en $\mu(\emptyset) = 0$ is triviaal.

   De σ-additiviteit tonen we aan als volgt:

Zij $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$;
als $p \in E$, dan is er een $i_0 \geq 1$ met $p \in E_{i_0}$ en daar $E_i \cap E_j = \emptyset$ is $p \notin E_i$ voor $i \neq i_0$, dwz.

$\mu(E) = 1$ en $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E_{i_0}) = 1$.

Als $p \notin E$, dan $p \notin E_i$ voor alle i, dwz. $\mu(E) = 0$ en $\mu(E_i) = 0$ voor alle i.

2. Zij $\mathcal{E}$ de verzameling positieve gehele getallen. Definieer op $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ de verzamelingsfunktie μ als volgt

   $\mu(E) = n$ als E een eindige verzameling is met n elementen,
   $\mu(\emptyset) = 0$,
   $\mu(E) = +\infty$ als E oneindig veel elementen bevat.
   Dan is μ een maat op $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

We beschouwen nu de klasse I bestaande uit alle halfopen intervallen $[a,b)$, waarbij $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ en alle eindige verenigingen van deze intervallen. De klasse I is een ring. We kunnen gemakkelijk aantonen dat iedere verzameling E in I is te schrijven als vereniging van eindig veel disjuncte intervallen $[a_i,b_i)$. Dit kan op vele manieren, b.v. voor $[a,b)$ kunnen we ook schrijven $[a, \frac{a+b}{2}) \cup [\frac{a+b}{2}, b)$.
We definieren nu de volgende verzamelingsfunktie μ op I:

$$\mu([a,b)) = b - a.$$

Zij $E \in I$ geschreven als $E = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i,b_i)$ met $[a_i,b_i) \cap [a_j,b_j) = \emptyset$.
Dan definieren we

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu[a_i,b_i).$$

De definitie van $\mu(E)$ is onafhankelijk van de gekozen representatie van E, immers:
zij enerzijds $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; A_i disjuncte halfopen intervallen, en anderzijds

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} B_j;\ B_j \text{ disjuncte halfopen intervallen.}$$

Zij $C_{ij} = A_i \cap B_j$, dan zijn de C_{ij} disjuncte half-open intervallen (ga na) en E kunnen we nu ook representeren door

$$E = \bigcup C_{ij}.$$

Iedere A_i is de vereniging van eindig veel C_{ij}, nl. $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j$, dus wegens stelling 3.3 en 3.4 is

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j), \text{ dwz.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum \mu(C_{ij}).$$

Analoog $\sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum \mu(C_{ij})$, zodat

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j),$$

hetgeen we wilden bewijzen.

We zullen nu nagaan dat de funktie μ een maat is op de ring I.

(1) Voor alle $E \in I$ geldt $\mu(E) \geq 0$;
en $\mu(\emptyset) = a - a = 0$.

(2) μ is aftelbaar additief.
Laten $E_1, E_2, \ldots$ elementen zijn van I zodanig dat $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ en $E \in I$.
Dan moeten we bewijzen dat $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.
We bewijzen dit voor het geval dat E een half-open interval is.
Het algemene geval, dat E een eindige vereniging is van disjuncte half-open intervallen, volgt hieruit dan onmiddellijk.
$E = [a,b)$; $b - a > 0$ want voor $E = \emptyset$ is de bewering triviaal.
We mogen veronderstellen dat de E_i half-open intervallen zijn.
$E_i = [a_i,b_i)$.
Voor alle $n \geq 1$ geldt $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset E$, zodat $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leq \mu(E)$.
Dus ook geldt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu(E).$$

Om te bewijzen dat bovendien $\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, maken we gebruik van de stelling van Heine-Borel:

- Laat A een begrensde gesloten verzameling zijn in $\mathbb{R}$ en $\{U_\alpha\}_\alpha$ een collectie open verzamelingen zodanig dat $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Dan is er een eindige deelcollectie $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ zodanig dat $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. -

Zij nu $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - a$.

Definieer $F = [a, b-\varepsilon]$, dan is $F \subset E$.

En $\quad U_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i)$, zodat $E_i \subset U_i$.

Dus $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset F$.

Volgens de stelling van Heine-Borel zijn er eindig vele U_i, zeg $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ zodat

$$\bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j} \supset F.$$

Dan geldt dus

$$b - \varepsilon - a \leq \sum_{j=1}^{k} (b_{i_j} - a_{i_j} + \frac{\varepsilon}{2^i})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \varepsilon.$$

Ofwel $\mu(E) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$.

Daar ε willekeurig was volgt uit

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + 2\varepsilon$$

de te bewijzen relatie

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Opmerking: de maat μ is ook σ-eindig, immers zij $E \in R$, dus $E = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i)$, dan is E te schrijven als

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i) \text{ met } [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset \text{ en}$$

$$[a_i, b_i) = \emptyset \text{ voor } i \geq k,$$

$$\text{en } \mu([a_i, b_i)) < \infty \text{ voor alle } i.$$

Opgaven

1. Zij X de verzameling positieve gehele getallen. Zij de verzamelingsfunktie μ gedefinieerd op $\mathcal{P}(X)$ als volgt:

$$\mu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(E) = \infty \text{ als } E \text{ een oneindige verzameling is,}$$
$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{n^2} \text{ als } E \text{ een niet-lege eindige verzameling is.}$$

   Ga na dat μ (eindig) additief is, maar geen maat.

2. Zij μ een op een ring R gedefiniëerde niet-negatieve aftelbaar additieve verzamelingsfunktie. Indien gegeven is dat er een $E \in R$ is, zodanig dat $\mu(E) < \infty$, bewijs dan dat $\mu(\emptyset) = 0$.

3. Laat μ de op de ring I van eindige verenigingen van half-open intervallen gedefiniëerde maat zijn. Bewijs dan dat μ' gedefiniëerd door

$$\mu'([a,b)) = g(b) - g(a),$$

   waarbij g een niet-negatieve, monotoon stijgende continue funktie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is,
   eveneens een maat op I is.

4. Als μ een maat is op de ring R en E en F zijn twee verzamelingen in R, dan geldt

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

   Bewijs dit.

Oriënterend Colloquium Maattheorie (1969-1970)

Sprekers: J.M. Geysel en P.P.N. de Groen.

4. Uitwendige maat

In §3 hebben we een maat gedefiniëerd op een ring R. We willen nu het maatbegrip uitbreiden tot een grotere klasse van verzamelingen.

Def. 4.1. Zij $\mathcal{E}$ een niet-lege klasse van verzamelingen in X. De niet-negatieve verzamelingsfunktie ϕ: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}^*$ heet subadditief indien voor alle $E, F \in \mathcal{E}$ zodanig dat $E \cup F \in \mathcal{E}$ geldt

$$\phi(E \cup F) \leq \phi(E) + \phi(F).$$

Def. 4.2. De niet-negatieve verzamelingsfunktie ϕ: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}^*$ heet aftelbaar subadditief indien voor iedere rij $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, $E_i \in \mathcal{E}$ zodanig dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$, geldt

$$\phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(E_i).$$

Def. 4.3. De verzamelingsfunktie ϕ: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}^*$ heet monotoon indien voor alle $E, F \in \mathcal{E}$ zó dat $E \subset F$ geldt

$$\phi(E) \leq \phi(F).$$

Def. 4.4. Zij R een ring met maat μ. De uitwendige maat μ^* op X, voortgebracht door R en μ, wordt gedefinieerd als volgt:
(a) indien $E \in \mathcal{P}(X)$ zodanig is dat er minstens één aftelbare rij elementen $\{E_i\}$ van R bestaat zodanig dat $E \subset \cup E_i$, dan

$$\mu^*(E) = \inf \{\sum_i \mu(E_i) \mid E \subset \bigcup_i E_i,\ E_i \in R\},$$

(b) indien er géén rij deelverzamelingen van R is zodanig dat $E \subset \bigcup_i E_i$, dan

$$\mu^*(E) = +\infty.$$

5. Indien μ een maat is op de ring R en E en F zijn verzamelingen in R, dan definiëren we

$$E \sim F \quad \text{als} \quad \mu(E \,\Delta\, F) = 0.$$

Ga na dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie is, dwz.

(1) $E \sim E$.

(2) $E \sim F,\ F \sim G \Longrightarrow E \sim G$.

(3) $E \sim F \Longrightarrow F \sim E$.

Zij $\mathcal{E}$ de klasse van alle verzamelingen in R, waarvoor $E \sim \emptyset$. Bewijs dat $\mathcal{E}$ een ring is.

Stelling 4.1. De uitwendige maat μ^* voldoet aan:
(1) $\forall\, E \in R \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu(E)$.

(2) $\mu^*(E) \geq 0$ en $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(3) μ^* is monotoon.

(4) μ^* is aftelbaar subadditief.

Bewijs.
(1) Zij $E \in R$.
Dan is $\mu^*(E) \leq \mu(E)$ omdat $\{E\}$ een overdekking is van E. Voor iedere overdekking $\{E_i\}$ met $E_i \in R$, $E \subset \bigcup E_i$, geldt wegens de monotonie van μ dat

$$\mu(E) \leq \sum \mu(E_i),$$

dus

$$\mu(E) \leq \inf \{\sum \mu(E_i) \mid E_i \in R,\ E \subset \bigcup E_i\} = \mu^*(E).$$

Dus $\mu^*(E) = \mu(E)$.

(2) Dat μ^* niet-negatief is volgt direkt uit het feit dat μ^* het infimum is van een verzameling positieve getallen. Uit (1) volgt in het bijzonder dat $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(3) Zij $E \subset F$ en stel F is de te overdekken met een rij verzamelingen uit R. Voor F geldt

$$\mu^*(F) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \mid F_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots;\ F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\}.$$

Iedere overdekking van F is zeker een overdekking van E, dus

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F).$$

Indien F niet te overdekken is, dan $\mu^*(F) = +\infty$ en is aan (3) voldaan.

(4) Zij $\{A_n\}$ een rij verzamelingen in X, dan moeten we bewijzen dat

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Indien voor een der A_n geldt $\mu^*(A_n) = +\infty$, dan is de bewering triviaal.
Stel dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\mu^*(A_n)$ is eindig, dwz.

$$\mu^*(A_n) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) \mid E_{ni} \in R,\ i=1,2,\ldots;\ A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ni} \right\}$$

voor $n = 1, 2, \ldots$.
Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Zij nu $\{E_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ een overdekking van A_n zó dat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Nu is $\{E_{ni}\}_{i,n=1}^{\infty}$ een overdekking van $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dus geldt

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i,n=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig gekozen was, geldt dus

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Voorbeeld. Beschouw wederom de ring I uit §3 met de daarop gedefiniëerde maat μ. We kunnen nu op $\mathbb{R}$ de uitwendige maat μ^*, voortgebracht door I en μ, definiëren.
We berekenen de uitwendige maat van enige verzamelingen in $\mathbb{R}$.
1. Zij p een punt van $\mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Beschouw de verzameling $E = [p, p+\varepsilon)$ in I.
Dan is $\{E\}$ een overdekking van $\{p\}$ zodat

$$\mu^*(\{p\}) \leq \mu(E) = \varepsilon.$$

Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus

$$\mu^*(\{p\}) = 0.$$

2. Wat is $\mu^*((a,b))$?

Daar $(a,b) \subset [a,b)$ en $[a,b) \in I$, geldt

$$\mu^*((a,b)) \leq \mu([a,b)) = b - a.$$

Voor iedere $\varepsilon > 0$ is $[a+\varepsilon,b) \subset (a,b)$ en wegens de monotonie van μ^* geldt

$$(*) \qquad \mu^*([a+\varepsilon,b)) \leq \mu^*((a,b)).$$

Echter $[a+\varepsilon,b) \in I$, dus $\mu^*([a+\varepsilon,b)) = \mu([a+\varepsilon,b)) = b - a - \varepsilon$.

Dus voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt

$$b - a - \varepsilon \leq \mu^*((a,b)),$$

zodat

$$\mu^*((a,b)) \geq b - a.$$

Hieruit en uit $(*)$ concluderen we

$$\mu^*((a,b)) = b - a.$$

3. Ga zelf na dat $\mu^*([a,b]) = b - a$.

4. Zij E de verzameling van alle rationale getallen in $[0,1]$, en zij $\varepsilon > 0$. Zij $\{r_1, r_2, \dots\}$ een aftelling van de punten van E. Dan is

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [r_i, r_i + \frac{\varepsilon}{2^i}) \text{ en } [r_i, r_i + \frac{\varepsilon}{2^i}) \in I.$$

Dus

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu([r_i, r_i + \frac{\varepsilon}{2^i})) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was is dus

$$\mu^*(E) = 0.$$

Opmerking: ga na dat voor iedere verzameling A van aftelbaar veel punten in $\mathbb{R}$ eveneens geldt: $\mu^*(A) = 0$.

<u>Stelling 4.2.</u> (X, R_1, μ_1) en (X, R_2, μ_2) genereren dezelfde uitwendige maat μ^* op X d.e.s.d. als

$$\mu_1^* = \mu_2 \text{ op } R_2 \text{ én } \mu_2^* = \mu_1 \text{ op } R_1.$$

Bewijs.
(a) Stel (X, R_1, μ_1) en (X, R_2, μ_2) genereren de uitwendige maat μ^*. Daar $\mu^* = \mu_1$ op R_1 en $\mu^* = \mu_2$ op R_2 volgens stelling 4.1 is de bewering evident.
(b) Stel $\mu_1^* = \mu_2$ op R_2 én $\mu_2^* = \mu_1$ op R_1.
Zij $E \subset X$, dan willen we aantonen dat $\mu_1^*(E) = \mu_2^*(E)$.
Allereerst $\mu_1^*(E) \leq \mu_2^*(E)$.
Voor $\mu_2^*(E) = +\infty$ is dit triviaal, dus onderstel $\mu_2^*(E)$ is eindig.
Dan is er voor alle $\varepsilon > 0$ een aftelbare overdekking $\{E_i\}$ van E met $E_i \in R_2$, zodanig dat

$$\mu_2^*(E) > \sum_i \mu_2(E_i) - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Daar gegeven is dat $\mu_2 = \mu_1^*$ op R_2 volgt

$$\infty > \mu_2^*(E) > \sum_i \mu_1^*(E_i) - \frac{\varepsilon}{2} .$$

In het bijzonder geldt dus voor alle i dat $\mu_1^*(E_i) < \infty$.
Dus is er een overdekking van E_i met aftelbaar veel elementen van R_1:

$$E_i \subset \bigcup_j F_{ij}, \; F_{ij} \in R,$$

en wel zodanig dat

$$\mu_1^*(E_i) > \sum_j \mu_1(F_{ij}) - \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

M.a.w.

$$\mu_2^*(E) > \sum_i \mu_1^*(E_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \sum_i \left(\sum_j \mu_1(F_{ij}) - \frac{\varepsilon}{2^i}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \sum_{i,j} \mu_1(F_{ij}) - \frac{3\varepsilon}{2} .$$

De rij $\{F_{ij}\}$ is een aftelbare overdekking van E met elementen van R_1, dus

$$\mu_1^*(E) \leq \sum_{i,j} \mu(F_{ij}),$$

zodat

$$\mu_1^*(E) < \mu_2^*(E) + \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig gekozen was, geldt

$$\mu_1^*(E) \leq \mu_2^*(E).$$

Het bewijs dat $\mu_2^*(E) \leq \mu_1^*(E)$ gaat analoog.

Opgaven.

1. Zij R_1 de ring van alle eindige verenigingen van intervallen $[r,s)$ met $r < s$ en r en s rationaal. Zij R_2 de ring van alle eindige verenigingen van intervallen $[n,m)$ met $n < m$ en n en m geheel.
   Definiëer op R_1 en op R_2 op de manier als beschreven voor de ring I in §3 een maat μ_1 resp. μ_2.
   Zij nu μ_1^* de uitwendige maat gegenereerd door $(\mathbb{R}, R_1, \mu_1)$ en μ_2^* de uitwendige maat gegenereerd door $(\mathbb{R}, R_2, \mu_2)$. Ga na dat $\mu_1^* = \mu_2$ op R_2. Geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat $\mu_1^* \neq \mu_2^*$.

2. Zij μ_2^* de uitwendige maat uit opgave 1.
   Geef twee disjuncte verzamelingen E en F waarvoor geldt

$$\mu_2^*(E \cup F) < \mu_2^*(E) + \mu_2^*(F).$$

3. Zij $X = [0,1]$ en
   $\mathcal{E}$ is de collectie $\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \{\frac{3}{4}\}, X\}$.
   Zij μ een verzamelingsfunktie op gedefiniëerd door

$$\begin{cases} \mu([0, \frac{1}{2})) = \mu([\frac{1}{2}, \frac{3}{4})) = \mu(\{\frac{3}{4}\}) = 1 \\ \mu(X) = 4. \end{cases}$$

a) Bepaal de ring R gegenereerd door $\mathcal{E}$ en de σ-ring $\sigma(\mathcal{E})$ gegenereerd door $\mathcal{E}$.

b) Breid μ uit tot een verzamelingsfunktie op R door te definiëren

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ voor $A, B \in R$, $A \cap B = \emptyset$

en bewijs dat μ een maat is op R.

c) Bereken de uitwendige maat van

$[0, \frac{1}{4}]$, $[0, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $(\frac{1}{2}, 1]$.

d) Geef twee disjuncte verzamelingen E en F in X zodat

$$\mu^*(E \cup F) < \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Oriënterend Kollokwium Maattheorie (1969-1970)

Spreker: P.P.N. de Groen

5. Meetbare Verzamelingen

Laat X een verzameling zijn, R een ring van deelverzamelingen van X, μ een maat op R en μ^* de hierdoor geïnduceerde uitwendige maat op $\mathcal{P}(X)$.

Def. 5.1. $E \subset X$ heet μ-meetbaar indien voor alle $S \subset X$ geldt:

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$$

en $\mu^*(E)$ heet dan de maat van E

Opmerkingen: 1) Vanwege de subadditiviteit van μ^* geldt zeker

$$\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$$

2) Als uit de kontekst duidelijk is in welke zin de meetbaarheid bedoeld is, dan schrijven we meetbaar i.p.v. μ-meetbaar.

3) Deze definitie van meetbaarheid is afkomstig van Caratheodory (1918).

Stelling 5.1.

1) X en $\emptyset$ zijn meetbaar

2) E meetbaar $\Longrightarrow$ E^c meetbaar.

3) Als E_1 en E_2 meetbaar zijn, dan zijn ook $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ en $E_1 \setminus E_2$ meetbaar. Als bovendien E_1 en E_2 disjunkt zijn, dan geldt $\mu^*(S \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(S \cap E_1) + \mu^*(S \cap E_2)$ voor alle $S \subset X$.

4) Als $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ een aftelbare kollektie meetbare verzamelingen is, dan is $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ meetbaar. Zijn bovendien de E_i paarsgewijs disjunkt, dan geldt ook $\mu^*(S \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S \cap E_i)$ voor alle $S \subset X$.

N.B. Door S = X te nemen in (4) zien we direkt, dat μ^* aftelbaar additief is op de kollektie van meetbare verzamelingen.

Bewijs.

1) Uit $S\cap\emptyset = \emptyset$ en $\mu^*(\emptyset) = 0$ (St. 4.1.) en $S\cap X = S$ volgt

$$\mu^*(S) = \mu^*(S\cap\emptyset) + \mu^*(S\cap X)$$

zodat $\emptyset$ en X meetbaar zijn.

2) De definitie van meetbaar is symmetrisch in E en E^c zodat met de een ook de ander meetbaar is.

3) We weten dat

$$S\cap(E_1\cup E_2)^c = S\cap E_1^c\cap E_2^c$$

en

$$S\cap(E_1\cup E_2) = (S\cap E_1\cap E_2)\cup(S\cap E_1^c\cap E_2)\cup(S\cap E_1\cap E_2^c)$$

zodat vanwege subadditiviteit

$$\mu^*(S\cap(E_1\cup E_2)) \leq \mu^*(S\cap E_1\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1\cap E_2^c).$$

Vanwege de meetbaarheid van E_2 geldt

$$\mu^*(S\cap E_1) = \mu^*(S\cap E_1\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1\cap E_2^c)$$

en

$$\mu^*(S\cap E_1^c) = \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2^c).$$

Uit dit alles tesamen volgt voor alle $S\subset X$

$$\begin{aligned}\mu^*(S) &\leq \mu^*(S\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(S\cap(E_1\cup E_2)^c)\\ &\leq \mu^*(S\cap E_1\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1\cap E_2^c) + \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2^c) =\\ &= \mu^*(S\cap E_1) + \mu^*(S\cap E_1^c) = \mu^*(S)\ .\end{aligned}$$

Overal geldt dus gelijkheid. $E_1\cup E_2$ is dus meetbaar en

$$\mu^*(S\cap(E_1\cup E_2)) = \mu^*(S\cap E_1\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(S\cap E_1,\cap E_2^c),$$

zodat i.h.b. als E_1 en E_2 disjunkt zijn geldt

$$\mu^*(S\cap(E_1\cup E_2)) = \mu^*(S\cap E_1) + \mu^*(S\cap E_2).$$

<u>N.B.</u> Hieruit volgt onmiddellijk dat voor iedere eindige kollektie $\{E_i\}_{i=1}^n$ van onderling disjunkte meetbare verzamelingen geldt, dat $\mu^*(S\cap(\bigcup_{i=1}^n E_i)) =$ $= \sum_{i=1}^n \mu^*(S\cap E_i)$ voor alle $S\subset X$.

4) $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is een kollektie meetbare verzamelingen en $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. We mogen aannemen, dat alle E_i onderling disjunkt zijn (anders maken we het zo met stelling 2.3). Voor alle $n\in\mathbb{N}$ en $S\subset X$ geldt dan met behulp van het N.B. van (3)

$$\mu^*(S) = \mu^*(S\cap(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) + \mu^*(S\cap(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(S\cap E_i) + \mu^*(S\cap(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c)) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(S\cap E_i) + \mu^*(S\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c)) .$$

Dus ook geldt in de limiet voor $n \to \infty$

$$\mu^*(S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S\cap E_i) + \mu^*(S\cap E^c) \geq$$

$$\geq \mu^*(S\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) + \mu^*(S\cap E^c) =$$

$$= \mu^*(S\cap E) + \mu^*(S\cap E^c) \geq \mu^*(S)$$

Overal geldt nu weer het gelijkteken, dus E is meetbaar en

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S\cap E_i) = \mu^*(S\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) \quad \text{voor alle } S\subset X ,$$

<u>Stelling 5.2.</u> Als $A\in R$ dan is A μ-meetbaar.
We zullen dus bewijzen: $\mu^*(S) = \mu^*(S\cap A) + \mu^*(S\cap A^c)$ voor alle $S\subset X$ en $A\in R$.

<u>Bewijs.</u>
Neem een $S\subset X$ en een $A\in R$ willekeurig.

Als S niet te overdekken is door een aftelbare rij elementen van R dan is per definitie $\mu^*(S) = \infty$ zodat

$$\infty = \mu^*(S) \leq \mu^*(S\cap A) + \mu^*(S\cap A^c) \leq \infty$$

en de gelijkheid geldt.

Als S wel te overdekken is door een aftelbare rij elementen van R, laat dan $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zo'n rij zijn met de eigenschap

$$\mu^*(S) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) - \varepsilon \qquad \text{voor zekere } \varepsilon > 0.$$

$A\in R$, dus $\{B_n \cap A\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{B_n \cap A^c\}_{n\in\mathbb{N}}$ zijn overdekkingen van $S\cap A$ resp. $S\cap A^c$ met elementen van R. Hieruit volgt dat

$$\mu^*(S\cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A)$$

$$\mu^*(S\cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A^c) .$$

Dus

$$\varepsilon + \mu^*(S) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A^c) \geq$$

$$\geq \mu^*(S\cap A) + \mu^*(S\cap A^c) \geq \mu^*(S)$$

Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, er is dus gelijkheid. Bijgevolg is A meetbaar.

<u>Gevolgen</u>

1) De kollektie van alle μ-meetbare deelverzamelingen van X is een σ-ring (volgens st. 5.1) die R omvat (volgens st. 5.2). We zullen deze σ-ring aanduiden met Λ.

2) μ^* is een maat op Λ want

$\mu^*(\emptyset) = 0$ en $\mu^*(E) \geq 0 \quad \forall E\in\Lambda$ (volgens st. 4.1)

μ^* is σ-additief (volgens st. 5.1)

3) Volgens stelling 4.1 is $\mu^*|_R = \mu$ (d.w.z. de restrictie van μ^* wat betreft zijn definitiegebied tot R is gelijk aan μ). We zullen dan ook voortaan de maat van een meetbare verzameling E noteren met $\mu(E)$ en niet meer met $\mu^*(E)$; deze notatie is nu immers niet dubbelzinnig meer op R.

Notatie: Het tripel $\langle X,\Lambda,\mu\rangle$ is de aanduiding van een maatruimte; hierin is X een verzameling, Λ is de kollektie van μ-meetbare deelverzamelingen van X, en μ is een maat op Λ.

Opmerking: Het wil wel eens gebeuren dat we spreken over de maatruimte $\langle X,R,\mu\rangle$ waarin X een verzameling is, R een ring van deelverzamelingen van X en μ een maat op R; bedoeld is dan de maatruimte $\langle X,\Lambda,\mu\rangle$ waarin Λ de kollektie van meetbare deelverzamelingen van X, welke verkregen is uit R en μ met de konstruktie via de uitwendige maat op X en waarin μ uitgebreid is tot Λ.

Analoog aan de gevolgen (blz. 10,11) van de stellingen 3.3 en 3.4 bewijzen we nu voor de σ-ring Λ het volgende voor limieten van monotone rijtjes.

Stelling 5.3. a) Als $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij meetbare verzamelingen is zó dat $B_n \subset B_{n+1}$ en $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, dan geldt

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

b) Als $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij meetbare verzamelingen is zó dat $E_n \supset E_{n+1}$ en $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ en $\mu(E_p) < \infty$ voor zekere p, dan geldt

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

N.B. De rij verzamelingen onder (a) wordt wel stijgend en onder (b) dalend genoemd.

Bewijs.
(a) $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een stijgende rij, dus $\mu(B_n) \geq \mu(B_{n-1})$ zodat ook $\mu(B_n)$ een stijgende rij is; deze laatste heeft dus een limiet in $\mathbb{R}^*$. Definieer $A_1 = B_1$ en $A_n = B_n \setminus B_{n-1}$ voor $n > 1$, dan volgt $A_n \cap A_m = \emptyset$ als $n \neq m$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_m$ en $\mu(A_n) = \mu(B_n) - \mu(B_{n-1})$. Vanwege de σ-additiviteit van μ volgt dan ook:

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\mu(B_n) - \mu(B_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) .$$

(b) $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een dalende rij en $\mu(E_p) < \infty$. De rij $\mu(E_n)$ is dus een dalende rij niet negatieve getallen met $\mu(E_n) < \infty$ als $n \geq p$; deze rij heeft dus een limiet in $\mathbb{R}$.
Definieer $D_n = E_p \setminus E_n$ voor $n > p$, dan is de rij $\{D_n\}_{n=p+1}^{\infty}$ stijgend en

$$\bigcup_{n=p+1}^{\infty} D_n = E_p \setminus E .$$

Met (a) volgt dan $\mu(E_p) - \mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(E_p) - \mu(E_n))$. Omdat $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ bestaat en evenals $\mu(E_p)$ eindig is volgt nu

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E) .$$

Algemener kunnen we nu het volgende bewijzen voor limieten van rijtjes waarvoor geen monotonie geëist wordt.

Stelling 5.4.
Laat $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een aftelbare kollektie meetbare verzamelingen zijn, dan geldt:

(a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$

(b) $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$ als $\mu(\bigcup_{n=p}^{\infty} A_n) < \infty$ voor zekere p.

Bewijs.
(a) $\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$. Laat $B_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$, dan is $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ stijgend, en $B_m \subset A_n$ $\forall n \geq m$ zodat $\mu(B_m) \leq \inf(\mu(A_n) \mid n \geq m)$. Dus $\mu(\liminf A_n) =$ $= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ met behulp van stelling 5.3 (a).
(b) $\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$. Laat $C_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, dan is $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dalend, $\mu(C_p) < \infty$ en $C_m \supset A_n$ $\forall n \geq m$, zodat $\infty > \mu(C_m) \geq \sup(\mu(A_n) \mid n \geq m)$. Dus met stelling 5.3 (b) volgt

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \limsup \mu(A_n) .$$

Gevolg. Als $\lim A_n$ bestaat (d.w.z. $\limsup A_n = \liminf A_n$) en $\mu(\bigcup_{n=p}^{\infty} A_n) < \infty$ voor zekere p dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim A_n) .$$

Opgave 1.

Zij I^2 de ring van alle eindige verenigingen van verzamelingen $A \subset \mathbb{R}^2$ van de vorm $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x_1 < b;\ c \leq x_2 < d;\ b \geq a;\ d \geq c\}$.
Definieer op I^2 de maat μ door

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(c_i - d_i) .$$

D.w.z. I^2 is de ring van eindige verenigingen van rechthoekjes die links en onder gesloten en rechts en boven open zijn en de maat van zo'n rechthoekje is het oppervlak ervan.
Dat I^2 een ring is, dat $\mu(E)$ gedefinieerd is voor $E \in I^2$ onafhankelijk van zijn representatie en dat μ een maat is op I^2 kan bewezen worden geheel analoog aan het bewijs voor de ring I in §3.

Zij nu $E_n = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}$ willekeurig en $0 \leq x_2 < \frac{1}{n}\}$, bewijs dan:

1) E_n is meetbaar

2) $\lim E_n$ bestaat en is meetbaar

3) $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \neq \mu(\lim E_n)$ en ga na waarom St. 5.3 hier niet geldt.

Nulverzamelingen

Def. 5.2. Een deelverzameling $E \subset X$ heet een nulverzameling indien $\mu^*(E) = 0$.

Stelling 5.5. Iedere deelverzameling van een nulverzameling is weer een nulverzameling en iedere nulverzameling is meetbaar.

Bewijs.
Laat E een nulverzameling zijn; d.w.z. $\mu^*(E) = 0$.
Als $F \subset E$, dan is $\mu^*(F) \leq \mu^*(E)$ vanwege de monotonie van μ^*. $\mu^*(F) \geq 0$ omdat μ^* niet negatief is, dus $\mu^*(F) = 0$.
Nog te bewijzen, $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$ voor de meetbaarheid van E.
$S \cap E \subset E$, dus volgens het bovenstaande is $\mu^*(S \cap E) = 0$.
$S \cap E^c \subset S$, dus $\mu^*(S \cap E^c) \leq \mu^*(S)$.
Hieruit volgt dat $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c) \leq \mu^*(S) \quad \forall S \subset X$ en dus is E meetbaar.

Def. 5.3. Twee deelverzamelingen van X heten bijna gelijk (Eng.: almost equal), als $\mu(A\Delta B) = 0$.

Def. 5.4. Laat (X,Λ,μ) een maatruimte zijn en f en g funkties op X, dan heten f en g bijna overal gelijk als $\mu(\{x\in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.
Een eigenschap P(x) geldt bijna overal als de maat van de verzameling punten van X waar P onwaar is gelijk is aan nul.

Voorbeelden. (1) Laat (X,Λ,μ) een maatruimte zijn;als $A\subset X$ en $B\subset X$ bijna gelijk zijn, dan zijn de karakteristieke funkties χ_A en χ_B van A en B bijna overal gelijk.

(2) Beschouw de maatruimte $<[0,1],I,\mu>$, waarin I de ring is uit §3 en μ de maat daarop. De verzameling van rationale punten in $[0,1]$ is dan een nulverzameling en de funktie f, gedefinieerd door

$$f(x) = 1 \quad \text{als } x\in \mathbb{Q}\cap[0,1]$$

$$f(x) = 0 \quad \text{als } x\in \mathbb{Q}^c\cap[0,1]$$

is bijna overal gelijk aan nul.

Opmerking. We hebben nu een uitbreiding van de maat μ op de ring $R\subset\mathcal{P}(X)$ gemaakt zo dat deze "kontinu" is geworden onder overgang op limieten van aftelbare rijtes (st. 5.4) en zo dat alle deelverzamelingen van een nulverzameling weer nulverzamelingen zijn. Een verdere uitbreiding maken doen we niet en de vraag zou kunnen rijzen, waarom tot hier en niet verder. Een eksakt antwoord op deze vraag kan ik niet geven, doch enige indikaties in deze richting kan men vinden in het volgende:

Als de maat μ op $R\subset\mathcal{P}(X)$ σ-eindig is, d.w.z. X zelf kan overdekt worden door een aftelbare rij verzamelingen uit R van eindige maat ($X\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ met $A_n\in R$ en $\mu(A_n) < \infty\ \forall n$), dan bestaat er precies één uitbreiding van μ tot een maat op Λ; d.w.z. dat de uitbreiding, gekonstrueerd via de uitwendige maat de enig mogelijke is. Het zou te ver voeren om deze uniciteitsstelling hier te bewijzen; zie hiervoor b.v. Halmos: Measure Theory §13.

Aan de hand van het volgende voorbeeldje kunnen we wel zien, dat een verdere uitbreiding, indien mogelijk, niet meer uniek behoeft te zijn.

Laat $X = \{1,2,3,\}$ en $R = \{\emptyset,\{1\},\{2,3\},X\} \subset \mathcal{P}(X)$ en definieer op R de maat μ als volgt: $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{2,3\}) = 1$, $\mu(X) = 2$. Het is dan niet moeilijk in te zien dat we via de uitwendige maat geen andere meetbare verzamelingen erbij krijgen, dus $\Lambda = R$ en $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$ en $\{1,3\}$ zijn niet meetbaar.

Laat nu $\lambda \in [0,1]$ en definieer:

$$\mu_\lambda(\{2\}) = \lambda,\ \mu_\lambda(\{3\}) = 1 - \lambda,\ \mu_\lambda(\{1,2\}) = 1 + \lambda,\ \mu_\lambda(\{1,3\}) = 1 - \lambda$$

en $\mu_\lambda(A) = \mu(A)$ voor alle $A \in R$.

Het is eenvoudig in te zien dat μ_λ nu een maat is op $\mathcal{P}(X)$ voor iedere $\lambda \in [0,1]$ en dat het ook een uitbreiding is van μ voor iedere $\lambda \in [0,1]$.

Opgave 2.

Ga na dat de kollektie nulverzamelingen in een maatruimte een σ-ring is.

De Lebesgue-maat

Def. 5.5. De maat μ op de ring $\mathcal{L}$ van meetbare verzamelingen in $\mathbb{R}$, gegenereerd (via de uitwendige maat) door de maat μ op de ring I (§3), heet de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ en de elementen van $\mathcal{L}$ heten Lebesgue-meetbaar.

Opmerking. Geheel analoog aan def. 5.5 kunnen we de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$ definiëren met behulp van de ring I^2 van opgave 1 en i.h.a. de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^k$ met een analoog aan I^2 gedefinieerde ring I^k. We zullen hier verder niet op ingaan en ons beperken tot het eendimensionale geval.

Het belang van de Lebesgue-maat ligt hierin,

- dat hij op verzamelingen waarvan we de totale lengte (oppervlak resp. inhoud in $\mathbb{R}^2$ en hogere dimensies) reeds kenden, hiermee samenvalt,
- dat de "topologisch mooie" verzamelingen, de open en de gesloten verzamelingen meetbaar zijn.
- dat limieten van meetbare verzamelingen weer meetbaar zijn,
- dat de maat van een meetbare verzameling invariant is onder verschuiving (d.w.z. A meetbaar $\Longleftrightarrow A_\lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}$ meetbaar en $\mu(A) = \mu(A_\lambda)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$).

Het eerste punt volgt uit de definitie van de ring I met de maat μ erop, de andere punten zullen we nu bewijzen.

Lemma 5.1.

Laat 0 een open verzameling zijn in $\mathbb{R}$ en $[a,a+1)$ een halfopen interval, dan is $A = 0 \cap [a,a+1)$ te schrijven als een aftelbare vereniging van halfopen intervallen.

Bewijs.

Verdeel het interval voor iedere k in 2^k gelijke halfopen intervallen van het type $N_{kj} \overset{\text{def}}{=} [a + 2^{-k}(j-1), a + 2^{-k}j)$ voor $1 \leq j \leq 2^n$ en $j,n \in \mathbb{N}$ en definieer M_k als de vereniging van die N_{kj} (bij vaste k) die geheel bevat zijn in A, dus

$$M_k \overset{\text{def}}{=} \cup \{N_{kj} \mid N_{kj} \subset A \text{ en } 1 \leq j \leq n\}$$

dan is M_k voor iedere k een eindige vereniging van halfopen intervallen die bevat is in A, zodat ook $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset A$.

We zullen nu nog bewijzen $x \in A \Longrightarrow x \in M$.

Laat $x \in A$, dan $x \in 0$ en omdat 0 open is, is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subset 0$.

Als $x = a$, dan is $[x,x+\varepsilon) \subset 0 \cap [a,a+1) = A$ en er is een k zó dat $2^{-k} < \varepsilon$; bijgevolg is $[x,x+2^{-k}) \subset A$ en ook $[x,x+2^{-k}) = N_{k,1}$ en dus $x \in M_k \subset M$.

Als $x \neq a$, neem dan $\varepsilon < \min(x-a,a+1-x)$, dan volgt dat $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subset A$.

Maar dan zijn er natuurlijke getallen k en l met $1 \leq l \leq 2^k$ zo, dat

$$x - \varepsilon < a + 2^k(l-1) \leq x < a + 2^k l \leq x + \varepsilon$$

en dus

$$x \in [a + 2^k(l-1), a + 2^k l) \subset M_k \subset M$$

Nu volgt dus, dat $M = A$. Bijgevolg is A de aftelbare vereniging van halfopen intervallen.

Lemma 5.2

Iedere open verzameling 0 in $\mathbb{R}$ is te schrijven als de aftelbare vereniging van halfopen intervallen.

Bewijs.

$\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [n,n+1)$ dus ook $0 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} 0 \cap [n,n+1)$. $0 \cap [n,n+1)$ is een aftelbare vereniging van halfopen intervallen, dus 0 zelf is als aftelbare vereniging van stukken $0 \cap [n,n+1)$ ook de aftelbare vereniging van aftelbaar veel halfopen intervallen.

Stelling 5.6.

Alle open en alle gesloten verzamelingen in $\mathbb{R}$ zijn meetbaar.

Bewijs.

Een open verzameling is een aftelbare vereniging van elementen van de ring I en is dus meetbaar volgens st. 5.2 en 5.1 (punt 4).
Een gesloten verzameling is het komplement van een open verzameling en dus ook meetbaar volgens st. 5.1.

Stelling 5.7.

De Lebesgue-maat is invariant onder verschuiving; d.w.z. A meetbaar, dan ook $A_\lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}$ meetbaar en $\mu(A_\lambda) = \mu(A)$.

Bewijs.

Als $A = [a,b)$, dan $A_\lambda = [a+\lambda, b+\lambda) \in I$ en $\mu(A_\lambda) = b + \lambda - a - \lambda = b - a = \mu(A)$.
Hieruit volgt onmiddellijk, dat $A \in I \Longleftrightarrow A_\lambda \in I$ en $\mu(A_\lambda) = \mu(A)$. De uitwendige maat van een verzameling is dus ook invariant onder verschuiving omdat de maat van iedere overdekking met elementen van I dit is; maar dan geldt ook $\mu^*(S_\lambda \cap A_\lambda) + \mu^*(S_\lambda \cap A_\lambda^c) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$ zodat A meetbaar $\Longleftrightarrow A_\lambda$ meetbaar en $\mu(A_\lambda) = \mu(A)$.

Opgave 3.

Bewijs: Als f een kontinue reële funktie is op $\mathbb{R}$, dan is $F_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \lambda\}$ Lebesgue-meetbaar.

Opgave 4.

Laat $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$S = \{\{\frac{1}{n}\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$

R is de kollektie deelverzamelingen van X die een eindige vereniging zijn van elementen van S.

Definieer op R de verzamelingsfunktie μ door

$$\mu(\emptyset) = 0 \ , \ \mu((\tfrac{1}{n+1} \ , \tfrac{1}{n})) = 0 \ , \ \mu(\{\tfrac{1}{n}\}) = \tfrac{1}{2^n} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{en als } X = \bigcup_{i=1}^{k} s_i \quad \text{met } s_i \in S, \text{ dan } \mu(X) = \sum \mu(s_i).$$

Bewijs: 1) R is een ring

2) μ is een maat op R.

3) ieder element van $\mathcal{P}(X)$ is μ-meetbaar.

Bereken: $\mu([\frac{1}{2},1])$; $\mu(X)$; $\mu([0, \frac{1}{4}))$; $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{(\sqrt{2})^{-n}\})$.

Opgave 5.

We beschouwen een proces T_λ, gedefinieerd op verenigingen van gesloten intervallen, dat uit een gesloten interval een precies in het midden gelegen stuk van kleinere lengte uitsnijdt en dat bij een vereniging van gesloten intervallen hetzelfde doet met ieder interval afzonderlijk:

$$T_\lambda[a,b] \overset{\text{def}}{=} [a, \tfrac{a+b}{2} - \lambda] \cup [\tfrac{a+b}{2} + \lambda, b] \quad \text{met } b - a > \lambda$$

en

$$T_\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} [a_i,b_i]) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} (T_\lambda[a_i,b_i]) \quad \text{met } b_i - a_i > \lambda \ \forall i .$$

Passen we dit proces herhaaldelijk, met steeds kleinere λ, toe op $[0,1]$, dan zien we dat bij iedere stap het aantal (disjunkte) intervallen en het aantal gaten ertussen zich verdubbelt, terwijl de lengte van ieder intervalletje apart sterk afneemt.

Laat nu $S_1 = T_{1/3}[0,1]$ en $S_n = T_{3^{-n}} S_{n-1}$

$P_1 = T_{1/4}[0,1]$ en $P_n = T_{4^{-n}} P_{n-1}$

bewijs dan:

1) $S = \lim S_n$ en $P = \lim P_n$ bestaan en zijn gesloten.

2) $\mu(S) = 0$ en $\mu(P) = \frac{1}{2}$.

Tracht vervolgens in te zien,

dat S en P geen niet lege open deelverzamelingen bevatten.

~~dat S en P nergens dicht liggen in [0,1] (d.w.z. $\forall x \in [0,1] \exists \varepsilon > 0$ zó, dat $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap S = \emptyset$)~~

dat S en P niet aftelbaar zijn (Ken aan ieder punt $x \in S$ een dyadisch getal toe door op de n-de plaats achter de komma een 0 of een 1 te plaatsen al naar gelang x bij de n-de splitsing in het linker of het rechter deelsegment terechtkomt).

N.B. S en P heten Cantor-verzamelingen (diskontinuüm van Cantor).

De klasse der Borelverzamelingen.

De tot nu toe afgeleide stellingen leren dat de klasse der meetbare verzamelingen in X, Λ_μ gesloten is voor de volgende verzamelingstheoretische operaties:

1) het nemen van het complement
2) aftelbare verenigingen
3) aftelbare doorsneden.

d.w.z. $A_i \in \Lambda_\mu \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda_\mu, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda_\mu$ en $A_i^c \in \Lambda_\mu$.

Λ_μ was verkregen uitgaande van een ring R en een maat μ en is gesloten onder de operaties 1, 2 en 3. De vraag rijst wat de kleinste klasse van verzamelingen is die R omvat en die gesloten is onder deze operaties.

Definitie 5.6: Zij $\langle X,R,\mu \rangle$ een maatruimte. (zie opm. blz. 29). De klasse der Borelverzamelingen van $\langle X,R,\mu \rangle$ is de kleinste klasse deelverzamelingen van X die R omvat en gesloten is onder de operaties (1), (2) en (3). We noteren deze klasse met $\mathcal{B}(R)$.

De definitie is zinvol omdat we voor $\mathcal{B}(R)$ de doorsnede van alle klassen kunnen nemen die R omvatten en gesloten zijn onder (1), (2) en (3). Hieruit volgt tegelijkertijd de uniciteit. Vgl. St. 2.4.

Merk op dat de klasse $\mathcal{B}(R)$ onafhankelijk is van de maat μ. Dit in tegenstelling tot de klasse Λ_μ.
Omdat Λ_μ gesloten is onder (1), (2) en (3) en $R \subset \Lambda_\mu$ volgt $\mathcal{B}(R) \subset \Lambda_\mu$. Dat hier niet noodzakelijk de identiteit geldt blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld: Zij R de kollektie van alle deelverzamelingen van $[0,1]$ die hetzij zelf aftelbaar zijn hetzij een aftelbaar komplement hebben en zij $\mu(A) = 0 \quad \forall A \in R$. μ is trivialiter een maat op R. Men gaat gemakkelijk na dat R een σ-ring is terwijl R gesloten is onder de operaties (1), (2) en (3). Hieruit volgt $R = \mathcal{B}(R)$; Omdat $[0,1] \in A$ en $\mu([0,1]) = 0$ per definitie volgt, dat alle deelverzamelingen van $[0,1]$ nulverzamelingen zijn. Dus $\Lambda_\mu = \mathcal{P}([0,1])$. We concluderen $\Lambda_\mu \neq \mathcal{B}(R)$.

Opmerkingen:

1^e^) In het algemeen spreekt men slechts van Borelverzamelingen in maatruimten waar de verzameling X bovendien een topologische ruimte is en waar R de ring is voortgebracht door de compacte verzamelingen.

2^e^) In de definitie van $\mathcal{B}(R)$ is het niet wezenlijk dat R een ring is. $\mathcal{B}(A)$ is te definiëren voor willekeurige deelstelsels $A \subset \mathcal{P}(X)$ als de kleinste klasse die A omvat en gesloten is onder de operaties (1), (2) en (3). (vgl. St. 2.4)

3^e^) Zij $\mathbb{R}$ de verzameling der reële getallen. $\mathbb{R}$ is op de gebruikelijke manier op te vatten als topologische ruimte. De volgende stelsels A van deelverzamelingen geven aanleiding tot eenzelfde klasse van Borelverzamelingen:

a) $A = I$, de ring van eindige verenigingen van halfopen intervallen.

b) $A = \mathcal{O}$, de klasse van alle open deelverzamelingen.

c) $A = G$, de klasse van alle gesloten deelverzamelingen.

d) $A = C$, de klasse van alle compacte deelverzamelingen.

Men kan dit inzien met behulp van de gemakkelijk te bewijzen regel $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{O}) \implies \mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(\mathcal{O})$.

In het volgende geven we een constructie aan van $\mathcal{B}(R)$. In deze constructie wordt een wezenlijk gebruik gemaakt van ordinaal getallen en transfinite inductie. Deze begrippen kan men o.m. beschreven vinden in:

HALMOS - Intuïtieve verzamelingsleer (Prisma-reeks).

Deze constructie speelt geen rol in het vervolg en kan dus worden overgeslagen.

$\mathcal{B}(R)$ wordt als volgt met transfinite inductie geconstrueerd:

Definieer $B_0 = R$

Zij α een ordinaalgetal > 0 en zij B_β reeds geconstrueerd voor $\beta < \alpha$.
Dan definiëren we B_α als volgt:

1[e]) Als α een directe voorganger β heeft (dus $\alpha = \beta + 1$) is B_α de collectie verzamelingen V die te schrijven zijn op een der volgende manieren:

(1) V is complement van een element uit B_β

(2) V is vereniging van een aftelbare rij elementen uit B_β

(3) V is doorsnede van een aftelbare rij elementen uit B_β.

Omdat we rijen toestaan die uit gelijke elementen bestaan is $B_\beta \subset B_\alpha$.

2[e]) Als α een limiet ordinaalgetal is dan is $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.

Deze constructie is hierdoor eenduidig bepaald tot willekeurig grote ordinaalgetallen toe.
Stel dat voor zeker ordinaalgetal γ geldt $B_\gamma = B_{\gamma+1}$. Dan zien we dat B_γ reeds gesloten is onder (1), (2) en (3). Bovendien geldt $R \subset B_\gamma$ want de B_α vormen een monotoon niet dalende rij verzamelingen.
Dus $\mathcal{B}(R) \subset B_\gamma$.
Omgekeerd geldt $B_\gamma \subset \mathcal{B}(R)$;
Uit het gegeven volgt $B_0 \subset \mathcal{B}(R)$ terwijl uit de constructie de volgende implicatie valt af te leiden:

$$B_\beta \subset \mathcal{B}(R) \quad \text{voor } \beta < \alpha \Longrightarrow B_\alpha \subset \mathcal{B}(R).$$

Met een transfinite inductie volgt dan $B_\alpha \subset \mathcal{B}(R)$ voor ieder ordinaalgetal α.

Blijkbaar is $\mathcal{B}(R) = B_\gamma$. Het is verder duidelijk dat de rij B_α voor $\alpha \geq \gamma$ stationair blijft: $B_\alpha = B_\gamma$ voor $\gamma \leq \alpha$.

We tonen vervolgens aan dat $B_\Omega = B_{\Omega+1}$ als Ω het eerste overaftelbaar ordinaalgetal is. We mogen dan concluderen dat de rij B_α inderdaad voor een zeker ordinaalgetal $\gamma \leq \Omega$ stationair wordt. Verder geldt dan de identiteit $B_\Omega = \mathcal{B}(R)$.

Zij $V \in B_{\Omega+1}$. Er zijn drie mogelijkheden.

(1) $V = X \setminus W$ met $W \in B_\Omega$. Dan is $W \in B_\alpha$ voor zekere $\alpha < \Omega$ (Ω is limiet ordinaalgetal!), dus $V \in B_{\alpha+1} \subset B_\Omega$.

(2) $V = \bigcup_n W_n$ met $W_n \in B_\Omega$. Dan bestaat er een rij ordinaalgetallen $\alpha_n < \Omega$ met $W_n \in B_{\alpha_n}$. Zij $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$.

Omdat α het supremum van een aftelbare rij aftelbare ordinaalgetallen is, is α zelf een aftelbaar ordinaalgetal, dus $\alpha < \Omega$. Dan volgt $W_n \in B_\alpha$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ dus $V \in B_{\alpha+1} \subset B_\Omega$.

(3) $V = \bigcap_n W_n$ met $W_n \in B_\Omega$ gaat analoog aan 2.

We zien dus dat $B_{\Omega+1} \subset B_\Omega$. De omgekeerde inclusie geldt ook, dus $B_\Omega = B_{\Omega+1} = \mathcal{B}(R)$.

Opmerking.

Ook voor het geval van de Lebesguemaat op $\mathbb{R}$ is $\mathcal{B}(R) \neq \Lambda_\mu$. Men kan namelijk bewijzen dat $\mathcal{B}(R)$ voor ringen R van continue machtigheid hoogstens continue machtigheid heeft.
Daarentegen omvat Λ_μ de collectie van alle deelverzamelingen van de in opgave 5 geconstrueerde Cantor-verzameling S en dit is een stelsel met machtigheid groter dan die van het continuüm.

Voorbeeld van een niet-Lebesguemeetbare verzameling in $\mathbb{R}$.

De niet-Lebesguemeetbare verzameling die we in deze § construeren is een voorbeeld afkomstig van G. Vitali (1905). We maken hierbij gebruik van het feit dat de reële getallen een additieve groep vormen en dat de verzameling der rationale getallen $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$.

1. Zij E een Lebesguemeetbare verzameling in $\mathbb{R}$ met $0 < \mu(E) < \infty$; bewijs dat $\mu(E) = \{\inf \mu(O) \mid O \text{ open in } \mathbb{R} \text{ en } O \supset E\}$.
(opm.: het is voldoende te kijken naar de uitwendige maat.)

2. Zij $0 < \alpha < 1$. Ga na dat er een open verzameling O is zodanig dat voor bovenstaande E geldt:
   (a) $O \supset E$
   (b) $\mu(E) > \alpha\mu(O)$.

3. Ga na dat m.b.v. lemma 5.2 uit bovenstaande volgt dat er een open interval J bestaat zó dat

$$\mu(E \cap J) > \alpha\mu(J).$$

Punt 1, 2 en 3 samengevat levert:

<u>lemma 5.3</u>. Zij E een Lebesguemeetbare verzameling met $0 < \mu(E) < \infty$ en zij $0 < \alpha < 1$, dan is er een open interval J zó dat

$$\mu(E \cap J) > \alpha\mu(J).$$

<u>Definitie 5.7</u>. De <u>verschilverzameling</u> $\Delta(E)$ is gedefinieerd door

$$\Delta(E) = \{x-y \mid x,y \in E\}.$$

4. Zij $0 < \mu(E) < \infty$. Volgens lemma 1 is er dan een interval $J = (a,b)$ zó dat $\mu(E \cap J) > \frac{3}{4}\mu(J)$.
   Bewijs nu dat het interval $L = (-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2})$ geheel bevat is in $\Delta(E)$.
   Beschouw hiertoe bij vaste $x \in L$ de verzameling $\{x+y \mid y \in E \cap J\}$.

5. Ga na dat ook indien $\mu(E) = \infty$ een interval $(-c,c)$ bestaat dat geheel bevat is in $\Delta(E)$.
   (beschouw hiertoe een deelverzameling E' van E met $\mu(E') < \infty$).

Samengevat:

<u>lemma 5.4</u>. Zij $\mu(E) > 0$. Dan is er een open interval $(-d,d)$ dat geheel bevat is in $\Delta(E)$.

6. Zij $\xi \in \mathbb{R}$. Definieer de verzameling A_ξ als volgt:

$$A_\xi = \{\eta \mid \xi-\eta \in \mathbb{Q}\}.$$

   We kunnen nu een equivalentierelatie definiëren als volgt:

$$\xi \sim \eta \iff \xi-\eta \in \mathbb{Q}.$$

Ga na dat dit inderdaad een equivalentierelatie is, d.w.z. dat $\sim$ voldoet aan de volgende drie eigenschappen:

(a) $\xi \sim \xi$ (reflexiviteit)

(b) $\xi \sim \eta \Rightarrow \eta \sim \xi$ (symmetrie)

(c) $\xi \sim \eta,\ \eta \sim \zeta \Rightarrow \xi \sim \zeta$ (transitiviteit).

Merk bovendien op dat als ξ en $\eta \in \mathbb{R}$ zó dat $\xi - \eta \notin \mathbb{Q}$, dan is $A_\xi \cap A_\eta = \emptyset$. Deze disjuncte verzamelingen A_ξ heten de equivalentieklassen behorende bij deze equivalentierelatie.

Kies nu uit iedere equivalentieklasse een representant. De verzameling bestaande uit deze representanten noemen we E. Deze verzameling zal niet Lebesguemeetbaar blijken te zijn.

Veronderstel nu dat E Lebesguemeetbaar is

7. Ga na dat ΔE geen open interval $(-d,d)$ bevat.

We kunnen dan met behulp van lemma 5.4 concluderen dat $\mu(E) = 0$.

8. Zij $q, q' \in \mathbb{R}$ met $q \neq q'$.
   Definieer de verzamelingen

$$B_q = \{x \mid x = q + e,\ e \in E\},$$

$$B_{q'} = \{x \mid x = q' + e,\ e \in E\}.$$

   Ga na dat $B_q \cap B_{q'} = \emptyset$.

9. Ga na: Voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ is er (volgens punt 6) een $e \in E$ zodanig dat $\xi - e \in \mathbb{Q}$.

10. Zij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ een aftelling van de rationale getallen.
    Definieer

$$B_{q_n} = \{x \mid x = q_n + e,\ e \in E\}.$$

    Ga na dat uit punt 8 en 9 volgt dat geldt

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{q_n} \; ; \; B_{q_n} \cap B_{q_m} = \emptyset \quad \text{voor } n \neq m.$$

11. Daar B_{q_n} uit E is verkregen door verschuiving geldt

$$\mu(B_{q_n}) = \mu(E) = 0.$$

Dus

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{q_n}) = 0.$$

Tegenspraak!

Conclusie:

De in punt 6 gedefinieerde verzameling E is niet Lebesguemeetbaar.

(Voor een uitwerking van dit voorbeeld zie b.v. A.C. Zaanen -
An introduction to the theory of integration,
Ch. 2, §10)

Literatuur.

[1] A.C. Zaanen, An Introduction to the Theory of Integration;
North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

[2] P.R. Halmos, Measure Theory;
van Nostrand Comp., New York.

[3] S.K. Berberian, Measure and Integration;
Mc.Millan Comp., New York.

[4] A.E. Taylor, General Theory of Functions and Integration;
Blaisdell Publ. Comp., Waltham, Massachusetts.

[5] W.W. Rogosinski, Volume and Integral;
Oliver and Boyd, Edinburgh.

Oriënterend Colloquium Maattheorie (1969-1970)

Spreker: P. van Emde Boas

6. Meetbare functies

Zij $\mathcal{B}$ de klasse der Borelverzamelingen in $\mathbb{R}$. Zij $\mathcal{S}$ een σ-ring van verzamelingen in X, zodanig dat $X \in \mathcal{S}$.

Def. 6.1. Een functie $f: X \to \mathbb{R}^*$ heet meetbaar (met betrekking tot $\mathcal{S}$) indien geldt:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{S} \quad \text{voor iedere Borelverzameling } A \in \mathcal{B}$$

en bovendien

$$f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S} \quad \text{en} \quad f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}.$$

Stelling 6.1: De volgende uitspraken zijn gelijkwaardig:

a) $f: X \to \mathbb{R}^*$ is meetbaar
b) $f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{S}$ voor iedere reële α
c) $f^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \mathcal{S}$ voor iedere reële α
d) $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{S}$ voor iedere reële α
e) $f^{-1}([\alpha,+\infty]) \in \mathcal{S}$ voor iedere reële α.

Bewijs: Zij $\mathfrak{A}$ een collectie deelverzamelingen van R^* dan gelden de volgende regeltjes:

(1) $f^{-1}(\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A) = \bigcap\{f^{-1}A \mid A \in \mathfrak{A}\}$

(2) $f^{-1}(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A) = \bigcup\{f^{-1}A \mid A \in \mathfrak{A}\}$.

(3) $f^{-1}(\mathbb{R}^* \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Met gebruikmaking van deze regeltjes leiden we de aequivalenties als volgt af:

a) $\Rightarrow$ b) $f^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}((-\infty,\alpha))$.

Daar $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$ per definitie en $(-\infty,\alpha)$ een Borelverzameling is in $\mathbb{R}$, is $f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{S}$.

b) $\Longrightarrow$ c) $[-\infty,\alpha] = \bigcap_n [-\infty,\alpha + 1/n)$ dus

$f^{-1}([-\infty,\alpha]) \overset{(1)}{=} \bigcap_n f^{-1}([-\infty,\alpha + 1/n))$

$\forall n \quad f^{-1}([-\infty,\alpha + 1/n)) \in \mathcal{J} \Longrightarrow f^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \mathcal{J}$.

c) $\Longrightarrow$ d) $(\alpha,+\infty] = R^{*} \setminus [-\infty,\alpha]$ dus

$f^{-1}((\alpha,+\infty]) \overset{(3)}{=} X \setminus f^{-1}([-\infty,\alpha])$

d) $\Longrightarrow$ e) $[\alpha,+\infty] = \bigcap_n (\alpha - 1/n, +\infty]$ (vgl. b) $\Longrightarrow$ c))

e) $\Longrightarrow$ a) $\{+\infty\} = \bigcap_n [n,+\infty]$ dus

$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_n f^{-1}([n,+\infty]) \in \mathcal{J}$.

$\{-\infty\} = R^{*} \setminus \bigcup_n [-n,+\infty]$ dus

$f^{-1}(\{-\infty\}) = X \setminus \bigcup_n f^{-1}([-n,+\infty]) \in \mathcal{J}$.

Zij verder $Y = X \setminus f^{-1}(\{+\infty,-\infty\})$.
Dan is $Y \in \mathcal{J}$. Verder is het origineel van iedere deelverzameling van $\mathbb{R}$ bevat in Y; $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$.

Zij C de klasse der deelverzamelingen A van $\mathbb{R}$ waarvoor $f^{-1}(A) \in \mathcal{J}$. Dan gelden de volgende uitspraken:

i) Ieder interval $[\alpha,\beta)$ $\beta > \alpha$ zit in C.
Immers $f^{-1}([\alpha,\beta)) = f^{-1}([\alpha,+\infty]) \setminus f^{-1}([\beta,+\infty])$.

ii) Als $A \in C$ dan $\mathbb{R} \setminus A \in C$
Immers $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$.

iii) Als $A_i \in C$ voor $i \in \mathbb{N}$ dan zitten $\bigcap_i A_i$ en $\bigcup_i A_i$ in C.
Immers $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$ en $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$.

C is dus een klasse deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die de halfopen, half gesloten intervallen $[\alpha,\beta)$ omvat en die gesloten is onder complementvorming en vorming van aftelbare verenigingen en doorsneden. Dan omvat C de klasse der Borelverzamelingen $\mathcal{B}$.

We constateren dat voor iedere $A \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(A)$ meetbaar is.

Def. 6.2. Zij $<X,R,\mu>$ een maatruimte en zij μ σ-eindig en Λ de klasse der μ-meetbare verzamelingen, dan heet f μ-meetbaar als f meetbaar is m.b.t. Λ.
Zij $\mathcal{B}(R)$ de klasse der Borelmeetbare verzamelingen in X dan heet f Borelmeetbaar als f meetbaar is m.b.t. $\mathcal{B}(R)$.

Voorbeeld: Zij E een μ-meetbare verzameling en χ_E de karakteristieke functie van E; dan is χ_E μ-meetbaar. Ook de functie f met $f(x) = 0$ voor $\forall x \in X$ is μ-meetbaar, immers $f = \chi_\emptyset$.
De karakteristieke functie χ_β van een Borelverzameling B is Borelmeetbaar.

Stelling 6.2: Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continu. Dan is f Borelmeetbaar.

Bewijs: De verzamelingen $f^{-1}([-\infty,\alpha))$ zijn als origineel van de open verzameling $[-\infty,\alpha)$ in R^*, open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en dus zeker Borelverzamelingen.

Stelling 6.3: Zij $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar (t.o.v. $\mathcal{J}$). Zij $c > 0$ $c \in \mathbb{R}$. Dan zijn ook de functies $f + c$, $f - c$, $+cf$ en $-cf$ meetbaar.
($(f+c)(x) = f(x) + c$, $(cf)(x) = c.f(x)$, etc.)

Bewijs: Stel $g = f + c$, $h = f - c$, $k = cf$ en $l = -cf$.
Dan geldt:

$$g^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}([-\infty,\alpha-c))$$
$$h^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}([-\infty,\alpha+c))$$
$$k^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}([-\infty,\alpha/c))$$
$$l^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}((-\alpha/c,+\infty])$$

De rechterleden zijn elementen van $\mathcal{J}$.

<u>Stelling 6.4</u>: Indien f en g beiden meetbaar zijn, dan is f + g meetbaar.

<u>Bewijs</u>: De verzamelingen $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$, $g^{-1}(\{+\infty\})$ en $g^{-1}(\{-\infty\})$ zijn meetbaar. Hetzelfde geldt dan voor de verzamelingen

$$E_0 = \{x \mid f(x) = +\infty \ \text{ of } \ g(x) = -\infty\},$$
$$E_1 = \{x \mid f(x) = -\infty \ \text{ of } \ g(x) = +\infty\}.$$

Zij $Y = X \setminus (E_0 \cup E_1)$, dan is $Y \in \mathcal{S}$.

Stel nu $(f+g)(x) < \alpha$. $\alpha \in \mathbb{R}$
Als $a > 0$ kan $x \in E_0 \cup E_1$. Als $x \notin E_0 \cup E_1$ kan $f(x)$ noch $g(x)$ de waarde $\pm\infty$ aannemen. Dan is $(f+g)(x) = \beta < \alpha$.
Er bestaat een rationaal getal r, zodanig dat $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Dan is $g(x) < \alpha - r$. Omgekeerd als $f(x) < r$ en $g(x) < \alpha - r$ volgt $f(x) + g(x) < \alpha$.

We concluderen:

$$Z = \{x \mid f(x) + g(x) < \alpha\} \cap Y = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (f^{-1}([-\infty, r)) \cap g^{-1}([-\infty, \alpha - r))$$

Het rechterlid hiervan is als aftelbare vereniging van een rij eindige doorsneden van elementen uit $\mathcal{S}$ een element van $\mathcal{S}$.

$$\text{Aangezien } (f+g)^{-1}([-\infty, \alpha)) = \begin{cases} Z & \text{voor } \alpha \leq 0 \\ \\ Z \cup E_0 \cup E_1 & \text{voor } \alpha > 0 \end{cases}$$

is hiermede het bewijs voltooid.

<u>Gevolg</u>: Als f en g beiden meetbaar zijn dan zijn voor iedere reëel getal c de volgende verzamelingen elementen van $\mathcal{S}$:

1^e) $\{x \mid f(x) < g(x) + c\}$

2^e) $\{x \mid f(x) \leq g(x) + c\}$

3^e) $\{x \mid f(x) = g(x) + c\}$

4^e) $\{x \mid f(x) \neq g(x) + c\}$

5^e) $\{x \mid f(x) > g(x) + c\}$

6^e) $\{x \mid f(x) \geq g(x) + c\}$.

Bewijs: Aangezien g meetbaar is, is ook -g meetbaar, dan is volgens St. 6.4 ook f - g meetbaar. De boven aangegeven verzamelingen laten zich gemakkelijk interpreteren als originelen van Borelverzamelingen onder de functie f - g.

Stelling 6.5: Zij $\phi: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ Borel-meetbaar (d.w.z. $\phi \mid \mathbb{R}$ is Borelmeetbaar) dan is voor iedere meetbare functie $f: X \to \mathbb{R}^*$ de samenstelling $\phi.f$ meetbaar.

Bewijs: $(\phi.f)^{-1}([-\infty,\alpha)) = f^{-1}(\phi^{-1}([-\infty,\alpha)))$.

Krachtens het gegeven is $\phi^{-1}([-\infty,\alpha))$ een Borelverzameling in $\mathbb{R}$, eventueel uitgebreid met de punten $+\infty$ of $-\infty$.

Dan is $f^{-1}(\phi^{-1}([-\infty,\alpha)))$ het origineel onder f van een Borelverzameling in R eventueel uitgebreid met de verzamelingen $f^{-1}(\{+\infty\})$ of $f^{-1}(\{-\infty\})$.

Dus $f^{-1}(\phi^{-1}([-\infty,\alpha))) \in \mathcal{S}$, dus $\phi.f$ is meetbaar.

Gevolg: Voor $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

$$f: X \to \mathbb{R} \quad \text{meetbaar}$$
$$|f|^\alpha: X \to \mathbb{R}^+ \quad \text{meetbaar.}$$

Immers de afbeelding $x \mapsto |x|^\alpha$ voor $x \in \mathbb{R}$ is continu en volgens St. 6.2 dus Borelmeetbaar.

Stelling 6.6: Indien f en g beiden meetbaar zijn dan zijn ook de volgende functies meetbaar:

(i) $\max(f,g)$

(ii) $\min(f,g)$

(iii) $f.g$

Bewijs: (i) $\max(f,g) = \{f + g + |f-g|\}/2$

(ii) $\min(f,g) = \{f + g - |f-g|\}/2$

(iii) $f.g = [(f+g)^2 - (f-g)^2]/4$

De meetbaarheid van de rechterleden volgt door gebruik te maken van eerdere stellingen en gevolgen.

Def. 6.3: Zij f: $X \to \mathbb{R}^*$. We definiëren nu

$$f^+ = \max\{f,0\},$$

$$f^- = -\min\{f,0\}.$$

f^+ en f^- zijn beiden positiefwaardige functies. Verder is $f^+ - f^- = f$; $f^+ . f^- = 0$.
M.b.v. St. 6.6 volgt direct:

f is meetbaar $\iff$ f^+ en f^- zijn meetbaar.

Opgave 6.1: Zij f een meetbare functie en zij g gedefinieerd door

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } f(x) = -,\ 0 \text{ of } + \\ \frac{1}{f(x)} & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan is g meetbaar.

Stelling 6.7: Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon niet-dalende of monotoon niet-stijgende rij functies; $f_n: X \to \mathbb{R}^*$. Laten alle f_n meetbaar zijn. Dan bestaat er een limietfunctie f gedefinieerd door $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ en deze limietfunctie is ook meetbaar.

Bewijs: Omdat voor vaste x de rij $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ een monotone rij is, bestaat voor die x $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Deze limiet is een element van $\mathbb{R}^*$. Op deze wijze kan de limietfunctie f zinvol gedefinieerd worden.

Als de rij f_n monotoon niet-dalend is geldt:

$$\{x \mid f(x) \leq \alpha\} = \{x \mid \forall_n\ f_n(x) < \alpha\} = \bigcap_n \{x \mid f_n(x) < \alpha\} =$$

$$= \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{S}.$$

Omdat voor iedere n $f_n^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{S}$ geldt dit ook voor de doorsnede.
Dus $f^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \mathcal{S}$.
Als de rij f_n monotoon niet-stijgend is geldt:

$$\{x \mid f(x) < \alpha\} = \{x \mid \exists_n\ f_n(x) < \alpha\} = \bigcup_n \{x \mid f_n(x) < \alpha\} =$$

$$= \bigcup_n f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{S},$$

aangezien voor iedere n $f_n^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{F}$.
Hiermede is het bewijs voltooid.

Gevolg: Indien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij meetbare functies is, dan zijn de volgende functies eveneens meetbaar:

(i) $g_1 = \sup\limits_n f_n$

(ii) $g_2 = \inf\limits_n f_n$

(iii) $g_3 = \lim\sup\limits_n f_n$

(iv) $g_4 = \lim\inf\limits_n f_n$

Bewijs: Met volledige inductie volgt uit St. 6.6: Als $f_1,\dots,f_k$ meetbaar zijn dan zijn ook $\max\limits_{i=1,\dots,k} f_i$ en $\max\limits_{i=1,\dots,k} f_i$ meetbaar.

Het gevolg is nu met St. 6.7 af te leiden uit de volgende betrekkingen:

$$\sup_n f_n = \lim_{k\to\infty} \max_{i=1,\dots,k} f_i \quad (\{\max_{i=1,\dots,k} f_i\}_k \text{ monotoon niet-dalend})$$

$$\inf_n f_n = \lim_{k\to\infty} \min_{i=1,\dots,k} f_i \quad (\{\max_{i=1,\dots,k} f_i\}_k \text{ monotoon niet-stijgend})$$

$$\operatorname{limsup}_n f_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k} f_n \quad (\{\sup_{n>k} f_n\}_k \text{ monotoon niet-dalend})$$

$$\operatorname{liminf}_n f_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k} f_n \quad (\{\inf_{n>k} f_n\}_k \text{ monotoon niet-stijgend}).$$

Zij nu $\langle X,\Lambda,\mu\rangle$ een maatruimte. Zij $f,g\colon X \to R^{*}$ en zij f,g μ-meetbaar.
In definitie 5.4 is het begrip f bijna overal gelijk aan g gedefinieerd.

Def. 6.4. De functie $f\colon X \to R^{*}$ heet een nulfunctie als $\mu\{x \mid f(x) \neq 0\} = 0$.

Ga na dat een nulfunctie bijna overal gelijk is aan de funktie ϕ: $\phi(x) \equiv 0$ en dat het begrip f b.o. gelijk aan g equivalent is met $f - g$ is een nulfunctie.

Stelling 6.8: Als f een nulfunctie is dan is f μ-meetbaar.

Bewijs: Zij $A = \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Dan is $\mu(A) = 0$ dus $A \in \Lambda$. Verder geldt voor iedere deelverzameling $B \subset A$ is $\mu(B) = 0$, dus ook $B \in \Lambda$.
Stel nu $E_\alpha = f^{-1}([-\infty,\alpha))$.
Als $\alpha \leq 0$ geldt $E_\alpha \subset A$ dus $E_\alpha \in \Lambda$. Als $\alpha > 0$ geldt $X \setminus A \subset E_\alpha$, dus $X \setminus E_\alpha \subset A$ zodat $(X \setminus E_\alpha) \in \Lambda$. Omdat Λ gesloten is onder complementvorming volgt $E_\alpha \in \Lambda$.

Opmerking: Een nulfunctie is niet noodzakelijk Borelmeetbaar. Immers in het algemeen zijn niet alle nulverzamelingen Borelverzamelingen.

Gevolg: Als f meetbaar is en g bijna overal gelijk is aan f, dan is g meetbaar.
Bewijs: $g = f + (g-f)$ en $g-f$ is nulfunctie.

Opmerking: Zij $\langle X,\Lambda,\mu\rangle$ een maatruimte geconstrueerd uitgaande van een maatruimte (X,R,μ). Zij $\mathcal{L}(X,\mu)$ de klasse der μ-meetbare functies en zij $\mathcal{B}(X,\mu)$ de klasse der Borelmeetbare functies.

De tot nu toe afgeleide stellingen leren dan het volgende:

1[e]) $\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ zijn $\mathbb{R}$-lineaire ruimten. (sommen en scalaire veelvouden van meetbare functies zijn meetbaar)

2[e]) $\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ bevatten de limieten van rijen functies uit $\mathcal{L}(X,\mu)$ resp. $\mathcal{B}(X,\mu)$ die puntsgewijs convergeren.

3[e]) $\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ bevatten met ieder paar functies ook de productfunctie. ($\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ zijn $\mathbb{R}$-Algebra's).

4[e]) $\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ bevatten de samenstellingen $\phi \circ f$ voor Borelmeetbare ϕ: $R^* \to R^*$.

5[e]) a) $\mathcal{L}(X,\mu)$ omvat de klasse der karakteristieke functies van μ-meetbare verzamelingen, i.h.b. de klasse der nulfuncties.

5e) b) $\mathcal{B}(X,\mu)$ omvat de klasse der karakteristieke functies der Borel-verzamelingen.

In de volgende paragraaf zullen we laten zien dat de klassen $\mathcal{L}(X,\mu)$ en $\mathcal{B}(X,\mu)$ reeds gekarakteriseerd kunnen worden door 1e), 2e) en 5e) a) resp. b): Een klasse functies die aan 1e), 2e) en 5e) a) resp. b) voldoet omvat $\mathcal{L}(X,\mu)$ resp. $\mathcal{B}(X,\mu)$.

<u>Opgave 6.2</u>: Zij f,g nulfuncties, $\lambda \in \mathbb{R}$ en zij h meetbaar. Dan zijn ook de functies $f + g$, λf en $f.h$ nulfuncties.

§7. Trapfuncties.

In deze paragraaf is $<X,\Lambda,\mu>$ een vaste maatruimte voortgebracht door een maat op een ring (X,R,μ). De Lebesguemaat op de reële getallen duiden we aan met $<\mathbb{R},L,\lambda>$.

De karakteristieke functie van een verz. $A\subset X$ noteren we door χ_A. Voor karakteristieke functies gelden de volgende rekenregeltjes:

(i) $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A\cap B}$

(ii) $\max(\chi_A,\chi_B) = \chi_{A\cup B}$

(iii) $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B}$ indien $A\cap B = \emptyset$

(iv) $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B}$

(v) $\chi_{X\setminus A} = 1 - \chi_A$.

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

Def. 7.1: Een trapfunctie t op X is een functie van de vorm

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \chi_{A_i},$$

waarbij $\alpha_i \in \mathbb{R}$ en $A_i \in \Lambda$.

Opmerking: Een trapfunctie is dus een (μ-)meetbare functie.

Stelling 7.1: Iedere trapfunctie $t = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ is te schrijven in een gedaante

$$t = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \chi_{B_j}$$

zodanig dat $B_j \cap B_k = \emptyset$ voor $j \neq k$.

Een dergelijke schrijfwijze zullen we een standaardvorm voor t noemen.

Bewijs: Voor $j = 0,\dots,2^n-1$ stellen we

$$j = \varepsilon_0(j) + 2.\,\varepsilon_1(j) + \dots + 2^{n-1}\,\varepsilon_{n-1}(j), \quad \varepsilon_i(j) = 0,1.$$

Verder noteren we $A_i^0 = X \setminus A_i$, $A_i^1 = A_i$.
Definieer nu $B_j = A_0^{\varepsilon_0(j)} \cap A_1^{\varepsilon_1(j)} \cap \ldots \cap A_{k-1}^{\varepsilon_{n-1}(j)}$ en
$\beta_j = \varepsilon_0(j)\alpha_0 + \varepsilon_1(j)\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1}(j)\alpha_{n-1}$.

Men gaat gemakkelijk na dat de volgende relaties gelden:

i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ voor $i \neq j$. Immers $i \neq j \Longrightarrow$ voor zekere $\nu = 0,\ldots,n-1$ is $\varepsilon_\nu(i) \neq \varepsilon_\nu(j)$ zeg $\varepsilon_\nu(i) = 0$ en $\varepsilon_\nu(j) = 1$. Dan is $B_i \subset X \setminus A_\nu$ en $B_j \subset A_\nu$.

ii) $t(x) = \beta_j$ voor $x \in B_j$. Immers $x \in B_j \Longleftrightarrow (x \in A_i \Longleftrightarrow \varepsilon_i(j) = 1) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow t(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{\substack{i=0\\ \varepsilon_i(j)=1}}^{n-1} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(j)\alpha_i = \beta_j$.

Dus $t = \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j \chi_{B_j}$ en dit is een standaardvorm.

N.B. $\bigcup_{\varepsilon_i(j)=1} B_j = A_i$. Immers $\varepsilon_i(j) = 1 \Longrightarrow B_j \subset A_i$ dus $\bigcup_{\varepsilon_i(j)=1} B_j \subset A_i$;
Zij omgekeerd $x \in A_i$. Stel $\eta_\nu = 0$ als $x \notin A_\nu$ en $\eta_\nu = 1$ als $x \in A_\nu$. Zij $j = \sum_{\nu=0}^{n-1} 2^\nu$ dan geldt $\varepsilon_\nu(j) = \eta_\nu$ en derhalve $x \in B_j$ met $\varepsilon_i(j) = \eta_i = 1$.
Dus $A_i \subset \bigcup_{\varepsilon_i(j)=1} B_j$.

Een standaardvorm voor een trapfunctie is geenszins uniek bepaald. In de eerste plaats zijn termen $\beta_j\chi_\emptyset$ of $0.\chi_{B_j}$ mogelijk die beiden geschrapt kunnen worden. Verder laten termen $\beta_i\chi_{B_i}$ en $\beta_j\chi_{B_j}$ zich samenvoegen tot $\beta_i\chi_{B_i \cup B_j}$ als $\beta_i = \beta_j$. Met dit soort vereenvoudigingen kan men standaardvormen herleiden tot een <u>normaalvorm</u> met de volgende eigenschappen:

i) De functie nul geven we aan met 0.

ii) Voor de normaalvorm $t = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\chi_{B_i}$ voor een trapfunctie $t \neq 0$ geldt

  a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ voor $i \neq j$
  b) $\beta_i \neq \beta_j$ voor $i \neq j$
  c) $\beta_i \neq 0$
  d) $B_i \neq \emptyset$
  e) $\bigcup_i B_i = \{x \mid t(x) \neq 0\}$.

We zullen deze normaalvorm in het algemeen niet gebruiken.

Stelling 7.2: Laten t_1,t_2 trapfuncties zijn en laat $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan zijn ook $t_1 + t_2$ en λt_1 trapfuncties.

Bewijs: Zij $t_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}$, dan $\lambda t_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda\alpha_j \chi_{A_j}$. Als bovendien

$t_2 = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \chi_{B_j}$, dan geldt

$$t_1 + t_2 = \sum_{j=0}^{n+m-1} \gamma_j \chi_{C_j}$$

met $C_j = A_j$, $\gamma_j = \alpha_j$ voor $0 \leq j \leq n-1$

en $C_j = B_{j-n}$, $\gamma_j = \beta_{j-n}$ voor $n \leq j \leq n+m-1$.

Opmerking: Als $t_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}$ en $t_2 = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \chi_{B_j}$ standaardvormen zijn, is een standaardvorm voor $t_1 + t_2$ gegeven door

$$t_1 + t_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{ij} \chi_{C_{ij}}$$

waarbij $\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ en $C_{ij} = A_i \cap B_j$.

Stelling 7.3: Laat f een meetbare niet-negatieve functie zijn. Dan bestaat er een monotoon niet-dalende rij trapfuncties t_n die puntsgewijs naar f convergeert.

Bewijs: Definieer voor $k \in \mathbb{N}$ de verzamelingen A_{kj} voor $j = 0,\dots,k.2^k$ als volgt:

$$A_{k,k.2^k} = \{x \mid f(x) \geq k\},$$

$$A_{k,j} = \{x \mid j.2^{-k} \leq f(x) < (j+1).2^{-k}\}.$$

Opdat $[k,+\infty]$ en $[j.2^{-k},(j+1)2^{-k})$ Borelverzamelingen zijn, zijn de verzamelingen $A_{k,j}$ meetbaar. De verzamelingen $A_{k,j}$ zijn voor vaste k onderling disjunct. Tenslotte geldt $X = \bigcup_{j=0}^{k.2^k} A_{k,j}$.

Stel nu $t_k = \sum_{j=0}^{k.2^k} j.2^{-k}.\chi_{A_{k,j}}$.

t_k is een trapfunctie (de boven aangegeven vorm is een standaardvorm). Verder geldt $t_k \leq f$. Immers zij $x \in X$ dan $x \in A_{k,j}$ voor precies één j. Dan is $t_k(x) = j.2^{-k}$ terwijl $f(x) \geq j.2^{-k}$.

We hebben $A_{k,j} = A_{k+1,2j} \quad A_{k+1,2j+1}$ $(0 \leq j < k.2^k)$ en

$$A_{k,2^k.k} = \bigcup_{j=k.2^{k+1}}^{j=(k+1).2^{k+1}} A_{k+1,j} .$$

Voor $0 \leq j < k.2^k$ en $x \in A_{k,j}$ is dus

$$t_k(x) = j.2^{-k}$$

$$t_{k+1}(x) = \begin{cases} j.2^{-k} & \text{als } x \in A_{k+1,2j} \\ (2j+1).2^{-(k+1)} & \text{als } x \in A_{k+1,2j+1}. \end{cases}$$

Evenzo

$$x \in A_{k,k.2^k} \Longrightarrow \begin{cases} t_k(x) = k.2^{-k} \\ t_{k+1}(x) \geq k.2^{-k}. \end{cases}$$

Dus $t_k \leq t_{k+1}$ op de gehele X. De rij $(t_k)_k$ is dus monotoon niet-dalend.

Tenslotte dienen we te bewijzen dat $t_k(x) \to f(x)$ voor iedere $x \in X$.
Stel eerst $f(x) < \infty$. Er is dan een $k_0 \in \mathbb{N}$ met $f(x) < k_0$.
Voor $k \geq k_0$ bestaat er een j met $0 \leq j \leq k.2^k$ zodat $j.2^{-k} \leq f(x) < (j+1).2^{-k}$.
Dan volgt per definitie:

$$t_k(x) = j.2^{-k} \qquad \text{dus} \quad f(x) - t_k(x) < 2^{-k}.$$

Hieruit volgt $\lim_{k\to\infty} t_k(x) = f(x)$.

Stel vervolgens $f(x) = +\infty$. Dan geldt voor iedere $k \in \mathbb{N}$ $x \in A_{k,2^k.k}$ dus $t_k(x) = k$.
Dus $\lim_{k\to\infty} t_k(x) = \lim_{k\to\infty} k = \infty = f(x)$.
Hiermede is het bewijs voltooid.

<u>Stelling 7.4</u>: Zij f een meetbare functie. Dan bestaat er een rij trapfuncties t_n die puntsgewijs naar f convergeert.

<u>Bewijs</u>: Volgens St. 7.2 is er een monotone rij trapfuncties u_n die puntsgewijs naar f^+ convergeert en een monotone rij v_n die puntsgewijs naar f^- convergeert. Kiezen we u_n en v_n zoals in het bewijs van St. 7.3 dan is het duidelijk dat u_n en v_n voor geen enkele $x \in X$ beiden ongelijk nul zijn.
Voor vaste $x \in X$ is de rij $u_n(x) - v_n(x)$ een monotoon niet-dalende resp. niet-stijgende rij al naar gelang f(x) positief of negatief is. Hieruit volgt dat de rij trapfuncties $u_n - v_n$ puntsgewijs convergeert. De limietfunctie is juist $f = f^+ - f^-$.

<u>Opmerking</u>: St. 7.4 laat zien dat iedere meetbare functie een limiet van trapfuncties is. Dit rechtvaardigt de uitspraak gedaan aan het slot van §6.

Een lineaire ruimte van functies die de karakteristieke functies van meetbare verzamelingen omvat, bevat alle trapfuncties. Als deze lineaire ruimte ook nog de limietfuncties van puntsgewijs convergente rijen bevat, bevat hij volgens St. 7.4 alle meetbare functies.

Opgave 7.1: Als t en u trapfuncties zijn, is ook $t.u$ een trapfunctie.

Opgave 7.2: Ga na hoe de bovenbeschreven theorie analoog kan worden opgezet voor karakteristieke functies van Borelverzamelingen en Borel-meetbare-functies.

Lemma 7.5. Zij $t = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$ en $u = \sum_{i=0}^{q} \beta_i \chi_{B_i}$. Dan geldt:

$$t \equiv u \iff \begin{cases} (A_i \cap B_j \neq \emptyset \Longrightarrow \alpha_i = \beta_j) \\ \bigcup_i \{A_i \mid \alpha_i \neq 0\} = \bigcup_j \{B_j \mid \beta_j \neq 0\}. \end{cases}$$

Bewijs: Stel $t \equiv u$, en voor $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, dan geldt voor $x \in A_i \cap B_j$:

$$\alpha_i = t(x) = u(x) = \beta_j.$$

Bovendien geldt:

$$x \in \bigcup_i \{A_i \mid \alpha_i \neq 0\} \iff t(x) \neq 0 \iff u(x) \neq 0 \iff x \in \bigcup_j \{B_j \mid \beta_j \neq 0\}.$$

Omgekeerd zij aan de voorwaarden van het lemma voldaan;
Als $t(x) = 0$, dan $x \notin \bigcup_i \{A_i \mid \alpha_i \neq 0\}$, dus $x \in \bigcup_j \{B_j \mid \beta_j \neq 0\}$, m.a.w. $u(x) = 0$.
Als $t(x) \neq 0$, dan $x \in A_i$ voor zekere i, dus $t(x) = \alpha_i$,
én $x \in B_j$ voor zekere j, dus $u(x) = \beta_j$.
Maar $x \in A_i \cap B_j$ dus $\alpha_i = \beta_j$, m.a.w. $t(x) = u(x)$.

Stelling 7.6. Zij $t = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=0}^{q} \beta_j \chi_{B_j}$ twee standaardvormen voor de trapfunctie t.
Dan zijn de volgende twee reële getallen gelijk:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j \mu(B_j).$$

Bewijs: Uit lemma 7.5 volgt dat

$$\alpha_i = \beta_j \quad \text{voor } A_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$$\text{én } \{\bigcup_i A_i \mid \alpha_i \neq 0\} = \{\bigcup B_j \mid \beta_j \neq 0\}.$$

Daar t in standaardvormen is geschreven, zijn de verzamelingen A_i paarsgewijs disjunct, dus

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \sum_{j=0}^{q} \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \quad \text{(wegens lemma 7.5)}$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \beta_j \sum_{i=0}^{p} \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{u=0}^{q} \beta_j \mu(B_j) \quad \text{(daar de } B_j \text{ paarsgewijs disjunct zijn).}$$

Stelling 7.7: Zij $t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}$ een positieve trapfunctie niet noodzakelijk in standaardvorm en zij $t = \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j \chi_{B_j}$ de in St. 7.1 geconstrueerde staandaardvorm. Dan geldt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j \mu(B_j).$$

Bewijs: We schrijven $j = 0,\ldots,2^n-1$ als

$$j = \varepsilon_0(j) + 2\varepsilon_1(j) + \ldots + 2^{n-1}\varepsilon_{n-1}(j) \qquad \varepsilon_i(j) = 0,1.$$

Stel $A^0 = A^c$ en $A^1 = A$ dan geldt

$$B_j = A_0^{\varepsilon_0(j)} \cap A_1^{\varepsilon_1(j)} \cap \ldots \cap A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}(j)}$$

$$\text{en } \beta_j = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(j)\alpha_i.$$

Derhalve geldt:

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(j)\alpha_i\right)\mu(B_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \varepsilon_i(j)\alpha_i \, \mu(B_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \sum_{j=0}^{2^n-1} \varepsilon_i(j)\mu(B_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, \mu\Big(\bigcup_{\varepsilon_i(j)=1} B_j\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, \mu(A_i) \quad \text{(zie St. 7.1 N.B.)}$$

Hetgeen te bewijzen viel.

<u>Stelling 7.8</u>: Zij t een trapfunctie $t = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$, $t \geq 0$ dan hangt het getal $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \mu(A_i)$ niet af van de gekozen presentatie van t.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt onmiddellijk uit Stelling 7.6 en 7.7.

Het gevonden bedrag I dat blijkbaar alleen van t afhangt noemen we de <u>integraal</u> van t met betrekking tot de maat μ. Notatie

$$I = \int_X t \, d\mu \, .$$

<u>Stelling 7.9</u>: Zij t en u positieve trapfuncties en zijn $\lambda > 0$ dan geldt:

$$\int_X t \, d\mu + \int_X u \, d\mu = \int_X (t+u) \, d\mu$$

$$\int_X \lambda t \, d\mu = \lambda \int_X t \, d\mu.$$

<u>Bewijs</u>: Stel $t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}$, $u = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \chi_{B_j}$ dan is $t+u = \sum_{i=0}^{n+m-1} \gamma_i \chi_{C_i}$ als in St. 7.2.

Verder geldt $\displaystyle \int_X t \, d\mu + \int_X u \, d\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \mu(B_j) =$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1} \gamma_i \mu(C_i) = \int_X (t+u) \, d\mu \, .$$

Evenzo geldt:

$$\int_X \lambda t \, d\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda \, \alpha_i \, \mu(A_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, \mu(A_i) = \lambda \int_X t \, d\mu \, .$$

Orienterend Colloquium Maattheorie (1969-1970)

Spreker: J. de Vries

8. Het integraalbegrip.

Zoals reeds in §1 (pag. 2) is opgemerkt, geeft het begrip "Lebesgue-maat" aanleiding tot een integraalbegrip, dat algemener is dan het integraalbegrip van Riemann. We zullen dit integraalbegrip hier in het kader van de abstracte maattheorie interoduceren.

Het uitgangspunt is een vaste maatruimte $(X,\mathcal{S},\mu)$, waarin X een niet-lege verzameling is, $\mathcal{S}$ een σ-ring van deelverzamelingen van X zó, dat $X \in \mathcal{S}$, en μ een maat op $\mathcal{S}$. In tegenstelling tot het gebruik in vorige paragrafen (vgl. pag. 29) eisen we niet, dat $\mathcal{S}$ de σ-ring van alle μ-meetbare verzamelingen is. Het enige bezwaar, dat men tegen dit algemenere uitgangspunt kan hebben, is dat nu niet noodzakelijk hoeft te gelden: als $A \subset B$ met $B \in \mathcal{S}$ en $\mu(B) = 0$, dan is $A \in \mathcal{S}$ (en $\mu(A) = 0$). Vgl. stelling 5.5. Indien deze eigenschap wel geldt, zullen we de maatruimte $(X,\mathcal{S},\mu)$ volledig noemen.

Het begrip "bijna overal" is in def. 5.4 via de maatruimte (X,Λ,μ) gedefinieerd, waarin Λ de σ-ring van alle μ-meetbare verzamelingen is. Om niet voortdurend op Λ te moeten terugvallen bij het hanteren van dit begrip, geven we hier een algemenere definitie:

Def. 8.1. Een eigenschap $P(x)$ $(x \in X)$ geldt bijna overal, indien er een $A \in \mathcal{S}$ is met $\mu(A) = 0$ zó, dat

$$\{x \mid x \in X \ \& \ P(x) \text{ is niet waar}\} \subseteq A,$$

dat wil zeggen:

$$\forall x \in X : x \notin A \Rightarrow P(x) \text{ is waar.}$$

<u>Opmerking</u> 1°. de verzamelingen $\{x|x \in X \ \&\ P(x) \text{ is niet waar}\}$ en $\{x|x \in X \ \&\ P(x) \text{ is waar}\}$ behoeven niet tot $\mathcal{S}$ te behoren.

2°. als $\mathcal{S} = \Lambda$, is def 8.1 equivalent met def. 5.4.

We zullen een functie $f: X \to R^*$ <u>meetbaar</u> noemen, als en alleen als f meetbaar is met betrekking tot $\mathcal{S}$ (def 6.1). Indien men het bewijs van stelling 6.8 en zijn gevolg analyseert, dan blijkt: als $(X,\mathcal{S},\mu)$ een volledige maatruimte is, dan volgt uit f is meetbaar en g is bijna overal gelijk aan f : g is meetbaar.
Als de maatruimte niet volledig is, dan hoeft deze bewering niet juist te zijn:

<u>Voorbeeld</u>. Als $(X,\mathcal{S},\mu)$ niet volledig is, is er een $A \in \mathcal{S}$ met $\mu(A) = 0$ en een $B \subset A$ met $B \notin \mathcal{S}$. De functies $f = \chi_A$ en $g = \chi_B$ zijn bijna overal gelijk:

$$\{x|x \in X \ \&\ f(x) \neq g(x)\} = A \setminus B$$

en $A \setminus B \subset A$ met $\mu(A) = 0$. Voorts is f wel en g niet meetbaar.

Wat zijn nu de eisen die men redelijker wijs aan een integraalbegrip kan stellen? Op grond van intuïtieve overwegingen ("oppervlak onder de grafiek") liggen de volgende eisen voor de hand:

1°. De verzameling integreerbare functies is een lineaire ruimte: lineaire combinaties (puntsgewijs) van integreerbare functies zijn weer integreerbaar.

2°. Aan iedere integreerbare functie f is een <u>eindig</u> reëel I(f), zijn integraal, toegevoegd.

3°. I is lineair: als f_1 en f_2 integreerbare functies zijn, dan is

$$I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2) \text{ voor } \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

4°. I is positief: als f integreerbaar is en $f \geq 0$, dan is $I(f) \geq 0$.

Bovendien is het niet onredelijk om te eisen, dat integreerbare functies niet te "wild" zijn. We zullen van de verzameling der integreerbare functies daarom ook nog eisen:

5°. Integreerbare functies zijn meetbaar.

6°. Integreerbare functies zijn bijna overal eindig, dat wil zeggen: als f integreerbaar is, dan is er een $A \in \mathcal{S}$ met $\mu(A) = 0$ zó, dat $\{x | x \in X \ \& \ f(x) \in \mathbb{R}^{*} \setminus \mathbb{R}\} \subset A$.

<u>N.B.</u> Daar f meetbaar is, is op grond van def. 6.1

$$\{x | x \in X \ \& \ f(x) \in \mathbb{R}^{*} \setminus \mathbb{R}\} = f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S},$$

dus in dit geval betekent "f bijna overal eindig", dat

$$\mu(\{x | x \in X \ \& \ f(x) \in \mathbb{R}^{*} \setminus \mathbb{R}\}) = 0.$$

A. Integreerbare trapfuncties.

<u>Opgave</u>. Toon aan, dat een functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ een trapfunctie is als en alleen als f een meetbare functies is, die slechts eindig veel waarden aanneemt.

<u>Def. 8.2</u>. Eèn trapfunctie $f\colon X \to \mathbb{R}$ heet <u>integreerbaar</u>, indien $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. De verzameling der integreerbare trapfuncties duiden we aan met $\mathfrak{J}_0$.

<u>Lemma 8.3</u>. Indien $f\colon X \to \mathbb{R}$ een trapfunctie is, zeg $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ met $E_i \in \mathcal{S}$ en $c_i \neq 0$ en $E_i \cap E_j = \emptyset$ voor $i, j = 1, \ldots, n$, dan geldt:

$$f \in \mathfrak{J}_0 \Leftrightarrow \mu(E_i) < \infty \text{ voor } i = 1, \ldots, n.$$

<u>Bewijs</u>: Voor elke $j \in \{1, \ldots, n\}$ is

$$E_j \subset \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

en dus

$$\mu(E_j) \leq \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Hieruit volgt onmiddellijk het gestelde.

Stelling 8.4. Indien $f, g \in \mathcal{I}_0$, $c \in \mathbb{R}$ en $A \in \mathcal{S}$, dan behoren de volgende functies alle tot I_0:

$$cf,\ f + g,\ |f|,\ \max(f,g),\ \min(f,g),\ f^+,\ f^-,\ \chi_A f \text{ en } f.g.$$

Bewijs: Alle genoemde functies zijn volgens de stellingen 6.3, 6.4 en 6.6 meetbaar, terwijl ze elk slechts eindig veel waarden aannemen. Dus het zijn alle weer meetbare functies (zie bovenstaande opgave). De integreerbaarheid kan nu direct aan de hand van definitie 8.1 geverifieerd worden. Bijvoorbeeld:

$$\{x \in X \mid (f+g)(x) \neq 0\} \subset \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}.$$

Als $f, g \in \mathcal{I}_0$, dan is het rechterlid een verzameling met eindige maat, dus ook het linkerlid, dat wil zeggen: $f + g \in \mathcal{I}_0$.
Voor de andere functies gelden analoge bewijzen.
Notatie: $f \wedge g = \inf(f,g)$ en $f \vee g = \sup(f,g)$.

Lemma 8.5. Indien $f \in \mathcal{I}_0$, en als

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

twee verschillende voorstellingen van f zijn, dan is

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).$$

Bewijs: Daar $f \in \mathcal{I}_0$, is $\mu(A_i) < \infty$ en $\mu(B_j) < \infty$ voor alle i en j. Daar de α_i en β_j eveneens eindige reële getallen zijn, gaat het bewijs van stelling 7.7 (en dus de juistheid van 7.8) door, indien men de eis laat vallen, dat alle $\alpha_i \geqq 0$ en $\beta_j \geqq 0$.

Def. 8.6. Als $f \in \mathfrak{I}_0$, dan verstaan we onder de integraal van f (over X, met betrekking tot μ) het eindige reële getal I(f), dat als volgt gedefinieerd is:

$$\text{als } f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, \text{ dan is } I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Opmerking. Uit lemma 8.5 volgt, dat I(f) ondubbelzinnig gedefinieerd is voor $f \in \mathfrak{I}_0$, en uit de definitie van $\mathfrak{I}_0$ volgt, dat I(f) een eindig reëel getal is.

Stelling 8.7. Indien $f, g \in \mathfrak{I}_0$, $c \in \mathbb{R}$ en $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) < \infty$, dan geldt

1°. $I(cf) = c\, I(f)$.
2°. $I(f+g) = I(f) + I(g)$.
3°. $\chi_E \in \mathfrak{I}_0$, en $I(\chi_E) = \mu(E)$.

Dus $I : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}$ is een lineaire functie. Als ook $J : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}$ een lineaire functie is die aan 3° voldoet, dan is

$$I(f) = J(f) \text{ voor alle } f \in \mathfrak{I}_0.$$

Bewijs: 1° en 3° zijn triviaal, en 2° gaat geheel analoog aan het bewijs van stelling 7.9.
Indien $J : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}$ aan 3° voldoet en bovendien lineair is (dat wil zeggen: aan 1° en 2° voldoet), dan geldt voor willekeurige $f \in \mathfrak{I}_0$, zeg $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ met $E_i \in \mathcal{S}$ en $\mu(E_i) < \infty$:

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i J(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i) = I(f).$$

Stelling 8.8. De integraal $I: \mathcal{J}_0 \to R$ heeft de volgende eigenschappen:
1°. I is strikt positief, dat wil zeggen:

(a) $f \in \mathcal{J}_0$ & $f \geq 0$ (b.o) $\Rightarrow I(f) \geq 0$.
(b) $f \in \mathcal{J}_0$ & $f \geq 0$ (b.o) & $I(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (b.o).

2°. I is monotoon: $f, g \in \mathcal{J}_0$ & $f \leq g$ (b.o) $\Rightarrow I(f) \leq I(g)$.
3°. I is constant op equivalentieklassen van b.o. gelijke functies:

$f, g \in \mathcal{J}_0$ & $f = g$ (b.o) $\Rightarrow I(f) = I(g)$.

4°. $\forall f \in \mathcal{J}_0 : |f| \in \mathcal{J}_0$ en $|I(f)| \leq I(|f|)$.
5°. $\forall f \in \mathcal{J}_0 : f = 0$ (b.o) $\Leftrightarrow I(|f|) = 0$.
6°. Indien $A \in \mathcal{S}$ en $\mu(A) < \infty$, dan is voor $f \in \mathcal{J}_0$:

$$\inf \{f(x) \mid x \in A\}. \mu(A) \leq I(\chi_A f) \leq \sup \{f(x) \mid x \in A\}. \mu(A).$$

Met name is dus

$$|I(f)| \leq \sup \{|f(x)| \mid x \in X\}. \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}).$$

Bewijs:
1°. We bewijzen (a) en (b) gelijktijdig.

Zij $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ een standaardvorm van f met alle $a_i \neq 0$. Dan is

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Hierin is $\mu(E_i) \geq 0$ voor $i = 1, \ldots, n$. Dus geldt:
als voor zekere i $a_i \geq 0$, dan is $a_i \mu(E_i) \geq 0$.
als voor zekere i $a_i < 0$, dan is $E_i \subset \{x \in X \mid f(x) < 0\}$, en aangezien $f \geq 0$ (b.o) is het rechterlid van deze inclusie bevat in een exemplaar uit $\mathcal{S}$ met de maat nul. Daar $E_i \in \mathcal{S}$ is ook

$\mu(E_i) = 0$; in dit geval is dus $a_i\ \mu(E_i) = 0$.
Conclusie: $a_i\ \mu(E_i) \geq 0$ voor $i = 1, \ldots, n$.
Bijgevolg is $I(f) \geq 0$.
Indien $I(f) = 0$, dan moet $a_i\ \mu(E_i) = 0$ voor $i = 1, \ldots, n$.
We hebben aangenomen, dat alle $a_i \neq 0$ zijn, dus $\mu(E_i) = 0$ voor $i = 1, \ldots, n$. Dus is

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

een verzameling die tot $\mathcal{S}$ behoort, en waarvan de maat nul is.
Met andere woorden $f = 0$ (b.o),

2°: $f \leq g$ (b.o) $\Longrightarrow g - f \geq 0$ (b.o) $\overset{1^\circ}{\Longrightarrow} I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$.

3°. $f = g$ (b.o) is equivalent met $f \geq g$ (b.o) en $f \leq g$ (b.o).
Wegens 2° is dus $I(f) \geq I(g)$ en $I(f) \leq I(g)$.

4°. Op grond van stelling 8.4 is $|f| \in \mathfrak{J}_0$. Voorts is op geheel X

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

dus met behulp van 2° volgt hieruit

$$-I(|f|) = I(-|f|) \leq I(f) \leq I(|f|)$$

hetgeen niets anders betekent dan

$$|I(f)| \leq I(|f|).$$

5°. Voor alle $x \in X$ geldt: $f(x) \neq 0 \Longleftrightarrow |f|(x) = |f(x)| \neq 0$.
Bijgevolg is $f = 0$ (b.o) $\Longleftrightarrow |f| = 0$ (b.o).
Als $|f| = 0$ (b.o), dan volgt uit 4°: $I(|f|) = 0$.
Als $I(|f|) = 0$, dan volgt uit 1°(b): $|f| = 0$ (b.o).
Dus: $|f| = 0$ (b.o) $\Longleftrightarrow I(|f|) = 0$.

6°. Zij $h = \chi_A f$. Dan is h een trapfunctie, $h \in \mathfrak{J}_0$, en daar

$$\{x \in X \mid h(x) \neq 0\} \subseteq A$$

is

$$m\,\chi_A \leq h \leq M\,\chi_A$$

waarin

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in A\} \text{ en } M = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Uit 2° en uit stelling 8.7 volgt nu:

$$m\,\mu(A) \leq I(h) \leq M\,\mu(A).$$

De juistheid van de laatste bewering kan aangetoond worden, door de zo juist afgeleide ongelijkheid toe te passen op $|f|$ met $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$: daar f meetbaar is, is $A \in \mathcal{S}$, en daar $f \in \mathfrak{I}_0$, is $\mu(A) < \infty$. Met behulp van 4° blijkt nu:

$$\begin{aligned}|I(f)| \leq I(|f|) &\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}.\ \mu(A)\\ &= \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.\ \mu(A).\end{aligned}$$

<u>Stelling 8.9</u>. Als f een trapfunctie is, $g \in \mathfrak{I}_0$ en $0 \leq f \leq g$, dan is $f \in \mathfrak{I}_0$.

<u>Bewijs</u>: Uit $0 \leq f \leq g$ volgt: $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$. Dus

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$$

en daar het rechterlid een eindige maat heeft, heeft ook het linkerlid een eindige maat, ofwel $f \in \mathfrak{I}_0$.

<u>Opgave</u>.

1°. Zij $f \in \mathfrak{I}_0$, en $A, B \in \mathcal{S}$ met $A \cap B = \emptyset$.
Dan is $I(\chi_A f) + I(\chi_B f) = I(\chi_{A\cup B} f)$.

2°. Als $E, F \in \mathcal{S}$ met $E \subsetneq F$, dan is voor $f \in \mathfrak{I}_0$, $f \geq 0$:

$$I(\chi_E f) \leq I(\chi_F f).$$

Lemma 8.10. Zij $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ een monotone rij in $\mathcal{J}_0$ zó, dat $h_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$,
(dat wil zeggen: $h_{n+1}(x) \leq h_n(x)$ en $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ voor alle $x \in X$)
Dan is $\lim_{n\to\infty} I(h_n) = 0$.

Bewijs: Zij $F = \{x \in X \mid h_1(x) \neq 0\}$ en zij $M = \sup \{h_1(x) \mid x \in X\}$.
Daar $h_1 \in \mathcal{J}_0$ is $\mu(F) < \infty$.
Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn.
Voor $n = 1, 2, \ldots$ definieren we

$$E_n = \{x \in X \mid h_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Daar h_n meetbaar is, is $E_n \in \mathcal{S}$. Voorts is $E_n \subset \{x \in X \mid h_n(x) \neq 0\} \subset F$, en tenslotte volgt uit $h_n \downarrow 0$ voor $n \to \infty$, dat

$$F \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots \text{ en } \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset.$$

Aan alle voorwaarden van Gevolg 2 op pag. 11 is nu voldaan, dus

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Er is dus een $n_0(\varepsilon)$ zó, dat $\mu(E_n) < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.
Merk op, dat voor alle n geldt:

$$I(h_n) = I(\chi_{E_n} h_n) + I(\chi_{F\setminus E_n} h_n)$$

Immers

$$h_n(x) = \chi_{E_n}(x)\, h_n(x) + \chi_{F\setminus E_n}(x)\, h_n(x)$$

voor alle $x \in X$:

als $x \notin F$, dan is $h_n(x) = 0$, dus beide leden zijn nul;
als $x \in F$, dan hetzij $x \in E_n$ (dan $\chi_{E_n}(x) = 1$ en $\chi_{F\setminus E_n}(x) = 0$),

hetzij $x \in F \setminus E_n$ (dan $\chi_{E_n}(x) = 0$ en $\chi_{F\setminus E_n}(x) = 1$).

Uit stelling 8.8 (6^o) volgt nu:

$$I(\chi_{E_n} h_n) \leqq \sup \{h_n(x) \mid x \in E_n\}.\ \mu(E_n) \leqq M.\ \mu(E_n)$$

en

$$I(\chi_{F\setminus E_n} h_n) \leqq \sup \{h_n(x) \mid x \in F\setminus E_n\}.\ \mu(F\setminus E_n) \leqq \varepsilon\ \mu(F).$$

Dus is

$$0 \leqq I(h_n) \leqq M\ \mu(E_n) + \varepsilon\ \mu(F) \leqq (M + \mu(F))\ \varepsilon$$

voor alle $n \geqq n_0(\varepsilon)$.
Hiermee is het gestelde aangetoond.

<u>Stelling 8.11</u>. Zij $f \in \mathfrak{J}_0$ en $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathfrak{J}_0$ zó dat $f_n \uparrow f$ $(n\to\infty)$. Dan is

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

<u>Bewijs</u>: Zij $h_n = f - f_n$.
Dan $h_n \downarrow 0$, dus volgens lemma 8.10 is

$$\lim_{n\to\infty} I(h_n) = 0.$$

Hierin is echter $I(h_n) = I(f-f_n) = I(f) - I(f_n)$, dus

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f).$$

B. Niet-negatieve integreerbare functies.

Ter rechtvaardiging van de volgende definitie merken we het volgende op: als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie is, dan worden de Riemann-integreebaarheid en Riemann-integraal van f gedefinieerd met behulp van een benadering van f door trapfuncties van een zeer speciale vorm, namelijk trapfuncties van de gedaante

$$t = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \chi_{[a_{i-1},a_i]}$$

waarin $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ een verdeling van $[a,b]$ in deelintervallen is, en $\xi_i \in [a_{i-1},a_i]$ voor $i = 1, \ldots, n$.
Aangezien we nu aan algemenere verzamelingen een maat, en derhalve aan algemenere trapfuncties een integraal kunnen toevoegen, ligt het voor de hand, om deze algemenere trapfuncties ook te gebruiken in de definitie van integreerbaarheid en integraal.

Def. 8.12. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ een functie, $f \geq 0$.
We noemen f integreerbaar (over X met betrekking tot μ) als er een rij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ van integreerbare trapfuncties bestaat (dus: elke functie $f_n \in \mathfrak{J}_0$) zó dat

1°. $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ en $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ voor alle $x \in X$, of kortweg:

$$0 \leq f_n \uparrow f.$$

2°. De rij $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is begrensd.

Onder de integraal van f (over X met betrekking tot μ) verstaan we in dat geval het niet-negatieve reële getal

$$\int f\, d\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \{I(f_n)\} = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

De verzameling der niet-negatieve integreerbare functies $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ duiden we aan met $\mathfrak{J}^+$.

Als $A \subset \mathcal{S}$, dan heet een functie $f\colon X \to \mathbb{R}^*$, $f \geq 0$, <u>integreerbaar over A</u>, indien $\chi_A f \in \mathcal{J}^+$, en in dat geval heet

$$\int_A f \, d\mu := \int \chi_A f \, d\mu$$

de <u>integraal van f over A</u> (met betrekking tot μ).

<u>Opmerkingen.</u>

1°. Uit de definitie volgt: $f \in \mathcal{J}^+ \Rightarrow f$ is monotone limiet van een stijgende rij trapfuncties. Daar trapfuncties meetbaar zijn, volgt uit stelling 6.7: niet-negatieve integreerbare functies zijn altijd meetbaar.

2°. Als $f \in \mathcal{J}^+$, dan lijkt op het eerste gezicht de waarde der integraal $\int f \, d\mu$ af te hangen van de keus van de rij $\{f_n\}$ in $\mathcal{J}_0$ met $0 \leq f_n \uparrow f$. Dat dit niet het geval is blijkt uit het volgende lemma:

<u>Lemma 8.13</u>. Laten $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ rijen in $\mathcal{J}_0$ zijn zó, dat voor zekere functie $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ geldt:

$$0 \leq f_n \uparrow f \text{ en } 0 \leq g_m \uparrow f$$

(dus automatisch: f meetbaar en $f \geq 0$; merk op dat <u>niet</u> geeisd wordt dat $f \in \mathcal{J}^+$). Dan is

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n) = \sup_{m\in\mathbb{N}} I(g_m). \text{ (= eventueel } +\infty).$$

<u>Bewijs</u>: Zij $N = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n)$ en $M = \sup_{m\in\mathbb{N}} I(g_m)$.

Voor elke vaste $m \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$0 \leq f_n \wedge g_m \uparrow f \wedge g_m = g_m \quad (n \to \infty).$$

Uit stelling 8.11 volgt dan, dat

$$0 \leq I(f_n \wedge g_m) \uparrow I(g_m) \quad (n \to \infty).$$

Echter volgt uit de monotonie van I:

$$f_n \wedge g_m \leq f_n, \text{ en dus } I(f_n \wedge g_m) \leq I(f_n) \leq N.$$

Dus $I(g_m)$ is limiet van een rij getallen, die alle $\leq N$ zijn; bijgevolg is

$$I(g_m) \leq N \text{ voor alle } m \in \mathbb{N}$$

Maar dan is ook $M \leq N$.
Analoog blijkt: $N \leq M$. Dus $M = N$.

Stelling 8.14. Zij $f: X \to \mathbb{R}^*$, $f \geq 0$ een meetbare functie, zij $g \in \mathfrak{J}^+$ en zij $0 \leq f \leq g$. Dan is ook $f \in \mathfrak{J}^+$, en

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Bewijs: Uit definitie 8.12 volgt, dat er een rij $g_1, g_2, \dots$ in $\mathfrak{J}_0$ is zó, dat

$$0 \leq g_n \uparrow g \text{ en } \int g \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} I(g_n) < \infty.$$

Uit stelling 7.3 volgt bovendien nog, dat er een rij trapfuncties $f_1, f_2, \dots$ is zó, dat $0 \leq f_n \uparrow f$.
Zij nu $h_n = f_n \wedge g_n$ voor $n = 1, 2, \dots$.
Voor alle $n = 1, 2, \dots$ geldt nu: h_n is een trapfunctie, $0 \leq h_n \leq g_n$, dus (stelling 8.9) $h_n \in \mathfrak{J}_0$; bovendien is $I(h_n) \leq I(g_n) \leq \int g \, d\mu < \infty$.
Maar $f_n \uparrow f$ en $g_n \uparrow g$, dus

$$0 \leq h_n = f_n \wedge g_n \uparrow f \wedge g = f.$$

De rij $h_1, h_2, \ldots$ voldoet dus aan de voorwaarden van def. 8.12, dus $f \in \mathfrak{I}^+$, en voorts is

$$\int f \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(h_n) \leq \int g \, d\mu.$$

Gevolg. Indien $f \in \mathfrak{I}^+$ en $g: X \to \mathbb{R}^*$, $g \geq 0$ meetbaar is, dan is $f \wedge g \in \mathfrak{I}^+$.

Bewijs: $f \wedge g$ is meetbaar en $0 \leq f \wedge g \leq f$ met $f \in \mathfrak{I}^+$.

Stelling 8.15. Zij $f \in \mathfrak{I}^+$. Er geldt:

1°. $\forall \varepsilon > 0$: $\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq \varepsilon\}) < \infty$.

2°. Er is een rij $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}$ met $\mu(F_n) < \infty$ voor alle n, zó, dat

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

dat wil zeggen: $X \setminus f^{-1}(0)$ heeft een σ-eindige maat.

Bewijs:

1°. Na verkleining van ε blijkt het (nodig en) voldoende te zijn om aan te tonen dat

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > \varepsilon\}) < \infty \text{ voor elke } \varepsilon > 0.$$

Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij in $\mathfrak{I}_0$ met $0 \leq f_n \uparrow f$ en

$$\int f \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n) < \infty.$$

Zij $E_n = \{x \in X \mid f_n(x) > \varepsilon\}$ en $E = \{x \in X \mid f(x) > \varepsilon\}$.
Daar f en elke f_n meetbaar is, is $E \in \mathcal{S}$ en $E_n \in \mathcal{S}$ $(n=1,2,\ldots)$.
Voorts volgt uit $0 \leq f_n \uparrow f$ nu gemakkelijk dat

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots \text{ en } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Uit Gevolg 1 op pag. 10 volgt nu:

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Daar $f_n(x) \geq \varepsilon$ voor alle $x \in E_n$, volgt uit de stellingen 8.8 (6°) en 8.8 (2°):

$$\varepsilon\, \mu(E_n) \leq I(\chi_{E_n} f) \leq I(f_n) \leq \int f\, d\,\mu.$$

Dus is

$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f\, d\,\mu \text{ voor alle } n \in \mathbb{N},$$

en na limietovergang voor $n \to \infty$ volgt hieruit:

$$\mu(E) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f\, d\,\mu < \infty \ldots$$

2°. Neem F_n $\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ en pas 1° toe.

<u>Gevolg 1</u>. Als f een trapfunctie is, $f \geq 0$, dan geldt:

$$f \in \mathfrak{J}_0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{J}^+.$$

In dat geval is $\int f\, d\,\mu = I(f)$.

<u>Bewijs</u>: Zij $f \in \mathfrak{J}_0$.
Neem $f_n = f$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan is $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathfrak{J}_0$ met

$$0 \leq f_n \uparrow f \text{ en } \sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n) = I(f) < \infty.$$

Volgens def. 8.12 is dan $f \in \mathfrak{J}^+$ en $\int f\, g\, \mu = I(f)$.
Omgekeerd: zij $f \in \mathfrak{J}^+$.
Daar $f \geq 0$ en daar f slechts eindig veel waarden aanneemt, is er een $\varepsilon > 0$ zó, dat

$$\forall x \in X : f(x) \neq 0 \Longrightarrow f(x) \geq \varepsilon.$$

Dus is

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset \{x \in X \mid f(x) \geq \varepsilon\}.$$

De verzameling in het rechterlid heeft volgens stelling 8.15 een eindige maat, dus ook de verzameling in het linkerlid. Dus $f \in \mathfrak{J}_0$.

Gevolg 2. Als $f \in \mathfrak{J}^+$, dan is f meetbaar en f is bijna overal eindig, dat wil zeggen: $\mu(\{f^{-1}(\infty)\}) = 0$.

Bewijs: Dat f meetbaar is, is reeds opgemerkt na def. 8.12. Definieer voor n = 1, 2, ... de verzameling E_n door

$$E_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}.$$

Daar f meetbaar is, is $E_n \in \mathcal{S}$. Dus $n\,\chi_{E_n}$ is een meetbare functie. Aangezien

$$0 \leq n\,\chi_{E_n} \leq f$$

volgt uit stelling 8.14, dat

$$n\,\chi_{E_n} \in \mathfrak{J}^+ \text{ en } \int n\,\chi_{E_n}\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

Uit Gevolg 1 volgt, dat $\int n\,\chi_{E_n}\, d\mu = I(n\,\chi_{E_n}) = n\ \mu(E_n)$, zodat

$$n\,\mu(E_n) \leq \int f\, d\mu, \text{ ofwel } \mu(E_n) \leq \frac{1}{n}\int f\, d\mu.$$

Daar $f^{-1}(\{\infty\}) \subset E_n$ voor alle n, is

$$0 \leq \mu(f^{-1}(\{\infty\})) \leq \frac{1}{n}\int f\, d\mu \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \ \dots\ (*)$$

en dus

$$\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0.$$

Opmerking.

1°. Men had ook de laatste formule uit het bewijs van stelling 8.15 (1°) kunnen gebruiken om (*) aan te tonen.

2°. We hebben nu het integraalbegrip uitgebreid van trapfuncties tot niet-negatieve meetbare functies. We zullen aantonen dat het door ons gedefinieerde integraalbegrip aan de gestelde eisen voldoet. Merk op, dat nog een verdere uitbreiding noodzakelijk is: $\mathfrak{J}^+$ kan geen vectorruimte zijn, want als $f \in \mathfrak{J}^+$ en $c < 0$, dan is $c\, f \leq 0$, dus $c\, f$ kan niet tot $\mathfrak{J}^+$ behoren.

Stelling 8.16. Als $f, g \in \mathfrak{J}^+$, $c \geq 0$ en $A \in \mathcal{S}$, dan geldt:

1°. $c\, f \in \mathfrak{J}^+$ en $\int (c\, f)\, d\, \mu = c \int f\, d\, \mu$.

2°. $f + g \in \mathfrak{J}^+$ en $\int (f+g)\, d\, \mu = \int f\, d\, \mu + \int g\, d\, \mu$.

3°. $\chi_A\, f \in \mathfrak{J}^+$ en $\int_A f\, d\, \mu = \int \chi_A\, f\, d\, \mu \leq \int f\, d\, \mu$.

Bewijs: Laten $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ rijen in $\mathfrak{J}_0$ zijn zó, dat

$$0 \leq f_n \uparrow f \text{ en } 0 \leq g_n \uparrow g \; (n \to \infty)$$

terwijl

$$\sup I(f_n) = \int f\, d\, \mu < \infty \text{ en } \sup I(g_n) = \int g\, d\, \mu < \infty.$$

1°. De rij $\{c\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ behoort tot $\mathfrak{J}_0$, en daar $c \geq 0$, geldt

$$0 \leq c\, f_n \uparrow c\, f \; (n \to \infty)$$

en $\sup I(c\, f_n) = \sup c\, I(f_n) = c \sup I(f_n) = c \int f\, d\, \mu < \infty$.

2°. De rij $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ behoort tot $\mathfrak{J}_0$, en

$$0 \leq f_n + g_n \uparrow f + g$$

terwijl

$$\sup I(f_n+g_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n+g_n) = \lim_{n\to\infty} [I(f_n) + I(g_n)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} I(f_n) + \lim_{n\to\infty} I(g_n) = \int f \, d\,\mu + \int g \, d\,\mu < \infty.$$

Dus is $f + g \in \mathfrak{J}^+$ en $\int (f+g)\, d\,\mu = \int f\, d\,\mu + \int g\, d\,\mu$.

3°. De rij $\{\chi_A f_n\}_{n=1}^{\infty}$ behoort tot $\mathfrak{J}_0$, en

$$0 \leq \chi_A f_n \uparrow \chi_A f.$$

Bovendien is voor alle n volgens stelling 8.8 (2°) en het gegeven:

$$I(\chi_A f_n) \leq I(f_n) \leq \int f\, d\,\mu < \infty \text{ voor alle } n.$$

Dus is $\chi_A f \in \mathfrak{J}^+$, terwijl

$$\int \chi_A f\, d\,\mu = \sup I(\chi_A f_n) \leq \int f\, d\,\mu.$$

<u>Lemma 8.17</u>. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}^*$, $f \geq 0$, meetbaar en $f = 0$ (b.o).
Dan is $f \in \mathfrak{J}^+$ en $\int f\, d\,\mu = 0$.

<u>Bewijs</u>: Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij trapfuncties met $0 \leq f_n \uparrow f$ (stelling 7.3).
Daar $f_n(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$, is

$$\mu(\{x \in X \mid f_n(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = 0.$$

Dus $f_n \in \mathfrak{J}_0$, en $I(f_n) = 0$ (stelling 8.8 (3°)).
Uit def. 8.12 volgt nu onmiddellijk het gestelde.

<u>Lemma 8.18</u>. Zij $f \in \mathfrak{J}^+$. Indien $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = 0$, dan is

$$\int_E f\, d\,\mu = 0, \text{ en dus } \int f\, d\,\mu = \int_{X\setminus E} f\, d\,\mu.$$

Bewijs: $E \in \mathcal{S}$ en $X \setminus E \in \mathcal{S}$, dus volgens stelling 8.16 (3°) zijn

$$\chi_E f \in \mathcal{J}^+ \text{ en } \chi_{X\setminus E} f \in \mathcal{J}^+.$$

Maar $\{x \in X \mid (\chi_E f)(x) \neq 0\} \subset E$, dus $\chi_E f = 0$ (b.o).
Voorts is

$$f = \chi_E f + \chi_{X\setminus E} f.$$

Uit stelling 8.16 (2°) en lemma 8.17 volgt nu:

$$\int \chi_E f \, d\mu = 0 \text{ en } \int f \, d\mu = \int \chi_E f \, d\mu + \int \chi_{X\setminus E} f \, d\mu = \int_{X\setminus E} f \, d\mu.$$

C. Integreerbare functies.

Om voor functies die zowel positieve als negatieve waarden aannemen een definitie van integreerbaarheid en integraal te geven, maken we gebruik van het simpele feit, dat iedere functie $f: X \to \mathbb{R}^*$ geschreven kan worden als $f = g - h$ met $g \geq 0$ en $h \geq 0$: neem maar $g = f^+ = f \vee 0$ en $h = f^- = (-f) \vee 0$.
Het kan ook op andere manieren (bijvoorbeeld $g = f^+ + \phi$, $h = f^- + \phi$ met $\phi \geq 0$), en daarom is het volgende lemma van belang:

Lemma 8.19. Laten g, h, g' en $h' \in \mathcal{J}^+$ zijn zó, dat

$$g - h = g' - h'.$$

Dan is $\int g \, d\mu - \int h \, d\mu = \int g' \, d\mu - \int h' \, d\mu$.

Bewijs: Daar g, h, g' en h' tot $\mathcal{J}^+$ behoren zijn ze bijna overal eindig. Er is dus een $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) = 0$ zó, dat

$$\forall x \in X : x \notin E \Rightarrow \{g(x), h(x), g'(x), h'(x)\} \subset \mathbb{R}.$$

Anders gezegd: de functies $\chi_{X\setminus E}\, g$, $\chi_{X\setminus E}\, h$, $\chi_{X\setminus E}\, g'$ en $\chi_{X\setminus E}\, h'$ zijn overal eindig. Uit

$$\chi_{X\setminus E}\, g - \chi_{X\setminus E}\, h = \chi_{X\setminus E}\, g' - \chi_{X\setminus E}\, h'$$

volgt dus:

$$\chi_{X\setminus E}\, g + \chi_{X\setminus E}\, h' = \chi_{X\setminus E}\, g' + \chi_{X\setminus E}\, h.$$

Volgens stelling 8.16 (3°) behoren alle betreffende functies tot $\mathcal{J}^+$, en uit stelling 8.16 (2°) volgt dan:

$$\int_{X\setminus E} g \, d\mu + \int_{X\setminus E} h' \, d\mu = \int_{X\setminus E} g' \, d\mu + \int_{X\setminus E} h \, d\mu$$

Daar $\mu(E) = 0$ kan lemma 8.18 op alle vier integralen worden toegepast:

$$\int g \, d\mu + \int h' \, d\mu = \int g' \, d\mu + \int h \, d\mu.$$

Daar deze integralen alle eindige reële getallen zijn, volgt hieruit

$$\int g \, d\mu - \int h \, d\mu = \int g' \, d\mu - \int h' \, d\mu.$$

<u>Definitie 8.20</u>. Een functie $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ heet <u>integreerbaar (over X met betrekking tot μ)</u> als er $g, h \in \mathcal{J}^+$ zijn zó, dat

$$f = g - h.$$

In dat geval definieren we <u>de integraal van f (over X, met betrekking tot μ)</u> als het reële getal

$$\int f \, d\mu := \int g \, d\mu - \int h \, d\mu.$$

De verzameling der integreerbare functies van X naar $\mathbb{R}^*$ zullen we aanduiden met $\mathcal{L}_1(X,\mu)$ of kortweg met $\mathcal{L}_1$.

Als $E \in \mathcal{S}$ is, dan noemen we een functie $f: X \to \mathbb{R}^*$ <u>integreerbaar over E</u>, indien $\chi_E f \in \mathcal{L}_1$; we schrijven

$$\int \chi_E \, f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

en dit getal noemen we <u>de integraal van f over E.</u>

<u>Opmerkingen</u>.

1°. Als $f \in \mathcal{L}_1$, dan kan f geschreven worden als $f = g - h$ met $g, h \in \mathfrak{J}^+$. Uit Gevolg 2 na stelling 8.15 volgt dan direct, dat f meetbaar is en dat f bijna overal eindig is.

2°. Als $f \in \mathcal{L}_1$, dan hangt de waarde van $\int f \, d\mu$ niet af van de toevallige keus der schrijfwijze $f = g - h$ met $g, h \in \mathfrak{J}^+$: dit is juist de inhoud van lemma 8.19.

3°. Voor functies uit $\mathfrak{J}^+$ en uit $\mathcal{L}_1$ gebruiken we hetzelfde teken $\int .. \, d\mu$ voor de integraal, en we duiden beide functie-klassen aan met hetzelfde woord "integreerbare functies".
Dit is toegestaan, omdat in def. 8.20 een <u>uitbreiding</u> van het integraalbegrip ten opzichte van $\mathfrak{J}^+$ is gegeven. Anders geformuleerd: $\mathfrak{J}^+ \subset \mathcal{L}_1$ en voor $f \in \mathfrak{J}^+$ is de integraal, gedefinieerd volgens def. 8.20, gelijk aan de integraal gedefinieerd in def. 8.12.
<u>Bewijs</u>: Als $f \in \mathfrak{J}^+$, dan kan f geschreven worden als

$$f = f - 0$$

met $f \in \mathfrak{J}^+$ en $0 \in \mathfrak{J}^+$. Dus $f \in \mathcal{L}_1$. Voorts is de integraal van f over X volgens def. 8.20 nu gelijk aan
$\int f \, d\mu - \int 0 \, d\mu = \int f \, d\mu$ (= integraal van f volgens 8.12).

4°. $\mathfrak{J}_0 \subset \mathcal{L}_1$ en voor elke $f \in \mathfrak{J}_0$ is

$$\int f \, d\mu = I(f).$$

Bewijs: Zij $f \in \mathfrak{I}_0$.
Volgens stelling 8.4 zijn dan $f^+, f^- \in \mathfrak{I}_0$. Voorts zij $f^+, f^- \geq 0$, dus volgens Gevolg 1 na stelling 8.15 zijn $f^+, f^- \in \mathfrak{I}^+$, en

$$I(f^+) = \int f^+ \, d\mu, \quad I(f^-) = \int f^- \, d\mu.$$

Daar $f = f^+ - f^-$, is volgens def. 8.20 dus $f \in \mathcal{L}_1$ en

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = I(f^+) - I(f^-) = I(f^+ - f^-) = I(f)$$

(gebruik nog stelling 8.7 (2°)).

Stelling 8.21.
1°. $\mathfrak{I}^+ = \{f \mid f \in \mathcal{L}_1 \,\&\, f \geq 0\}$.
2°. Als $g: X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar is, $f \in \mathcal{L}_1$ en $0 \leq g \leq f$, dan is ook $g \in \mathcal{L}_1$ en

$$\int g \, f \, \mu \leq \int f \, d\mu.$$

Bewijs:
1°. In opmerking 3 hierboven is reeds aangetoond, dat $\mathfrak{I}^+ \subseteq \mathcal{L}_1$.
Nu omgekeerd: zij $f \in \mathcal{L}_1$ en $f \geq 0$.
Volgens def. 8.20 is dan $f = h - k$ met $h, k \in \mathfrak{I}^+$.
Dus is $0 \leq f \leq h$, waarin f meetbaar is en $h \in \mathfrak{I}^+$.
Volgens stelling 8.14 is dus $f \in \mathfrak{I}^+$.

2°. Uit bovenstaande opmerking 3 en uit 1° van deze stelling volgt, dat dit een herformulering is van stelling 8.14.

Stelling 8.22. Zij $f: X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:
1°. $f \in \mathcal{L}_1$.
2°. $|f| \in \mathcal{L}_1$.
3°. $f^+ \in \mathcal{L}_1$ en $f^- \in \mathcal{L}_1$.

In dat geval is

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Bewijs:
$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Zij $f = g - h$ met $g, h \in \mathcal{J}^+$. Dan is

$$0 \leq |f| \leq g + h$$

Daar f, en dus ook $|f|$, meetbaar is, en $g + h \in \mathcal{J}^+$, volgt uit stelling 8.21, dat $|f| \in \mathcal{L}_1$.
$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Het is duidelijk, dat $0 \leq f^- \leq |f|$ en $0 \leq f^+ \leq |f|$.
Daar f^+ en f^- meetbaar zijn, volgt uit stelling 8.21:

$$|f| \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow f^+ \in \mathcal{L}_1 \text{ en } f^- \in \mathcal{L}_1.$$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Als $f^+, f^- \in \mathcal{L}_1$, dan volgt uit stelling 8.21 (1°):

$$f^+ \in \mathcal{J}^+ \text{ en } f^- \in \mathcal{J}^+.$$

Volgens definitie 8.20 is nu

$$f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}_1$$

terwijl bovendien

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu \quad \text{(St.8.16)}$$

$$= \int (f^+ + f^-) \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Waarschuwing. Als niet gegeven is, dat f meetbaar is, kan het voorkomen, dat $|f| \in \mathcal{L}_1$ en $f \notin \mathcal{L}_1$.
Laat $(X, \mathcal{S}, \mu)$ zo zijn, dat $\mu(X) = 1$ en $\mathcal{S} \neq$ de verzameling van alle deelverzamelingen van X (bijv. μ Lebesguemaat in $[0,1]$).

Zij $E \subset X$, $E \notin \mathcal{S}$ en $f = \chi_{X \setminus E} - \chi_E$.
Dan is f niet meetbaar, dus zeker is $f \notin \mathcal{L}_1$.
Maar $|f| = \chi_X = 1$ op geheel X. Dus $|f| \in \mathfrak{I}_0 \subset \mathcal{L}_1$.

Stelling 8.23. $\mathcal{L}_1$ is een lineaire ruimte en $\int .. \, d\mu : f \mapsto \int f \, d\mu$ is een lineaire functie van $\mathcal{L}_1$ naar $\mathbb{R}$.
Bovendien geldt voor f en $g \in \mathcal{L}_1$: $f \geqq g \Rightarrow \int f \, d\mu \geqq \int g \, d\mu$ (monotonie). In het bijzonder geldt:

$$f \in \mathcal{L}_1 \;\&\; f \geqq 0 \Rightarrow \int f \, d\mu \geqq 0.$$

Bewijs:
(a) $\mathcal{L}_1$ is een lineaire ruimte:

1°. Zij $f \in \mathcal{L}_1$. Dan is $f = g - h$ met $g, h \in \mathfrak{I}^+$, en

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu.$$

Volgens stelling 8.16 (1°) geldt nu, indien $c \geqq 0$:

$$c\,f = c\,g - c\,h \text{ met } c\,g,\ c\,h \in \mathfrak{I}^+, \text{ ofwel } c\,f \in \mathcal{L}_1,$$

en

$$\int c\,f \, d\mu = \int c\,g \, d\mu - \int c\,h \, d\mu = c\int g \, d\mu - c\int h \, d\mu = c\int f \, d\mu.$$

Indien $c < 0$, pas dan voorgaand resultaat toe op

$$c\,f = (-c)\,h - (-c)\,g.$$

2°. Laten $f, g \in \mathcal{L}_1$ zijn. Dan is $f = f^+ - f^-$ en $g = g^+ - g^-$, waarin

$$\{f^+, f^-, g^+, g^-\} \subset \mathfrak{I}^+ \text{ (stelling 8.22 en 8.21 (1°))}.$$

Omdat f^+ en f^- nergens tegelijk oneindig zijn, evenmin als g^+ en g^-, geldt op geheel X:

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

ook in die punten $x \in X$ waar f en/of g niet eindig zijn. Hierin is $f^+ + g^+ \in \mathcal{J}^+$ en $f^- + g^- \in \mathcal{J}^+$ (stelling 8.16 (2°)), dus is $f + g \in \mathcal{L}_1$; voorts is dan

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu \\ &= \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) + \left(\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu\right) \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.\end{aligned}$$

(b) monotonie:

Volgens stelling 8.21 (1°) geldt: $f \in \mathcal{L}_1$ & $f \geqq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{J}^+$. Nu is $\int f\, d\mu \geqq 0$ voor elke $f \in \mathcal{J}^+$ (def. 8.12), waarmee het gestelde aangetoond is.

Als $f, g \in \mathcal{L}_1$, $f \geqq g$, dan is $f - g \in \mathcal{L}_1$; vanwege (a 2°) en $f - g \geqq 0$ volgt dan

$$\int f\, d\mu - \int g\, d\mu = \int (f-g)\, d\mu \geqq 0.$$

<u>Opgave</u>. Toon aan: $f \in \mathcal{L}_1$ & $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \chi_A f \in \mathcal{L}_1$.

<u>Stelling 8.24</u>. Zij $g: X \to \mathbb{R}^*$ een meetbare functie, $f \in \mathcal{L}_1$ en $f = g$ (b.o). Dan is ook $g \in \mathcal{L}_1$, en $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

<u>Bewijs</u>: Er is een $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) = 0$ zó, dat

$$\forall x \in X : x \notin E \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \text{ (f is bijna overal eindig).}$$

Gebruik makend van o.a. lemma 8.18 vinden we:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int_{X\setminus E} f^+ \, d\mu - \int_{X\setminus E} f^- \, d\mu$$
$$= \int \chi_{X\setminus E} (f^+ - f^-) \, d\mu = \int \chi_{X\setminus E} \, f \, d\mu.$$

Zij $f_1 = \chi_{X\setminus E} \, f$. Dan is dus $f_1 \in \mathcal{L}_1$, $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu$, en

$$\{x \in X \mid f_1(x) \neq g(x)\} \subsetneq \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \cup E.$$

Daar $f = g$ (b.o) en $\mu(E) = 0$, volgt hieruit gemakkelijk, dat ook $f_1 = g$ (b.o). Daar f_1 overal eindig is, is

$$g = f_1 - (f_1 - g)$$

(ook in punten $x \in X$, waar $g(x)$ niet eindig is). Zij $h = f_1 - g$. Dan is $h = 0$ (b.o), dus ook $h^+ = 0$ (b.o) en $h^- = 0$ (b.o). Uit lemma 8.17 (1^o) volgt dan:

$$h^+, h^- \in \mathcal{J}^+, \text{ en } \int h^+ \, d\mu = \int h^- \, d\mu = 0.$$

Volgens def. 8.20 is dan $h \in \mathcal{L}_1$ en $\int h \, d\mu = 0$.

Echter is $g = f_1 - h$ met $f_1 \in \mathcal{L}_1$ en $h \in \mathcal{L}_1$, dus is $g \in \mathcal{L}_1$. Voorts is

$$\int g \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int h \, d\mu = \int f \, d\mu - 0.$$

<u>Opmerking</u>. Indien de maatruimte $(X, \mathcal{S}, \mu)$ <u>volledig</u> is, volgt uit $f = g$ (b.o) en $f \in \mathcal{L}_1$, dat g meetbaar is (want f is meetbaar; zie de opmerking na def. 8.1), dus dan behoeft in stelling 8.24 niet

apart geeist te worden, dat g meetbaar is.

Opmerking. Zij f: $X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar en zij $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) = 0$.
Zij voorts g: $X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar, en $g(x) = f(x)$ voor alle $x \notin E$. Dan zegt stelling 8.24:

$$f \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_1.$$

Indien bijvoorbeeld $f \in \mathcal{L}_1$, dan mag blijkbaar f op een verzameling van de maat nul gewijzigd worden zodanig dat de functie meetbaar blijft (d.w.z. f mag door g vervangen worden), zonder dat de integreerbaarheid verloren gaat.
Omgekeerd is f meetbaar, en wordt de functie na wijziging op een nulverzameling integreerbaar, dan is f ook integreerbaar.

Een wijziging van de meetbare functie f binnen een nulverzameling E die vaak nuttig is, is de volgende: vervang f door $\chi_{X\setminus E}\, f = g$.
Immers: ook $\chi_{X\setminus E}\, f$ is meetbaar (product van meetbare functies), dus

$$f \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow \chi_{X\setminus E}\, f \in \mathcal{L}_1.$$

Bovendien is dan

$$\int f \, d\mu = \int \chi_{X\setminus E}\, f \, d\mu.$$

Toepassingen van dit principe zijn er vele. We noemen:

(a) Als $f \in \mathcal{L}_1$, dan is f bijna overal eindig, dus er is een $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) = 0$ zó, dat $f(x) \in \mathbb{R}$ voor $x \in X \setminus E$. Vervangt men f door $\chi_{X\setminus E}\, f$ dan blijkt: zonder beperking der algemeenheid mag f overal eindig ondersteld worden.

(b) Als $f \leq h$ (b.o), dan is er een $E \in \mathcal{S}$ wat $\mu(E) = 0$ zó, dat

$$f(x) \leq h(x) \text{ voor alle } x \in X \setminus E.$$

Wat integreerbaarheidseigenschappen betreft, is het dus geen beperking der algemeenheid als $f \leq h$ overal op X ondersteld wordt.

Toepassing 1. Als $f, g \in \mathcal{L}_1$, dan zijn ook $f \vee g \in \mathcal{L}_1$ en $f \wedge g \in \mathcal{L}_1$.

Bewijs: Daar f en g bijna overal eindig zijn, geldt bijna overal:

$$f \vee g = \tfrac{1}{2}\,(f+g+|f-g|)$$

$$f \wedge g = \tfrac{1}{2}\,(f+g-|f-g|)$$

Hierin zijn de linkerleden meetbaar en de rechterleden integreerbaar. Dus ook de linkerleden zijn integreerbaar.

Toepassing 2. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ meetbaar en $g \in \mathcal{L}_1$. Dan geldt:

$$|f| \leq |g| \text{ (b.o)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_1.$$

Bewijs: Op grond van voorgaande opmerking is het geen beperking der algemeenheid, als we aannemen:

$$0 \leq |f| \leq |g| \text{ overal op } X.$$

Uit de stellingen 8.22 en 8.21 volgt nu het gestelde.

Gevolg. Als $f \in \mathcal{L}_1$ en g is meetbaar en begrensd ($\exists M > 0$ met $|g(x)| \leq M$ voor alle x), dan is $f.g \in \mathcal{L}_1$.

Bewijs: $0 \leq |f.g| \leq M.|f|$, waarin $f\,g$ meetbaar is en $M.|f| \in \mathcal{L}_1$. Volgens voorgaande stelling is nu $f\,g \in \mathcal{L}_1$.

Opmerking. In het algemeen behoeft niet te gelden, dat $f.g \in \mathcal{L}_1$ als f en g beide tot $\mathcal{L}_1$ behoren.

Voorbeeld: $X = [0,1]$, μ de Lebesgue-maat. Zij

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{voor } 0 < x \leq 1 \\ \infty & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Dan blijkt $f \in \mathcal{L}_1$, maar $f.f \notin \mathcal{L}_1$. Dat $f \in \mathcal{L}_1$ is kunnen we in dit stadium nog niet aantonen (het heeft te maken met het feit, dat de oneigenlijke Riemannintegraal van $f(x) = (\sqrt{x})^{-1}$ over $[0,1]$ convergeert), maar dat $f.f: x \mapsto \frac{1}{x}$ niet tot $\mathcal{L}_1$ behoort is niet moeilijk in te zien:

Zij
$$f_k = \sum_{n=1}^{k} n\, \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots$$

Voor alle $k = 1, 2, \ldots$ is f_k een integreerbare trapfunctie, en

$$\int f_k \, d\mu = \sum_{n=1}^{k} n\, \mu(\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}] = \sum_{n=1}^{k} n(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}$$

Anderzijds is $0 \leq f_k \leq f.f$ op geheel $X = [0,1]$, en indien $f.f \in \mathcal{L}_1$, dan zou uit het tweede deel van stelling 8.23 volgen:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} = \int f_k \, d\mu \leq \int f^2 \, d\mu \text{ voor alle } k.$$

Uit de divergentie der reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ volgt dan, dat $\int f^2 \, d\mu$ <u>niet</u> eindig kan zijn, in strijd met de definities.

<u>Toepassing 3</u>. Als $f, g \in \mathcal{L}_1$, dan geldt:

1^o. $f \leq g$ (b.o) $\Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

2^o. $f \geq 0$ (b.o) $\Rightarrow \int f \, d\mu \geq 0$.

<u>Bewijs</u>: Volgt uit stelling 8.23 en de opmerking na stelling 8.24.

Stelling 8.25. Zij $f \in \mathcal{L}_1$, $f \geqq 0$ (b.o) en $\int f \, d\mu = 0$.
Dan is $f = 0$ (b.o).

Bewijs: Voor $n = 1, 2, \ldots$ zij

$$E_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geqq \tfrac{1}{n}\}.$$

Dan is op geheel X

$$0 \leqq \frac{1}{n} \chi_{E_n} \leqq |f|$$

(voor $x \in E_n$ is $\frac{1}{n} \leqq |f(x)|$, en voor $x \notin E_n$ is $\frac{1}{n} \chi_{E_n}(x) = 0 \leqq |f(x)|$)

dus

$$0 \leqq \frac{1}{n} \chi_{E_n} \leqq f \quad \underline{\underline{\text{b.o}}}$$

want $f \geqq 0$ (b.o), dat wil zeggen: $f = |f|$ (b.o).

Volgens Toepassing 2 van stelling 8.25 is $\frac{1}{n} \chi_{E_n} \in \mathcal{L}_1$, en volgens Toepassing 3 is nu:

$$\frac{1}{n} \mu(E_n) = \int \frac{1}{n} \chi_{E_n} \, d\mu \leqq \int f \, d\mu = 0$$

Met andere woorden:

$$\mu(E_n) = 0 \text{ voor alle } n.$$

Nu is

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in X \mid |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

en daar $\mu(E_n) = 0$ voor alle n is

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Bijgevolg is f b.o. nul.

Stelling 8.26.

1°. Zij $f \in \mathcal{L}_1$, $E \in \mathcal{S}$, $f(x) > 0$ voor bijna alle $x \in E$ en

$$\int_E f \, d\mu = 0. \text{ Dan is } \mu(E) = 0$$

2°. Omgekeerd: als $E \in \mathcal{S}$ en $\mu(E) = 0$, dan is elke meetbare functie f integreerbaar over E en $\int_E f \, d\mu = 0$.

Bewijs:

1°. Gegeven is: er is een $M \in \mathcal{S}$ met $\mu(M) = 0$ zó, dat

$$\forall x \in E : x \notin M \Longrightarrow f(x) > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Hieruit volgt in ieder geval:

$$\chi_E f \geqq 0 \text{ (b.o).}$$

Gegeven is, dat $\int \chi_E f \, d\mu = 0$, dus volgens stelling 8.25 is

$$\chi_E f = 0 \text{ (b.o).}$$

Dat wil zeggen: er is een $N \in \mathcal{S}$ met $\mu(N) = 0$ zó, dat

$$\forall x \in X : x \notin N \Longrightarrow \chi_E(x) f(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Uit de formules (1) en (2) volgt:

$$E \setminus M \subset N, \text{ ofwel } \quad E \subset M \cup N.$$

Daar $\mu(M) = \mu(N) = 0$, volgt, dat $\mu(E) = 0$.

2°. $f = f^+ - f^-$. Volgens st.8.22 geldt $f^+ \in \mathcal{L}_1$ en $f^- \in \mathcal{L}_1$.

Pas nu lemma 8.17 toe op $\chi_E f^+$ resp. $\chi_E f^-$. Hieruit volgt de bewering.

9. Twee voorbeelden

I. We passen de theorie uit §8 toe in de volgende situatie:

$X = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

$\mathcal{S}$ = de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

μ = de "telmaat", dat wil zeggen: als $A \subset \mathbb{N}$, dan is

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{aantal elementen van } A \text{ als dit aantal eindig is} \\ \infty \text{ als het aantal elementen van } A \text{ niet eindig is.} \end{cases}$$

Twee opmerkingen vooraf:

(a). Iedere functie $f : X \to \mathbb{R}^*$ is meetbaar.

(b). Als $A \subset X$ en $A \neq \emptyset$, dan is $\mu(A) > 0$. Dus als voor $E \in \mathcal{S}$ geldt: $\mu(E) = 0$, dan is $E = \emptyset$.

Bijgevolg: "bijna overal" $\equiv$ "overal".

(dus: f bijna overal eindig $\Longrightarrow$ f op heel X eindig).

Stelling 9.1. Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ is integreerbaar als en slechts als de beide volgende voorwaarden vervuld zijn:

1°. $f(n) \in \mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (f overal eindig)

2°. $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ convergeert.

(in feite wordt 1°. door 2°. geïmpliceerd).

In dat geval is

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Bewijs: Iedere functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kan geschreven worden als

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \, \chi_{\{n\}} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Trapfuncties zijn dus functies van de gedaante (1), waarin $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eindig veel verschillende elementen bevat. Voorts zijn integreerbare trapfuncties juist die functies van de gedaante (1), waarvoor geldt:

$$f(n) \neq 0 \text{ voor slechts eindig veel waarden van } n$$

$$(\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0\} \text{ heeft een eindige maat}).$$

Indien $f \in \mathcal{J}_0$, dan is volgens definitie 8.6 :

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (\text{want } \mu(\{n\}) = 1).$$

(a) Zij $f \in \mathcal{L}_1$ en $f \geqq 0$, dat wil zeggen: $f \in \mathcal{J}^+$.
Dan is er een rij $f_1, f_2, \ldots$ in $\mathcal{J}_0$ met

$$0 \leqq f_n \uparrow f \quad \text{en} \quad \int f \, d\mu := \sup I(f_n) < \infty .$$

Daar $f \in \mathcal{J}^+$, is f bijna overal eindig, dus overal eindig.

Bij $\forall \varepsilon > 0$ en $\forall l \in \mathbb{N}$ is er dus een $n(\varepsilon,l)$ zodanig dat voor alle $n \geqq n(\varepsilon,l)$: $f_n(k) > f(k) - \frac{\varepsilon}{l}$ voor $k = 1,\ldots, l$.
dus is

$$\sum_{k=1}^{l} f(k) < \sum_{k=1}^{l} f_n(k) + \varepsilon \qquad \text{voor alle } n \geqq n(\varepsilon,l)$$

Merk nu op, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{l} f_n(k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) = I(f_n) \leqq \int f \, d\mu .$$

Derhalve

$$\sum_{k=1}^{l} f(k) < \int f \, d\mu + \varepsilon < \infty$$

Dit geldt voor willekeurige l. De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ met positieve termen ($f \geqq 0$!) heeft dus begrensde partiele sommen, en is dus convergent, met som

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \int f \, d\mu + \varepsilon .$$

Hierin was $\varepsilon > 0$ willekeurig, dus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqq \int f \, d\mu \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(b) Zij omgekeerd $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ zó, dat $f \geqq 0$, f overal eindig, en

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ convergent.

Zij $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \, \chi_{\{k\}}$ voor $n = 1,2,\ldots$

Dan is $f_n \in \mathcal{J}_0$, $0 \leqq f_n \uparrow f$ $(n \to \infty)$ (in feite is $f_n(l) = f(l)$ voor alle $n \geqq l$)

en bovendien is

$$I(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dus is $f \in \mathcal{J}^+$, en bovendien is

$$\int f \, d\mu = \sup I(f_n) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(c) Voor functies $f \geqq 0$ hebben we nu aangetoond:

$f \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow 1^\circ.$ en $2^\circ.$ zijn vervuld.

Bovendien volgt uit de formules (2) en (3), dat voor $f \in \mathcal{J}^+$ geldt:

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Voor willekeurige functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ geldt nu (gebruik stelling 8.22) :

$$f \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} |f| \text{ is overal eindig} \Longleftrightarrow f \text{ is overal eindig} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(k)| \text{ convergeert.} \end{cases}$$

Tenslotte: als $f \in \mathcal{L}_1$, dan ook $f^+, f^- \in \mathcal{L}_1$, en voor deze niet-negatieve functies weten we reeds:

$$\int f^+ \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f^+(k) = \sum \{f(k) \mid k \in \mathbb{N} \;\&\; f(k) > 0\}$$

$$\int f^- \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f^-(k) = \sum \{-f(k) \mid k \in \mathbb{N} \;\&\; f(k) < 0\} \;.$$

Dus is

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

$$= \sum \{f(k) \mid k \in \mathbb{N} \;\&\; f(k) > 0\} + \sum \{f(k) \mid k \in \mathbb{N} \;\&\; f(k) < 0\}.$$

Op grond van de <u>absolute</u> convergentie der reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (termen der reeks mogen gepermuteerd worden) is de som der beide reeksen in het rechterlid juist $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

<u>Opmerking</u>. De theorie der absoluut convergente reeksen valt dus geheel binnen het kader der integratie-theorie. Een stelling omtrent verwisseling van integratie- en sommatievolgorde voor een rij functies op, zeg $[0,1]$, is dus in feite een stelling over verwisseling van integratievolgorde. We zullen hierop niet verder ingaan.

II. We passen de theorie uit §8 toe op de volgende situatie:

$X = \mathbb{R}$ = de verzameling der reële getallen.

$\mathcal{S}$ = de σ-ring der Lebesque-meetbare verzamelingen.

μ = Lebesque-maat.

Merk op, dat $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nu een <u>volledige</u> maatruimte is. Indien een functie $f : X \to \mathbb{R}^*$ tot $\mathcal{L}_1(X,\mu)$ behoort, dan zeggen we dat f <u>Lebesque-integreerbaar</u> is over $\mathbb{R}$, en $\int f \, d\mu$ heet de <u>Lebesque-integraal</u> van f over $\mathbb{R}$.

We herinneren er aan, dat de Lebesque-integraal van f over een interval $[a,b]$ nu gedefiniëerd is als

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int \chi_{[a,b]} f \, d\mu \;.$$

Merk op: de functies $\chi_{[a,b]}f$, $\chi_{[a,b)}f$, $\chi_{(a,b]}f$ en $\chi_{(a,b)}f$ zijn zijn bijna overal aan elkaar gelijk (de maat van een verzameling, bestaande uit eindig veel punten is nul) dus als een der vier nu volgende integralen gedefiniëerd is, dan zijn ze alle vier gedefinieerd en onderling gelijk (vgl. de opmerking na stelling 8.24):

$$\int_{[a,b]} f\, d\,\mu, \quad \int_{[a,b)} f\, d\,\mu, \quad \int_{(a,b]} f\, d\,\mu, \quad \int_{(a,b)} f\, d\,\mu\,.$$

Met het oog op de volgende stelling maken we nog de volgende afspraak: als $E \subset \mathbb{R}$ en $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ een functie is, dan denken we ons f steeds voortgezet over heel $\mathbb{R}$, door te definiëeren:

$$f(x) = 0 \text{ voor } x \notin E.$$

Merk op, dat dan $f = \chi_E f$.

<u>Stelling 9.2</u> Indien een functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is, dan is f Lebesque-integreerbaar over $[a,b]$, en bovendien is

$$\int_{[a,b]} f\, d\,\mu = \int_a^b f(x)\, dx.$$

<u>Bewijs:</u>

(a) Zij $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ een verdeling van $[a,b]$. Hierbij zijn gedefiniëerd een ondersom s en een bovensom S van f, en wel door

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1}) m_\nu \quad \text{met } m_\nu = \inf \{f(x) \mid a_{\nu-1} \leqq x \leqq a_\nu\}$$

en

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1})\, M_\nu \text{ met } M_\nu = \sup \{f(x) \mid a_{\nu-1} \leqq x \leqq a_\nu\}.$$

Indien we functies ϕ en ψ definieren door

$$\phi = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\, \chi_{[a_{\nu-1}, a_\nu)}\;, \quad \psi = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu\, \chi_{[a_{\nu-1}, a_\nu)}$$

dan geldt: $\phi, \psi \in \mathcal{J}_0$ (integreerbare trapfuncties), $\phi \leqq f \leqq \psi$ en
$s = I(\phi)$, $S = I(\psi)$.

We herinneren eraan, dat

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \quad \text{en} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

gedefiniëerd worden als het supremum resp. infimum van de verzameling van alle ondersommen, resp. bovensommen van f bij alle mogelijke verdelingen van $[a,b]$.

Zij nu

$$\Phi = \{ \phi \in \mathcal{J}_0 \mid \phi \leqq f \}$$

$$\Psi = \{ \psi \in \mathcal{J}_0 \mid \psi \geqq f \} .$$

Dan is dus

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqq \sup_{\phi\in\Phi} I(\phi) \leqq \inf_{\psi\in\Psi} I(\psi) \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Daar f Riemann-integreerbaar is, zijn hierin alle ongelijkheden gelijkheden, dus met name is

$$\sup_{\phi\in\Phi} I(\phi) = \inf_{\psi\in\Psi} I(\psi) = \int_a^b f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Conclusie: Bij elke $n \in \mathbb{N}$ zijn er $\phi_n \in \Phi$, $\psi_n \in \Psi$ zó, dat

$$\phi_n \leqq f \leqq \psi_n$$

en

$$I(\psi_n) - I(\phi_n) < \frac{1}{n} .$$

(b) De functies ϕ^* en ψ^*, gedefiniëerd door

$$\phi^*(x) = \sup \{\phi_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{voor alle } x,$$

$$\psi^*(x) = \inf \{\psi_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{voor alle } x,$$

zijn meetbaar op grond van het gevolg van stelling 6.7. en het is duidelijk, dat

$$\phi^* \leqq f \leqq \psi^* .$$

Merk op, dat voor alle n = 1,2,... geldt:

$$0 \leqq \psi^{*} - \phi^{*} \leqq \psi_n - \phi_n .$$

Daar $\psi_n - \phi_n \in \mathcal{J}^+$, is dus $\psi^{*} - \phi^{*} \in \mathcal{J}^+$ (stelling 8.21), en

$$\int (\psi^{*} - \phi^{*})\, d\,\mu \leqq \int (\psi_n - \phi_n)\, d\,\mu = I(\psi_n) - I(\phi_n) < \frac{1}{n} .$$

Dit geldt voor alle n, dus

$$\int (\psi^{*} - \phi^{*})\, d\,\mu = 0.$$

Uit stelling 8.25 volgt dus: $\psi^{*} - \phi^{*} = 0$ (b.o).

Met andere woorden: $\phi^{*} = \psi^{*}$ (b.o).

Aangezien $\phi^{*} \leqq f \leqq \psi^{*}$, is ook $\phi^{*} = f$ (b.o).

Daar ϕ^{*} meetbaar is, is ook f meetbaar (we werken in een volledige maatruimte).

(c) Merk op, dat f begrensd is op $[a,b]$ (opgenomen in de definitie van Riemann-integreerbaarheid), zeg $|f(x)| \leqq M$ voor $a \leqq x \leqq b$.

Dus is $\quad |f| \leqq M\, \chi_{[a,b]} \quad$ op heel $\mathbb{R}$.

Hierin is f, dus $|f|$, meetbaar en $M\,\chi_{[a,b]}$ is Lebesque-integreerbaar.

Uit Toepassing 2 na stelling 8.24 volgt dan, dat f Lebesque-integreerbaar is over $\mathbb{R}$. Daar $f = \chi_{[a,b]} f$, is f dus over $[a,b]$ integreerbaar, en

$$\int_{[a,b]} f\, d\,\mu = \int \chi_{[a,b]}\, f\, d\,\mu = \int f\, d\,\mu .$$

(d) Om aan te tonen, dat $\int f\, d\,\mu = \int_a^b f(x)\, dx$, beperken we ons eerst tot het geval dat $f \geqq 0$. Dan is $f \in \mathcal{J}^+$, en dus is

$$\int f\, d\,\mu = \sup_{\phi \in \Phi} I\,(\phi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Immers: daar $f \in \mathcal{J}^+$ is er een rij $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{J}_0$ met onder andere de eigenschap: $\phi_n \leqq f$ voor alle n (dat wil zeggen: $\phi_n \in \Phi$), en

$$\sup\ I(\phi_n) = \int f\, d\, \mu\,.$$

dus is

$$\int f\, d\, \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(\phi_n) \leqq \sup_{\phi \in \Phi} I(\phi).$$

Omgekeerd: als $\phi \in \Phi$, dan is $\phi \leqq f$, dus $I(\phi) = \int \phi\, d\, \mu \leqq \int f\, d\, \mu$.

Dan is ook

$$\sup_{\phi \in \Phi} I(\phi) \leqq \int f\, d\, \mu$$

waarmee de juistheid van (5) is aangetoond.

Uit (4) en (5) volgt nu inderdaad:

$$\int_{[a,b]} f\, d\, \mu = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Indien f willekeurig Riemann-integreerbaar is, dan is het niet moeilijk in te zien, dat f^+ en f^- het eveneens zijn.
Maar f^+ en f^- zijn beide $\geqq 0$, dus

$$\int_{[a,b]} f^+\, d\, \mu = \int_a^b f^+\,(x)\, dx\ ;\ \int_{[a,b]} f^-\, d\, \mu = \int_a^b f^-\,(x)\, dx.$$

Daar $f = f^+ - f^-$ en zowel de Riemann-integraal als de Lebesque-integraal additief is, volgt hieruit

$$\int_{[a,b]} f\, d\, \mu = \int_a^b f\,(x)\, dx.$$

<u>Opmerking.</u> Alle <u>begrensde</u> functies, die Riemann-integreerbaar zijn over een <u>eindig</u> interval zijn dus ook Lebesque-integreerbaar over dat interval. Om te laten zien, dat er onder de begrensde functies, gedefiniëerd op een eindig interval, meer Lebesque- dan Riemann-integreerbare functies zijn, maar ook, dat de eigenschappen "begrensd" en "eindig" in het bovenstaande essentieel zijn, geven we de volgende voorbeelden:

Voorbeeld 1. Zij $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. Dan is f een trapfunctie.

Voorts is $f = 0$(b.o), want

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

is een verzameling met de maat nul.

dus is $f \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{L}_1$ en $\int_{[0,1]} f \, d\mu = 0$.

Echter: f is niet Riemann-integreerbaar over $[0,1]$: voor elke verdeling van $[0,1]$ is de ondersom van f nul en de bovensom 1. Dus is

$$\underline{\int_0^1} f(x)\, dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\, dx.$$

Voorbeeld 2. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefiniëerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ voor } x < 0 \\ 1 \text{ voor } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} \text{ voor } x > 0. \end{cases}$$

Uit stelling 9.2 volgt: voor elke $b > 0$ is de volgende Lebesque-integraal gedefiniëerd:

$$\int_{[0,b]} f \, d\mu$$

en de waarde is gelijk aan $\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx$. Het is bekend, dat de oneigenlijke Riemann-integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx$$

convergeert (met waarde $\frac{1}{2}\pi$), dus

$$\lim_{b\to\infty} \int_{[0,b]} f \, d\mu$$

bestaat. Daarentegen is f niet Lebesque-integreerbaar over $[0,\infty)$.

Want stel dat dit het geval is. Dan is ook $|f|$ Lebesque-integreerbaar over $[0,\infty)$ (stelling 8.22).
Voorts is het duidelijk, dat $\chi_{[0,b]}\ |f| \leqq |f|$ op heel $\mathbb{R}$, dus dan is

$$\int_{[0,b]} |f|\ d\,\mu \leqq \int_{[0,\infty)} |f|\ d\,\mu \quad \text{voor alle } b > 0.$$

Hierin is voor $b = n\,\mu$ $(n = 1,2,\dots)$:

$$\int_{[0,n\pi]} |f|\ d\,\mu = \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ d\,x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\ dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}.$$

Daar de rij partiële sommen der reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ niet begrensd is, volgt hieruit, dat $\int_{[0,\infty)} |f|\ d\,\mu$ geen eindige waarde kan hebben. Tegenspraak!

Voorbeeld 3. Zij $f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right) = 2\,x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$

voor $x \in (0,1]$

Voor iedere $\varepsilon > 0$ is f Riemann-integreerbaar over $[\varepsilon,1]$, dus Lebesque-integreerbaar, en

$$\int_{[\varepsilon,1]} f\ d\,\mu = \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\ dx = \sin 1 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Dus de oneigenlijke Riemann-integraal

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\ dx = \sin 1$$

convergeert. Daarentegen is f niet Lebesque-integreerbaar over $(0,1]$. De argumentatie is geheel analoog aan die in Voorbeeld 2, waarbij we nu gebruik maken van het feit, dat voor

$$\left\{\frac{1}{(2n+\frac{1}{3})\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq x \leqq \left\{\frac{1}{(2n-\frac{1}{3})\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

geldt:

$$|f(x)| \geqq \left|\, \left|2x \sin \frac{1}{x^2}\right| - \left|\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}\right| \,\right| \geqq$$

$$\geqq \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} - 2x \left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \geqq \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x}\,.$$

Indien we bovenstaand interval aanduiden met $[\varepsilon_n, \delta_n]$, dan volgt uit de aanname dat f, en dus $|f|$, Lebesque-integreerbaar is over $(0,1]$, dat

$$\int_{(0,1]} |f| \, d\mu \geqq \int_{[\varepsilon_n,1]} |f| \, d\mu = \int_{\varepsilon_n}^{1} |f(x)| \, dx >$$

$$> \sum_{k=1}^{n} \int_{\varepsilon_k}^{\delta_k} |f(x)| \, dx \geqq \sum_{k=1}^{n} \int_{\varepsilon_k}^{\delta_k} \frac{1}{x} \, dx = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2}{6n-1}\right).$$

Merk op, dat voor $0 < y < 1$ geldt: $\log(1+y) \geqq y \log 2$, zodat

$$\log \left(1 + \frac{2}{6n-1}\right) \geqq \frac{2\log 2}{6n-1}$$

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log(1 + \frac{2}{6n-1})$ divergeert dus, hetgeen impliceert, dat

$$\int_{[0,1]} |f| \, d\mu \text{ niet eindig kan zijn. Tegenspraak.}$$

10. Convergentiestellingen.

In deze paragraaf is weer $(X, \mathcal{S}, \mu)$ een maatruimte als in §8: $\mathcal{S}$ een σ-ring van deelverzamelingen der niet-lege verzameling X, $X \in \mathcal{S}$ en μ een maat op $\mathcal{S}$. Volledigheid der maatruimte $(X, \mathcal{S}, \mu)$ wordt niet verondersteld.

<u>Lemma 10.1.</u> Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathcal{L}_1$ en $f: X \to \mathbb{R}^*$ een meetbare

functie zó, dat puntsgewijs

$$0 \leqq f_n \uparrow f \quad (n \to \infty)$$

Als gegeven is, dat er een $M > 0$ is zodanig, dat

$$\int f_n \, d\mu \leqq M \quad \text{voor alle } n = 1,2,\ldots$$

dan is $f \in \mathcal{L}_1$, en bovendien is dan

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

<u>Bewijs:</u> Elke f_n behoort tot $\mathfrak{J}^+$, dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ is er een rij $\{h_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{J}_0$ zó, dat

$$0 \leqq h_{nk} \uparrow f_n \; (k \to \infty) \text{ en } \int f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} I(h_{nk}).$$

Definiëer voor elke $k \in \mathbb{N}$ een rij $\{g_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ door het volgende inductieve voorschrift:

$$g_{1k} = h_{1k} \; ; \; g_{nk} = g_{1k} \vee \ldots \vee g_{n-1,k} \vee h_{nk} \; \ldots\ldots\ldots (1)$$

Met volledige inductie naar n toont men gemakkelijk aan, dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt:

$$g_{nk} \in \mathfrak{J}_0 \; ; \; g_{n,k+1} \geqq g_{n,k} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

terwijl uit de definitie der g_{nk} onmiddellijk volgt, dat

$$g_{n+1,k} \geqq g_{n,k} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Bovendien geldt voor alle n en k:

$$h_{nk} \leqq g_{nk} \leqq f_n \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De eerste ongelijkheid in (4) is evident, de tweede tonen we aan met volledige inductie naar n.

Zij $k \in \mathbb{N}$ gegeven. Dan is $g_{1k} = h_{1k} \leqq f_n$.

Neem aan, dat voor $i = 1,\ldots, n-1$ geldt: $g_{ik} \leqq f_i$.

Dan is $g_{nk} = g_{1k} \vee \ldots \vee g_{n-1,k} \vee h_{nk} \leqq f_1 \vee \ldots \vee f_{n-1} \vee h_{nk} \leqq f_n$.

Dus ook de tweede ongelijkheid geldt voor alle n.

Daar $h_{nk} \uparrow f_n$ $(k\to\infty)$, volgt uit (2) en (4):

$$0 \leqq g_{nk} \uparrow f_n \ (k\to\infty) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Bovendien volgt uit (4) dan nog:

$$I(h_{nk} \leqq I(g_{nk}) \leqq \int f_n d \ \mu$$

en dus

$$\lim_{k\to\infty} \ I(g_{nk}) = \int f_n \ d\,\mu \ ; \text{ dus } I(g_{nk}) \leqq M \qquad (\forall\, n,k).$$

We hebben nu de rijen $\{h_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{J}_0$ vervangen door rijen $\{g_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{J}_0$, die dezelfde eigenschappen hebben, maar als extra eigenschap nog (3) hebben.

We beweren nu, dat

$$0 \leqq g_{nn} \uparrow f \ .$$

Wat de monotonie betreft: $g_{n+1,n+1} \geqq g_{n+1,n} \geqq g_{nn}$.

Wat de convergentie betreft: stel er is een $x \in X$ en een $\varepsilon_0 > 0$, zó dat

$$g_{kk}\ (x) < f(x) - \varepsilon_0 \quad \text{voor alle } k = 1,2,\ldots$$

Uit (3) volgt dan:

$$g_{nk}(x) < f(x) - \varepsilon_0 \text{ voor alle } n \text{ en } k \text{ met } n < k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Kies $n \in \mathbb{N}$ willekeurig.

Uit (5), (6) volgt dan na limietovergang voor $k \to \infty$:

$$f_n\ (x) \leqq f(x) - \varepsilon_0 \ .$$

Dit geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$, in strijd met $f_n \uparrow f$ (puntsgewijs).

Inderdaad is dus $\lim\limits_{n\to\infty} g_{nn}(x) = f(x)$ voor elke $x \in X$.

Conclusie:

$\{g_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ is een rij in $\mathcal{J}_0$ met $0 \leqq g_{nn} \uparrow f$ en voorts

$$I(g_{nn}) \leqq M \text{ voor alle } n.$$

Volgens de definitie is dus $f \in \mathcal{J}^+ \subset \mathcal{L}_1$, en

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} I(g_{nn}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Tenslotte: voor alle n is $g_{nn} \leqq f_n \leqq f$; en dus

$$I(g_{nn}) \leqq \int f_n \, d\mu \leqq \int f \, d\mu \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Uit (7) en (8) volgt nu:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

<u>Lemma 10.2.</u> Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathcal{L}_1$ zó, dat voor alle n

$$0 \leqq f_n \leqq f_{n+1} \quad \text{en} \quad \int f_n \, d\mu \leqq M,$$

waarin $M > 0$ een constante is.

Dan is er een $f \in \mathcal{L}_1$ zó, dat $f_n \uparrow f$.

<u>Bewijs:</u> Volgens stelling 6.7 is er een meetbare functie f zó, dat $0 \leqq f_n \uparrow f$. Uit lemma 10.1 volgt nu, dat $f \in \mathcal{L}_1$.

<u>Stelling 10.3</u> <u>("Monotone-convergentie stelling").</u>

Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathcal{L}_1$ zó, dat

1°. $f_n \leqq f_{n+1}$ (b.o) voor alle $n = 1,2,\ldots$

2°. Er is een $M > 0$ zó dat $\int f_n \, d\mu \leqq M$ voor alle $n=1,2,\ldots$

Dan is er een $f \in \mathcal{L}_1$ zó, dat $f_n \uparrow f$ (b.o) voor $n \to \infty$, en

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Indien $g : X \to \mathbb{R}^*$ een meetbare functie is, zó, dat $f_n \uparrow g$(b.o),

dan is $g = f$(b.o), $g \in \mathcal{L}_1$, en

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int g \, d\mu .$$

<u>Bewijs:</u> Voor $n = 1,2,\ldots$ is er een $E_n \in \mathcal{S}$ met $\mu(E_n)$= zó, dat

$$\forall x \in X : x \notin E_n \Longrightarrow f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) < \infty$$

Zij $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dan is $E \in \mathcal{S}$ en $\mu(E) = 0$. Voorts geldt:

$$\forall x \in X : x \notin E \Longrightarrow f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) < \infty \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definiëer functies h_n door

$$h_n = \chi_{X\setminus E} \cdot (f_n - f_1).$$

Dan is $0 \leqq h_n \leqq h_{n+1}$ overal op X, en bovendien is voor alle n:

$$h_n \in \mathcal{L}_1 \quad \text{en} \quad \int h_n \, d\mu = \int_{X\setminus E} (f_n - f_1) \, d\mu \leqq M - \int f_1 \, d\mu$$

(gebruik stelling 8.24; merk op, dat elke h_n meetbaar is).
Volgens lemma 10.2 is er een $h \in \mathcal{L}_1$ zó, dat $0 \leqq h_n \uparrow h$, en uit lemma 10.1 volgt nog, dat

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu = \int h \, d\mu .$$

Merk op, dat bijna overal geldt (n.l. buiten E), dat

$$f_n = h_n + f_1.$$

Bijgevolg: $f_n \uparrow h+f_1$(b.o), waarin $h, f_1 \in \mathcal{L}_1$, dus $h+f_1 \in \mathcal{L}_1$. Bovendien is

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (h_n+f_1)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int h_n\,d\mu + \int f_1\,d\mu =$$

$$= \int h\,d\mu + \int f_1\,d\mu = \int (h+f_1)\,d\mu$$

(bij het eerste gelijkteken is weer stelling 8.24 gebruikt).
Aan de stelling is dus voldaan door $f = h + f_1$.

Indien gegeven is, dat $f_n \uparrow g$ (b.o.) voor zekere meetbare functie g, dan is $f = g$(b.o.).
Immers: $f_n \to f$ (b.o.), dus er is een $F \in \mathcal{S}$ met $\mu(F) = 0$, en

$$\forall x \in X : x \notin F \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Voorts: $f_n \to g$ (b.o.), dus er is een $G \in \mathcal{S}$ met $\mu(G) = 0$ en

$$\forall x \in X : x \notin G \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Dus: $\forall x \in X : x \notin F \cup G \Longrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$

Hierin is $F \cup G \in \mathcal{S}$ en $\mu(F \cup G) = 0$, zodat $f = g$ (b.o.).

Welnu: g is meetbaar, $f \in \mathcal{L}_1$ en $f = g$ (b.o.). Uit stelling 8.24 volgt nu, dat $g \in \mathcal{L}_1$, en dat

$$\int g\,d\mu = \int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

<u>Opgave</u> Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ gedefiniëerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ voor } 0 < x < 1 \\ \infty \text{ voor } x = 0 \\ 0 \text{ voor } x < 0 \text{ en } x \geq 1. \end{cases}$$

Dan is f integreerbaar over $[0,1]$ met betrekking tot de Lebesquemaat.

<u>Gevolg 1</u> Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij in $\mathcal{L}_1$, $f_n \geq 0$ (b.o.) voor alle n.

(1) Indien de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$ convergeert, dan is er een $f \in \mathcal{L}_1$, zó dat

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ (b.o)}$$

en

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \,. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (9).$$

(2) Omgekeerd: als er een $f \in \mathcal{L}_1$ is zó, dat $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (b.o.), dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$, en (9) geldt.

(dus integratie en sommatie mogen verwisseld worden zodra de reeks der integralen convergeert of de som integreerbaar is).

Bewijs: De rij $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}_{n=1}^{\infty}$ der partiële sommen voldoet aan de voorwaarden der monotone convergentiestelling:

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1} \geqq \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ (b.o.)}$$

en

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_i \, d\mu \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu \,.$$

Uit deze stelling volgt nu de juistheid der eerste bewering.
De tweede bewering volgt evenzo uit het tweede deel van stelling 10.3.

Gevolg 2. Zij $f \in \mathcal{L}_1$, $f \geqq 0$ (b.o). Definieer een functie $\mu_f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^*$ door

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu \,.$$

Dan is μ_f een maat op $\mathcal{S}$.

Bewijs.
(a) $\mu_f(\emptyset) = \int_{\emptyset} f \, d\mu = \int \chi_{\emptyset} f \, d\mu = 0$, want $\chi_{\emptyset} f = 0$

(b) Daar $f \geqq 0$ (b.o.), is $\chi_E f \geqq 0$ (b.o.) voor alle $E \in \mathcal{S}$, en dus

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu = \int \chi_E f \, d\mu \geqq 0 \,.$$

(c) Zij $E_1, E_2, \ldots$ een rij in $\mathcal{S}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ voor $i \neq j$, en

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Indien voor $n = 1,2,\ldots$ $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_n$, dan geldt:

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \qquad \text{en } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Hieruit, en uit het feit dat $f \geqq 0$ (b.o.), volgt, dat

$$\chi_{F_n} f \leqq \chi_{F_{n+1}} f \text{ (b.o.), en } 0 \leqq \chi_{F_n} f \uparrow \chi_E f.$$

Voorts geldt voor elke n: $\chi_{F_n} f \leqq f$ (b.o), dus

$$\int \chi_{F_n} f \, d\mu \leqq \int f \, d\mu < \infty .$$

Uit de monotone convergentiestelling volgt dus, dat

$$\lim_{n\to\infty} \int \chi_{F_n} f \, d\mu = \int \chi_E f \, d\mu$$

ofwel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{E_i} f \, d\mu = \int \chi_E f \, d\mu ,$$

dat wil zeggen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_f (E_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_f (E_i) = \mu_f (E) .$$

<u>Gevolg 3.</u> Indien $f \in \mathcal{L}_1$ is, en $E_1, E_2, \ldots$ een rij in $\mathcal{S}$ met

$E_i \cap E_j = \emptyset$ voor $i \neq j$, en tenslotte $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, dan is

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu$$

waarin de reeks in het rechterlid absoluut convergeert.

Bewijs: Op grond van Gevolg 2 is

$$\int_E f^+ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^+ d\mu \quad ; \quad \int_E f^- d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^- d\mu .$$

Dus is

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^+ d\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f^- d\mu .$$

In het rechterlid staan twee absoluut convergente reeksen. Het verschil van hun sommen is dan juist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{E_i} f^+ d\mu - \int_{E_i} f^- d\mu \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$$

welke reeks dan eveneens absoluut convergeert.

Opmerking. Als $f \in \mathcal{L}_1$ is, dan wordt door

$$\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu \qquad \text{voor } E \in \mathcal{S}$$

een eindigwaardige, aftelbaar additieve verzamelingsfunctie op $\mathcal{S}$ gedefinieerd zó, dat

$$\forall E \in \mathcal{S} : \ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \mu_f(E) = 0 .$$

De stelling van RADON & NIKODYM geeft een omkering van deze situatie: indien de maat μ σ-eindig is, en indien $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ een eindigwaardige, aftelbaar-additieve verzamelingsfunctie op $\mathcal{S}$ is, zó, dat

$$\forall E \in \mathcal{S}: \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$$

dan is er een $f \in \mathcal{L}_1$ zó, dat $\nu = \mu_f$, dat wil zeggen:

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad \text{voor alle } E \in \mathcal{S}.$$

Indien bovendien ν niet-negatief was (dus een maat), dan geldt voor elke ν-integreerbare $g : X \to \mathbb{R}^*$,dat $g\, f : X \to \mathbb{R}^*$ μ-integreerbaar is, en

$$\int g \, d\,\nu = \int g \, f \, d\,\mu \, .$$

Men gebruikt in dit verband soms de suggestieve notatie:

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

waardoor de laatste formule overgaat in

$$\int g \, d\,\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} \, d\,\mu \, .$$

Dat deze symboliek min of meer zinvol is kunnen we hier niet laten zien (c.f. Halmos "Measure Theory", §32). We volstaan met op te merken, dat de stelling van Radon en Nikodym de grondslag is voor onder andere algemene transformatie-formules van integralen.

In stelling 10.3 hebben we gezien, dat voor <u>monotone</u> rijen limietovergang en integratie verwisseld mogen worden, mits de rij integralen convergeert of de limiet integreerbaar is. Hieruit kan een stelling over verwisseling van sommatie en integratie worden afgeleid voor reeksen met (bijna overal) niet-negatieve termen (Gevolg 1). Deze stellingen zijn reeds algemener dan de overeenkomstige stellingen voor Riemann-integralen, waar steeds <u>uniforme</u> convergentie wordt geëist (en integratie over een <u>eindig</u> interval).
Er is echter een nog algemenere convergentiestelling:

<u>Stelling 10.4.</u> (<u>Stelling van LEBESQUE</u> over gemajoreerde convergentie).
Zij $f_1, f_2, \ldots$ een rij in $\mathcal{L}_1$ zó, dat voor zekere $g \in \mathcal{L}_1$ geldt:

$$|f_n| \leq g \text{(b.o)}.$$

Indien er een meetbare functie $f : X \to \mathbb{R}^*$ is zó, dat

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ (b.o)}$$

dan is $f \in \mathcal{L}_1$, en bovendien is

$$\lim_{n\to\infty} \int |f-f_n| \, d\mu = 0,$$

en dus zeker

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

<u>Bewijs:</u> Zie bijvoorbeeld S.K.Berberian "Measure and Integration", §30.

<u>Opmerking.</u> Het is niet voldoende om te eisen, dat de limiet f der rij $f_1, f_2, \ldots$ integreerbaar is, terwijl de eis der majorantie niet vervuld is:
Zij $X = \mathbb{R}$, μ de Lebesque-maat, en

$$f_n = n \, \chi_{(0,\frac{1}{n}]}$$

Dan is $f = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$ overal, dus de limiet f is integreerbaar.
Echter is

$$\int f \, d\mu = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu .$$

<u>Gevolg.</u> Indien $f_1, f_2, \ldots$ een rij in $\mathcal{L}_1$ is zó, dat

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \quad \text{(b.o)}$$

voor zekere meetbare functie $f : X \to \mathbb{R}^*$; dan geldt:
als $\sum_{i=1}^{\infty} \int |f_i| \, d\mu$ convergeert, dan is $f \in \mathcal{L}_1$, en

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu .$$

Met name is dit juist, als $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \in \mathcal{L}_1$.

<u>Bewijs:</u> Pas Gevolg 1 van stelling 10.3 toe op de rij $|f_1|, |f_2|, \ldots$ in $\mathcal{L}_1$. Er is dus een $g \in \mathcal{L}_1$ zó, dat

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \quad (\text{b.o}).$$

Maar dan is bijna overal

$$|f| = |\sum_{i=1}^{\infty} f_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = g$$

en daar f meetbaar is en g integreérbaar, volgt uit stelling 8.21 en 8.22 dat $f \in \mathcal{L}_1$. Merk op, dat het argument doorgaat als zonder meer gegeven is, dat $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$ integreerbaar is (Gevolg 1 van stelling 10.3 is dan niet nodig).

Pas nu stelling 10.4 toe op de partiële sommen der reeks $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$:

$$|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f_i| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = g \quad (\text{b.o})$$

waarin $g \in \mathcal{L}_1$. Dus is

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\sum_{i=1}^{n} f_i) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int f_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

Voorbeelden.

1°. $$\int_{[0,1]} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} \, dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \ldots \quad (p > 0,\ q > 0).$$

De integraal in het linkerlid, opgevat als Riemann-integraal, bestaat, maar omdat hij voor $0 < p < 1$ oneigenlijk is in het linkeruiteinde, kunnen we hieruit alleen voor $p \geqq 1$ concluderen, dat hij ook als Lebesque-integraal bestaat. Om bovenstaande relatie voor de Riemann-integraal aan te tonen valt niet mee, om hem voor de Lebesque-integraal aan te tonen is een eenvoudige zaak:

Zij $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x^q} & \text{voor } 0 < x \leqq 1 \\ 0 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

Bijna overal op $[0,1]$ geldt (namelijk uitgezonderd in 0) :

$$f(x) = x^{p-1} (1-x^q+x^{2q}-x^{3q}+ \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

waarin voor alle $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = x^{p-1}\,(x^{2nq} - x^{(2n+1)q}) = x^{2nq+p-1}\,(1-x^q) \geqq 0.$$

Op grond van Gevolg 1 is f integreerbaar over $[0,1]$(elke f_n is het en de reeks die we nu gaan opschrijven convergeert) en er geldt:

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} x^{2nq+p-1}(1-x^q)dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2nq+p} - \frac{1}{(2n+1)q+p}\right)$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \ldots$$

Hiermede is het gestelde bewezen.

N.B. Voor $p = q = 1$ krijgen we:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$$

Voor $p = 1$ en $q = 2$ krijgen we:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{bg tg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2°. Zij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ een rij niet-negatieve reële getallen, zó, dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert. Dan is voor alle $t \in \mathbb{R}$ gedefinieerd

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,t^n.$$

Er geldt op grond van Gevolg 1: de functie $t \mapsto S(t)e^{-t}$ is integreerbaar over $[0,\infty)$, en

$$\int_0^{\infty} S(t)\,e^{-t}dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,t^n e^{-t}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,t^n e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Rechtvaardiging:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-t}$ is voor $t \geq 0$ een reeks, waarvan de termen positieve meetbare functies zijn, en die puntsgewijs naar $S(t)e^{-t}$ convergeert.

(ii) De functie $f_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ is monotone limiet van de rij functies

$$\chi_{[0,k]} f_n \ , \ k = 1,2,3,\ldots$$

die ieder Riemann-integreerbaar zijn over $[0,k]$, en dus Lebesque-integreerbaar over $\mathbb{R}$, terwijl voor de Riemann-integralen geldt:

$$\int_0^k f_n(t)\, dt \leq \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{voor alle } k$$

Volgens de monotone-convergentiestelling is f_n dan Lebesque-integreerbaar over $[0,\infty)$ en

$$\int_{[0,\infty)} f_n\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,\infty)} \chi_{[0,k]} f_n\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_0^k f_n(t)\, dt = n!$$

3°. Zij $q > -1$. Dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^q (1-\tfrac{x}{n})^n\, dx = \int_0^\infty x^q e^{-x}\, dx.$$

De integralen bestaan als oneigenlijke Riemann-integralen, en omdat alle integranden ≥ 0 zijn, bestaan ze ook als Lebesque-integralen (vgl. de opgave na stelling 10.3; het volgt ook uit Gevolg 2 na stelling 10.3).

Definieer f_n voor $n = 1,2,\ldots$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} x^q (1-\frac{x}{n})^n & \text{voor } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{voor } x > n \end{cases}$$

Dan is

$$\int_0^n x^q (1-\tfrac{x}{n})^n\, dx = \int_{[0,\infty]} f_n(x)\, dx .$$

Hierin is voor elke vaste $x \geqq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^q e^{-x}$$

Voorts is voor elke $x \geqq 0$:

$$0 \leqq f_n(x) \leqq x^q e^{-x}$$

want voor $0 < y < 1$ is

$$(1-y)^{1/y} < e^{-1} ,$$

en dus voor $0 < x < n$

$$(1 - \frac{x}{n})^n < e^{-x} .$$

Uit stelling 10.4 volgt nu, dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]} f_n(x)\, dx = \int_{[0,\infty]} x^q e^{-x}\, dx.$$

Literatuur

[1] Berberian, S.K. Measure and Integration, Mac Millan, New York 1965

[2] Halmos, P.R. Measure Theory, Van Nostrand Comp. New York 1950

[3] Rogosinsky, W.W. Volume and Integral, Oliver & Boyd, Edinburgh 1952

[4] Taylor, A.E. General Theory of Functions and Integration, Blaisdell Publ.Comp., Waltham Mass., 1965

[5] Zaanen, A.C. Integration, North-Holland Publ.Comp. Amsterdam 1958

Errata

- p.2, 14^o r.v.b.:
  met de introductie van de Lebesquemaat op $\mathbb{R}$, maar zullen trachten een stuk

- p.2, 9^o r.v.o.:
  van die elementen x die tot minstens één der verzamelingen A_ρ behoren.

- p.2, 6^o r.v.o.:
  verzamelingen A_ρ behoren.

- p.3;
  Def.2.6; Zijn A en B etc.

- p.7, 5^o r.v.b.:
  Bewijs. Uit de schrijfwijze lim sup $E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$ en stelling 2.5

- p.8, 3^o r.v.b.:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty).$$

- p.8, 9^o r.v.b. toevoegen:

$$(+\infty)\ (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\ (+\infty) = (+\infty)\ (-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)\ (-\infty) = +\infty$$

- p.11; opm: de conclusie $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$ op r.6 volgt ook direkt uit de onderste regel van pag.10 m.b.v. de aftelbaar additiviteit van μ.

- p.12, 1^o r.v.b.:
  Definieer nu $\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_n = E_1 \setminus E_n \text{ voor } n \geq 2, \end{cases}$

- p.12, voor voorbeelden op de 9^o r.v.o. toevoegen:
  Opmerking Zij $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  Definieer op $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ de funktie μ door:
  $$\mu(E) = \text{aantal elementen van } E \qquad (E \subset \mathcal{E})$$
  Dan is μ een maat op $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.
  Zij $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ voor $n = 1,2,\ldots$.
  Dan is $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, maar $\mu(A_n) = \infty$ voor $n = 1,2,\ldots$.
  Dus de voorwaarde $\mu(A_n) < \infty$ in gevolg 2 is niet overbodig.

- p.19, 9^o r.v.b. wijzigen in :
  overdekking $\{E_i\}$ met $E_i \in R$, $E \subset \bigcup E_i$, geldt wegens stelling 3.3 dat

- p.29, 30. Het bewijs van st.5.3 kan geformuleerd worden a.v.:
  Bewijs: Daar Λ een σ-ring is, zijn de verzamelingen B en E bevat in Λ. De bewering volgt nu uit de gevolgen van st.3.3 en st.3.4.

- p.34, 9^o r.v.b. wijzigen in :
  van het type $N_{kj} \overset{\text{def}}{=} [a + 2^{-k}(j-1), a + 2^{-k}j)$ voor $1 \leq j \leq 2^k$ en $j,k \in \mathbb{N}$

- p.34, 12^o r.v.b. wijzigen in:
  $$M_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{N_{kj} \mid N_{kj} \subset A \text{ en } 1 \leq j \leq 2^k\}$$

- p.36, de laatste twee regels vervallen.

- p.48, 5^o en 6^o r.v.b.:
  $$E_0 = \{ x \mid f(x) = +\infty \text{ en } g(x) = -\infty \},$$
  $$E_1 = \{ x \mid f(x) = -\infty \text{ en } g(x) = +\infty \}.$$

- p.50, 9^o r.v.b.:
  $$0 \text{ als } f(x) = -\infty, 0 \text{ of } +\infty.$$

- p.50, 7^o r.v.o.: $\leq \alpha$ i.p.v. $< \alpha$.

- p.50, 5^o r.v.o.:

$$f_n^{-1}\ ([- \infty,\ \alpha]) \text{ i.p.v. } f_n^{-1}([- \infty,\ \alpha)).$$

- p.51, 10^o r.v.b.:
  zijn dan zijn ook $\max\limits_{i=1...,k} f_i$ en $\min\limits_{i=1,...,k} f_i$ meetbaar.

- p.57, 9^o r.v.b.:
  We hebben $A_{k,j} = A_{k+1,2j} \cup A_{k+1,2j+1}$ $(0 \leq j < k.\ 2^k)$ en

- p.59, 10^o r.v.b.:
  <u>Lemma 7.5</u> Zij $t = \sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i\ \chi_{A_i}$ en $\mu = \sum\limits_{i=0}^{q} \beta_i\ \chi_{B_i}$ twee standaard-

  vormen. Dan geldt:

- p.59, 9^o r.v.o.:

$$x \notin \bigcup_j \{ B_j \mid \beta_j \neq 0 \} \text{ i.p.v. } x \in \bigcup_j \{ B_j \mid \beta_j \neq 0 \} .$$

- p.65, na 11^e r.v.b. toevoegen:
  Tenslotte zullen we eisen, dat het volgende verband bestaat tussen de integraal I en de maat μ :
  7^o. Als $E \in \mathcal{S}$ met $\mu(E) < \infty$, dan is χ_E integreerbaar, en

$$I\ (\chi_E) = \mu(E).$$

- p.66, 9^o r.v.b.:
  Dus het zijn alle weer meetbare trapfuncties.

- p.66, 4^o r.v.o.:
  twee verschillende voorstellingen van f zijn met $\mu(A_i) < \infty$ en $\mu(B_j) < \infty$ voor elke i en j, dan is

- p.71, 11^o r.v.b.:

$$F \supseteq E_1 \quad \text{wordt} \quad F \supset E_1$$

- p.75, na 10° r.v.b. toevoegen:

<u>Gevolg :</u> Als $f \in \mathcal{J}^{+}$ en $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathcal{J}_0$ is met $0 \leq f_n \uparrow f$, dan is

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \int f \, d\mu \, .$$

- p.81, 82: Het bewijs van lemma 8.19 kan korter worden gegeven a.v.:

<u>Bewijs:</u> Uit

$$g - h = g' - h'$$

volgt (ook als de functies niet overal eindig zijn)

$$g + h' = g' + h \, ,$$

en uit stelling 8.16 (2°) volgt dan:

$$\int g \, d\mu + \int h' \, d\mu = \int g' \, d\mu + \int h \, d\mu \, .$$

Daar deze integralen alle eindige reële getallen zijn, volgt hieruit

$$\int g \, d\mu - \int h \, d\mu = \int g' \, d\mu - \int h' \, d\mu \, .$$

- p.83, ~~na laatste regel toevoegen:~~

In het bijzonder is $\int \chi_E \, d\mu = \mu(E)$ als $E \in \mathcal{S}$ en $\mu(E) < \infty$.

- p.84, 2° r.v.o.:

2°. $|f| \in \mathcal{L}_1$ en f meetbaar.

- p.92, r.8 t/m r.11 wijzigen in:

Hierin is $\int |f| \, d\mu = \int f \, d\mu = 0$,

want $f \geq 0$ (b.o.), dat wil zeggen: $f = |f|$ (b.o.).

Volgens stelling 8.21 is $\frac{1}{n} \chi_{E_n} \in \mathcal{L}_1$, en volgens

- p.95, 96. Het bewijs van stelling 9.1 kan korter gegeven worden a.v.:

<u>Bewijs</u>: Iedere functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kan geschreven worden als

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, \chi_{\{n\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Integreerbare trapfuncties zijn juist die functies van de gedaante(1), waarvoor geldt:

$f(n) \neq 0$ voor slechts eindig veel waarden van n

($\{ n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0\}$ heeft een eindige maat).

Indien $f \in \mathcal{J}_o$, dan is volgens definitie 8.6:

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{(want } \mu(\{n\}) = 1 \text{).}$$

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ zó, dat $f \geq 0$, f overal eindig.

Zij $f_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)\, \chi_{\{k\}}$ voor $n = 1, 2, \ldots$.

Dan is $f_n \in \mathcal{J}_0$, $0 \leq f_n \uparrow f$ $(n \to \infty)$ (in feite is $f_n(1) = f(1)$ voor alle $n \geq 1$)

en bovendien is

$$I(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Als nu gegeven is, dat $f \in \mathcal{J}^+$, dan volgt uit lemma 8.13 (zie ook het gevolg daarna) onmiddellijk, dat

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In dat geval convergeert dus de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, en zijn som is $\int f\, d\mu$. Omgekeerd: is de convergentie der reeks gegeven, dan is blijkbaar de rij $\{ I(f_n) \}_{n=1}^{\infty}$ begrensd, dus is $f \in \mathcal{J}^+$ volgens def.8.12.

Voor functies $f \geq 0$ hebben we nu aangetoond:

$$f \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow 1^\circ \text{ en } 2^\circ \text{ zijn vervuld.}$$

Bovendien volgt uit formule (2), dat voor $f \in \mathcal{J}^+$ geldt:

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Voor willekeurige functies $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ geldt nu (gebruik stelling 8.22):

$$f \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} |f| \text{ is overal eindig} \Longleftrightarrow f \text{ is overal eindig} \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| \text{ convergeert.} \end{cases}$$