stichting mathematisch centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 77/70 SEPTEMBER

AANTEKENINGEN VAN DE WERKGROEP ALGEBRAÏSCHE MEETKUNDE I

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

Notaties

$\underline{\exists}$	....	Er is precies één
$\underline{C}(A,B)$	....	De morphismen in de categorie $\underline{C}$ van het object A naar het object B
$\underline{Ens}$	....	De categorie der verzamelingen
$\underline{Ab}$	....	De categorie der abelse groepen
$\underline{Gr}$	....	De categorie der groepen
$\underline{CRg}$	....	De categorie der commutatieve ringen met eenheidselement
$\underline{CAlg}_A$	....	De categorie der commutatieve A-algebra's met eenheidselement
$\underline{\mathfrak{M}}_R$	....	De categorie der R-modulen ($R \in \underline{CRg}$).

Errata

§1 pag. 1.1 .... 2^e regel v.o.: $\underline{a}:= \{ \sum_{i\in I}^{<\infty} a_i \,|\, a_i \in A_i\}$ moet zijn:

$\underline{a}:= \{ \sum_{i\in I}^{<\infty} a_i \,|\, a_i \in \underline{a}_i\}$.

§1a pag. 1a.1 .... 4^e regel v.b.: "De priemidealen van k zijn: (0) en k" moet zijn: "Het priemideaal van k is (0)".

§2 pag. 2.9 .... 1^e regel v.b.: "nulpotent" moet zijn: "nilpotent".

§2 pag. 2.10 .... 4^e regel v.b.: $\underline{i}:= \{\frac{c}{1} \in A_a \,|\, cb=0\}$ moet zijn:

$\underline{i}:= \{\frac{c}{a^n} \in A_a \mid \frac{cb}{a^n} = 0\}$.

§2 pag. 2.10 .... 2^e regel v.b.: $\forall \underline{p} \subset \mathrm{Spec}(A_a) \exists c \in A\setminus\underline{p}.c_b = 0$ moet zijn: $\forall \underline{p} \in \mathrm{Spec}(A_a) \exists c \in A\setminus\underline{p}.cb = 0$.

§2 pag. 2.11 .... diagram onderaan de blz: $(D(a_1))$ en $(D(a_2))$ moeten zijn: $\mathcal{O}(D(a_1))$ resp. $\mathcal{O}(D(a_2))$.

§2 pag. 2.28 .... 2^e regel v.o.: $\exists c \notin \underline{p}.c[\alpha - t.\phi(s)] = 0$ moet zijn: $\exists c \notin \underline{p}.c[t - \alpha.\phi(s)] = 0$.

§3 pag. 3.3 .... 2^e regel v.b.: (id,θ_{ij}) moet zijn: (id,θ_{ji}).

§3 pag. 3.3 .... 4^e regel v.b.: $\theta^k_{ij} := \theta_{ij}|X_{ijk}:\ldots.$ moet zijn: $(id,\theta^k_{ji}) := (id,\theta_{ji})|X_{ijk}:\ldots.$

§3 pag. 3.21 .... 9^e regel v.b.: "diagram (6)" moet zijn: "diagram (7)".

§3 pag. 3.30 .... Het diagram

$$\begin{tikzcd} X & \\ X\Pi_S Y \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[ul, "id"'] \arrow[l, dashed, "(\gamma{,}\Gamma)"'] \arrow[dl, "id"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

moet zijn:

$$\begin{tikzcd}
X & \\
X\Pi_S Y \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[ul, "id"'] \arrow[l, dashed, "(\gamma,\Gamma)"'] \arrow[dl, "(\phi,\Phi)"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

§3 pag. 3.32 .... In het diagram na de 9^e regel v.b.: dient de pijl λ van richting te worden veranderd.

§3 pag. 3.34 .... 12^e regel v.b.: $\dfrac{z_j a_i^m}{(a_i a_j)^m}$ moet worden:

$\dfrac{z_j a_i^{m'}}{(a_i a_j)^m}$. Ook in de volgende formules dient de betreffende m door m' te worden vervangen.

§4 pag. 4.1 .... 2^e regel v.b.: Lees voor "preschema": "geringde ruimte".

§1. Het spectrum van een ring.

Afspraak: Onder een ring zal steeds worden verstaan een commutatieve ring met eenheidselement. De ring zelf zal ook als ideaal worden opgevat, maar van een priemideaal zal steeds worden verondersteld dat het niet de gehele ring is.

Bij elke ring R kan een topologische ruimte Spec(R) worden gedefinieerd:

1.1. Definitie: (i) Als puntsverzameling geldt:

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\underline{p} \subset R \mid \underline{p} \text{ priemideaal van } R\} .$$

(Vaak noteren we een priemideaal $\underline{p} \subset R$, opgevat als punt in Spec(R), met $x_{\underline{p}}$)

(ii) De gesloten verzamelingen van Spec(R) zijn de verzamelingen van de vorm:

$$V(\underline{a}) := \{x_{\underline{p}} \mid \underline{a} \subset \underline{p},\ \underline{a} \text{ ideaal van } R\} .$$

De zo verkregen topologie heet de Zariski-topologie. Opdat de hier gedefiniëerde gesloten verzamelingen een topologie definiëren moet gelden:

(i) $\exists\, \underline{a} \subset R\ .\ \mathrm{Spec}(R) = V(\underline{a})$

(ii) $\exists\, \underline{a} \subset R\ .\ \emptyset = V(\underline{a})$

(iii) $\exists\, \underline{a} \subset R\ .\ \bigcap_{i \in I} V(\underline{a}_i) = V(\underline{a})$

(iv) $\exists\, \underline{a} \subset R\ .\ V(\underline{a}_1) \cup V(\underline{a}_2) = V(\underline{a})$

Door voor $\underline{a}$ te kiezen (0) resp. R, is aan (i) en (ii) voldaan. In geval (iii) kan men kiezen:

$$\underline{a} := \{ \sum_{i \in I}^{<\infty} a_i \mid a_i \in A_i \}$$

(Het ideaal, voortgebracht door $\bigcup_{i \in I} A_i$)

Aan voorwaarde (iv) kan men voldoen door te kiezen: $\underline{a} = \underline{a}_1 \cap \underline{a}_2$. Het is direkt duidelijk dat

$$V(\underline{a}_1) \cup V(\underline{a}_2) \subset V(\underline{a}_1 \cap \underline{a}_2)$$

Zij nu: $\quad x_{\underline{p}} \in V(\underline{a}_1 \cap \underline{a}_2)$

en stel: $\quad x_{\underline{p}} \notin V(\underline{a}_1) \cup V(\underline{a}_2)$.

Dan: $\underline{a}_1 \not\subset \underline{p}$ en $\underline{a}_2 \not\subset \underline{p}$, dus $\exists\, a_1 \in \underline{a}_1 \setminus \underline{p}$ en $\exists\, a_2 \in \underline{a}_2 \setminus \underline{p}$. Omdat $\underline{a}_1$ en $\underline{a}_2$ idealen zijn, geldt: $a_1 a_2 \in \underline{a}_1 \cap \underline{a}_2$ en wegens $\underline{a}_1 \cap \underline{a}_2 \subset \underline{p}$, $a_1 a_2 \in \underline{p}$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $\underline{p}$ een priemideaal is. Dus voldoet $\underline{a}$ aan (iv).

We zullen nu de <u>open verzamelingen</u> van Spec(R) beschouwen. Kies $a \in R$ en definiëer:

1.2. <u>Definitie</u>: $D(a) := \{x_{\underline{p}} \in \mathrm{Spec}(R) \mid a \notin \underline{p}\}$.

Dan is D(a) het complement van V(aR) in Spec(R).

1.3. <u>Opmerking</u>: <u>De open verzamelingen van het type</u> D(a) <u>vormen een basis voor de Zariski-topologie op</u> Spec(R).

Want, zij $x_{\underline{p}} \in O \subset \mathrm{Spec}(R)$; O een open verzameling. Dan is er een ideaal $\underline{a} \subset R$ zodat

$$\mathrm{Spec}(R) \setminus O = V(\underline{a}) .$$

Dus $x_{\underline{p}} \notin V(\underline{a})$, dus $\underline{a} \not\subset \underline{p}$, dus $\exists\, a \in \underline{a} \setminus \underline{p}$
Dan $x_{\underline{p}} \in D(a) \subset O$, want als $x_{\underline{q}} \in D(a)$, dan $a \notin \underline{q}$, dus $\underline{a} \not\subset \underline{q}$, en derhalve $x_{\underline{q}} \in \mathrm{Spec}(R) \setminus V(\underline{a}) = O$.

1.4. <u>Opmerking</u>: <u>Spec(R) is een T_0-ruimte</u>.

Want: $x_{\underline{p}} \neq x_{\underline{q}} \iff \underline{p} \neq \underline{q}$, zeg $\exists\, a \in \underline{p} \setminus \underline{q}$. Dat wil zeggen:

$$x_{\underline{p}} \notin D(a) \quad \text{en} \quad x_{\underline{q}} \in D(a) .$$

1.5. Propositie: Spec(R) is kompakt.

Bew: Stel, we hebben een open overdekking

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i\in I} O_i .$$

Door de open verzamelingen te schrijven als vereniging van open basis-verzamelingen hebben we een open overdekking van de vorm

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{j\in J} D(a_j)$$

en het is derhalve voldoende de propositie voor dit type overdekkingen te bewijzen. Definieer hiertoe:

$$\underline{a} := \{ \sum_{j\in J}^{<\infty} r_j a_j \mid r_j \in R\}$$

(Het ideaal, voortgebracht door $\{a_j\}_{j\in J}$). Stel: $\underline{a} \neq R$. Dan bestaat er een maximaal ideaal $\underline{m}$ van R, zodat $\underline{a} \subset \underline{m}$.*) Dan volgt:

$$(\forall j\in J.\ a_j \in \underline{m}) \Longleftrightarrow (\forall j \in J.\ x_{\underline{m}} \notin D(a_j)) \Rightarrow x_{\underline{m}} \notin \mathrm{Spec}(R)$$

tegenspraak. Dus $\underline{a} = R$, m.a.w.: $1 \in \underline{a}$, zodat we een uitdrukking hebben:

$$1 = r_{j_1} a_{j_1} + \ldots + r_{j_n} a_{j_n}$$

Hieruit volgt direkt: $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{\alpha=1}^{n} D(a_{j_\alpha})$, want als er een $x_{\underline{p}} \in \mathrm{Spec}(R)$ bestaat, zodat $\underline{p} \notin D(a_{j_\alpha})$ voor elke $\alpha = 1,2,\ldots,n$, dan geldt:

$$\forall \alpha = 1,2,\ldots,n\ .\ a_{j_\alpha} \in \underline{p}\ ,\ \text{dus } 1 = \sum_{\alpha=1}^{n} r_{j_\alpha} a_{j_\alpha} \in \underline{p},\ \text{dus } \underline{p} = R$$

tegenspraak. Dus hebben we een eindige deeloverdekking gevonden.

Opmerking: We hebben gezien dat Spec(R) = D(1) kompakt is. Later in deze § zullen we bewijzen dat in het algemeen elke open verzameling D(a) kompakt is.

---

*) Zie appendix.

1.6. Opmerking: Als $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ een willekeurige deelverzameling is, en als we definiëren:

$$J(U) := \bigcap_{x_{\underline{p}} \in U} \underline{p} \;,$$

dan is $V(J(U))$ de afsluiting van U in de Zariski-topologie op Spec(R).

Bew: Zij $U \subset G$, G gesloten. Zij $G = V(\underline{a})$. Dan $\underline{a} \subset J(U)$, wegens $U \subset G$, want $\forall x_{\underline{p}} \in U.\ \underline{a} \subset x_{\underline{p}}$. Dus: $V(\underline{a}) \supset V(J(U))$. D.w.z.: $V(J(U))$ is bevat in elke gesloten verzameling om U. (q.e.d.).

1.7. Opmerking: $x_{\underline{p}}$ is een gesloten punt desda $\underline{p}$ een maximaal ideaal is.

Want: $\{x_{\underline{p}}\} = V(J(x_{\underline{p}})) \iff \{x_{\underline{p}}\} = \{x_{\underline{q}} \mid \underline{q} \supset \underline{p}\} \iff \underline{p}$ maximaal.

1.8. Opmerking: $V(\underline{a})$ is per definitie een gesloten verzameling, en er geldt dus:

$$V(\underline{a}) = V(JV(\underline{a}))$$

We kunnen dus altijd $\underline{a}$ door $JV(\underline{a}) = \bigcap_{\underline{a} \subset \underline{p}} \underline{p}$ vervangen. $JV(\underline{a})$ heet het radicaal van $\underline{a}$, en wordt ook genoteerd: $\sqrt{\underline{a}}$.
We zullen later in deze § bewijzen, dat geldt:

$$\sqrt{\underline{a}} = \{b \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ .\ b^n \in \underline{a}\} \;.$$

1.9. Definitie: Een gesloten deelverzameling W van Spec(R) heet irreducibel als W niet te schrijven is als

$$W = G_1 \cup G_2$$

waarbij G_1, G_2 gesloten deelverzamelingen zijn van Spec(R), terwijl bovendien geldt:

$$G_1 \neq W, \quad G_2 \neq W \;.$$

1.10. <u>Definitie</u>: Een punt $x_{\underline{p}}$ heet <u>algemeen punt</u> van een gesloten verzameling $G \subset \mathrm{Spec}(R)$ als geldt:

$$\overline{\{x_{\underline{p}}\}} = G\ .$$

1.11. <u>Propositie</u>: <u>Elke irreducibele deelverzameling $W \subset \mathrm{Spec}(R)$ heeft precies één algemeen punt.</u>

<u>Bew</u>: W is gesloten, dus is er een ideaal $\underline{a}$ zodat $W = V(\underline{a})$. Volgens opm. 1.8 mogen we aannemen:

$$\underline{a} = \sqrt{\underline{a}}\ .$$

Nu is $\underline{a}$ een priemideaal. (Dit bewijst dat $x_{\underline{a}}$ een algemeen punt is van W, omdat dan $V(\underline{a}) = \overline{\{x_{\underline{a}}\}}$), want indien niet:

$$\exists a_1, a_2 \in R.\ a_1 \notin \underline{a},\ a_2 \notin \underline{a},\ a_1 a_2 \in \underline{a}\ .$$

Definiëer dan:

$$\underline{a}_1 := \underline{a} + Ra_1\ ,\ \underline{a}_2 := \underline{a} + Ra_2$$

dan is $\underline{a} = \underline{a}_1 \cap \underline{a}_2$, want indien $b \in \underline{a}_1 \cap \underline{a}_2$, dan kunnen we schrijven:

$$b = \alpha + ra_1 = \beta + sa_2 \in \underline{a}_1 \cap \underline{a}_2 \qquad (\alpha, \beta \in \underline{a};\ r, s \in R)\ .$$

Dan geldt:

$$b^2 = (\alpha + ra_1)(\beta + sa_2) = \alpha\beta + s\alpha a_2 + r\beta a_1 + rsa_1a_2 \in \underline{a}$$

wegens $\alpha, \beta, a_1a_2 \in \underline{a}$. Dan ook $b \in \underline{a}$, omdat $\underline{a} = \sqrt{\underline{a}}$. ($b^2$ in elk priemideaal dat $\underline{a}$ omvat, dus b in elk priemideaal dat $\underline{a}$ omvat). Derhalve vinden we:

$$W = V(\underline{a}) = V(\underline{a}_1 \cap \underline{a}_2) = V(\underline{a}_1) \cup V(\underline{a}_2)$$

(Zie de verificatie van eigenschap (iv) in def. 1.1).

Ook heeft W precies één algemeen punt: Als $W = V(\underline{p}) = V(\underline{q})$, dan $\underline{p} \in V(\underline{q}) \iff \underline{p} \supset \underline{q}$ en evenzo $\underline{q} \supset \underline{p}$. Dus $\underline{p} = \underline{q}$.

1.12. <u>Opmerking</u>: <u>Als $x_{\underline{p}} \in \mathrm{Spec}(R)$, dan is $V(\underline{p})$ een irreducibele deelverzameling van $\mathrm{Spec}(R)$.</u>

<u>Bew</u>: Stel $V(\underline{p}) = V(\underline{a}_1) \cup V(\underline{a}_2)$, $V(\underline{a}_i) \neq V(\underline{p})$ $(i = 1,2)$. Kies nu $x_{\underline{p}} \in V(\underline{p})$. Dan bijvoorbeeld: $x_{\underline{p}} \in V(\underline{a}_1)$. D.w.z.:

$$V(\underline{p}) \subset V(\underline{a}_1) \, .$$

Dus: $V(\underline{p}) = V(\underline{a}_1)$, tegenspraak.

Beschouw nu een ring-morphisme $f \colon R \to S$. Als $\underline{q}$ een priemideaal is van S, dan is $p := f^{-1}(\underline{q})$ een priemideaal van R. f induceert dus een verzamelingstheoretische afbeelding:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(R) & \xleftarrow{\mathrm{Spec}(f)} & \mathrm{Spec}(S) \\ \underline{p} = f^{-1}(\underline{q}) & \longleftarrow & \underline{q} \end{array}$$

1.13. <u>Propositie</u>: <u>Spec(f) is een continue afbeelding</u>.

<u>Bew</u>: Kies $y_{\underline{q}} \in \mathrm{Spec}(S)$ en zij $\underline{p} = f^{-1}(\underline{q})$. D.w.z.: $\mathrm{Spec}(f)(y_{\underline{q}}) = x_{\underline{p}}$. Kies nu $a \in R$, zodat $x_{\underline{p}} \in D(a)$. (We kiezen dus een open basis-omgeving van $x_{\underline{p}}$ in $\mathrm{Spec}(R)$, en tonen aan dat er een open (basis-)omgeving van $y_{\underline{q}}$ in $\mathrm{Spec}(S)$ is, die binnen $D(a)$ wordt afgebeeld). Kies hiertoe $b := f(a) \in S$. Dan:

(i) $y_{\underline{q}} \in D(b)$

(ii) $\mathrm{Spec}(f)(D(b)) \subset D(a)$

zoals gemakkelijk is na te gaan.

We kunnen dus zeggen, dat we een <u>contravariante functor</u>

$$\mathrm{Spec}(-) \colon \underline{\mathrm{CRg}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}$$

hebben van de categorie der commutatieve ringen met eenheidselement naar de categorie der topologische ruimten.

1.14. Opmerking: Als ϕ: R $\to$ S een surjectief ring-morphisme is, dan is Spec(ϕ) injectief.

Bew: Als $\underline{q}_1,\underline{q}_2$ twee priemidealen zijn van S, en $\underline{q}_1 \neq \underline{q}_2$. Dan zijn uiteraard $\phi^{-1}\underline{q}_1$ en $\phi^{-1}\underline{q}_2$ verschillend.

We kunnen de priemidealen van een ring R partiëel ordenen volgens hun inclusierelaties, derhalve hebben we een partiële ordening op de verzameling Spec(R), gedefinieerd met:

$$x_{\underline{q}_1} \preccurlyeq x_{\underline{q}_2} \iff \underline{q}_1 \supset \underline{q}_2 \ .$$

Wegens $\underline{q}_1 \supset \underline{q}_2 \Rightarrow \phi^{-1}\underline{q}_1 \supset \phi^{-1}\underline{q}_2$, als ϕ: S $\to$ R, respecteert Spec(ϕ) deze partiële ordening.

1.15. Propositie: Er is een (1-1)-correspondentie tussen het partiëel geordende systeem van priemidealen van de ring R die een gegeven ideaal $\underline{a}$ omvatten, en het partiëel geordende systeem der priemidealen van R/$\underline{a}$.

Bew: Deze correspondentie wordt gegeven door:

$$\underline{p} \mapsto \pi(\underline{p}) \qquad\qquad (\underline{p} \in R,\ \underline{a} \subset \underline{p})$$

$$\pi^{-1}\underline{q} \longleftarrow \underline{q} \qquad\qquad (\underline{q} \subset R/\underline{a})$$

als $R \xrightarrow{\pi} R/\underline{a}$ het kanonieke morphisme is. $\pi(\underline{p})$ is een priemideaal in R/$\underline{a}$, want $\bar{x},\bar{y} \in \pi(\underline{p}) \Rightarrow \exists r \in \underline{p}$. $xy-r \in \underline{a} \subset \underline{p} \Rightarrow xy \in \underline{p}$, etc. Dat ook de partiële ordeningen in elkaar worden overgevoerd is triviaal.

1.16. Propositie: Als $\underline{a}$ een ideaal is van R, dan is Spec(R/$\underline{a}$) homeomorf met een gesloten deelruimte van Spec(R).

Bew: Het kanonieke morphisme f: R $\to$ R/$\underline{a}$ induceert volgens opm. 1.14 de injectie

$$\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(R/\underline{a}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R) \ .$$

We kunnen <u>als verzameling</u> Spec(R/$\underline{a}$) dus identificeren met een deel van Spec(R), bepaald door de punten

$$\{x_{\underline{p}} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \underline{a} \subset \underline{p}\}$$

(volgens Prop. 1.15). De familie $\{D(\bar{r}) \mid \bar{r} \in R/\underline{a}\}$ is een basis voor de open verzamelingen van Spec(R/$\underline{a}$), en, met bovenstaande identificatie geldt:

$$D(\bar{r}) = D(r) \cap \mathrm{Spec}(R/\underline{a}) \qquad (\bar{r} = f(r)).$$

Dus is Spec(R/$\underline{a}$) een deelruimte van Spec(R), en, wegens Spec(R/$\underline{a}$) = V($\underline{a}$), gesloten.

1.17. <u>Opmerking</u>: <u>Als G een gesloten deelverzameling is van Spec(R), dan is er een ideaal $\underline{a}$ zodat G ≃ Spec(R/$\underline{a}$).</u>

<u>Bew</u>: Er is een ideaal $\underline{a} \subset R$ zodat G = V($\underline{a}$). Dan is G ≃ Spec(R/$\underline{a}$) volgens het bewijs van Prop. 1.16.

1.18. <u>Definitie</u>: Een deelverzameling S van een ring R heet <u>multiplicatief</u> als geldt:

$$\begin{cases} \text{(i)} & x,y \in S \Rightarrow xy \in S \\ \text{(ii)} & 1 \in S . \end{cases}$$

(Merk op dat niet geëist wordt dat $0 \notin S$).

We kunnen met behulp van multiplicatieve verzamelingen van R nieuwe ringen definiëren:
Zij S een multiplicatieve deelverzameling van R. Beschouw de verzameling van elementen die we <u>formeel</u> in de vorm $\frac{r}{s}$ schrijven, gedefinieerd door:

$$V := \{\tfrac{r}{s} \mid r \in R,\ s \in S\} .$$

In deze verzameling voeren we de volgende aequivalentie relatie in:

$$\frac{r_1}{s_1} \sim \frac{r_2}{s_2} \iff \exists t \in S \ .\ t(r_1 s_2 - r_2 s_1) = 0 .$$

Definieer:

$$S^{-1}R := V/_{\sim} .$$

We kunnen $S^{-1}R$ een ringstruktuur geven. (We zullen in plaats van aequivalentieklassen steeds representanten daaruit nemen en ons ermee verzoenen dat hetzelfde element uit $S^{-1}R$ meerdere voorstellingen heeft. Vergelijk $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \in \mathbb{Q}$).

(i) Optelling: $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$.

(Dit kan, want als $\frac{r_1}{s_1} = \frac{u_1}{v_1}$ en $\frac{r_2}{s_2} = \frac{u_2}{v_2}$, dan

$$\exists t_1, t_2 \in S. \quad t_i(r_i v_i - s_i u_i) = 0 \quad (i = 1,2) .$$

Dan is

$$t_1 t_2 [s_1 s_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) - v_1 v_2 (r_1 s_2 + r_2 s_1)] =$$

$$= s_2 v_2 t_2 [t_1 (u_1 s_1 - r_1 v_1)] + s_1 v_1 t_1 [t_2 (u_2 s_2 - r_2 v_2)] = 0 ,$$

dus $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2}$).

(ii) Vermenigvuldiging: $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$.

(Analoog als in het geval van de optelling kan men controleren dat dit een goede definitie is).

(iii) Het eenheidselement en het nulelement zijn $\frac{1}{1}$ en $\frac{0}{1}$.

Als nu a een element en $\underline{p}$ een priemideaal van de ring R zijn, dan kunnen we de volgende twee ringen definiëren:

1.19. Definitie: Zij $S := R \setminus \underline{p}$. Dit is een multiplicatief systeem. Definieer:

$$R_{\underline{p}} := S^{-1}R .$$

1.20. <u>Definitie</u>: Kies $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, a^0 := 1\}$. Ook dit is een multiplicatief systeem. Definieer:

$$R_a := S^{-1}R .$$

(De elementen van $R_{\underline{p}}$ zijn dus van de vorm $\frac{r}{s}$, $r \in R$, $s \notin \underline{p}$ en de elementen van R_a hebben de gedaante $\frac{r}{a^n}$, $r \in R$.)

1.21. <u>Opmerkingen</u>. Als R geen nuldelers heeft, dan is $R \setminus \{0\} =: S$ een multiplicatief systeem, en $S^{-1}R$ is het <u>quotiënten-lichaam</u> van R.

Algemener kunnen we, als R een willekeurige ring is, het multiplicatieve systeem $S := \{\text{niet-nuldelers}\}$ kiezen. $S^{-1}R$ heet in dit geval de <u>ring van quotiënten van R</u>.
Als S een multiplicatief systeem is van R, en $0 \in S$, dan geldt: $S^{-1}R = 0$, want voor elk willekeurig element $\frac{r}{s}$ geldt wegens

$$0.[r-s.0] = 0$$

$\frac{r}{s} = \frac{0}{1}$.
In het bijzonder is, als $a \in R$ een nilpotent is, of $a = 0$, $R_a = 0$. (a heet <u>nilpotent</u> als er een $n \in \mathbb{N}$ is, zodat $a^n = 0$, terwijl $a \neq 0$).

1.22. <u>Propositie</u>: <u>Er is een (1-1)-correspondentie tussen de priemidealen van $S^{-1}R$ en de priemidealen $\underline{p}$ van R die voldoen aan $\underline{p} \cap S = \emptyset$. Deze correspondentie laat de partiële ordeningen invariant</u>.

<u>Bew</u>: Deze correspondentie wordt gegeven door:

(i) Als $\underline{p}$ priemideaal is in R, en $f: R \longrightarrow S^{-1}R$ gegeven is door $f(r) = \frac{r}{1}$, dan kunnen we definiëren:

$$\underline{p}.S^{-1}R := \{\tfrac{r}{s} \mid r \in \underline{p}, s \in S\}$$

als $\underline{p} \cap S = \emptyset$, is dit een priemideaal van $S^{-1}R$.

(ii) Als $\underline{q}$ een priemideaal is in $S^{-1}R$, dan is $f^{-1}\underline{q}$ een priemideaal in R, en er geldt:

$$(f^{-1}\underline{q}).S^{-1}R = \underline{q} .$$

De correspondentie is nu:

$$\{\text{priemid. } \underline{p} \text{ van } R \text{ met } \underline{p}\cap S = \emptyset\} \xleftrightarrow{1} \{\text{priemid. van } S^{-1}R\} .$$

$$\underline{p} \longmapsto \underline{p}.S^{-1}R$$

$$f^{-1}\underline{q} \longleftarrow\!\shortmid\ \underline{q}$$

Ga na dat deze correspondentie compatibel is met de inclusie-relaties der priemidealen.

1.23. Gevolg: (i) De priemidealen van R_a corresponderen met de priemidealen $\underline{p}$ van R met $a\notin\underline{p}$.

(ii) De priemidealen van $R_{\underline{p}}$ corresponderen met de priemidealen $\underline{q}$ van R met $\underline{q}\subset\underline{p}$.

1.24. Opmerking: Met behulp van Gevolg 1.23 (i) is gemakkelijk na te gaan dat $\mathrm{Spec}(R_a)$ homeomorf is met $D(a)\subset\mathrm{Spec}(R)$.

We zullen vaak $\mathrm{Spec}(R_a)$ met D(a) identificeren. Een direkt gevolg hiervan is:

1.25 Propositie: Als $a\in R$, dan is D(a) kompakt.

Bew: D(a) kunnen we, als deelruimte van Spec(R), identificeren met $\mathrm{Spec}(R_a)$, en volgens Prop. 1.5 is $\mathrm{Spec}(R_a)$ kompakt.

1.26. Lemma: Zij $\underline{n}$ de doorsnede van alle priemidealen van R. Dan zijn de elementen van $\underline{n}$ precies alle nilpotenten van R.

Bew: (i) Als $a^n = 0$, $a\in R$, dan is a^n bevat in alle priemidealen van R, dus evenzo a. Dus $a\in\underline{n}$.

(ii) Zij $a \in \underline{n}$. Beschouw de ring R_a. De priemidealen van R_a corresponderen volgens gevolg 1.3 met de priemidealen $\underline{p}$ van R met $a \notin \underline{p}$. Dus: R_a bevat geen priemidealen, en derhalve: $R_a = 0$. D.w.z.:

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ a^n(1-0) = 0 \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ a^n = 0 .$$

Dus a nilpotent. ($\underline{n}$ heet het <u>nilradicaal</u> van R).

1.27. <u>Gevolg</u>: <u>Als a een ideaal is van R, dan is</u>

$$\underline{\sqrt{\underline{a}} = \{b \in R \mid \exists\ n \in \mathbb{N}.\ b^n \in \underline{a}\}} .$$

<u>Bew</u>: Beschouw het kanonieke morphisme

$$f\colon R \longrightarrow R/\underline{a} .$$

Een direkt gevolg van de in prop. 1.15 aangegeven correspondentie van priemidealen van $R/\underline{a}$ en de priemidealen $\underline{p}$ in R met $\underline{a} \subset \underline{p}$ is, dat

$$f(\sqrt{\underline{a}}) = \text{nilradicaal van } R/\underline{a} .$$

Volgens lemma 1.26 is dit nilradicaal *) van $R/\underline{a}$ de verzameling van nilpotenten in $R/\underline{a}$. Hieruit volgt de bewering.

1.28. <u>Opmerking</u>: <u>Het is mogelijk dat, terwijl R en S twee niet-isomorfe ringen zijn, toch Spec(R) en Spec(S) homeomorf zijn.</u>

<u>Voorbeeld</u>: Zij R een ring die nilpotenten bevat, en kies $S = R/\underline{n}$. Dan bevat S geen nilpotenten en de priemidealen van S zijn op identificatie na de priemidealen van R die $\underline{n}$ omvatten, dat zijn alle priemidealen van R. Volgens prop. 1.16 is dan $\mathrm{Spec}(R) \approx \mathrm{Spec}(S)$.

<u>Opmerking</u>: In opm. 1.14 hebben we gezien, dat als $\phi\colon R \longrightarrow S$ een surjectief homomorphisme is, dat dan $\mathrm{Spec}(\phi)$ injectief was. <u>Niet</u> geldt, dat indien

---

*) Het <u>nilradicaal</u> $\underline{n}$ van een ring R is de doorsnede van alle priemidealen van R.

ϕ injectief is, Spec(ϕ) surjectief is, want kies voor ϕ de natuurlijke injectie

$$\phi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

Spec($\mathbb{Z}$) bevat oneindig veel punten, en Spec($\mathbb{Q}$) maar één. Dus kan

$$\mathrm{Spec}(\phi)\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

nooit surjectief zijn. In bepaalde gevallen (cf. Prop. 1.39) kan Spec(ϕ) wel surjectief zijn.

1.32. <u>Definitie</u>: Als R, S twee ringen zijn, en $R \subset S$ (zodat R en S hetzelfde eenheidselement hebben) dan heet een element $s \in S$ <u>geheel over R</u> als er een betrekking

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_i \in R)$$

te vinden is.

1.33. <u>Definitie</u>: Als R, S twee ringen zijn en $R \subset S$ (zodat R en S hetzelfde eenheidselement hebben), dan heet S <u>geheel over R</u> als elke $s \in S$ geheel is over R.

1.34. <u>Definitie</u>: Een ring R heet een <u>lokale ring</u> als R precies één maximaal ideaal bevat.

1.35. <u>Opmerking</u>: <u>Als $\underline{p}$ een priemideaal is van R, dan is de ring $R_{\underline{p}}$ een lokale ring</u>.

<u>Bew</u>: De priemidealen van $R_{\underline{p}}$ corresponderen met de priemidealen $\underline{q}$ van R met $\underline{q} \subset \underline{p}$. Derhalve is het ideaal

$$\underline{p}.R_{\underline{p}} = \{\tfrac{r}{s} \in R_{\underline{p}} \mid r \in \underline{p}\}$$

het unieke maximale ideaal van $R_{\underline{p}}$.

<u>Opmerking</u>: <u>Een ring R is lokaal als de niet-eenheden van R een ideaal vormen</u> (Ga na).

1.36. Lemma: (Cf. Mumford [M], pag. 8)

Zij R een lichaam en $S \subset R$ een deelring (zodat R en S hetzelfde eenheidselement hebben). Als R geheel is over S, dan is ook S een lichaam.

Bew: Zij $a \in S$, $a \neq 0$. Dan $\frac{1}{a} \in R$, dus hebben we een vergelijking

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n + b_1\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \qquad (b_i \in S)$$

Dus: $$\frac{1}{a} + b_1 + \ldots + a^{n-1}b_n = 0$$

Oftewel: $$\frac{1}{a} = -[b_1 + \ldots + a^{n-1}b_n] \in S$$

Dus is ook S een lichaam.

1.37. Lemma: *Als A, B twee ringen zijn, zodat $A \subset B$ (terwijl A en B hetzelfde eenheidselement hebben) en B geheel is over A, en als bovendien A een lokale ring is met maximaal ideaal $\underline{p}$, dan bestaat een priemideaal $\underline{p}' \subset B$, zodat $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$.*

Bew: Omdat A lokaal is, geldt voor elk ideaal $\underline{a} \subset B$ dat $\underline{a} \cap A \subset \underline{p}$. Zij nu $\underline{p}'$ een maximaal ideaal van B. We hebben dan het diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{p}' \arrow[r] & B \arrow[r] & B/\underline{p}' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{p}' \cap A \arrow[r] \arrow[u, hook] & A \arrow[r] \arrow[u, hook] & A/\underline{p}' \cap A \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

$B/\underline{p}'$ is een lichaam, en het is direkt in te zien dat $B/\underline{p}'$ geheel is over $A/\underline{p}' \cap A$, omdat B geheel is over A. Dus is volgens lemma 1.36 $A/\underline{p}' \cap A$ een lichaam, zodat $\underline{p}' \cap A$ een maximaal ideaal is in A. Derhalve (omdat A een lokale ring is) geldt: $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$.

1.38. Propositie: ("Lying-over theorem" van Cohen-Seidenberg)

Als $A \subset B$ twee ingeschakelde ringen zijn met hetzelfde eenheidselement, terwijl B geheel is over A, dan is er voor elk priemideaal $\underline{p} \subset A$ een priemideaal $\underline{p}' \subset B$ te vinden, zodat $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$.

<u>Bew</u>: (Cf. Mumford [M], pag. 6).
Kies $S := A \setminus \underline{p}$. Dit is een multiplicatieve deelverzameling voor A zowel als voor B. We hebben dus ringen $S^{-1}A$ en $S^{-1}B$, terwijl $S^{-1}A = A_{\underline{p}}$, een lokale ring met maximaal ideaal $\underline{p}.A_{\underline{p}}$ is (Cf. opm. 1.35).

Als we noteren:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & S^{-1}B \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{i} & S^{-1}A = A_{\underline{p}} \end{array} \qquad (j(b) = \tfrac{b}{1},\ i(a) = \tfrac{a}{1})$$

dan geldt: $i(\underline{p}).S^{-1}A = \underline{p}.A_{\underline{p}}$. Er geldt: $\underline{p} = i^{-1}(i(\underline{p}).S^{-1}A)$ (Cf. Prop. 1.22).
Bovendien is $S^{-1}B$ geheel over $S^{-1}A$, want als

$$\frac{b}{s} \in S^{-1}B,$$

dan hebben we, omdat B geheel is over A een vergelijking

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_i \in A)$$

en derhalve: $$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{s^n} = 0 \qquad \left(\frac{a_i}{s^i} \in S^{-1}A\right)$$

Volgens lemma 1.37 bestaat er nu een priemideaal $\underline{p}^* \subset S^{-1}B$ zodat

$$\underline{p}^* \cap S^{-1}A = i(\underline{p})S^{-1}A$$

Als we kiezen $\underline{p}' := j^{-1}(\underline{p}^*)$, volgt hieruit:

$$\underline{p}' \cap A = j^{-1}(\underline{p}^*) \cap A = i^{-1}(\underline{p}^* \cap S^{-1}A) = i^{-1}(i(\underline{p}).S^{-1}A) = \underline{p} .$$

1.39. <u>Propositie</u>: <u>Als</u> $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ <u>een injectief morphisme van ringen is, en als</u> B <u>geheel is over</u> A, <u>dan is</u>

$$\mathrm{Spec}(i) \colon \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

<u>een surjectief morphisme</u>.

<u>Bew</u>: Als $y_{\underline{q}} \in \mathrm{Spec}(B)$, dan $\mathrm{Spec}(i)\,(y_{\underline{q}}) = x_{i^{-1}(\underline{q})}$
en $i^{-1}(\underline{q}) = \underline{q} \cap A$.

De bewering volgt dus direkt uit propositie 1.38.

1.40. <u>Propositie</u>: <u>Zij</u> ϕ: A $\longrightarrow$ B <u>een morphisme van ringen</u>. <u>Dan induceert dit</u> Spec(ϕ): Spec(B) $\longrightarrow$ Spec(A). <u>Als</u> $\underline{n}$ <u>het nilradicaal is van</u> A, <u>dan geldt</u>: <u>Spec ϕ(Spec B) dicht in Spec A dan en slechts dan als</u> Ker(ϕ) $\subset \underline{n}$.

<u>Bew</u>: Spec(A) $\simeq$ Spec(A/$\underline{n}$), dus kunnen we aannemen: $\underline{n}$ = (0). De voorwaarde Ker(ϕ) $\subset \underline{n}$ wordt dan dus: ϕ injectief. We kunnen dan A met een deelring van B identificeren en schrijven: $\phi^{-1}\underline{q} = \underline{q} \cap A$ voor elk priemideaal $\underline{q}$ van B.

(i) Zij Spec ϕ (Spec B) dicht in Spec A. Dat wil zeggen:

$$\overline{\text{Spec } \phi \text{ (Spec B)}} = VJ(\text{Spec } \phi \text{ (Spec B)}) = \text{Spec A}$$

Dus: $$\forall \underline{p} \subset A \;.\; \underline{p} \supset \bigcap_{\underline{q} \subset B} \phi^{-1}\underline{q}$$

waaruit volgt: $(0) = \underline{n} = \bigcap_{\underline{p} \subset A} \underline{p} \supset \bigcap_{\underline{q} \subset B} \phi^{-1}\underline{q} \supset \text{Ker } \phi.$

(ii) Zij $\underline{n}$ = (0), ϕ injectief. Laat $\underline{n}$(B) het nilradicaal van B zijn. Dan moet $\underline{n}(B) \cap A = (0)$, omdat wegens $\underline{n}$ = (0) A geen nilpotenten bevat. Dan geldt:

$$\text{Spec A} = V(\underline{n}(B) \cap A) = V(\bigcap_{\underline{q} \subset B} \underline{q} \cap A) = VJ(\text{Spec } \phi \text{ (Spec B)}).$$

§1a. Voorbeelden bij §1

Enige voorbeelden van ring-spectra.

(i) R:= k, een lichaam.

De priemidealen van k zijn (0) en k. Het spectrum van k bestaat derhalve uit één punt:

$$\bullet x_{(0)}$$

(ii) R:= $\mathbb{Z}$

De echte priemidealen zijn van de vorm $p\mathbb{Z}$, waarbij p een priemgetal is, benevens het nul-ideaal (0). ($\mathbb{Z}$ heeft geen nuldelers)
Het spectrum van $\mathbb{Z}$ kan dus worden voorgesteld als een verzameling punten

$$\{x_p \mid p \ \text{priemgetal}\} ,$$

verenigd met $\{x_{(0)}\}$.
Tussen de priemidealen (p) en (q) bestaat geen inclusie-relatie, maar wel geldt steeds:

$$x_{(0)} \succ x_p .$$

(Cf. Opm. 1.14). We geven Spec $\mathbb{Z}$ weer door:

$$x_2 \quad x_3 \quad x_5 \quad x_7 \quad x_{11} \dots \qquad\qquad x_{(0)}$$

De gesloten verzamelingen: Kies een ideaal $n\mathbb{Z}$, en zij

$$0 \neq n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

de ontbinding van n in priemfactoren. Dan zijn de priemidealen $p\mathbb{Z}$ die $n\mathbb{Z}$ omvatten de volgende:

$$\{p_1, \dots, p_k\} .$$

Hieruit volgt:

$$V(n\mathbb{Z}) = \{x_{p_1},\dots,x_{p_n}\} . \qquad \text{(Cf. def. 1.1)}$$

Als we n = 0 hadden gekozen, zouden we vinden:

$$V((0)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

want (0) is bevat in elk priemideaal. De gesloten verzamelingen van Spec $\mathbb{Z}$ zijn dus:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \emptyset \text{ en } \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \\ \text{(ii)} & \text{Alle eindige verzamelingen punten } x_p \text{ met } p \neq 0 . \end{cases}$$

De <u>open verzamelingen</u> van Spec($\mathbb{Z}$) verkrijgt men dus, behalve $\emptyset$ en Spec($\mathbb{Z}$) zelf, door uit Spec($\mathbb{Z}$) een eindig aantal punten x_p, $p \neq 0$ weg te laten. De <u>gesloten punten</u> van Spec($\mathbb{Z}$) zijn de punten, die behoren bij maximale idealen (Cf. Opm. 1.7); d.w.z.: alle punten x_p met $p \neq 0$. Het enige niet-gesloten punt is $x_{(0)}$. De afsluiting van $x_{(0)}$ is:

$$V(J(x_{(0)})) = V((0)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) .$$

(Cf. Opm. 1.6). $x_{(0)}$ is dus het <u>algemene punt</u> van Spec($\mathbb{Z}$) (Cf. def. 1.10).

(iii) <u>R:= $\mathbb{C}[X]$</u> (of, in het algemeen: $R = k[X]$, waarbij k een algebraïsch afgesloten lichaam is)

Dit geval is analoog aan geval (ii). $\mathbb{C}[X]$ is een hoofdideaalring zonder nuldelers. De priemidealen zijn, behalve het nul-ideaal van de vorm

$$(X-\alpha)\ \mathbb{C}[X] . \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) .$$

Bovendien bestaat tussen twee priemidealen $(X-\alpha)\ \mathbb{C}[X]$, $(X-\beta)\ \mathbb{C}[X]$ geen inclusie-relatie, zodat de partiële ordening tussen de punten van Spec($\mathbb{C}[X]$) gegeven wordt door de relaties

$$(0) \succ (X-\alpha)\ \mathbb{C}[X] \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) .$$

We kunnen dus met elk punt van Spec($\mathbb{C}[X]$) associëren: een punt α op de affiene complexe rechte. Bovendien hebben we nog een <u>algemeen punt</u> (0). We kunnen Spec($\mathbb{C}[X]$) aangeven met:

β,γ etc.

$\alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_{(0)}$

Elk ideaal $\underline{i}$ van $\mathbb{C}[X]$ wordt gegeven door het voortbrengende polynoom $f(X)$. Ontbinding geeft

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i^{\,t_i}) \; .$$

En dus $V(\underline{i}) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. De <u>gesloten verzamelingen</u> zijn dus weer:

(i) $\emptyset$ en Spec($\mathbb{C}[X]$)

(ii) Verzamelingen van eindig veel punten op de affiene rechte.

(iv) $\underline{R_1 := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \; ; \; R_2 := \mathbb{Z}_p}$

$\mathbb{Z}_p = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \mid s \notin \underline{p}\}$ heeft twee priemidealen, nl. (0) en $p.\mathbb{Z}_p$ (p is een priemgetal) (Cf. gevolg 1.23). Dus bevat Spec $\mathbb{Z}_p$ twee punten. Bovendien is er een ordeningsrelatie:

$$x_{(0)} > x_{p.\mathbb{Z}_p}$$

Evenzo heeft $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ twee priemidealen, nl. $\mathbb{C} \oplus 0$ en $0 \oplus \mathbb{C}$. De punten van $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ voldoen dus niet aan een ordeningsrelatie. ((0) is geen priemideaal van $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, want deze ring heeft nuldelers.)

Analoog als in (ii) vindt men dat $x_{(0)}$ algemeen punt is van Spec($\mathbb{Z}_p$), zodat <u>Spec($\mathbb{Z}_p$) irreducibel is</u>. (Cf. Opm. 1.12).

<u>Spec($\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$) daarentegen is niet irreducibel</u>, want is de vereniging van (als $\underline{p}_1 := \mathbb{C} \oplus 0$, $\underline{p}_2 := 0 \oplus \mathbb{C}$)

$$\{x_{\underline{p}_1}\} \text{ en } \{x_{\underline{p}_2}\}$$

en dit zijn, omdat $\underline{p}_1$ en $\underline{p}_2$ beide maximale idealen zijn, twee echte gesloten deelverzamelingen van $\mathrm{Spec}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$.

We geven beide ruimten als volgt weer:

$x_{p\mathbb{Z}_p}$ —————— $x_{(0)}$ $\qquad$ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ $\quad (x_{(0)} \succ x_{p\mathbb{Z}_p})$

$x_{\underline{p}_1} \qquad x_{\underline{p}_2}$ $\qquad$ $\mathrm{Spec}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$

(v) $\quad \underline{\mathrm{Spec}(R_1 \oplus R_2) = \mathrm{Spec}(R_1) \amalg \mathrm{Spec}(R_2)}$ $\qquad$ (disj. vereniging)

Elk priemideaal $\underline{p} \subset R_1 \oplus R_2$ is van één der gedaanten:

(i) $\quad \underline{p} = \underline{p}_1 \oplus R_2 \qquad (\underline{p}_1$ priemideaal in $R_1)$

(ii) $\quad \underline{p} = R_1 \oplus \underline{p}_2 \qquad (\underline{p}_2$ priemideaal in $R_2)$

(want stel:

$$\forall x \in R_1 \,.\, (x,1) \notin \underline{p} \quad \text{èn} \quad \forall y \in R_2 \,.\, (1,y) \notin \underline{p}$$

dan zou $\forall (x,y) \in R_1 \oplus R_2 \,.\, (x,1)(1,y) = (x,y) \notin \underline{p}$, tegenspraak. Dus is er een element $(x,1)$ of $(1,y)$ bevat in $\underline{p}$. Zeg: $(x_0,1) \notin \underline{p}$. Dan geldt:

$$\underline{p} = \underline{p}_1 \oplus R_2 \quad , \quad \underline{p}_1 = \{x \mid (x,0) \in \underline{p}\}$$

want: (i) $\quad (x,y) \in \underline{p} \Longrightarrow (1,0)(x,y) = (x,0) \in \underline{p} \Longrightarrow (x,y) \in \underline{p}_1 \oplus R_2$.
Dus:

$$\underline{p} \subset \underline{p}_1 \oplus R_2$$

en: (ii) $\quad (x,y) \in \underline{p}_1 \oplus R_2 \Rightarrow (x,0) \in \underline{p}$.
Ook: $\quad (x_0,1) \in \underline{p} \Rightarrow (0,y) = (x_0,1)(0,y) \in \underline{p}$ $\quad \Big\} \Rightarrow (x,y) \in \underline{p}$
en derhalve:

$$\underline{p} \supset \underline{p}_1 \oplus R_2 \,.)$$

We hebben dan de bijectie:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(R_1 \oplus R_2) & \rightleftarrows & \mathrm{Spec}(R_1) \amalg \mathrm{Spec}(R_2) \\ x_{\mathfrak{p}_1 \oplus R_2} & \longleftrightarrow & x_{\mathfrak{p}_1} \\ x_{R_2 \oplus \mathfrak{p}_1} & \longleftrightarrow & \qquad\qquad x_{\mathfrak{p}_2} \end{array}$$

Voorts is deze bijectie een homeomorfisme, want, zoals direkt valt in te zien:

$$D(a_1,a_2) = D(a_1) \amalg D(a_2)$$

voor elk open basiselement $D(a_1,a_2) \subset \mathrm{Spec}(R_1 \oplus R_2)$.

(vi) <u>$R = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X,Y]$</u>

We hebben in $\mathbb{C}[X,Y]$ drie soorten priemidealen, nl.:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{het nulideaal } (0) \\ \text{(ii)} & \text{hoofdidealen } (f(X,Y)) \text{ waarbij } f(X,Y) \text{ een irreducibel} \\ & \text{polynoom is} \\ \text{(iii)} & \text{maximale idealen } (X-\alpha, Y-\beta) \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

(We zullen hier niet bewijzen dat dit alle priemidealen van $\mathbb{C}[X,Y]$ zijn). De partiële ordening der punten van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ is van het type, zoals in het volgende voorbeeld:

$$(0) \succ (X+Y^2) \succ (X-1,Y-i)\ .$$

Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ kunnen we voorstellen, door <u>als punten</u> te nemen:

$$\begin{cases} \text{(i)} & (0) & \longleftrightarrow & \text{het complexe affiene vlak } \mathbb{C}^2 \\ \text{(ii)} & (f(X,Y)) & \longleftrightarrow & \text{de (irreducibele) kromme } f(X,Y)=0 \text{ op } \mathbb{C}^2 \\ \text{(iii)} & (X-\alpha,Y-\beta) & \longleftrightarrow & \text{het punt } (\alpha,\beta) \text{ van } \mathbb{C}^2 \end{cases}$$

(<u>Opm. hierbij</u>: Elk polynoom $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ kunnen we opvatten als een functie:

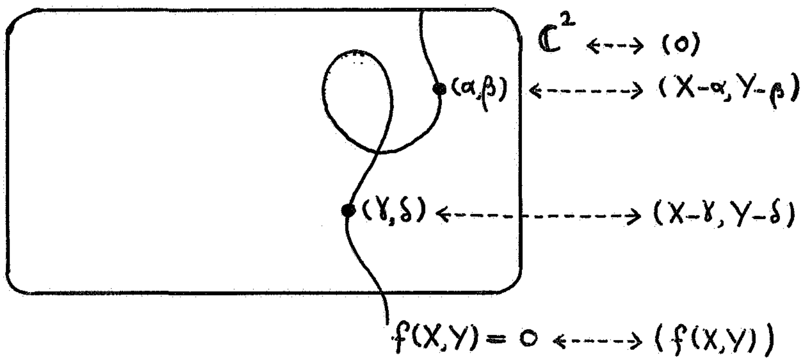
$$f(X,Y):\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\alpha,\beta) \longmapsto f(\alpha,\beta)\ .$$

Als nu $\underline{i}$ een ideaal is in $\mathbb{C}[X,Y]$, dan kunnen we spreken over de punten op $\mathbb{C}^2$, waar alle polynomen uit $\underline{i}$ de waarde 0 aannemen. (Hier: punten opgevat als "meetkundige punten in het complexe vlak", dus van type (α,β)).
Bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{bij } (0) \text{ behoort } \mathbb{C}^2 \\ \text{(ii)} & \text{bij } (f(X,Y)) \text{ behoort de kromme } f(X,Y) = 0 \\ \text{(iii)} & \text{bij } (X-\alpha,Y-\beta) \text{ behoort het punt } (\alpha,\beta) \end{cases}$$

Dit induceert op intuïtieve wijze de correspondentie tussen de priemidealen van $\mathbb{C}[X,Y]$ en de punten van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ in bovenstaande voorstellingswijze.
Ook geeft dit een intuïtief beeld van de partiële ordening tussen <u>punten</u> van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$. Nl.: $(X-\alpha,Y-\beta) < (f(X,Y)) \iff (\alpha,\beta)$ ligt op de kromme $f(X,Y) = 0 \iff (f(X,Y)) \subset (X-\alpha,Y-\beta)$.).



$$(0) > (f(X,Y)) > \begin{cases} (X-\alpha,Y-\beta) \\ (X-\gamma,Y-\delta) \end{cases}.$$

De <u>gesloten verzamelingen</u> van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$.
$\mathbb{C}[X,Y]$ is een noetherse ring *).
Derhalve kunnen we elk ideaal $\underline{a}$ van $\mathbb{C}[X,Y]$ schrijven:

$$\underline{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \underline{q}_i \qquad (\underline{q}_i \text{ primaire idealen})$$ **)

---

*), **) Zie appendix.

Dan is voor elke i $\underline{p}_i := \sqrt{\underline{q}_i}$ een priemideaal, en geldt:

$$\sqrt{\underline{a}} = \bigcap_{i=1}^{n} \underline{p}_i \ .$$

Een gesloten verzameling van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ krijgen we nu door:

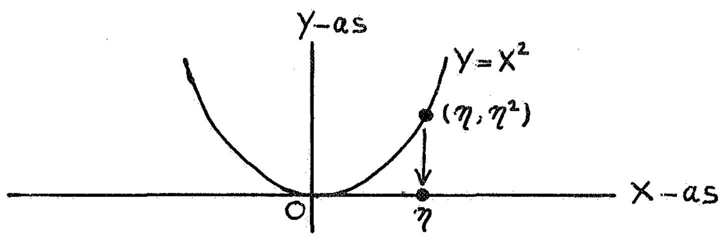
$$V(\underline{a}) = V(\sqrt{\underline{a}}) = V(\underline{p}_1 \cap \ldots \cap \underline{p}_n) = V(\underline{p}_1) \cup \ldots \cup V(\underline{p}_n)$$

(i) Als $\underline{p}_i$ een maximaal ideaal is, dan $V(\underline{p}_i) = \{x_{\underline{p}_i}\}$.

(ii) Als $\underline{p}_i$ niet maximaal is, doch $\neq (0)$, dan is $V(\underline{p}_i)$ de verzameling van de punten uit Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ die "op de door $\underline{p}_i = (f_i(X,Y))$ bepaalde kromme liggen" plus de kromme zelf (als punt).

Concluderend kunnen we zeggen dat de gesloten verzamelingen van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ verkregen worden door een eindig aantal gesloten punten te nemen en een eindig aantal krommen (d.w.z.: alle gesloten punten "op die kromme" èn de kromme zelf).

(vii) <u>De projectie van de parabool $Y = X^2$ op de X-as.</u>



Beschouw het irreducibele polynoom $Y - X^2$, waar de parabool de nul-punten verzameling van is. $(Y-X^2)$ is een priemideaal van $\mathbb{C}[X,Y]$, en de gesloten verzameling $V(Y-X^2)$ bestaat uit de punten (η,η^2) op de parabool plus de parabool zelf als algemeen punt.

Volgens Prop. 1.16 geldt:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[X,Y] \big/ (Y-X^2)\right) = V((Y-X^2)) \ .$$

Evenzo:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[X,Y] \big/ (Y)\right) = V((Y))$$

(De punten $(\eta,0)$ op de X-as plus de X-as zelf als algemeen punt).

Beschouw nu:

$$R_1 := \mathbb{C}[X,Y]/(Y) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2) =: R_2$$

$$X \longmapsto X$$

Dan is Spec(ϕ) de gegeven projectie. Hiertoe tonen we aan dat Spec(ϕ) $(\eta,\eta^2) = (\eta,0)$. Dit wil zeggen: Er moet gelden dat als $\underline{m} = (\bar{X}-\eta, \bar{Y}-\eta^2) \subset R_2$, $\underline{n} = (\bar{X}-\eta) \subset R_1$, dat

$$\phi^{-1}(\underline{m}) = \underline{n} .$$

Dit volgt door directe verificatie.

(viii) <u>Spec $\mathbb{Z}[X]$</u>

a) De priemidealen van $\mathbb{Z}[X]$ die $p.\mathbb{Z}[X]$ omvatten (waarbij p een priemgetal is) corresponderen volgens prop. 1.15 met de priemidealen van

$$\mathbb{Z}[X]/p\mathbb{Z}[X] \simeq \mathbb{Z}/(p)[X] .$$

Deze priemidealen van $\mathbb{Z}[X]$ zijn dus van de vorm $(p,f(X))$ waarbij $f(X)$ (mod p) irreducibel is in $\mathbb{Z}/(p)[X]$, met hoogste coeff. 1, en het nul-polynoom.

b) De priemidealen van $\mathbb{Z}[X]$ die in $p.\mathbb{Z}[X]$ bevat zijn, zijn uiteraard alleen (0) en $p.\mathbb{Z}[X]$ zelf.

Zij nu $\underline{q} \subset \mathbb{Z}[X]$ een priemideaal met $\underline{q} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. Dan is er een $n \neq 0,1$ zodat $n \in \underline{q}$, dus is er een priemgetal $p \in \mathbb{Z}$ zodat $p.\mathbb{Z}[X] \subset \underline{q}$. M.a.w. alle priemidealen $\underline{q}$ van $\mathbb{Z}[X]$ met $\underline{q} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$ zijn onder a) en b) gekarakteriseerd.

c) Beschouw nu een priemideaal $\underline{q}$ van $\mathbb{Z}[X]$ met $\underline{q} \cap \mathbb{Z} = (0)$. Dan is er een polynoom $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ met minimale graad en g.g.d. der coëfficiënten =1 dat bevat is in $\underline{q}$. Zeg:

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \quad , \text{(g.g.d. (coeff.) = 1)} .$$

Dan moet $f(X)$ irreducibel zijn in $\mathbb{Q}[X]$. (Ga na).
De priemidealen $\underline{q}$ van $\mathbb{Z}[X]$ met $\underline{q} \cap \mathbb{Z} = (0)$ hebben dan de vorm $(f(X))$, met g.g.d. der coëfficiënten van $f(X) = 1$ en $f(X)$ irreducibel in $\mathbb{Q}[X]$. (Ga na).

Samenvattend:
De priemidealen van $\mathbb{Z}[X]$ zijn:

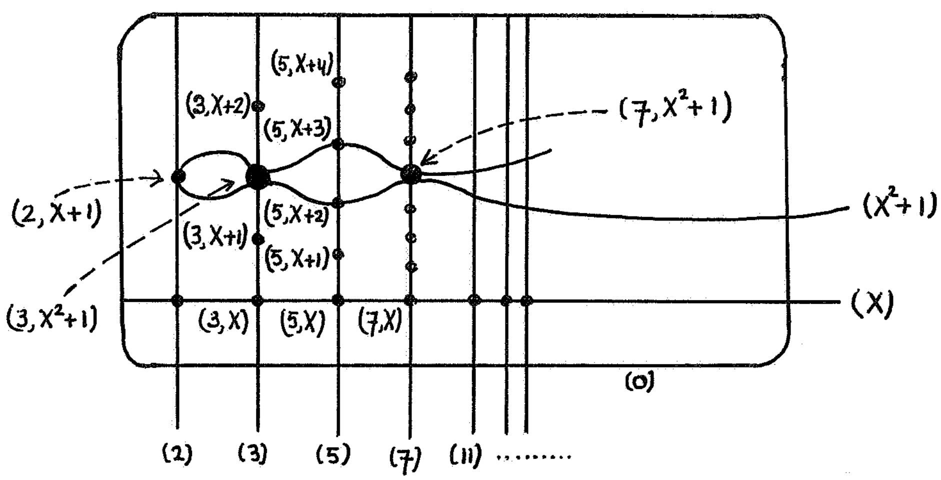
- (i) het nul-ideaal (0)
- (ii)[a] hoofdidealen $(f(X))$ waarbij de coëff. van $f(X)$ een g.g.d. $=1$ hebben en $f(X)$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.
- (ii)[b] de hoofdidealen $p\mathbb{Z}[X]$, waarbij p een priemgetal is in $\mathbb{Z}$.
- (iii) de maximale idealen $(p,f(X))$ waarbij p een priemgetal in $\mathbb{Z}$ is en $f(X)$ (mod p) irreducibel is in $\mathbb{Z}/_{(p)}[X]$.

De partiële ordening der punten van Spec $\mathbb{Z}[X]$ wordt gesuggereerd door het voorbeeld:

$$\begin{cases} (0) \succ (p) \succ (p,f(x)) \\ (0) \succ (f(x)) \succ (p,f(x)) \end{cases}$$

tussen de hoofdidealen bestaat nimmer een orde relatie, evenmin als tussen de maximale idealen.

Derhalve kunnen we Spec $\mathbb{Z}[X]$ voorstellen door de figuur (Cf. Mumford [M] Ch. II pag. 141):



(i) X is irreducibel in elke $\mathbb{Z}/_{(p)}[X]$. Dus voor alle priemgetallen p is (p,X) een maximaal ideaal.

(ii) (p,X^2+1) is een priemideaal, dan en slechts dan, als $(X^2+1)(\text{mod } p)$ irreducibel is in $\mathbb{Z}/_{(p)}[X]$.
Welnu:

$\underline{p = 2}$: $X^2 + 1 = (X+1)^2$

$\underline{p = 3}$: $X^2 + 1$ irreducibel

$\underline{p = 5}$: $X^2 + 1 = (X+2)(X+3)$

$\underline{p = 7}$: $X^2 + 1$ irreducibel

$\vdots \qquad \vdots$

Dus $(3,X^2+1),(7,X^2+1),\ldots$ zijn maximale idealen.

Opm: Merk op dat $V((X^2+1)) = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X]/_{(X^2+1)}) = \text{Spec}(\mathbb{Z}[i])$. Het is duidelijk dat $\mathbb{Z}[i]$ geheel is over $\mathbb{Z}$. Ga na, dat de projectie van $V((X^2+1))$ op $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, zoals in bovenstaande figuur aangegeven, bijv:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2,X+1) & \longmapsto & (2) \\ (3,X^2+1) & \longmapsto & (3) \\ (5,X+2),(5,X+3) & \longmapsto & (5) \\ \text{etc.} & & \end{array}\right.$$

precies de surjectie (prop. 1.38) $\text{Spec}(\mathbb{Z}[i]) \twoheadrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ is.

§2. Affiene schema's

Zij $(I,<)$ een partiëel geordend systeem. We kunnen $(I,<)$ opvatten als een categorie:

(i) De objecten zijn de elementen van I

(ii) De morphismen verkrijgen we als volgt: Er is precies één morphisme $\phi^{\alpha}_{\beta}: \alpha \rightarrow \beta$ dan en slechts dan als $\alpha < \beta$. Vervolgens stellen we per definitie vast: Als $\alpha < \beta < \gamma$, dan

$$\phi^{\alpha}_{\gamma} = \phi^{\beta}_{\gamma}\, \phi^{\alpha}_{\beta} .$$

Uit de laatste afspraak volgt, dat ϕ^{α}_{α} zich voor elke $\alpha \in I$ gedraagt als de identiteit op α. Hiermee is $(I,<)$ een categorie.

Als X een topologische ruimte is, en $\mathcal{U}$ de familie van open verzamelingen van X, dan kunnen we op $\mathcal{U}$ een partiële ordening vastleggen door te kiezen:

$$U_1, U_2 \in \mathcal{U}, \quad U_1 < U_2 \Longleftrightarrow U_1 \subset U_2 .$$

Definitie 2.1: De categorie $(\mathcal{U},<)$ geven we aan met $\underline{X}$.

Definitie 2.2: Zij X een topologische ruimte, met de volgens def. 2.1 geïnduceerde categorie $\underline{X}$.
Zij $\underline{C}$ een categorie.
Een preschoof $\mathcal{O}$ op X met waarden in $\underline{C}$ is een contravariant functor

$$\mathcal{O}: \underline{X} \longrightarrow \underline{C}.$$

(We zullen ons hier beperken tot gevallen waarin $\underline{C}$ een categorie is als $\underline{\text{Ens}}$, $\underline{\text{Ab}}$, $\underline{\text{Gr}}$, $\underline{\text{CRg}}$, etc., zodat we steeds bij elk object uit $\underline{C}$ een onderliggende verzameling hebben).

Notatie 2.3: Als $U_1, U_2 \in \underline{X}$ en $U_1 < U_2$, dan hebben we het morfisme:

$$\phi^{U_1}_{U_2} : U_1 \longrightarrow U_2 .$$

Als $\mathcal{O}$: $\underline{X} \longrightarrow \underline{C}$ een preschoof is, dan induceert dit:

$$\rho_{U_2}^{U_1} := \mathcal{O}(\phi_{U_2}^{U_1}) : \mathcal{O}(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1).$$

Als $s \in \mathcal{O}(U_2)$, dan heet $\rho_{U_2}^{U_1}(s)$ de <u>restrictie van s tot U_1</u>, en we noteren soms:

$$s \mid U_1 := \rho_{U_2}^{U_1}(s).$$

Laat nu $\underline{C}$ een vast gekozen categorie zijn, en laat verder

$$f: X \longrightarrow Y$$

een continue afbeelding van twee topologische ruimten zijn. We noteren weer (zoals steeds):

$$\phi_{U_2}^{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2 \quad \text{en} \quad \phi_{V_2}^{V_1}: V_1 \longrightarrow V_2 \quad \text{als}$$

$U_1, U_2 \in \underline{X}$; $U_1 < U_2$ en als $V_1, V_2 \in \underline{Y}$; $V_1 < V_2$.

<u>Definitie 2.4</u>: f induceert dan een <u>covariante functor</u>

$$\underline{f}: \underline{Y} \longrightarrow \underline{X}$$

gedefinieerd door:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \underline{f}(V) := f^{-1}V \quad \text{als } V \in \underline{Y} \\ \text{(ii)} & \underline{f}(\phi_{V_2}^{V_1}) := \phi_{f^{-1}V_2}^{f^{-1}V_1} \quad \text{als } V_1 < V_2 \,. \end{cases}$$

Als nu $\mathcal{O}_X$: $\underline{X} \rightarrow \underline{C}$ en $\mathcal{O}_Y$: $\underline{Y} \rightarrow \underline{C}$ twee preschoven zijn en f: $X \rightarrow Y$ een continue afbeelding is, dan hebben we het paar contravariante functoren:

$$\begin{cases} \underline{Y} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{X} \xrightarrow{\mathcal{O}_X} \underline{C} \\ \underline{Y} \xrightarrow{\quad \mathcal{O}_Y \quad} \underline{C} \end{cases}$$

<u>Definitie 2.5</u>: We zeggen dat

$$(f,\Phi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

een <u>morphisme van preschoven</u> is, als geldt:

$$\begin{cases} \text{(i)} & f\colon X \longrightarrow Y \text{ is een continue afbeelding} \\ \text{(ii)} & \Phi(-)\colon \mathcal{O}_Y(-) \longrightarrow \mathcal{O}_X \circ \underline{f}(-) \text{ is functoriëel.} \end{cases}$$

<u>Opmerking 2.6</u>: De eis (ii) in def. 2.5 wil zeggen: Voor elke $V \in \underline{Y}$ bestaat er een $\underline{C}$-morphisme

$$\Phi(V)\colon \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X \circ \underline{f}(V)$$

zodat voor elk paar $V_1, V_2 \in \underline{Y}$ met $V_1 < V_2$ (dus $\phi_{V_2}^{V_1}\colon V_1 \longrightarrow V_2$) het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(V_2) \arrow[r, "\mathcal{O}_Y(\phi_{V_1}^{V_2})"'] \arrow[d, "\Phi(V_2)"'] & \mathcal{O}_Y(V_1) \arrow[d, "\Phi(V_1)"] \\
\mathcal{O}_X \circ \underline{f}(V_2) \arrow[r, "\mathcal{O}_X \circ \underline{f}(\phi_{V_2}^{V_1})"'] & \mathcal{O}_X \circ \underline{f}(V_1)
\end{tikzcd}$$

commuteert.

<u>Opmerking 2.7</u>: (<u>Het samenstellen van twee morphismen van preschoven</u>).

Laten $(f,\Phi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ en $(g,\Psi)\colon (Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Z,\mathcal{O}_Z)$ twee morphismen van preschoven zijn.

We hebben dan het volgende commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z(W) \arrow[r, "\Psi(W)"] \arrow[d, "\mathcal{O}_Z(\phi_W^V)"] & \mathcal{O}_Y \circ \underline{g}(W) = \mathcal{O}_Y(g^{-1}W) \arrow[r, "\Phi(g^{-1}W)"] \arrow[d, "\mathcal{O}_Y(\phi_{g^{-1}W}^{g^{-1}V})"] & \mathcal{O}_X \circ \underline{f}(g^{-1}W) = \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(W)) \arrow[d, "\mathcal{O}_X(\phi_{f^{-1}g^{-1}W}^{f^{-1}g^{-1}V})"] \\
\mathcal{O}_Z(V) \arrow[r, "\Psi(V)"'] & \mathcal{O}_Y \circ \underline{g}(V) = \mathcal{O}_Y(g^{-1}V) \arrow[r, "\Phi(g^{-1}V)"'] & \mathcal{O}_X \circ \underline{f}(g^{-1}V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}V)
\end{tikzcd}$$

D.w.z.: Als we definiëren

$$\Phi\Psi(V) := \Phi(g^{-1}V)\circ\Psi(V)$$

dan is $\Phi\Psi(-)$: $\mathcal{O}_Z(-) \longrightarrow \mathcal{O}_X \circ \underline{gf}(-)$ een functorieël morphisme. Met andere woorden: We hebben het morphisme van preschoven:

$$(gf,\Phi\Psi): (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

(de samenstelling van (f,Φ) en (g,Ψ)).

Propositie 2.8: Uit het voorgaande blijkt: De preschoven met waarden in $\underline{C}$ vormen een categorie $\mathcal{P}[-,\underline{C}]$.

Definitie 2.9: Een categorie $\underline{D}$ heet een volle deelcategorie van $\underline{C}$ als

(i) $\quad \mathrm{Obj}(\underline{D}) \subset \mathrm{Obj}(\underline{C})$

(ii) $\quad \forall A,B \in \mathrm{Obj}(\underline{D}).\ \ \underline{D}(A,B) = \underline{C}(A,B)$

Definitie 2.10: Zij $\underline{C}$ nu de categorie $\underline{CRg}$ *), en laat

$$\mathcal{O}_X: \underline{X} \longrightarrow \underline{C}$$

een preschoof zijn.

$\mathcal{O}_X$ heet een schoof van ringen *) als geldt:

Voor iedere collectie $(U_i)_{i\in I}$ van open verzamelingen in X met

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

geldt:

---

*) We kunnen ook categorieën als $\underline{Ens}$, $\underline{Ab}$, $\underline{Gr}$, etc. nemen i.p.v. $\underline{CRg}$. We krijgen dan schoven van verzamelingen, van abelse groepen, etc. We definiëren voorts de categorie $S[-,\underline{C}]$ als de volle deelcategorie van $\mathcal{P}[-,\underline{C}]$, bepaald door de schoven in $\mathcal{P}[-,\underline{C}]$.
(Merk op dat in definitie 2.10 gebruik is gemaakt van het feit dat de objecten uit $\underline{C}$ (in dit geval dus ringen) een onderliggende verzameling hadden. Wij zullen in het vervolg alleen schoven beschouwen die deze eigenschap hebben).

(i) Als $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_X(U)$ en $\forall i \in I.\ x_1|U_i = x_2|U_i$ dan is $x_1 = x_2$.

(ii) Als we een stel $\{x_i \mid x_i \in \mathcal{O}_X(U_i)\}_{i \in I}$ hebben dat voldoet aan:

$$\forall i,j \in I.\ x_i \mid U_i \cap U_j = x_j \mid U_i \cap U_j$$

dan is er een $x \in \mathcal{O}_X(U)$ zodat geldt:

$$\forall i \in I. \quad x \mid U_i = x_i \ .$$

<u>Propositie 2.11</u>. <u>Aan elke ring A kan op kanonieke manier een preschoof van ringen worden toegevoegd</u>.

<u>Bew</u>: Zij $X = \operatorname{Spec} A$.

(i) <u>Laat $U \subset X$ een kompakte open deelverzameling zijn</u>.

Definieer:

$$R := \left\{ \text{afbeeldingen } U \xrightarrow{r} A \times A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{als } r(x_{\underline{p}}) = (a_x, b_x), \text{ dan } b_x \notin \underline{p} \text{ en} \\ \text{voor elke } x,y \in U \text{ is } a_x b_y = b_x a_y \end{array} \right\}$$

Definieer nu als volgt een aequivalentie relatie op R:

$$r \sim r' \iff \begin{cases} \text{als } r(x_{\underline{p}}) = (a_x, b_x) \text{ en } r'(x_{\underline{p}}) = (a'_x, b'_x), \text{ dan} \\ \forall x_{\underline{p}} \in U: \exists c_x \in A \setminus \underline{p}.\ c_x(a_x b'_x - a'_x b_x) = 0 \ . \end{cases}$$

We kunnen $R/\sim$ dan een ring-structuur geven door te definiëren:

Als $\bar{r}, \bar{r}'$ de aequivalentie klassen zijn, waarin r resp. r' twee representanten zijn, gegeven door:

$$r: x \longmapsto (a_x, b_x) \ ; \quad r': x \longmapsto (a'_x, b'_x)$$

dan definiëren we:

<u>vermenigvuldiging</u>: $\bar{r}.\bar{r}': x \longmapsto (a_x a'_x, b_x b'_x)$

<u>optelling</u>: $\bar{r}+\bar{r}': x \longmapsto (a_x b'_x + a'_x b_x, b_x b'_x)$

We zullen verifiëren dat de optelling behoorlijk gedefinieerd is. (de vermenigvuldiging is analoog te controleren).

(a): <u>$r+r' \in R$</u>, want als $x = x_{\underline{p}}$, dan $b_x, b'_x \notin \underline{p}$ dus $b_x b'_x \notin \underline{p}$. Ook als $x,y \in U$, dan is

$$(a_x b'_x + a'_x b_x) b_y b'_y = (a_x b_y) b'_x b'_y + (a'_x b'_y) b_x b_y =$$

$$= (a_y b_x) b'_x b'_y + (a'_y b'_x) b_x b_y =$$

$$= (a_y b'_y + a'_y b_y) b_x b'_x .$$

(b): <u>Als $r \sim s$ en $r' \sim s'$, dan $r+r' \sim s+s'$</u>. Want, als

$$r: x \mapsto (a_x, b_x) \ ; \quad r': x \mapsto (a'_x, b'_x)$$

$$s: x \mapsto (\alpha_x, \beta_x) \ ; \quad s': x \mapsto (\alpha'_x, \beta'_x)$$

Dan:

$$r \sim s \iff \forall x_{\underline{p}} \in U \, \exists c_x \in A \setminus \underline{p}. \quad c_x(a_x \beta_x - \alpha_x b_x) = 0$$

$$r \sim s' \iff \forall x_{\underline{p}} \in U \, \exists c'_x \in A \setminus p. \quad c'_x(a'_x \beta'_x - \alpha'_x b'_x) = 0$$

Ook:

$$r+r' \sim s+s' \iff \forall x_{\underline{p}} \in U \, \exists t_x \in A \setminus \underline{p}. \ t_x \big[(a_x b'_x + a'_x b_x) \beta_x \beta'_x + \\ -(\alpha_x \beta'_x + \alpha'_x \beta_x) b_x b'_x \big] = 0 .$$

Welnu, kies $t_x = c_x c'_x \in A \setminus \underline{p}$. Dan geldt:

$$c_x c'_x \big[(a_x b'_x + a'_x b_x) \beta_x \beta'_x - (\alpha_x \beta'_x + \alpha'_x \beta_x) b_x b'_x \big] =$$

$$= \big[c_x(a_x \beta_x - \alpha_x b_x)\big] \, c'_x b'_x \beta'_x + \big[c'_x(a'_x \beta'_x - \alpha'_x b'_x)\big] c_x b_x \beta_x = 0.$$

Definieer nu, als $U = \emptyset$, dan $\mathcal{O}(U) := 0$, en als U een niet-lege kompakte open verzameling is, dan:

$$\mathcal{O}(U) := R/\sim .$$

Merk op: Als U,V twee kompakte open deelverzamelingen zijn van X, en $U \subset V$, dan hebben we een ringmorphisme

$$\rho_V^U : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U) ,$$

gedefinieerd door $\rho_V^U(\bar{r}) = \bar{s}$, waarbij, als r een representant is van $\bar{r}$, s wordt gevonden door r tot U te beperken. Ga na dat ρ_V^U hiermee een ringmorphisme is.

(ii) Zij nu U een open (niet noodzakelijk kompakte) deelverzameling van U. Omdat $\{D(a) \mid a \in A\}$ een basis is voor de open topologie van X, waarbij elke D(a) bovendien kompakt is, kunnen we, als $\{U_i\}_{i \in I}$ de collectie is van open kompakte deelverzamelingen van U, stellen:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Als $U_i \subset U_j$, dan hebben we een ringmorphisme

$$\rho_{U_j}^{U_i} : \mathcal{O}(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}(U_i)$$

Ook, als $U_i \subset U_j \subset U_k$, dan is $\rho_{U_j}^{U_i} \rho_{U_k}^{U_j} = \rho_{U_k}^{U_i}$, terwijl $\rho_{U_i}^{U_i}$ de identiteit is op $\mathcal{O}(U_i)$.

Derhalve is

$$\{\mathcal{O}(U_j);\ \rho_{U_j}^{U_i}\}_{U_i \subset U_j}$$

een projectief systeem *). Definieer nu:

$$(U) := \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}(U_i) \qquad *)$$

Zijn nu U, V twee open deelverzamelingen van X, zodat $U \subset V$. Laat gelden:

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{I} \mathcal{O}(U_i) \quad \text{en} \quad \mathcal{O}(V) = \varprojlim_{J} \mathcal{O}(V_j)$$

Omdat $U \subset V$, komt elke kompakte open deelverzameling U_i van U voor in de

*) zie appendix.

collectie $\{V_j\}$, dus $I \subset J$.
We schrijven:

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}(U_i) \quad \text{en} \quad \mathcal{O}(V) = \varprojlim_{i \in J} \mathcal{O}(U_i)$$

Beschouw nu $\bar{r} \in \mathcal{O}(V)$. Dan hebben we, vanwege de kanonieke morphismen

$$\varprojlim_{i \in J} \mathcal{O}(U_i) \xrightarrow{p_i} \mathcal{O}(U_i) \qquad (i \in J)$$

voor elke $i \in I$ een $p_i(\bar{r}) \in \mathcal{O}(U_i)$. Ook commuteren de diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}(U_{i_1}) \arrow[dd, "\rho^{U_{i_2}}_{U_{i_1}}"] \\
\mathcal{O}(V) \arrow[ur, "p_{i_1}"] \arrow[dr, "p_{i_2}"'] & \\
 & \mathcal{O}(U_{i_2})
\end{tikzcd}$$

voor elke $i_1, i_2 \in I$ als $U_{i_1} \subset U_{i_2}$. Derhalve hebben we wegens de definitie van projectieve limieten een uniek bepaald morphisme

$$\mathcal{O}(V) \xrightarrow{\rho^U_V} \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}(U_i) = \mathcal{O}(U).$$

Hiermee hebben we als $U \subset V$ ook de restricties gedefinieerd, en het is duidelijk dat deze definities compatibel zijn met die, gegeven in geval (i) van dit bewijs.
We hebben de preschoof.

$$\mathcal{O}: \text{Spec } A \longrightarrow \underline{\text{CRg}} .$$

<u>Propositie 2.12</u>: <u>Er is een natuurlijk isomorfisme</u>

$$\alpha_a : A_a \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D(a)) .$$

Bew: (i) Als a nulpotent is, dan $A_a = 0$, $D(a) = \emptyset$, dus $\mathcal{O}(D(a)) = 0$, zodat in dat geval $A_a \simeq \mathcal{O}(D(a))$.

(ii) Zij nu a niet nilpotent. Definieer dan α_a als volgt: Als

$$\frac{b}{a^n} \in A_a$$

kies dan
$$r\colon D(a) \longrightarrow A \times A$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (b,a^n) \;,\quad \forall x_{\underline{p}} \in D(a)$$

en definieer: $\alpha_a(\frac{b}{a^n}) := \bar{r} \in \mathcal{O}(D(a))$.

Het is direkt duidelijk dat de functie r een element is van de verzameling

$$R := \left\{ \text{afbeeldingen } D(a) \xrightarrow{r} A \times A \;\middle|\; \begin{array}{l} r(x_{\underline{p}}) = (a_x,b_x) \Longrightarrow b_x \notin \underline{p} \\ \forall x,y \in D(a).\; a_x b_y = a_y b_x \end{array} \right\}$$

(C.f. bewijs prop. 2.11), zodat $\bar{r} \in \mathcal{O}(D(a))$.

Ook is α_a als verzamelings-afbeelding goed gedefinieerd. Als

$$\alpha_a(\frac{b}{a^n}) = \bar{r} \;,\quad \alpha_a(\frac{c}{a^m}) = \bar{r}' ,\quad \frac{b}{a^n} = \frac{c}{a^m} \;,$$

dan: $\exists t \in \mathbb{N}.\; a^t(ba^m - ca^n) = 0$

zodat $r \sim r'$, dus $\bar{r} = \bar{r}'$. Dat α_a een ringmorphisme is, is triviaal.

(ii,a) α_a is injectief.

Zij:

$$\alpha_a(\frac{b}{a^n}) = \bar{0} \;.$$

Dan moet getoond worden dat $\frac{b}{a^n} = 0$. Welnu, zij

$$r\colon\; D(a) \longrightarrow A \times A$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (a_x,b_x) = (b,a^n) \;.$$

Als $r \sim 0$, dan geldt (zie bewijs prop. 2.11)

$$\forall x_{\underline{p}} \in D(a) \exists c_x \in A \setminus \underline{p}.\; c_x b = 0 \;.$$

Omdat volgens Opm. 1.24 $D(a) \simeq \mathrm{Spec}(A_a)$, geldt dus:

$$\forall \underline{p} \subset \mathrm{Spec}(A_a) \exists c \in A \setminus \underline{p}.\ c_b = 0 \ \ldots\ldots\ldots (*) .$$

Definieer nu het ideaal:

$$\underline{i} := \{\tfrac{c}{1} \in A_a \mid cb = 0\} .$$

Als $\underline{i} \neq A_a$, dan is er een maximaal ideaal $\underline{m} \subset A_a$, zodat $\underline{i} \subset \underline{m}$. Volgens $(*)$ is dit niet mogelijk, zodat $\underline{i} = A_a$. D.w.z. $\frac{1}{1} \in \underline{i}$, dus $1.b = b = 0$, dus $\frac{b}{a^n} = 0$.

(ii,b) α_a is surjectief: Zij $\bar{r} \in \mathcal{O}(D(a))$, en noteer:

$$r: x_{\underline{p}} \mapsto (a_x, b_x)$$

Dan: $$\forall x_{\underline{p}} \in D(a).\ b_x \notin \underline{p} \Rightarrow \forall x_{\underline{p}} \in D(a).\ x_{\underline{p}} \in D(b_x)$$

Dus: $$D(a) \subset \bigcup_{x \in D(a)} D(b_x)$$

Omdat $D(a)$ kompakt is, hebben we een eindige deeloverdekking:

$$D(a) = D(b_{x_1}) \cup \ldots \cup D(b_{x_m}) .$$

Definieer nu: $$\underline{i} := Ab_{x_1} + \ldots + Ab_{x_m}$$

Als $\underline{i} \subset \underline{p}$ en $\underline{p}$ is een priemideaal, dan $a \in \underline{p}$, want als $a \notin \underline{p}$, dan $x_{\underline{p}} \in D(a)$, dus $\exists b_{x_i}$ zodat

$$x_{\underline{p}} \in D(b_{x_i}) ,$$

wat zeggen wil: $b_{x_i} \notin \underline{p}$, tegenspraak, want $\underline{i} \subset \underline{p}$. Derhalve

$$a \in \sqrt{\underline{i}}$$

Dus $\exists t \in \mathbb{N}.\ a^t = c_1 b_{x_1} + \ldots + c_m b_{x_m} \qquad (c_1, \ldots, c_m \in A)$

We hadden: $r: x_i \mapsto (a_{x_i}, b_{x_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m)$.

Bovendien geldt voor elke $x \in D(a)$ per definitie:

$$(a_x b_{x_i} - a_{x_i} b_x) = 0 \ .$$

Definieer nu: $b := c_1 a_{x_1} + \ldots + c_m a_{x_m}$. en ook:

$$s : D(a) \longrightarrow A \times A$$

$$x \longmapsto (b, a^t) \quad \text{voor elke } x \in D(a)$$

Dan is $\bar{s} \in \vartheta(D(a))$, en bovendien: $s \sim r$, want als $x \in D(a)$, dan geldt:

$$a_x a^t - b_x b = 0 \ .$$

Immers:

$$\begin{aligned} b_x b &= b_x(c_1 a_{x_1} + \ldots + c_m a_{x_m}) = \\ &= c_1(b_x a_{x_1}) + \ldots + c_m(b_x a_{x_m}) = \\ &= c_1(b_{x_1} a_x) + \ldots + c_m(b_{x_m} a_x) = \\ &= a_x(c_1 b_{x_1}) + \ldots + c_m b_{x_m}) = a_x a^t. \end{aligned}$$

Hiermee is bewezen:

$$\alpha_a : \frac{b}{a^t} \longrightarrow \bar{r} \ .$$

Dus α_a is surjectief, en dan ook een isomorfie.

(ii,c) <u>α_a is een natuurlijk isomorfisme:</u>

(D.w.z.: We hebben een commuterend diagram

$$\begin{tikzcd} (D(a_1)) & (D(a_2)) \arrow[l, "\rho^{D_{a_1}}_{D_{a_2}}"'] \\ A_{a_1} \arrow[u, "\alpha_{a_1}", "S"'] & A_{a_2} \arrow[l, "\phi^{a_1}_{a_2}"'] \arrow[u, "\alpha_{a_2}", "S"'] \end{tikzcd}$$

voor elke $a_1, a_2 \in A$ zodat $D(a_1) \subset D(a_2)$). Hierbij is $\rho^{D_{a_1}}_{D_{a_2}}$ de restrictie in de preschoof $\mathcal{O}$, en $\phi^{a_1}_{a_2}$ wordt als volgt gedefinieerd:
Er geldt:

$$[D(a_1) \subset D(a_2)] \iff [a_1 \notin \underline{p} \Rightarrow a_2 \notin \underline{p}] \iff [a_2 \in \underline{p} \Rightarrow a_1 \in \underline{p}] \iff [a_1 \in \sqrt{Aa_2}].$$

en als $a_1 \in \sqrt{Aa_2}$, dan is er een natuurlijk getal t, zodat

$$a_1^t = xa_2 \ .$$

We kunnen dan definiëren:

$$\phi^{a_1}_{a_2} : A_{a_2} \longrightarrow A_{a_1}$$

$$\frac{b}{(a_2)^n} \longmapsto \frac{bx^n}{(xa_2)^n} = \frac{bx^n}{a_1^{tn}} \ .$$

Ga na dat dit een goede definitie is. Het is direkt duidelijk dat met deze afbeeldingen het diagram commuteert.

Gevolg 2.13: $\mathcal{O}(\text{Spec } A) = A$

Bew: $A \simeq A_1 \simeq \mathcal{O}(D(1)) = \mathcal{O}(\text{Spec } A)$.

Definitie 2.14: Beschouw een punt $x \in X$, $X = \text{Spec}(A)$, en daarbij de familie

$$\mathcal{W} := \{ \mathcal{O}(U) \mid U \in \underline{X} \text{ en } x \in U \} \ .$$

Tezamen met de restricties

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\rho^V_U} \mathcal{O}(V) \qquad\qquad (V \subset U)$$

is $\mathcal{W}$ een injectief systeem van ringen. *)

---

*) zie appendix.

We definiëren:

$$\mathcal{O}(x) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \mathcal{O}(U) \qquad \text{*)}$$

en noemen $\mathcal{O}(x)$ <u>de staak van $\mathcal{O}$ in het punt x</u>.

<u>Propositie 2.15</u>: <u>Voor elke</u> $x_{\underline{p}} \in X = \mathrm{Spec}(A)$ <u>geldt</u>:

$$\beta_x : \mathcal{O}(x) \xrightarrow{\sim} A_{\underline{p}}$$

<u>Bew</u>: (i) <u>de constructie van</u> β_x

We kunnen in plaats van het gehele stelsel omgevingen U van x het cofinale gerichte deelstelsel der omgevingen van x van de vorm $D(a_i)$ nemen**),
zodat geldt:

$$\mathcal{O}(x) = \varinjlim_{x \in D(a)} \mathcal{O}(D(a)).$$

Zij $x_{\underline{p}} \in D(a_i)$. Definieer:

$$\mathcal{O}(D(a_i)) \xrightarrow{\sim} A_{a_i} \xrightarrow{\beta_i} A_{\underline{p}}$$

$$\frac{t}{a_i^n} \longmapsto \frac{t}{a_i^n}$$

(Dit kan, wegens $x_{\underline{p}} \in D(a_i) \iff a_i \notin \underline{p}$. Ga na dat de definitie van β_i behoorlijk is). Omdat de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(D(a_i)) \arrow[r, "\sim"] & A_{a_i} \arrow[dr, "\beta_i"] & \\
& & A_{\underline{p}} \\
\mathcal{O}(D(a_j)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[uu, "\rho^{D_{a_i}}_{D_{a_j}}"] & A_{a_j} \arrow[uu, "\phi^{a_i}_{a_j}"'] \arrow[ur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

*) zie appendix.

**) zie appendix.

commuteren. (C.f. bewijs (ii,c) van prop. 2.12), bestaat er een uniek bepaald ring-morphisme

$$\beta_x : \mathcal{O}(x_{\underline{p}}) = \varinjlim_{a_i \notin \underline{p}} \mathcal{O}(D(a_i)) \simeq \varinjlim_{a_i \notin \underline{p}} A_{a_i} \longrightarrow A_{\underline{p}}$$

(ii) $\underline{\beta_x \text{ is injectief}}$, want kies $\theta \in \mathcal{O}(x_{\underline{p}})$, dan hebben we (wegens de definitie van injectieve limieten van ringen) een diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(x_{\underline{p}}) \arrow[r, "\beta_x"] & A_{\underline{p}} \\ \mathcal{O}(D(a_i)) \arrow[u, "\gamma_i"] & \\ A_{a_i} \arrow[u, "\wr"] \arrow[uur, "\beta_i"'] & \end{tikzcd}$$

waarbij γ_i het natuurlijke morphisme is, en β_i zoals in (i) gedefinieerd, terwijl, als we $D(a_i)$ geschikt kiezen,

$$\exists \frac{t}{a_i^n} \in A_{a_i} \;.\quad \theta = \gamma_i\left(\frac{t}{a_i^n}\right)$$

Zij nu $\beta_x(\theta) = 0$. Dan te bewijzen: $\theta = 0$.
Uit $\beta_x(\theta) = 0$ volgt: $\beta_i\left(\frac{t}{a_i^n}\right) = 0$ (in de ring $A_{\underline{p}}$). D.w.z.:

$$\exists s \notin \underline{p}.\; st = 0.$$

Kies zo'n s, en beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} A_{a_i} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi^{a_i}_{a_i s}"'] & \mathcal{O}(D(a_i)) \arrow[d] \arrow[dr, "\gamma_i"] & \\ & & \mathcal{O}(x_{\underline{p}}) \\ A_{a_i s} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}(D(a_i s)) \arrow[ur, "\gamma_j"'] & \end{tikzcd}$$

En er geldt:

$$\phi^{a_i}_{a_i s}\left(\frac{t}{a_i^n}\right) = \frac{s^n t}{(a_i s)^n} = 0 \qquad \text{wegens } st = 0.$$

Dus: $0 = \gamma_j \left(\frac{s^n t}{(a_i s)^n}\right) = \gamma_j \, \phi^{a_i}_{a_i s} \left(\frac{t}{a_i^n}\right) = \gamma_i \left(\frac{t}{a_i^n}\right) = \theta$.

(iii) <u>β_x is surjectief</u>: Kies $\frac{t}{s} \in A_p$, dan $x_p \in D(s)$, en we hebben derhalve het diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(x) \arrow[r, "\beta_x"] & A_p \ni \frac{t}{s} \\
\mathcal{O}(D(s)) \arrow[u, "\gamma_j"] \arrow[r, "\sim"] & A_s \ni \frac{t}{s} \arrow[u, "\beta_j"']
\end{tikzcd}$$

en derhalve: $\beta_x(\beta_j(\frac{t}{s})) = \frac{t}{s}$.

<u>Propositie 2.16</u>: <u>De in prop. 2.11 gedefinieerde preschoof $\mathcal{O}$ op $X = \text{Spec } A$ is een schoof</u>.

<u>Bew</u>: We moeten aantonen: Als $U \in \underline{X}$, en (U_i) is een open overdekking van U, en als $(s_i) \in \prod_i \mathcal{O}(U_i)$, dan:

(i) Als $s,t \in \mathcal{O}(U)$ en $\forall i. s \mid U_i = t \mid U_i$, dan $s = t$.

(ii) Als $\forall i,j = s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j$, dan is er een $s \in \mathcal{O}(U)$ zodat voor elke i: $s \mid U_i = s_i$.

<u>Bewijs (i)</u>: Zij $s \in \mathcal{O}(U)$ en laat $s \mid U_i = 0$ voor elke i. Dan geldt $s = 0$, want:

(i,a) <u>Zij U kompakt</u>. Noteer: $s = \bar{r} \in \mathcal{O}(U)$ en

$$r: x \longmapsto (a_x, b_x) \qquad (x \in U).$$

Kies $x_p \in U$. Dan $\exists U_i . \; x_p \in U_i$. Dan wordt $s \mid U_i$ gerepresenteerd door de afbeelding:

$$U_i \hookrightarrow U \xrightarrow{r} A \times$$

en $s \mid U_i = 0$. D.w.z.:

$$\exists c_x \in A \setminus \underline{p}.\ c_x a_x = 0.$$

Omdat we dit voor elk punt $x_{\underline{p}} \in U$ kunnen doen, geldt: $s = 0$.

(i,b) <u>Zij U willekeurig open.</u>

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{\substack{V_i \subset U \\ V_i \text{ kompakt}}} \mathcal{O}(V_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Als $s \in \mathcal{O}(U)$, dan $s \mid U_i = 0$ voor elke i. Dan is ook $s \mid U_i \cap V_j = 0$ voor elk paar (i,j). Nu is $(U_i \cap V_j)_i$ een open overdekking voor V_j, en

$$(s \mid V_j) \mid V_j \cap U_i = s \mid V_j \cap U_i$$

dus is volgens (i,a) voor elke j $s \mid V_j = 0$. Wegens $(*)$ is dan ook $s = 0$.

<u>Bewijs (ii)</u>:

(ii,a) <u>U kompakt met open overdekking van de vorm</u>

$$\underline{U = D(a_1) \cup \ldots \cup D(a_m)}$$

We hebben voor elke i een $s_i \in \mathcal{O}(D(a_i))$ en dus kunnen we voor elke i een $a_i, b_i \in A$ vinden en $n_i \in \mathbb{N}$ zodat

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(D(a_i)) &\xleftarrow{\sim} A_{a_i} \\ s_i &\longleftarrow \frac{b_i}{a_i^{n_i}} \end{aligned}$$

Ook geldt: $D(a_i) \cap D(a_j) = D(a_i a_j)$, zodat we kunnen schrijven:

$$s_i \mid D(a_i a_j) = s_j \mid D(a_i a_j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

We hebben het commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(D(a_i)) \arrow[r] & \mathcal{O}(D(a_ia_j)) & \mathcal{O}(D(a_j)) \arrow[l] \\
A_{a_i} \arrow[u, "\alpha_{a_i}", "\wr"'] \arrow[r, "\phi_{a_i}^{a_ia_j}"'] & A_{a_ia_j} \arrow[u, "\alpha_{a_ia_j}", "\wr"'] & A_{a_j} \arrow[u, "\alpha_j", "\wr"'] \arrow[l, "\phi_{a_j}^{a_ia_j}"]
\end{tikzcd}$$

Dus:

$$\begin{cases}
s_i \xrightarrow{\alpha_{a_i}^{-1}} \dfrac{b_i}{a_i^{n_i}} \xrightarrow{\phi_{a_i}^{a_ia_j}} \dfrac{b_ia_j^{n_i}}{(a_ia_j)^{n_i}} \in A_{a_ia_j} \\[2ex]
s_j \xrightarrow{\alpha_{a_j}^{-1}} \dfrac{b_j}{a_j^{n_j}} \xrightarrow{\phi_{a_j}^{a_ia_j}} \dfrac{b_ja_i^{n_j}}{(a_ia_j)^{n_j}} \in A_{a_ia_j}
\end{cases}$$

(*) zegt nu: In de ring $A_{a_ia_j}$ geldt:

$$\frac{b_ia_j^{n_i}}{(a_ia_j)^{n_i}} = \frac{b_ja_i^{n_j}}{(a_ia_j)^{n_j}}$$

Dat wil zeggen: (als $n = n_i + n_j$)

$$\exists N \in \mathbb{N}.\ (a_ia_j)^N[b_ia_j^na_i^{n-n_i} - b_ja_i^na_j^{n-n_j}] = 0.$$

Door uit de rechter factor de factor $a_i^{n-n_i}a_j^{n-n_j}$ te halen, en de hele uitdrukking met geschikte machten van a_i resp. a_j te vermenigvuldigen volgt:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}.\ (a_ia_j)^{N_0}(b_ia_j^{n_j} - b_ja_i^{n_i}) = 0 \ \dots\dots\dots\ (**)$$

waarbij N_0 onafhankelijk is van i en j.

Definieer nu $s \in \mathcal{O}(U)$, door als representant r van s te kiezen:

$$r: x_{\underline{p}} \longmapsto (a_x, b_x)$$

met: Als $x \in U$, $x \in D(a_{i_x})$, dan:

$$\begin{cases} a_x := b_{i_x} \, a_{i_x}^{N_0} \\ b_x := a_{i_x}^{N_0+n_{i_x}} \end{cases}$$

Dit voldoet aan alle eisen:

(α): $b_x \notin \underline{p}_x$, want $x \in D(a_{i_x})$.

(β): $a_x b_y - b_x a_y = b_{i_x} \, a_{i_x}^{N_0} \, a_{i_y}^{N_0+n_{i_y}} - b_{i_y} \, a_{i_y}^{N_0} \, a_{i_x}^{N_0+n_{i_x}} =$

$$= (a_{i_x} a_{i_y})^{N_0} \, (b_{i_x} a_{i_y}^{n_{i_y}} - b_{i_y} a_{i_x}^{n_{i_x}}) = 0 \qquad (\text{C.f. } \cancel{**})$$

(γ): $s \mid D(a_i) = s_i$, want dit volgt direkt met:

$$\begin{cases} r: x \longmapsto (b_i a_i^{N_0}, a_i^{N_0+n_i}) \\ s_i: x \longmapsto (b_i, a_i^{n_i}) \end{cases}$$

(ii,b) <u>U open, kompakt met open overdekking (U_i).</u>

We hebben: $U = \bigcup U_i$. Kies voor elke i een overdekking

$$U_i = \bigcup_{j_i} D(a_{j_i}^{(i)}).$$

Dan is

$$U = \bigcup_{i, j_i} D(a_{j_i}^{(i)})$$

en wegens de kompaktheid van U is er een eindige deeloverdekking

$$U = \overset{<\infty}{\bigcup_{i,j_i}} D(a^{(i)}_{j_i})$$

We weten:

$$s_i \in \mathcal{O}(U_i);\ s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j \ \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

We kunnen de s_i's beperken tot de $D(a^{(i)}_{j_i})$'s en dan blijft er een aan $(*)$ analoge relatie bestaan voor de $D(a^{(i)}_{j_i})$'s. Derhalve is er volgens (ii,a) een $s \in \mathcal{O}(U)$ te vinden, zodat:

$$s \mid D(a^{(i)}_{j_i}) = s_i \mid D(a^{(i)}_{j_i})$$

Voorts kunnen we, door (i) toe te passen op

$$U_i = \bigcup_{j_i} D(a^{(i)}_{j_i})$$

vinden: $\quad s \mid U_i = s_i.$

(ii,c) <u>U willekeurig open, $U = \bigcup U_i$ open overdekking</u>

We hebben weer: $s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j$. Kies $V \subset U$, V open en kompakt.
Noteer: $V_i := V \cap U_i$. Dan geldt:

$$s_i \mid V_i \cap V_j = (s_i \mid U_i \cap U_j) \mid V_i \cap V_j =$$

$$= (s_j \mid U_i \cap U_j) \mid V_i \cap V_j = s_j \mid V_i \cap V_j.$$

Dus hebben we volgens (ii,b) voor iedere open kompakte deelverzameling V van U een $s_V \in \mathcal{O}(V)$ gevonden zodat:

$$s_V \mid V_i = s_i \mid V_i\ ,\ \forall i \ \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Beschouw nu: $V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset U$; $V^{(1)}, V^{(2)}$ open en kompakt.
Dan is:

$$(s_{V^{(2)}} \mid V^{(1)}) \mid V^{(1)} \cap U_i = s_i \mid V^{(1)} \cap U_i =$$

$$= s_{V^{(1)}} \mid V^{(1)} \cap U_i \qquad\qquad \text{voor elke } U_i\ .$$

Volgens (i), toegepast op $\mathcal{O}(V^{(1)})$ geeft dit:

$$s_{V^{(2)}} \mid V^{(1)} = s_{V^{(1)}} .$$

Hiermede is aangetoond, dat het stel

$$\{s_V \mid V \subset U,\ V \text{ open en kompakt}\}$$

een element in $\mathcal{O}(U) = \varprojlim \mathcal{O}(V)$ definieert. (C.f. de definitie van een projectieve limiet van ringen) *). Dit element $s \in \mathcal{O}(U)$ voldoet aan de eis: $s \mid U_i = s_i$. Want: Voor elke open kompakte $V \subset U$ hebben we: $s \mid V = s_V$. Beschouw nu:

$$\mathcal{O}(U_i) = \varprojlim_{\substack{V^{(i)}\text{komp.} \\ V^{(i)} \subset U}} \mathcal{O}(V^{(i)}) \quad \ldots\ldots\ldots.(**)$$

Elke $V^{(i)}$ is bevat als open kompakte deelverzameling in U. Dus commuteert het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(V^{(i)}) & = & \mathcal{O}(V^{(i)}) \end{array}$$

Dat wil zeggen: $s_{V^{(i)}} = (s \mid U_i) \mid V^{(i)}$. Ook hadden we volgens (*):
$s_{V^{(i)}} = s_i \mid V^{(i)}$ (Omdat $V^{(i)} \subset U_i$)
Dus geldt voor elke i:

$$s_i \mid V^{(i)} = (s \mid U_i) \mid V^{(i)}$$

en wegens (**) volgt hieruit: $s \mid U_i = s_i$

<u>Definitie 2.17</u>: Als A een ring is, dan heet de schoof $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$, zoals gedefinieerd in propositie 2.11, het <u>affiene schema</u> van A.

---

*) zie appendix.

Propositie 2.18. Als $A \xrightarrow{\phi} B$ een morphisme is van ringen en als $X := \operatorname{Spec} A$, $f := \operatorname{Spec} \phi$, $Y := \operatorname{Spec} B$, dan hebben we: $f \colon Y \to X$. Als nu $(X, \mathcal{O}_X)$ en $(Y, \mathcal{O}_Y)$ de affiene schema's zijn van A resp. B, dan induceert ϕ een morphisme van schoven $(f, \Phi) \colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$.

Bew: Allereerst bewijzen we de volgende

Opmerking 2.18[a]: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een van een schoof $\mathcal{O}_X$ voorziene ruimte X. Zij U een open deelverzameling van X. Stel:

$$\mathcal{V} := \{V_i\}_{i \in I}$$

is een familie open deelverzamelingen van U zodat geldt:

1) $\forall_{i,j} .\ V_i \cap V_j \in \mathcal{V}$

2) $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = U$.

Dan geldt:

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{O}_X(V) \ .$$

Bew: Beschouw morphismen, gegeven door

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{O}_X(V_i) & (i \in I) \\ \bar{s} \longrightarrow \bar{s} \mid V_i & \end{cases}$$

Deze zijn compatibel met restricties: D.w.z.: als $V_i \subset V_j$, dan commuteert

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & \mathcal{O}_X(V_i) \\
& \mathcal{O}_X(V_j) \arrow[u, "\text{restr.}"']
\end{tikzcd}$$

Dus induceert het stelsel $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ een morphisme

$$\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\alpha} \varprojlim_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{O}_X(V)$$

(i): <u>α is injectief</u>

Zij $\alpha(\bar{s}) = \alpha(\bar{t})$. Dan is voor elke $V\in\mathcal{V}$: $\bar{s} \mid V = \bar{t} \mid V$. Dus: $\bar{s} = \bar{t}$ (Schoof eigenschap van $\mathcal{O}_X$).

(ii): <u>α is surjectief</u>

Zij $\{\bar{s}_i\}_i \in \varprojlim \mathcal{O}_X(V)$, zeg $\bar{s}_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$. Dan is er voor elke i,j een $k\in I$ zodat

$$V_i \cap V_j =: V_k \in \mathcal{V}.$$

en $\bar{s}_i \mid V_i \cap V_j = \bar{s}_k$. Ook $\bar{s}_j \mid V_i \cap V_j = \bar{s}_k$. Dus

$$\bar{s}_i \mid V_i \cap V_j = \bar{s}_j \mid V_i \cap V_j .$$

Dus $\exists \bar{s} \in \mathcal{O}_X(U)$. $\bar{s} \mid V_i = \bar{s}_i$, $\forall V_i \in \mathcal{V}$. Dus α is surjectief.

<u>Voorbeeld</u>: Als $(X, \mathcal{O}_X)$ het affiene schema is van de ring A, dan is

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(a)\subset U} \mathcal{O}_X(D(a)).$$

<u>Bewijs van propositie 2.18</u>: We moeten construeren een functoriëel morphisme

$$\phi(-): \mathcal{O}_X(-) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \circ \underline{f}(-)$$

Zij nu U een open verzameling in X en zij $V := f^{-1}U$.

(i) $U = D(a)$.

Dan is

$$V = f^{-1}(D(a)) = \{y_{\underline{q}} \in Y \mid x_{\phi^{-1}\underline{q}} \in D(a)\} =$$

$$= \{y_{\underline{q}} \in Y \mid a \notin \phi^{-1}\underline{q}\} = \{y_{\underline{q}} \in Y \mid \phi a \notin \underline{q}\} =$$

$$= D(\phi a) .$$

We kunnen dus definiëren:

$$\Phi(D(a)) := \begin{cases} \mathcal{O}_X(D(a)) = A_a \longrightarrow B_{\phi a} = \mathcal{O}_Y(D(\phi a)) = \mathcal{O}_Y \circ \underline{f}(D(a)) \\ \qquad\qquad \dfrac{t}{a^n} \longmapsto \dfrac{\phi t}{(\phi a)^n} \end{cases}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat dit een behoorlijk gedefiniëerde afbeelding is, en dat, als $D(a_1) \subset D(a_2)$, het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D(a_2)) & \xrightarrow{\Phi(D(a_2))} & \mathcal{O}_Y \circ \underline{f}(D(a_2)) \\ \Big\downarrow \text{restr.} & & \Big\downarrow \text{restr.} \\ \mathcal{O}_X(D(a_1)) & \xrightarrow[\Phi(D(a_1))]{} & \mathcal{O}_Y \circ \underline{f}(D(a_1)) \end{array}$$

commuteert.

(ii). Zij nu U een willekeurige open deelverzameling van X.
Dan is volgens opm. 2.18[a]:

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}_X(D(a_i))$$

als $\{D(a_i)\}_{i \in I}$ de familie is van alle D(a)'s met $D(a) \subset U$.
Beschouw $V := f^{-1}U$. Dan is

$$V = \bigcup_{i \in I} D(\phi a_i)$$

en hieruit volgt:

$$\mathcal{O}_Y(V) = \varprojlim_{i \in I} D(\phi a_i) \ .$$

Dus kunnen we $\Phi(U)$ als volgt definiëren:
Beschouw voor elke $i \in I$ het morphisme

$$\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathcal{O}_X(D(a_i)) \xrightarrow[\Phi(D(a_i))]{} \mathcal{O}_Y(D(\phi a_i)) \ .$$

Dit commuteert met restricties: $(D(a_i) \supset D(a_j))$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X(D(a_i)) \arrow[r, "\Phi(D(a_i))"] \arrow[d, "\text{restr.}"] & \mathcal{O}_Y(D(\phi a_i)) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[ur, "\text{restr.}"] \arrow[dr, "\text{restr.}"'] & & \\ & \mathcal{O}_X(D(a_j)) \arrow[r, "\Phi(D(a_j))"] & \mathcal{O}_Y(D(\phi a_j)) \end{tikzcd}$$

dus induceren de $\Phi(D(a_i))$'s een morphisme

$$\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow[\Phi(U)]{} \varprojlim_{i\in I} \mathcal{O}_Y(D(\phi a_i)) = \mathcal{O}_Y(V).$$

Het is eenvoudig te controleren dat aldus gedefinieerde Φ voldoet aan de voorwaarden van prop. 2.18.

<u>Definitie 2.19</u>: Als A en B twee lokale ringen zijn, met maximale idealen resp. $\underline{m}$ en $\underline{n}$, dan heet een ringmorphisme $f: A \to B$ een <u>lokaal homomorfisme</u> als geldt: $f(\underline{m}) \subset \underline{n}$.

<u>Propositie 2.20</u>: <u>Als</u> $\phi: A \to B$ <u>een ring-morphisme is, en</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ en $(Y, \mathcal{O}_Y)$ <u>de affiene schema's zijn van</u> A <u>resp.</u> B, <u>terwijl</u> $f := \operatorname{Spec} \phi$, <u>en als</u> $y \in Y$, $x := f(y) \in X$, <u>dan induceert</u> ϕ <u>een natuurlijk ring-morphisme</u>

$$\Phi(x): \mathcal{O}_X(x) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(y)$$

<u>tussen de staken in</u> x <u>en</u> y. <u>Bovendien is</u> $\Phi(x)$ <u>een lokaal homomorphisme</u>.

<u>Bew</u>: We hebben in het bewijs (i) van prop. 2.15 gezien:

$$\mathcal{O}_X(x) = \varinjlim_{x\in D(a_i)} \mathcal{O}(D(a_i)) .$$

Evenzo:

$$\mathcal{O}_Y(y) = \varinjlim_{y \in D(b_j)} \mathcal{O}(D(b_j)) .$$

Kies nu $x \in D(a)$. Dan is $y \in f^{-1}D(a) = D(\phi a)$, en we hebben een ring-morphisme:

$$\phi_a: \mathcal{O}_X(D(a)) \xrightarrow[\Phi(D(a))]{} \mathcal{O}_Y(D(\phi a)) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(y)$$

waarbij $\Phi(D(a))$ gedefinieerd is, zoals in het bewijs (i) van prop. 2.18. Volgens dit bewijs (i) commuteert dan, als $x \in D(a_1) \subset D(a_2)$, het diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D(a_1)) \arrow[r, "\Phi(D(a_1))"'] & \mathcal{O}_Y(D(\phi a_1)) \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}_Y(y) \\
\mathcal{O}_X(D(a_2)) \arrow[r, "\Phi(D(a_2))"'] \arrow[uu, "\text{restr.}"] & \mathcal{O}_Y(D(\phi a_2)) \arrow[ur] \arrow[uu, "\text{restr.}"] &
\end{tikzcd}$$

waaruit blijkt dat het stelsel $\{\phi_a \mid x \in D(a)\}$ een uniek bepaald morphisme

$$\Phi(x): \mathcal{O}_X(x) = \varinjlim_{x \in D(a)} \mathcal{O}_X(D(a)) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(y)$$

induceert. Het is eenvoudig te controleren dat het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(x) \arrow[r, "\Phi(x)"] \arrow[d, "\beta_x"', "\wr"] & \mathcal{O}_Y(y) \arrow[d, "\beta_y"', "\wr"] \\
A_{\underline{p}} \arrow[r, "\Phi(\underline{p},\underline{q})"'] & B_{\underline{q}}
\end{tikzcd}$$

commuteert, als men definieert:

als $x = x_{\underline{p}}$, $y = y_{\underline{q}}$, $f(y) = x$ (dus $\phi^{-1}\underline{q} = \underline{p}$), dan

$$\Phi(\underline{p},\underline{q}): A_{\underline{p}} \longrightarrow B_{\underline{q}}$$

$$\frac{x}{t} \longrightarrow \frac{\phi x}{\phi t}$$

waarmee ook de natuurlijkheid van $\Phi(x)$ getoond is. Voorts, omdat het maximale ideaal $\underline{m}$ van de lokale ring (c.f. opm. 1.35) $A_{\underline{p}}$ gegeven wordt door:

$$\underline{m} = \{\tfrac{\alpha}{t} \in A_{\underline{p}} \mid \alpha \in \underline{p}\}$$

en analoog het maximale ideaal $\underline{n}$ van $B_{\underline{q}}$ gegeven is door

$$\underline{n} = \{\tfrac{\beta}{s} \in B_{\underline{q}} \mid \beta \in \underline{q}\}$$

volgt uit $\underline{p} = \phi^{-1}\underline{q}$:

$$\frac{\alpha}{t} \in \underline{m} \Rightarrow \alpha \in \underline{p} \Rightarrow \phi(\alpha) \in \underline{q} \Rightarrow \Phi(\underline{p},\underline{q})(\tfrac{\alpha}{t}) = \frac{\phi\alpha}{\phi t} \in \underline{n} .$$

Dus is $\Phi(\underline{p}.\underline{q})$ een lokaal homomorfisme. Wegens (*) is dan $\Phi(x)$ een lokaal homomorfisme.

<u>Opmerking 2.21</u>: <u>Als</u> (f,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ <u>een morphisme van schoven is, en</u> $y = fx$, <u>dan induceert</u> Φ <u>een morphisme</u> $\Phi(y): \mathcal{O}_Y(y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$ <u>tussen de staken in</u> x <u>en</u> y.

(De constructie van $\Phi(y)$ verloopt geheel analoog met die van $\Phi(x)$ in prop. 2.20).

<u>Lemma 2.22</u>: Als (f,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ <u>en</u>

$$(f,\Psi): (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

<u>twee schoof-morphisme zijn en</u>

$$\forall x \in X,\ y = fx \in Y.\ \Phi(y) = \Psi(y)$$

<u>dan is</u> $\Phi(-) = \Psi(-)$.

<u>Bew</u>: Als $U \in \underline{Y}$ dan hebben we het commutatieve diagram: ($x \in f^{-1}U$ willekeurig, $y = fx$)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \overset{\Phi(U)}{\underset{\Psi(U)}{\rightrightarrows}} & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\rho_U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\rho_{f^{-1}U}} \\ \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow[\Phi(y)=\Psi(y)]{} & \mathcal{O}_X(x) \end{array}$$

zodat $\rho_{f^{-1}U} \circ \Phi(U) = \rho_{f^{-1}U} \circ \Psi(U)$. Kies nu $\bar{s} \in \mathcal{O}_Y(U)$. Dan volgt uit $\rho_{f^{-1}U}(\Phi(U)(\bar{s})) = \rho_{f^{-1}U}(\Psi(U)(\bar{s}))$, dat er een open omgeving V_x van x bestaat (met $V_x \subset f^{-1}U$) zodat

$$\Phi(U)(\bar{s}) \Big| V_x = \Psi(U)(\bar{s}) \Big| V_x .$$

We kunnen nu $f^{-1}U$ overdekken met de collectie $(V_x)_{x\in f^{-1}U}$. Uit de schoofeigenschap van $\mathcal{O}_X$ volgt dan:

$$\Phi(U)(\bar{s}) = \Psi(U)(\bar{s}) .$$

(We kunnen dus het al of niet gelijk zijn van twee schoofmorphismen (f,Φ), (f,Ψ) controleren in de staken).

<u>Propositie 2.23</u> : <u>Als $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(Y,\mathcal{O}_Y)$ de affiene schema's zijn van de ringen A resp. B, en als</u>

$$(f,\Phi): (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

<u>een schoof-morphisme is, zodat voor elke $x\in X$, $y = f(x)\in Y$</u>

$$\Phi(y): \mathcal{O}_Y(y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$$

<u>een lokaal homomorfisme is, dan wordt (f,Φ) op de manier van prop. 2.18 geïnduceerd door een ringmorphisme</u>

$$\phi: B \longrightarrow A .$$

<u>Bew</u>: (i) <u>f = Spec ϕ</u>. Definieer: $\phi := (B \simeq \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\Phi(y)} \mathcal{O}_X(X) \simeq A)$. Kies $\underline{p} \subset A$, priemideaal. Dan is $A_{\underline{p}} \simeq \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}})$. Zij $y_{\underline{q}} = f(x_{\underline{p}})$. We moeten bewijzen: $\underline{q} = \phi^{-1}\underline{p}$. Welnu, beschouw het diagram:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr, "\phi"] \arrow[ddd, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & & & A \arrow[ddd, "i"] \arrow[dl, phantom, "\simeq"] \\
& \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] & \\
& \mathcal{O}_Y(y_{\underline{q}}) \arrow[r, "\Phi(y)"] & \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}}) & \\
B_{\underline{q}} \arrow[rrr, "\theta"] \arrow[ur, phantom, "\simeq"] & & & A_{\underline{p}} \arrow[ul, phantom, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

waarbij θ zo is gekozen dat het diagram commuteert. Zij $\beta \in \underline{q}$, dan $\frac{\beta}{1}$ bevat in het maximale ideaal van $B_{\underline{q}}$. θ is een lokaal homomorfisme, dus $\theta(\frac{\beta}{1})$ is bevat in het maximale ideaal van $A_{\underline{p}}$. Er geldt:

$$\theta(\tfrac{\beta}{1}) = \theta \circ j(\beta) = i \circ \phi(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{1}\ , \text{ dus } \phi(\beta) \in \underline{p}\ .$$

Derhalve: $\phi(\underline{q}) \subset \underline{p}$ .... (*) .

Ook, zij $\alpha \in \underline{p}$ en $\alpha = \phi(\beta)$. Dan is $\frac{\alpha}{1}$ een niet-eenheid in $A_{\underline{p}}$. Voorts:

$$\theta(\tfrac{\beta}{1}) = \theta \circ j(\beta) = i \circ \phi(\beta) = \frac{\alpha}{1}\ .$$

Dus is $\frac{\beta}{1}$ een niet-eenheid, zodat $\beta \in \underline{q}$.

Derhalve: $\phi^{-1}\underline{p} \subset \underline{q}$ .... (**) .

Uit (*) en (**) volgt: $\underline{q} = \phi^{-1}\underline{p}$ als $y_{\underline{q}} = f(x_{\underline{p}})$. Dus f = Spec ϕ.

(ii) <u>$\Phi(-)$ wordt door ϕ geïnduceerd</u>: Kies $\frac{\beta}{1} \in B_{\underline{q}}$. Dan:

$$\theta(\tfrac{\beta}{1}) = \theta \circ j(\beta) = i \circ \phi(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{1}\ .$$

Ook, als $s \notin \underline{q}$, $\theta(\frac{1}{s}) = \frac{1}{\phi(s)}$, want als $\theta(\frac{1}{s}) = \frac{\alpha}{t}$, dan volgt uit $\theta(\frac{1}{s}).\theta(\frac{s}{1}) = 1$,

$$\exists c \notin \underline{p}.\ c[\alpha - t.\phi(s)] = 0.$$

Dus $\frac{\alpha}{t} = \frac{1}{\phi(s)}$. Dus i.h.a.: $\theta(\frac{\beta}{s}) = \frac{\phi\beta}{\phi s}$. Met andere woorden: $\Phi(-)$ komt in de staken overeen met het door ϕ geïnduceerde morphisme van schoven. Derhalve is volgens lemma 2.22 $\Phi(-)$ het door ϕ geïnduceerde functoriële morphisme.

<u>Definitie 2.24</u>: Als we als objecten nemen de affiene schema's en als morphismen die morphismen van schoven tussen affiene schema's

$$(f,\Phi):\ (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

die voldoen aan de eis, dat de geïnduceerde morphismen tussen staken

$$\Phi(y):\ \mathcal{O}_Y(y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$$

(als $y = fx$) lokale homomorfismen zijn voor elke $x \in X$, dan hebben we een categorie gedefinieerd: <u>de categorie der affiene schema's</u>.

<u>Opmerking</u>: Dat de samenstelling van twee morphismen van affiene schema's weer een morphisme van affiene schema's is, volgt uit de trivialiteit dat de samenstelling van twee lokale homomorphismen weer aan lokaal homomorfisme oplevert.

<u>Stelling 2.25</u>: <u>Er bestaat een anti-equivalentie tussen de categorie der commutatieve ringen met eenheidselement en de categorie der affiene schema's.</u>

<u>Bew</u>: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(Y,\mathcal{O}_Y)$ de affiene schema's zijn van A resp. B, en als (f,Φ) een morphisme is van affiene schema's

$$(f,\Phi):\ (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

Dan werd (f,Φ) volgens prop. 2.23 geïnduceerd door het uniek bepaalde ring-morphisme:

$$\phi:\ B \simeq \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\Phi(Y)} \mathcal{O}_X(X) \simeq A\ .$$

Als we de categorie der affiene schema's aangeven met AffSch, dan kunnen we als volgt een contravariante functor definiëren:

$$F\colon \underline{\text{AffSch}} \longrightarrow \underline{\text{CRg}}$$

$$F\left[(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f,\Phi)} (Y,\mathcal{O}_Y)\right] := \left[\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\Phi(Y)} \mathcal{O}_X(X)\right] .$$

Omgekeerd hadden we een functor G, die aan elke ring zijn affiene schema toevoegt. Ook G is contravariant:

$$G\colon \underline{\text{CRg}} \longrightarrow \underline{\text{AffSch}}$$

$$G\left[A \xrightarrow{\phi} B\right] := \left[(Y,\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{(f,\Phi)} (X,\mathcal{O}_X)\right]$$

waarbij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ en $(X,\mathcal{O}_X)$ de affiene schema's zijn van B resp. A, en (f,Φ) het morphisme van schoven is, geconstrueerd uit ϕ volgens prop. 2.18. Prop. 2.20 garandeert dat (f,Φ) een morphisme van affiene schema's is. Het is direkt duidelijk dat $F\circ G$ en $G\circ F$ de identieke functoren zijn op CRg resp. AffSch.

2.26 Opmerkingen: Vaak zal kortheidshalve het affiene schema van een ring A worden aangegeven met Spec (A). De bijbehorende schoof heet de struktuurschoof op Spec(A).

Wegens stelling 2.25 kunnen - in categorische taal te formuleren - stellingen, die gelden in CRg worden gedualiseerd tot stellingen over affiene schema's. Bijvoorbeeld:

In AffSch bestaan gevezelde produkten.*) Want, een gevezeld produkt in AffSch is duaal met een gevezelde som in CRg, en deze kennen we expliciet: de tensor-produkten. Dus:

$$\text{Spec } A \ \amalg_{\text{Spec } B} \ \text{Spec } C = \text{Spec } (A \times_B C)$$

(als A en C B-algebra's zijn).

---

*) zie voor def. van gevezelde produkten en -sommen de appendix.

Een ander voorbeeld:

In AffSch bestaat een punt-object. *) Nl.: In CRg hebben we het co-punt-$\mathbb{Z}$. Dus het punt-object in AffSch is Spec($\mathbb{Z}$).

---

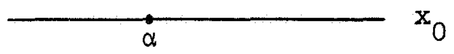
*) zie appendix.

§2a. Voorbeelden bij §2.

Enige voorbeelden van affiene schema's

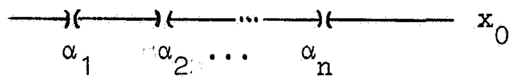
(i) Het affiene schema (Spec $\mathbb{C}[X], \mathcal{O}$) van $\mathbb{C}[X]$.

We hebben in Spec $\mathbb{C}[X]$ twee soorten punten (cf. §1a, (iii)): De gesloten punten α, corresponderend met het priemideaal $(X-\alpha)\mathbb{C}[X]$ en het algemene punt x_0, behorend bij het nul-ideaal van $\mathbb{C}[X]$



Kies nu een open verzameling $U \subset \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$, zodat $U \neq \emptyset$ en $U \neq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$. Dan heeft U de vorm

$$U = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X] \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$



Noteer: $\qquad f(X) := (X-\alpha_1) \ldots (X-\alpha_n)$.

Dan is $U = D(f(X))$. Volgens prop. 2.12 geldt dan:

$$\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}[X]_f = \{\frac{g(X)}{(f(X))^n} \mid g(X), f(X) \in \mathbb{C}[X]\}.$$

We kunnen dit ook als volgt opvatten (in dit geval!). Elk element

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \in \mathbb{C}(X)$$

is op te vatten als een functie met complexe waarden op de affiene complexe rechte $\mathbb{C}^1$:

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} : \alpha \longmapsto \frac{\phi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$$

$\mathcal{O}(U)$ bestaat dan, in deze opvatting, uit diè rationale functies, die geen pool hebben in

$$\mathbb{C}^1 \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

(Ga na dat dit precies de elementen van $\mathbb{C}[X]_f$ zijn).

Kies nu een gesloten punt $\alpha \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$. Volgens prop. 2.15 geldt:

$$\mathcal{O}(\alpha) = \mathbb{C}[X]_{(X-\alpha)} = \{\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \mid \psi(X) \notin (X-\alpha)\ \mathbb{C}[X]\}$$

(de staak van $\mathcal{O}$ in het punt α). Met andere woorden:

$$\mathcal{O}(\alpha) = \{\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \mid \psi(\alpha) \neq 0\}.$$

(Dit is een voorbeeld van het specialisatie-begrip, zoals ingevoerd in Weil's Foundations of Algebraic Geometry [W]). Dus bestaat $\mathcal{O}(\alpha)$ uit diè rationale functies

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} : \beta \longmapsto \frac{\phi(\beta)}{\psi(\beta)}$$

die geen pool hebben in het punt $\alpha \in \mathbb{C}^1$. Omdat

$$\mathcal{O}(\alpha) := \varinjlim_{\alpha \in U} \mathcal{O}(U)$$

moet er voor elk element $\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \in \mathcal{O}(\alpha)$ een open omgeving U van α bestaan, zodat

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \in \mathcal{O}(U).$$

Welnu:

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \in \mathcal{O}(\alpha) \Longrightarrow \psi(X) \notin (X-\alpha)\ \mathbb{C}[X].$$

Zeg: $\psi(X) = (X-\beta_1) \ldots (X-\beta_n) \qquad (\alpha \neq \beta_i)$

Dan: Kies $U := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X] \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$.

Dan hebben we:

$$\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \in \mathcal{O}(U) \quad \text{en} \quad \alpha \in U \ (= D(\psi(X))).$$

Tot slot bepalen we de staak van $\mathcal{O}$ in het algemene punt x_0:

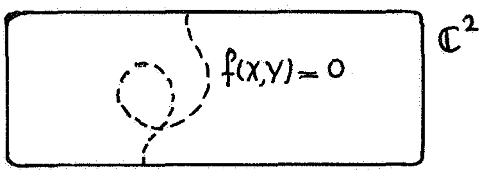
$$\mathcal{O}(x_0) \simeq \mathbb{C}[X]_{(0)} = \{\frac{\phi(X)}{\psi(X)} \mid \psi(X) \neq 0\} = \mathbb{C}(X)$$

$\mathcal{O}(x_0)$ is dus het quotiëntenlichaam van $\mathbb{C}[X]$.

(ii) Het affiene schema (Spec $\mathbb{C}[X,Y]$, $\mathcal{O}$) van $\mathbb{C}[X,Y]$.

We krijgen in het algemeen een open verzameling $\emptyset \neq U \subset \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$ door uit Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ een eindig aantal "irreducibele krommen" (d.w.z.: alle gesloten punten op die kromme plus de algemene punten van die krommen) weg te laten, benevens een eindig aantal gesloten punten (Cf. §1a, (vi)).

(a) Zij $f(X,Y)$ een irreducibel polynoom en laat $U := D(f(X,Y))$ zijn

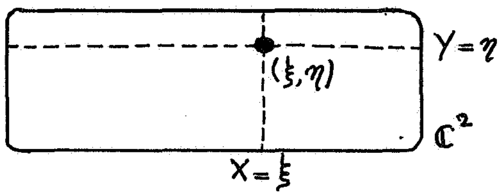


Dan is volgens prop. 2.12:

$$\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}[X,Y]_{f(X,Y)} = \{\frac{g(X,Y)}{(f(X,Y))^n} \mid g,f \in \mathbb{C}[X,Y]\}.$$

(b) Zij $\underline{m}$ het maximale ideaal $(X-\xi, Y-\eta)$ en kies

$$U := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y] \setminus \{x_{\underline{m}}\}.$$



Dan geldt, als $\phi_1(X,Y) := X-\xi$ en $\phi_2(X,Y) := Y-\eta$,

$$U = D(\phi_1) \cup D(\phi_2).$$

(Ga na). Derhalve is U - als vereniging van twee kompakte verzamelingen - zelf kompakt. We willen $\mathcal{O}(U)$ bepalen.

Hiertoe beschouwen we functies

$$r: U \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \times \mathbb{C}[X,Y]$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (f_{\underline{p}}, g_{\underline{p}})$$

die voldoen aan: $g_{\underline{p}} \notin \underline{p}$ en $f_{\underline{p}} g_{\underline{q}} = g_{\underline{p}} f_{\underline{q}}$ als $x_{\underline{p}}$ en $x_{\underline{q}}$ punten zijn van U. (Cf. prop. 2.11).

Opm.: We mogen aannemen dat voor elke $x_{\underline{p}} \in U$ $f_{\underline{p}}$ en $g_{\underline{p}}$ geen gemeenschappelijke factor hebben, want als

$$f_{\underline{p}} = f'_{\underline{p}}.d_{\underline{p}} \quad \text{en} \quad g_{\underline{p}} = g'_{\underline{p}}.d_{\underline{p}} \qquad (x_{\underline{p}} \in U)$$

en

$$r': U \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \times \mathbb{C}[X,Y]$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (f'_{\underline{p}}, g'_{\underline{p}})$$

dan is wegens $f'_{\underline{p}} g_{\underline{p}} = f_{\underline{p}} g'_{\underline{p}}$: $r \sim r'$ (Cf. prop. 2.11).

Stel nu $x_{\underline{p}} \in U$ en $g_{\underline{p}} \in \underline{q}$, waarbij $\underline{q}$ een priemideaal is in $\mathbb{C}[X,Y]$. Dan geldt: (Als $\underline{q} \neq \underline{m}$)

$$\left.\begin{array}{r} g_{\underline{p}} \in \underline{q} \Rightarrow f_{\underline{p}} g_{\underline{q}} = g_{\underline{p}} f_{\underline{q}} \in \underline{q} \\ g_{\underline{q}} \notin \underline{q} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{\underline{p}} \in \underline{q}$$

Neem eens aan: $\phi_{\underline{p}}(X,Y)$ is een irreducibele factor van $g_{\underline{p}}(X,Y)$ (eventueel $\phi_{\underline{p}} = g_{\underline{p}}$). Dan, als

$$\underline{p}_1 := (\phi_{\underline{p}}(X,Y)) \qquad (\underline{p}_1 \neq \underline{m})$$

is $\underline{p}_1$ een priemideaal en $g_{\underline{p}} \in \underline{p}_1$. Dus is volgens het bovenstaande ook $f_{\underline{p}} \in \underline{p}_1$. Dit kan niet, omdat dan $g_{\underline{p}}$ en $f_{\underline{p}}$ dezelfde gemeenschappelijke factor $\phi_{\underline{p}}(X,Y)$ zouden hebben.

Hieruit volgt direkt, dat $g_{\underline{p}}$ een constante moet zijn: $g_{\underline{p}} \in \mathbb{C}$.

We kunnen dan opmerken: $r \sim r''$ als r'' bij r geconstrueerd is volgens:

$$r'': U \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \times \mathbb{C}[X,Y]$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (g_{\underline{p}}^{-1} f_{\underline{p}}, 1)$$

Hieruit volgt het bestaan van het ringmorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \\ r'' &\longmapsto (g_{\underline{p}}^{-1} f_{\underline{p}}) \end{aligned}$$

(Ga na dat deze definitie niet van de keuze van $\underline{p}$ afhangt.) Dit morphisme is een isomorfie (Ga na), dus

$$\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}[X,Y].$$

<u>De staken van $\mathcal{O}$</u>:

(a) Als x_0 het algemene punt is van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$, dan

$$\mathcal{O}(x_0) = \mathbb{C}[X,Y]_{(0)} = \mathbb{C}(X,Y)$$

(b) Als $x_{\underline{p}}$ een niet gesloten punt is, $x_{\underline{p}} \neq x_0$, dan $\underline{p} = (\phi(X,Y))$ voor een irreducibel polynoom ϕ. Dan geldt:

$$\mathcal{O}(x_{\underline{p}}) = \mathbb{C}[X,Y]_{\underline{p}} = \{\frac{f(X,Y)}{g(X,Y)} \mid g(X,Y) \notin \underline{p}\}.$$

(De rationale functies die niet in alle punten van $\mathbb{C}^2$ die op de kromme $\phi(X,Y) = 0$ liggen, de waarde ∞ aannemen.)

(c) Als $x_{\underline{m}}$ een gesloten punt is en $\underline{m} = (X-\xi, Y-\eta)$, dan:

$$\mathcal{O}(x_{\underline{m}}) = \mathbb{C}[X,Y]_{(X-\xi,Y-\eta)} = \{\frac{f(X,Y)}{g(X,Y)} \mid g(\xi,\eta) \neq 0\}.$$

(iii) <u>De affiene schema's van A_a en A.</u>

Zijn A een ring, $X :=$ Spec A en $(X, \mathcal{O}_X)$ het affiene schema van A. Als $a \in A$, dan hebben we de ring A_a en de open verzameling $D(a) \subset X$.

<u>Opm. (α)</u>: $\quad (A_a)_{\frac{b}{1}} \simeq A_{ab}$.

Want, definieer:

$$(A_a)_{\frac{b}{1}} \xrightarrow{\phi} A_{ab}$$

$$\frac{(\frac{s}{a^n})}{(\frac{b}{1})^m} \longmapsto \frac{sa^m b^n}{(ab)^{n+m}}$$

ϕ is behoorlijk gedefinieerd en injectief, want:

$$\frac{(\frac{s}{a^n})}{(\frac{b}{1})^m} = 0 \Longleftrightarrow \exists M.\ \frac{b^M s}{a^n} = 0 \Longleftrightarrow \exists M,N.\ a^N b^M s = 0 \ldots\ldots\ldots.(*)$$

$$\frac{sa^m b^n}{(ab)^{m+n}} = 0 \Longleftrightarrow \exists T.\ a^{T+m} b^{T+n} s = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(**)$$

$(*) \Rightarrow (**)$, want $a^N b^M s = 0 \Rightarrow a^{(N+M)+m} b^{(N+M)+n} s = 0$

$(**) \Rightarrow (*)$ (triviaal).

Ook is direkt duidelijk dat ϕ een ring-morphisme is, en dat ϕ surjectief is.

Opm.(β). Volgens opm. 1.24 konden we de twee topologische ruimten Spec (A_a) en D(a) met elkaar identificeren. De basis-verzamelingen voor de open topologieën correspondeerden via

$$D(\tfrac{b}{1}) \longleftrightarrow D(ab)$$

Merk op dat $D(\frac{b}{a^n}) = D(\frac{b}{1})$.

Opm.(γ): We kunnen op D(a) twee schoven definiëren:

(γ,i) Als U een open verzameling is in D(a) dan hebben we de ring $\mathcal{O}_X(U)$. Het is duidelijk dat $\mathcal{O}_X$ zo een schoof definieert op D(a). We noteren deze met $\mathcal{O}_X \mid D(a)$.

(γ,ii) Als U een open verzameling is in D(a), dan kunnen we U identificeren met een open verzameling in Spec(A_a). Op Spec (A_a) hebben we de struktuurschoof $\mathcal{O}$, afkomstig van A_a. We hebben op D(a) dus ook een schoof van ringen $\mathcal{O}(U)$.

We bewijzen nu dat $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \mid D(a)$.

(i) $\mathcal{O}(D(\frac{b}{1})) = (A_a)_{\frac{b}{1}} \simeq A_{ab} = \mathcal{O}_X(D(ab))$.

(Dus op de open kompakte verzamelingen van de vorm D(ab) komen $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}_X \mid D(a)$ overéén.)

(ii) Zij U een kompakte open deelverzameling van D(a). Dan is

$$U = D(ab_1) \cup \ldots \cup D(ab_n)$$

voor een eindig aantal elementen $(b_1,\ldots,b_n)$ (Ga na). Modulo identificatie kunnen we ook schrijven:

$$U = D(\tfrac{b_1}{1}) \cup \ldots \cup D(\tfrac{b_n}{1}).$$

We moeten bewijzen: $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)$. Welnu, Kies $\bar{s} \in \mathcal{O}(U)$ en daarbij

$$\bar{s}_i := \bar{s} \mid D(\tfrac{b_i}{1}) \in \mathcal{O}(D(\tfrac{b_i}{1})) \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Wegens $\mathcal{O}(D(\frac{b_i}{1})) \simeq \mathcal{O}_X(D(ab_i))$ vinden we voor elke i een uniek bepaalde

$$\bar{s}_i' \in \mathcal{O}_X(D(ab_i)) \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Nu volgt uit

$$\bar{s}_i \mid D(\tfrac{b_i}{1}) \cap D(\tfrac{b_j}{1}) = \bar{s}_j \mid D(\tfrac{b_i}{1}) \cap D(\tfrac{b_j}{1})$$

wegens de commutativiteit van het diagram

$$\begin{tikzcd}
(A_a)_{\frac{b_i}{1}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (A_a)_{\frac{b_ib_j}{1}} \arrow[d, "\wr"] & (A_a)_{\frac{b_j}{1}} \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] \\
A_{ab_i} \arrow[r] & A_{ab_ib_j} & A_{ab_j} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(Ga na), dat

$$\bar{s}'_i \mid D(ab_i) \cap D(ab_j) = \bar{s}'_j \mid D(ab_i) \cap D(ab_j).$$

Dus bepaalt het stel $\{\bar{s}'_i\}_{i=1}^n$ een unieke $\bar{s}' \in \mathcal{O}_X(U)$ zodat $\bar{s}' \mid D(ab_i) = \bar{s}'_i$. Uit de schoof eigenschappen van $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}_X$ volgt dan gemakkelijk dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \\ \bar{s} &\longmapsto \bar{s}' \end{aligned}$$

een ring-isomorfisme is.

(iii) Voor niet-kompakte, open deelverzamelingen U van D(a) volgt - door overgang op projectieve limieten - uit het voorgaande, dat

$$\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)$$

omdat, als V_1, V_2 open kompakte verzamelingen zijn (bijv. binnen U) met $V_1 \subset V_2$, en als ρ en σ de restrictie-afbeeldingen zijn, het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(V_2) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{O}(V_1) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \mathcal{O}_X(V_2) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O}_X(V_1) \end{array}$$

commuteert. (Ga na).

Dus: $(D(a), \mathcal{O}_X \mid D(a)) \simeq (\mathrm{Spec}\ A_a, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A_a})$

(iv) <u>Als</u> U <u>een open deelverzameling is van</u> Spec A, <u>en</u> (Spec A, $\mathcal{O}$) <u>is het affiene schema van de ring</u> A, <u>dan behoeft</u> $(U, \mathcal{O}|U)$ <u>geen affien schema te zijn</u>.

<u>Bew</u>: Kies bijvoorbeeld $A := \mathbb{C}[X,Y]$; $\underline{m} := (X,Y)$; $U := \mathrm{Spec}\ A \setminus \{x_{\underline{m}}\}$. Dan is in (ii) bewezen: $\mathcal{O}(U) = A$. Dus, als $(U, \mathcal{O}|U)$ een affien schema zou zijn, dan moet $(U, \mathcal{O}|U) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y], \mathcal{O})$.

Beschouw nu:

$$(f,\Phi)\colon (U, \mathcal{O}|U) \longrightarrow (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$$

gedefinieerd door:

$$\begin{cases} f(x_{\underline{p}}) := x_{\underline{p}} \quad \text{als } x_{\underline{p}} \in U \\ \Phi(U') := \left[\mathcal{O}(U') \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}(f^{-1}U')\right] \end{cases}$$

(waarbij $f^{-1}U' := U' \cap U \subset U'$). Het is duidelijk dat $\Phi(-)$ functoriëel is, en dat Φ in de staken identieke morphismen

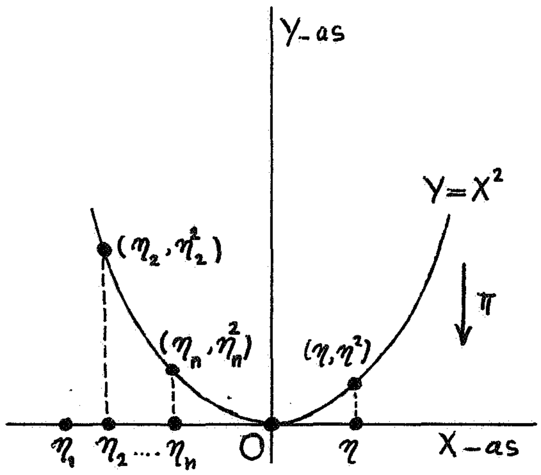
$$\mathcal{O}(x_{\underline{p}}) \xrightarrow{\text{id.}} \mathcal{O}(x_{\underline{p}}) \qquad\qquad (\underline{p} \neq \underline{m})$$

induceert. Dus zeker lokale homomorfismen. Volgens prop. 2.23 wordt (f,Φ) dan geïnduceerd door het ring-morphisme:

$$\alpha := \left[\mathbb{C}[X,Y] \simeq \mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) \xrightarrow{\text{rest.}} \mathcal{O}(U) \simeq \mathbb{C}[X,Y]\right].$$

Dit is het identieke morphisme op $\mathbb{C}[X,Y]$. Volgens stelling 2.25 (de dualiteit tussen de categorieën CRg en AffSch) geldt dan, dat ook (f,Φ) het identieke morphisme is, dus ook f. Tegenspraak. Dus is $(U, \mathcal{O}|U)$ geen affien schema.

(v) De projectie van de parabool $Y = X^2$ op de X-as in $\mathbb{C}^2$.



Parabool: Spec $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$

X-as: Spec $\mathbb{C}[X,Y]/(Y)$

De projectie π wordt als Spec ϕ geïnduceerd door het ring-morphisme

$$R_1 := \mathbb{C}[X,Y]/(Y) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2) =: R_2$$

$$X \longrightarrow X(\mathrm{mod}(Y-X^2))$$

Als $G(X) = (X-\eta_1)(X-\eta_2)\ \ldots\ (X-\eta_n) \in R_1$, dan is $U := D(G(X))$ een open verzameling op de X-as, en $\pi^{-1}U = D(\phi(G(X)) = D(G(X)) \subset \mathrm{Spec}\ R_2$. (Dus de gesloten punten op de parabool plus het algemene punt, waaruit de gesloten punten $\{(\eta_i,\eta_i^2)\}_{i=1}^n$ zijn weggelaten.) We hebben dan, als ϕ het morphisme van affiene schema's

$$(\pi,\Phi):\ (R_2,\mathcal{O}_2) \longrightarrow (R_1,\mathcal{O}_1)$$

induceert, het ringisomorfisme

$$\Phi(U):\ \mathcal{O}_1(U) \simeq \mathbb{C}[X]_{G(X)} \longrightarrow (\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2))_{G(X)} \simeq \mathcal{O}_2(\pi^{-1}U)$$

$$\frac{H(X)}{G(X)^n} \longmapsto \frac{H(X)}{G(X)^n}\ (\mathrm{mod}(Y-X^2))$$

Ga zelf na dat ook de staak-morphismen

$$\Phi(\eta):\ \mathcal{O}(\eta) \longrightarrow \mathcal{O}(\eta,\eta^2)$$

(waarbij we met η, resp. $(\eta,\ \eta^2)$ bedoelen de punten in R_1 resp. R_2, die corresponderen met de priemidealen $(X-\eta) \subset R_1$ resp. $(X-\eta, Y-\eta^2) \subset R_2$) isomorphisme zijn.

§3. Preschema's

Definitie 3.1. Een paar $(X,\mathcal{O})$ heet een geringde ruimte als X een topologische ruimte is en $\mathcal{O}$ een schoof van ringen op X.

Als $(X,\mathcal{O})$ een geringde ruimte is, en $U\subset X$ een open deelverzameling, dan induceert $\mathcal{O}$ op U een schoof $\mathcal{O}|U$, door voor elke open verzameling $V\subset U$ te definiëren: $(\mathcal{O}|U)(V):= \mathcal{O}(V)$.

Definitie 3.2. Een geringde ruimte $(X,\mathcal{O})$ heet een preschema als bij elk punt $x\in X$ een open omgeving U van x kan worden gevonden, zodat $(U,\mathcal{O}|U)$ een affien schema is.

Opmerking 3.3. Als $(X,\mathcal{O})$ een preschema is, en $x\in X$, dan is de staak $\mathcal{O}(x)$ een lokale ring, want kies een affiene omgeving U van x. Zeg $(U,\mathcal{O}|U) = \mathrm{Spec}(R)$. Dan is

$$\mathcal{O}(x) = \varinjlim_{\substack{x\in V\\ V \text{ open}}} \mathcal{O}(V) = \varinjlim_{\substack{x\in V\\ V \text{ open}}} \mathcal{O}(V\cap U) = R_{\underline{p}}$$

als x, als punt van het affiene schema van R, correspondeert met het priemideaal $\underline{p}\subset R$.

Definitie 3.4.

$$(f,\Phi):\ (X,\mathcal{O}_X)\longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

heet een morphisme van preschema's als

(i) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ zijn preschema's

(ii) (f,Φ) is een morphisme van schoven

(iii) $\forall x\in X.\ \Phi(x)\colon\ \mathcal{O}_Y(fx)\longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$ is een lokaal homomorphisme.

Opmerking 3.5. Op deze wijze hebben we een categorie van preschema's PreSch gedefiniëerd. Doordat we aan de morphismen van PreSch de eisen uit def. 3.4 hebben opgelegd, is de categorie der affiene schema's Affsch een volle deelcategorie van PreSch.

Opmerking 3.6: Elk preschema $(X,\mathcal{O})$ is een T_0-ruimte. (Dit volgt direkt met behulp van opm. 1.4.)

Opmerking 3.7: Als $(X,\mathcal{O})$ een preschema is, en V is een gesloten deelverzameling van X, dan geldt:

$$V \text{ irreducibel} \iff \exists! x \in X.\ \overline{\{x\}} = V.$$

Bew: Zij V irreducibel. Dan kunnen we $x \in V$ kiezen. Zij U een open affiene omgeving van X. Als $V \subset U$, dan volgt de bewering direkt uit prop. 1.11. Zij nu $V \not\subset U$. $V \cap U$ is een irreducibele deelverzameling van U, en heeft dus een algemeen punt, zeg x_0. Zij nu $\overline{\{x_0\}}$ de afsluiting van $\{x_0\}$ in X. Dan geldt:

$$V = \overline{\{x_0\}} \cup (V \cap U^C).$$

Omdat $V \cap U^C \neq V$ moet $\overline{\{x_0\}} = V$ zijn. Voorts is direkt duidelijk dat als $x \in V$, $\overline{\{x\}}$ irreducibel is, en dat V precies één algemeen punt x_0 heeft.

We hebben een preschema gedefiniëerd als een topologische ruimte met een schoof van ringen, die overdekt kan worden door open verzamelingen die - met de geïnduceerde schoof - affiene schema's waren.
Uit de topologie weten we, dat er procedures zijn om ruimten "aan elkaar te plakken". We kunnen ons afvragen "of het mogelijk is, om collecties affiene schema's $(U_i,\mathcal{O}_i)$ op een analoge wijze samen te voegen tot een preschema $(\bigcup_i U_i,\mathcal{O})$. Voor wat betreft de topologische ruimten U_i is er geen probleem, maar men zal de schoven $\mathcal{O}_i$ tot een schoof $\mathcal{O}$ op $\bigcup U_i$ moeten zien samen te voegen.

Propositie 3.8: Zij X een topologische ruimte met open overdekking $(X_i)_{i \in I}$.
Zij op elke X_i een schoof $\mathcal{O}_i$ gegeven. Noteer: $X_{ij} := X_i \cap X_j$; $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$. Laat voldaan zijn aan de volgende "plakvoorwaarden":

(i) Voor elke $i,j \in I$ bestaat er een isomorfisme van schoven

$$(\mathrm{id},\theta_{ij}) : (X_{ij},\mathcal{O}_i|X_{ij}) \xrightarrow{\sim} (X_{ij},\mathcal{O}_j|X_{ij})$$

en het stelsel $\{\theta_{ij}\}$ is zo gekozen dat $\theta_{ij}^{-1} = \theta_{ji}$ en $\theta_{ii} = \mathrm{id}$.

(ii) Als $\theta_{ij}^k := \theta_{ij} \mid X_{ijk} : (X_{ijk},\mathcal{O}_i|X_{ijk}) \xrightarrow{\sim} (X_{ijk},\mathcal{O}_j|X_{ijk})$ dan geldt: $\theta_{jk}^i \circ \theta_{ij}^k = \theta_{ik}^j$, voor elke $i,j,k \in I$.

Dan bestaat er precies één geplakte schoof $\mathcal{O}$ op X zodat

$$(X_i,\mathcal{O}|X_i) \simeq (X_i,\mathcal{O}_i).$$

Bew: Voer allereerst de volgende notatie in: Als U een open deelverzameling is van X, dan:

$$U_i := U \cap X_i \quad ; \quad U_{ij} := U_i \cap U_j .$$

Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_i(U_i) \arrow[r, "\rho_i{}^{U_{ij}}_{U_i}"] & \mathcal{O}_i(U_{ij}) & \\
\prod\limits_{\nu\in I} \mathcal{O}_\nu(U_\nu) \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & & & \\
 & \mathcal{O}_j(U_j) \arrow[r, "\rho_j{}^{U_{ij}}_{U_j}"] & \mathcal{O}_j(U_{ij}) \arrow[r, "\theta_{ji}(U_{ij})", "\sim"'] & \mathcal{O}_i(U_{ij})
\end{tikzcd}$$

Dit geeft: (we praten over schoven van ringen, abelse groepen, etc.) een afbeelding

$$\prod_{\nu\in I} \mathcal{O}_\nu(U_\nu) \xrightarrow[\rho_i{}^{U_{ij}}_{U_i} \circ p_i \,-\, \theta_{ji}(U_{ij}) \circ \rho_j{}^{U_{ij}}_{U_j} \circ p_j]{} \mathcal{O}_i(U_{ij}) \quad \text{(voor elke } i,j\text{)}.$$

Dus hebben we een afbeelding f_U, gedefinieerd door:

$$f_U := \prod_{i,j} \left[\rho_i{}^{U_{ij}}_{U_i} \circ p_i - \theta_{ji}(U_{ij}) \circ \rho_j{}^{U_{ij}}_{U_j} \circ p_j\right] : \prod_\nu \mathcal{O}_\nu(U_\nu) \longrightarrow \prod_{k,l} \mathcal{O}_k(U_{kl}).$$

Definieer nu:

$$\mathcal{O}(U) := \operatorname{Ker}(f_U).$$

We hebben nu voor elke open deelverzameling U van X een ring (abelse groep, etc.) $\mathcal{O}(U)$ gedefinieerd. We moeten nog controleren dat $\mathcal{O}$ een schoof is, en aan de gewenste eigenschap $\mathcal{O}|X_i = \mathcal{O}_i$ voldoet, en dat $\mathcal{O}$ eenduidig bepaald is.

(i) <u>$\mathcal{O}$ is een preschoof</u>:

Als U,V twee open verzamelingen in X zijn, en $U \subset V$, dan hebben we het diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(U) \arrow[r] & \prod_\nu \mathcal{O}_\nu(U_\nu) \arrow[r] & \prod_{k,l} \mathcal{O}_k(U_{kl}) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\rho^U_V"] & \prod_\nu \mathcal{O}_\nu(V_\nu) \arrow[r] \arrow[u, "\prod_\nu \rho_\nu{}^{U_\nu}_{V_\nu}"] & \prod_{k,l} \mathcal{O}_k(V_{kl}) \arrow[u, "\prod_{k,l} \rho_k{}^{U_{kl}}_{V_{kl}}"]
\end{tikzcd} \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

Hiermee zijn de restricties $\rho^U_V : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ gedefinieerd. Het is direkt duidelijk dat, als $W \supset V \supset U$, geldt:

$$\rho^V_W \, \rho^U_V = \rho^U_W.$$

(ii) <u>$\mathcal{O}$ is een schoof</u>:

Zij U een open deelverzameling van X, met een open overdekking

$$U = \bigcup_{\mu \in \Gamma} U^\mu.$$

We moeten beide schoofeigenschappen controleren.

(ii,i) <u>Als $s,t \in \mathcal{O}(U)$ en $s|U^\mu = t|U^\mu$ voor elke $\mu \in \Gamma$, dan $s = t$</u>:

Noteer: $\quad U_i^\mu := U^\mu \cap X_i \;;\; U_{ij}^\mu := U_i^\mu \cap U_j^\mu.$

Omdat $\mathcal{O}(U) \subset \prod_{\nu} \mathcal{O}_{\nu}(U_{\nu})$, kunnen we schrijven:

$$s = (s_{\nu})_{\nu \in I} \; ; \; t = (t_{\nu})_{\nu \in I} \; ; \; s_{\nu}, t_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}(U_{\nu}) \quad \ldots\ldots(\beta)$$

Bovendien is volgens (α):

$$s \mid U^{\mu} := (s_{\nu} \mid U^{\mu}_{\nu})_{\nu \in I} \; ; \; t \mid U^{\mu} := (t_{\nu} \mid U^{\mu}_{\nu})_{\nu \in I}.$$

Dat wil zeggen: Voor elke $\mu \in \Gamma$ geldt:

$$\begin{cases} U^{\mu} = \bigcup_{\nu \in I} U^{\mu}_{\nu} \\ \forall_{\nu \in I}.\; s_{\nu} \mid U^{\mu}_{\nu} = t_{\nu} \mid U^{\mu}_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}(U^{\mu}_{\nu}). \end{cases}$$

Dus, omdat $\mathcal{O}_{\nu}$ een schoof is, geldt voor elke ν: $s_{\nu} = t_{\nu}$. Volgens (β) wil dit zeggen: $s = t$.

(ii,ii) <u>Als voor elke $\mu \in \Gamma$ een $s^{\mu} \in \mathcal{O}(U^{\mu})$ gegeven is, zodat voor elke $\mu, \lambda \in \Gamma$ geldt</u>:

$$\underline{s^{\mu} \mid U^{\mu\lambda} = s^{\lambda} \mid U^{\mu\lambda}} \qquad \underline{(U^{\mu\lambda} := U^{\mu} \cap U^{\lambda})}$$

<u>dan is er een $s \in \mathcal{O}(U)$ zodat $s \mid U^{\mu} = s_{\mu}$, $\forall \mu \in \Gamma$.</u>

Wegens $\mathcal{O}(U^{\mu}) \subset \prod_{\nu \in I} \mathcal{O}_{\nu}(U^{\mu}_{\nu})$ kunnen we schrijven:

$$s^{\mu} = (s^{\mu}_{\nu})_{\nu \in I} \; ; \; s^{\mu} \mid U^{\mu\lambda} = (s^{\mu}_{\nu} \mid U^{\mu\lambda}_{\nu})_{\nu \in I} \quad \ldots\ldots(\varepsilon)$$

zodat voor elke $\nu \in I$ geldt:

$$\forall \mu, \lambda \in \Gamma.\; s^{\mu}_{\nu} \mid U^{\mu\lambda}_{\nu} = s^{\lambda}_{\nu} \mid U^{\mu\lambda}_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}(U^{\mu\lambda}_{\nu}).$$

Dus, omdat $\mathcal{O}_{\nu}$ een schoof is, is er voor elke $\nu \in I$ een unieke $s_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}(U_{\nu})$ te vinden, zodat

$$\forall \mu \in \Gamma.\; s_{\nu} \mid U^{\mu}_{\nu} = s^{\mu}_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}(U^{\mu}_{\nu}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

We hebben derhalve het element $(s_{\nu})_{\nu \in I} \in \prod_{\nu \in I} \mathcal{O}_{\nu}(U_{\nu})$, en, als $f_U((s_{\nu})) = 0$, dan $(s_{\nu}) \in \mathcal{O}(U)$.

Welnu:

$$f_U((s_\nu)) = \prod_{i,j} \left[\rho_i{}^{U_{ij}}_{U_i} \circ p_i - \theta_{ji}(U_{ij}) \circ \rho_j{}^{U_{ij}}_{U_j} \circ p_j\right]((s_\nu)) \text{ ......}(\delta)$$

Er geldt, als $i,j \in I$:

$$\theta_{ji}(U_{ij}) \circ \rho_j{}^{U_{ij}}_{U_j} \circ p_j((s_\nu)) = [\theta_{ji}(U_{ij})](s_j \mid U_{ij}).$$

Voorts: $\quad U_{ij} = \bigcup_{\mu \in \Gamma} U^\mu_{ij}$

en voor elke $\mu \in \Gamma$ hebben we:

$$s^\mu = (s^\mu_\nu)_{\nu \in I} \in \mathcal{O}(U^\mu) = \mathrm{Ker}(f_{U^\mu}). \quad (\text{Cf. } (\varepsilon)).$$

Dus: $\quad f_{U^\mu}(s^\mu) = \prod_{i,j} \left[s^\mu_i \mid U^\mu_{ij} - \theta_{ji}(U^\mu_{ij})(s^\mu_j \mid U^\mu_{ij})\right] = 0 \qquad (\mu \in \Gamma).$

Met andere woorden:

$$\forall i,j \in I \ \forall \mu \in \Gamma. \ s^\mu_i \mid U^\mu_{ij} = \theta_{ji}(U^\mu_{ij})(s^\mu_j \mid U^\mu_{ij}) \text{ ......}(\tau)$$

Volgens (γ) is $s_i \mid U^\mu_i = s^\mu_i$, dus $s^\mu_i \mid U^\mu_{ij} = s^\mu_i \mid U^\mu_{ij}$. Ook, omdat het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_j(U^\mu_{ij}) \arrow[r, "\theta_{ji}(U^\mu_{ij})"'] & \mathcal{O}_i(U^\mu_{ij}) \\
\mathcal{O}_j(U_{ij}) \arrow[u, "\text{restr.}"'] \arrow[r, "\theta_{ji}(U_{ij})"'] & \mathcal{O}_i(U_{ij}) \arrow[u, "\text{restr.}"']
\end{tikzcd}$$

commuteert, geldt: $\theta_{ji}(U^\mu_{ij})(s^\mu_j) = \theta_{ji}(U^\mu_{ij})(s_j \mid U^\mu_{ji}) = \theta_{ji}(U_{ij})(s_j|U_{ij})|U^\mu_{ij}$.
Met andere woorden: Voor elke $\mu \in \Gamma$ geldt (Cf. (τ)):

$$\theta_{ji}(U_{ij})(s_j \mid U_{ij}) \mid U^\mu_{ij} = s_i \mid U^\mu_{ij} = (s_i \mid U_{ij}) \mid U^\mu_{ij}.$$

Omdat $\theta_{ji}(U_{ij})(s_j \mid U_{ij}) \in \mathcal{O}_i(U_{ij})$ en $s_i \mid U_{ij} \in \mathcal{O}_i(U_{ij})$, en omdat

$U_{ij} = \bigcup_{\mu\in\Gamma} U^{\mu}_{ij}$ en $\mathcal{O}_i$ een schoof, geldt:

$$\theta_{ji}(U_{ij})(s_j \mid U_{ij}) = s_i \mid U_{ij}$$

waarmee uit (δ) volgt: $f_U((s_\nu)) = 0$. Dus $(s_\nu)_{\nu\in I} \in \mathcal{O}(U)$.
Nu nog te bewijzen: $(s_\nu) \mid U^{\mu} = s^{\mu}$. Dit volgt aldus:

$$(s_\nu)_\nu \mid U^{\mu} = (s_\nu \mid U^{\mu}_\nu)_\nu \overset{(\gamma)}{=} (s^{\mu}_\nu)_\nu \overset{(\varepsilon)}{=} s^{\mu} .$$

Dus $\mathcal{O}$ is een schoof op X.
Nu bewijzen we:

(iii) $\underline{\forall i \in I.\ \mathcal{O}|X_i = \mathcal{O}_i}$.

Definieer

$$(\mathrm{id},\Phi_k):\ (X_k, \mathcal{O}|X_k) \longrightarrow (X_k, \mathcal{O}_k)$$

als volgt. Zij U_k een open deelverzameling van X_k, en noteer:

$$U_{k,i} := U_k \cap X_i \ ;\ U_{k,ij} := U_{k,i} \cap U_{k,j}.$$

We moeten definiëren:

$$\Phi_k(U_k):\ \mathcal{O}_k(U_k) \longrightarrow \mathcal{O}(U_k).$$

Voor elke $i \in I$ hebben we het morphisme:

$$\mathcal{O}_k(U_k) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathcal{O}_k(U_{k,i}) \xrightarrow[\theta_{ki}(U_{k,i})]{} \mathcal{O}_i(U_{k,i})$$

Dus hebben we een éénduidig door deze morphismen bepaald morphisme

$$\mathcal{O}_k(U_k) \xrightarrow[\prod_i \left[\theta_{ki}(U_{k,i}) \circ \rho_k{}^{U_{k,i}}_{U_k}\right]]{} \prod_i \mathcal{O}_i(U_{k,i}).$$

Als $a \in \mathcal{O}_k(U_k)$, definieer dan:

$$\Phi_k(U_k)(a) := \prod_i \left[\theta_{ki}(U_{k,i}) \circ \rho_k{}^{U_{k,i}}_{U_k}\right](a).$$

Ten eerste moeten we nagaan dat $\Phi_k(U_k)(a) \in \mathcal{O}(U_k)$. Welnu:

$$f_{U_k} \circ \Phi_k(U_k)(a) = f_{U_k}\left[\left(\theta_{ki}(U_{k,i}) \circ {\rho_k}^{U_{k,i}}_{U_k}(a)\right)_i\right] =$$

$$= \prod_{s,t}\left[{\rho_s}^{U_{k,st}}_{U_{k,s}} \circ p_s - \theta_{ts}(U_{k,st}) \circ {\rho_t}^{U_{k,st}}_{U_{k,t}} \circ p_t\right]\left(\left(\theta_{ki}(U_{k,i}) \circ {\rho_k}^{U_{k,i}}_{U_k}(a)\right)_i\right)$$

en dit is nul d.e.s.d. als voor elke $s,t \in I$ geldt:

$${\rho_s}^{U_{k,st}}_{U_{k,s}} \circ \theta_{ks}(U_{k,s}) \circ {\rho_k}^{U_{k,s}}_{U_k}(a) =$$

$$= \theta_{ts}(U_{k,st}) \circ {\rho_t}^{U_{k,st}}_{U_{k,t}} \circ \theta_{kt}(U_{k,t}) \circ {\rho_k}^{U_{k,t}}_{U_k}(a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Omdat de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_k(U_{k,t}) \arrow[r, "\theta_{kt}(U_{k,t})"] \arrow[d, "{\rho_k}^{U_{k,st}}_{U_{k,t}}"'] & \mathcal{O}_t(U_{k,t}) \arrow[d, "{\rho_t}^{U_{k,st}}_{U_{k,t}}"] \\
\mathcal{O}_k(U_{k,st}) \arrow[r, "\theta^s_{kt}(U_{k,st})"'] & \mathcal{O}_t(U_{k,st})
\end{tikzcd} \quad ;$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_k(U_{k,s}) \arrow[r, "\theta_{ks}(U_{k,s})"] \arrow[d, "{\rho_k}^{U_{k,st}}_{U_{k,s}}"'] & \mathcal{O}_s(U_{k,s}) \arrow[d, "{\rho_s}^{U_{k,st}}_{U_{k,s}}"] \\
\mathcal{O}_k(U_{k,st}) \arrow[r, "\theta^t_{ks}(U_{k,st})"'] & \mathcal{O}_s(U_{k,st})
\end{tikzcd}$$

commuteren vinden we voor de rechterterm van (1):

$$\theta_{ts}(U_{k,st})\circ\rho_{t\,U_{k,t}}^{\;U_{k,st}}\circ\theta_{kt}(U_{k,t})\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,t}}(a) =$$

$$= \theta^{k}_{ts}(U_{k,st})\circ\theta^{s}_{kt}(U_{k,st})\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,st}}(a) =$$

$$= \theta^{t}_{ks}(U_{k,st})\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,st}}(a) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De linkerterm van (1) wordt:

$$\rho_{s\,U_{k,s}}^{\;U_{k,st}}\circ\theta_{ks}(U_{k,s})\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,s}}(a) = \theta^{t}_{ks}(U_{k,st})\circ\rho_{k\,U_{k,s}}^{\;U_{k,st}}\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,s}}(a) =$$

$$= \theta^{t}_{ks}(U_{k,st})\circ\rho_{k\,U_k}^{\;U_{k,st}}(a) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Uit (2) en (3) volgt de gelijkheid (1). Dus geldt:

$$\Phi_k(U_k)(a)\in\mathcal{O}(U_k).$$

Uit de definitie van $\Phi_k(U_k)$ volgt gemakkelijk dat $\Phi_k(U_k)$ functorieel is, en een ringhomomorfisme (in het geval van schoven van ringen). Nu nog te bewijzen dat $\Phi_k(U_k)$ bijectief is.

(iii,i) $\underline{\Phi_k(U_k)\text{ injectief.}}$

Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_k(U_k) \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d, "\Phi_k(U_k)"'] & \mathcal{O}_k(U_{k,k}) = \mathcal{O}_k(U_k) \\
\mathcal{O}(U_k) \arrow[r, hook] & \prod_i \mathcal{O}_i(U_{k,i}) \arrow[u, "\text{proj.}"']
\end{tikzcd}$$

Dan volgt direkt dat $\Phi_k(U_k)$ injectief is.

(iii,ii) $\underline{\Phi_k(U_k) \text{ is surjectief.}}$

Zij $b \in \mathcal{O}(U_k)$. Dan kunnen we b opvatten als element van $\prod_i (\mathcal{O}_i(U_{k,i}))$ en schrijven: $b = (b_i)_{i \in I}$. Beschouw:

$$\begin{array}{ccc} \prod_i \mathcal{O}_i(U_{k,i}) & \xrightarrow[\text{proj.}]{} & \mathcal{O}_k(U_{k,k}) = \mathcal{O}_k(U_k) \\ b & \longmapsto & b_k . \end{array}$$

Dan geldt: $\Phi_k(U_k)(b_k) = (\prod_i [\theta_{ki}(U_{k,i}) \circ \rho_k{}^{U_{k,i}}_{U_k}])(b_k)$ ....(4)

Omdat $b \in \mathcal{O}(U_k) = \mathrm{Ker}(f_{U_k})$ geldt eveneens:

$$\forall i,j \in I.\ \rho_i{}^{U_{k,ij}}_{U_{k,i}}(b_i) = \theta_{ji}(U_{k,ij}) \circ \rho_j{}^{U_{k,ij}}_{U_{k,j}}(b_j).$$

In het bijzonder, als $j = k$:

$$\forall i \in I.\ \rho_i{}^{U_{k,i}}_{U_{k,i}}(b_i) = \theta_{ki}(U_{k,i}) \circ \rho_k{}^{U_{k,i}}_{U_k}(b_k).$$

Dus, vlgs (4):

$$\Phi_k(U_k)(b_k) = \prod_i (\rho_i{}^{U_{k,i}}_{U_{k,i}}(b_i)) = (b_i)_{i \in I} = b$$

waarmee de surjectiviteit bewezen is.

(iv) Nu nog te bewijzen: $\underline{\mathcal{O} \text{ is éénduidig bepaald}}$.

Stel, we hebben twee schoven $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ op X zodat voor elke $k \in I$ geldt:

$$\begin{cases} (id, \Phi_k) : (X_k, \mathcal{O}|X_k) \xrightarrow{\sim} (X_k, \mathcal{O}_k) \\ (id, \Phi'_k) : (X_k, \mathcal{O}'|X_k) \xrightarrow{\sim} (X_k, \mathcal{O}_k) . \end{cases}$$

Definieer nu:

$$(id,\Phi):\ (X,\mathcal{O}') \longrightarrow (X,\mathcal{O})$$

als volgt: Zij $s \in \mathcal{O}(U)$, U een open deelverzameling van X. Noteer: $U_k := U \cap X_k$ en beschouw:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(U) & \xrightarrow{\rho_U^{U_k}} & \mathcal{O}(U_k) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_k(U_k)} & \mathcal{O}_k(U_k) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_k'(U_k)^{-1}} & \mathcal{O}'(U_k) \\ s & \longmapsto & & & & & t_k \end{array}$$

Dan volgt volgens de functorialiteit der isomorfismen Φ_k en Φ_k':

$$\forall k,l.\ t_k \mid U_{kl} = t_l \mid U_{kl} \qquad (U_{kl} = U_k \cap U_l)$$

Er is dus precies één $t \in \mathcal{O}'(U)$ zodat $t \mid U_k = t_k$. Definieer:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(U):\ \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}'(U) \\ s & \longmapsto & t \end{array}$$

Omdat Φ_k en Φ_k' isomorfismen zijn, en $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ aan beide schoofeigenschappen voldoen, volgt dat (id,Φ) een isomorfisme van schoven is.

Opmerking 3.9: Zij $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ een open overdekking van een topologische ruimte X. Als $\{(X_\alpha,\mathcal{O}_\alpha)\}_\alpha$ een collectie geringde ruimtes is, die voldoen aan de plakvoorwaarden van prop. 3.8, dan hebben we de geplakte schoof $(X,\mathcal{O}_X)$. Zij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een andere geringde ruimte, en laat voor elke α een morphisme

$$(X_\alpha,\mathcal{O}_\alpha) \xrightarrow{(\phi_\alpha,\Phi_\alpha)} (Y,\mathcal{O}_Y)$$

gegeven zijn, zodat voldaan is aan:

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \forall \alpha,\beta. \quad x \in X_\alpha \cap X_\beta \Longrightarrow \phi_\alpha(x) = \phi_\beta(x) \\ \text{(ii)} \ \forall \alpha,\beta. \quad [\Phi_\alpha(x)\colon \mathcal{O}_Y(\phi_\alpha(x)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)] = \\ \qquad\qquad\qquad = [\Phi_\beta(x)\colon \mathcal{O}_Y(\phi_\beta(x)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)] \end{cases}$$

(d.w.z.: op de doorsnede $X_\alpha \cap X_\beta$ stemmen Φ_α en Φ_β in de staken overéén.)

Dan induceert $\{(\phi_\alpha,\Phi_\alpha)\}_\alpha$ op éénduidige manier een morphisme

$$(\phi,\Phi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

zodat

$$(\phi_\alpha,\Phi_\alpha) = [(X_\alpha,\mathcal{O}_\alpha) = (X_\alpha,\mathcal{O}_X|X_\alpha) \hookrightarrow (X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow[(\phi,\Phi)]{} (Y,\mathcal{O}_Y)].$$

Want, wegens $\phi_\alpha x = \phi_\beta x$ als $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ is $\phi\colon X \to Y$ gedefinieerd. Voorts, kies U open in Y. Dan is

$$\phi_\alpha^{-1}(U) = \phi^{-1}U \cap X_\alpha \quad \text{en} \quad \phi^{-1}U = \bigcup_\alpha \phi^{-1}U \cap X_\alpha.$$

We hebben twee morphismen

$$\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{\Phi_\alpha(U)} \mathcal{O}_\alpha(\phi_\alpha^{-1}U) = \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U \cap X_\alpha) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U \cap X_\alpha \cap X_\beta)$$
$$\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{\Phi_\beta(U)} \mathcal{O}_\beta(\phi_\beta^{-1}U) = \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U \cap X_\beta) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U \cap X_\alpha \cap X_\beta)$$

tussen de schoven $(Y,\mathcal{O}_Y)$ en $(X_\alpha \cap X_\beta, \mathcal{O}_X|X_\alpha \cap X_\beta)$, die volgens het gegeven in de staken overéén stemmen. Volgens lemma 2.22 zijn deze morphismen dan gelijk.

Kies nu $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ en zij $s_\alpha := \Phi_\alpha(U)(s) \in \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U \cap X_\alpha)$. Dan geldt:

$$s_\alpha \mid \phi^{-1}U \cap X_\alpha \cap X_\beta = s_\beta \mid \phi^{-1}U \cap X_\alpha \cap X_\beta$$

en derhalve induceert het stelsel $(s_\alpha)_\alpha$ een éénduidig bepaald element

$s' \in \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U)$, zodat

$$\forall\alpha.\ s' \mid \phi^{-1}U \cap X_\alpha = s_\alpha.$$

Dus hebben we een afbeelding

$$\Phi(U)\colon \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\phi^{-1}U)$$

$$s \longmapsto s'$$

gedefinieerd. Ga na dat (ϕ,Φ) aan de eisen voldoet.

<u>Opmerking 3.10</u>: <u>Als $(T,\mathcal{O}_T)$ een preschema is, dan kan elke open verzameling geschreven worden als een vereniging van affiene open stukken.</u>

(Ga na, dat als $T = \bigcup T_\alpha$ een open affiene overdekking is van T, en $T_\alpha = \mathrm{Spec}(R_\alpha)$, dat dan het stelsel

$$\bigcup_\alpha \{D(a_\alpha)\}_{a_\alpha \in R_\alpha}$$

een basis is voor de open topologie van T, en dat bovendien:

$$(D(a_\alpha), \mathcal{O}_T | D(a_\alpha)) = (\mathrm{Spec}(R_\alpha)_{a_\alpha}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R_\alpha)_{a_\alpha}})$$

(Cf. §2a, (iii)).

<u>Stelling 3.11</u>: <u>In PreSch bestaan voldoende gevezelde produkten</u>.

<u>Bew</u>: Het bewijs verloopt in verschillende stappen. Allereerst een <u>notatie afspraak</u>: Preschema's

$$(\mathrm{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}) \quad \text{of} \quad (X, \mathcal{O}_X)$$

zullen kortheidshalve worden aangegeven met Spec (A) resp. X, als geen verwarring ontstaat.

Wel zullen we morphismen van preschema's altijd aangeven met paren

$$(\phi,\Phi)\colon X \longrightarrow Y$$

inplaats van

$$(\phi,\Phi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

en <u>niet</u> met

$$\phi\colon X \longrightarrow Y.$$

Met de laatste notatie zullen we altijd de onderliggende continue afbeelding aangeven.

<u>Bewering (i)</u>: <u>Als</u> X, Y, Z <u>de affiene schema's zijn van de ringen</u> A, B, <u>resp</u>. C, <u>dan is</u>

$$X \,\Pi_Y\, Z = \mathrm{Spec}(A \otimes_B C).$$

<u>Bew (i)</u>: Beschouw een commutatief diagram in <u>PreSch</u>

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "(\psi,\Psi)"] \arrow[ddr, bend right, "(\phi,\Phi)"'] & & \\
& \mathrm{Spec}\ A \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\ C \arrow[d] \\
& \mathrm{Spec}\ A \arrow[r] & \mathrm{Spec}\ B
\end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(We hebben aan het einde van §2 gezien, dat als T een affien schema is, er een uniek morphisme

$$T \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A \otimes_B C$$

bestaat, dat het diagram (1) commutatief afmaakt.) Neem nu aan dat T een willekeurig preschema is. Dan kunnen we een open affiene overdekking $(T_\alpha)_\alpha$ vinden voor T. Omdat de T_α's affien zijn, hebben we voor elke α unieke factorisaties (π_α,Π_α) van zowel $(\phi_\alpha,\Phi_\alpha)$ als van $(\psi_\alpha,\Psi_\alpha)$

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[dr, dashed, "(\pi_\alpha, \Pi_\alpha)"] \arrow[drr, bend left, "(\psi_\alpha, \Psi_\alpha)"] \arrow[ddr, bend right, "(\phi_\alpha, \Phi_\alpha)"'] & & \\
& \operatorname{Spec} A \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} C \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec} A \arrow[r] & \operatorname{Spec} B
\end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(Deze laatste morphismen zijn uiteraard gedefinieerd door

$$(\phi_\alpha, \Phi_\alpha) := \left[T_\alpha \xrightarrow[\text{kanoniek}]{} T \xrightarrow{(\phi,\Phi)} \operatorname{Spec} A\right]$$

$$(\psi_\alpha, \Psi_\alpha) := \left[T_\alpha \xrightarrow[\text{kanoniek}]{} T \xrightarrow{(\psi,\Psi)} \operatorname{Spec} C\right] \quad .)$$

We gaan nu de morphismen (π_α, Π_α) "aan elkaar plakken" tot een morphisme

$$(\pi, \Pi) : T \longrightarrow \operatorname{Spec} A \otimes_B C.$$

Beschouw $T_\alpha \cap T_\beta$. Schrijf deze open verzameling als vereniging van open affiene stukken: (Cf. opm. 3.10)

$$T_\alpha \cap T_\beta = \bigcup_{i \in I} V_i .$$

Dan hebben we voor elke i twee morphismen:

$$\begin{cases} V_i \longrightarrow T_\alpha \longrightarrow T \\ V_i \longrightarrow T_\beta \longrightarrow T . \end{cases}$$

Beide zijn de kanonieke afbeeldingen $V_i \longrightarrow T$. We hebben derhalve, als we noteren:

$$\begin{cases} (\phi_i, \Phi_i) := V_i \xrightarrow{\text{kan.}} T \xrightarrow{(\phi,\Phi)} \operatorname{Spec} A \\ (\psi_i, \Psi_i) := V_i \xrightarrow{\text{kan.}} T \xrightarrow{(\phi,\Phi)} \operatorname{Spec} C \end{cases}$$

en:

$$\begin{cases} (\pi_{\alpha,i},\Pi_{\alpha,i}) := [V_i \longrightarrow T_\alpha \xrightarrow{(\pi_\alpha,\Pi_\alpha)} \operatorname{Spec} A \otimes_B C] \\ (\pi_{\beta,i},\Pi_{\beta,i}) := [V_i \longrightarrow T_\beta \xrightarrow{(\pi_\beta,\Pi_\beta)} \operatorname{Spec} A \otimes_B C] \end{cases}$$

het commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[d, dashed, "(\pi_{\beta,i},\Pi_{\beta,i})", "(\pi_{\alpha,i},\Pi_{\alpha,i})"'] \arrow[dr, bend left, "(\psi_i,\Psi_i)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\phi_i,\Phi_i)"'] & \\ \operatorname{Spec} A \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} C \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r] & \operatorname{Spec} B \end{tikzcd}$$

Dus, omdat V_i affien is, moeten de factorisaties van (ψ_i,Ψ_i) en (ϕ_i,Φ_i) uniek zijn, dus

$$(\pi_{\alpha,i},\Pi_{\alpha,i}) = (\pi_{\beta,i},\Pi_{\beta,i}).$$

Dit kunnen we bereiken voor elke V_i. Dus stemmen (π_α,Π_α) en (π_β,Π_β) overeen op elke affiene deelverzameling V_i van de open overdekking $T_\alpha \cap T_\beta = \bigcup V_i$. Dus geldt dit ook voor de staken in de punten van $T_\alpha \cap T_\beta$. We hebben volgens Opm. 3.9. dus een uniek bepaald "geplakt" morphisme

$$(\pi,\Pi)\colon T \longrightarrow \operatorname{Spec} A \otimes_B C$$

gevonden, dat het diagram (i) commutatief afmaakt. (Ga na).

<u>Bewering (ii)</u>: <u>Als we een gevezeld produkt</u>

$$\begin{tikzcd} Y \Pi_S X \arrow[r, "(p,P)"] \arrow[d, "(q,Q)"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

hebben in PreSch, en $U \subset X$ *is een open deelverzameling, dan hebben we het preschema*

$$(W, \mathcal{O}_W) := (p^{-1}U, \mathcal{O}_{Y \Pi_S X} \mid p^{-1}U)$$

en er geldt:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "(p,P)|W"] \arrow[d, "(q,Q)|W"'] & U \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

is een gevezeld produkt. (Het is duidelijk wat we met de morphismen $(p,P)|W$ en $(q,Q)|W$ bedoelen.)

Bew (ii): Diagram (3) is uiteraard commutatief. Beschouw nu een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[dr, bend left, "(\phi,\Phi)"] \arrow[ddr, bend right, "(\psi,\Psi)"'] & \\ & U \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dit induceert een unieke factorisatie, gegeven door het diagram

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, bend left, "(\phi,\Phi)"] \arrow[d, dashed, "(\pi,\Pi)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\psi,\Psi)"'] & U \arrow[d, bend left] \\ Y \Pi_S X \arrow[r, "(p,P)"] \arrow[d, "(q,Q)"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Voorts, $p \circ \pi(W') = \phi W' \subset U$. Dus

$$W' \xrightarrow{(\pi,\Pi)} W$$

en deze is uniek bepaald, en maakt diagram (4) commutatief af.

Bewering (iii): Als

$$\begin{tikzcd} X\Pi_S Y \arrow[r, "{(q,Q)}"] \arrow[d, "{(p,P)}"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

een gevezeld produkt is in PreSch, en U is een open deelverzameling van X, en Y is een open deelverzameling van Y, dan hebben we een preschema

$$W := (q^{-1}V \cap p^{-1}U,\ \mathcal{O}_{X\Pi_S Y} \mid q^{-1}V \cap p^{-1}U)$$

en er geldt:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "{(q,Q)|W}"] \arrow[d, "{(p,P)|W}"'] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

is een gevezeld produkt.

Bew (iii): Dit volgt door bewering (ii) twee keer achtereen toe te passen.

Bewering (iv): Als X, Y, S preschema's zijn, en

$$\begin{cases} (u,U):\ X \longrightarrow S \\ (v,V):\ Y \longrightarrow S \end{cases}$$

zijn morphismen van preschema's, en S' is een open deelverzameling van S zodat we hebben het preschema

$$(S', \mathcal{O}_{S'}) := (S', \mathcal{O}_S | S')$$

dan geldt: Als $u(X) \subset S'$ en $v(Y) \subset S'$ dan:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S \end{tikzcd} \quad \underline{\text{gevezeld produkt}} \Longleftrightarrow \begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S' \end{tikzcd} \quad \underline{\text{gevezeld produkt}}.$$

<u>Bew (iv)</u>: Triviaal.

<u>Bewering (v)</u>: <u>Als</u> X <u>een preschema is met open overdekking</u> $(X_i)_{i\in I}$. <u>Dan hebben we preschema's</u>

$$(X_i,\mathcal{O}_{X_i}) := (X_i,\mathcal{O}_X|X_i).$$

<u>Stel we hebben een commutatief diagram in PreSch</u>:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "{(p,P)}"] \arrow[d, "{(q,Q)}"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

<u>en definieer</u>:

$$(Z_i,\mathcal{O}_{Z_i}) := (p^{-1}X_i,\mathcal{O}_Z \mid p^{-1}X_i)$$

<u>dan geldt</u>: <u>Als voor elke</u> $i\in I$

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "{(p,P)|Z_i}"] \arrow[d, "{(q,Q)|Z_i}"'] & X_i \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

<u>een gevezeld produkt is, dan is diagram (5) een gevezeld produkt</u>.

<u>Bew (v)</u>: Beschouw een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[dr, bend left, "{(p',P')}"] \arrow[d, bend right, "{(q',Q')}"'] & \\ & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd} \qquad \text{..............................(6)}$$

in PreSch, en definieer $Z_i' := p'^{-1}(X_i)$. Dan hebben we een preschema

$$(Z_i', \mathcal{O}_{Z_i'}) := (Z_i', \mathcal{O}_{Z'}|Z_i')$$

en een unieke factorisatie (π_i, Π_i) van $(p,P)|Z_i'$ en $(q,Q)|Z_i'$, zoals aangegeven in het diagram:

$$\begin{tikzcd} Z_i' \arrow[dr, dashed, "{(\pi_i,\Pi_i)}"] \arrow[drr, bend left, "{(p',P')|Z_i'}"] \arrow[ddr, bend right, "{(q',Q')|Z_i'}"'] & & \\ & Z_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

We kunnen de morphismen

$$Z_i' \xrightarrow{(\pi_i,\Pi_i)} Z_i \xrightarrow[\text{kanoniek}]{} Z$$

weer plakken tot een morphisme

$$(\pi,\Pi):\ Z' \longrightarrow Z$$

dat uniek is bepaald en diagram (6) commutatief afmaakt. Dit volgt, omdat volgens bewering (ii) de diagrammen

$$\begin{tikzcd} Z_i \cap Z_j \arrow[r, "{(p,P)|Z_i \cap Z_j}"] \arrow[d] & X_i \cap X_j \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

gevezelde produkten zijn wegens $Z_i \cap Z_j = p^{-1}(X_i \cap X_j)$. (Ga na).

Bewering (vi): Als X, Y, S, Z preschema's zijn, en $(X_i)_i$ en $(Y_j)_j$ open overdekkingen van X resp. Y, en als het diagram in PreSch

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "{(p,P)}"] \arrow[d, "{(q,Q)}"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd} \qquad \text{..............................(7)}$$

commuteert, definieer dan:

$$Z_{ij} := p^{-1}X_i \cap q^{-1}Y_j.$$

Dan geldt: Als voor elke i,j de diagrammen

$$\begin{tikzcd} Z_{ij} \arrow[r, "{(p,P)|Z_{ij}}"] \arrow[d, "{(q,Q)|Z_{ij}}"'] & X_i \arrow[d] \\ Y_j \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

gevezelde produkten zijn, dan is ook diagram (6) een gevezeld produkt

Bew (vi): Bewering (vi) is een rechtstreekse generalisatie van bewering (v). (Ga na).

Bewering (vii): Als X, Y, S preschema's zijn met open overdekkingen $(X_i)_i$, $(Y_j)_j$ voor resp. X en Y en als we twee vastgekozen morphismen

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S \end{tikzcd}$$

hebben, dan geldt, als voor elke i,j er een gevezeld produkt

$$\begin{tikzcd} Z_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d, "(u,U)|X_i"] \\ Y_j \arrow[r, "(v,V)|Y_j"'] & S \end{tikzcd}$$

<u>bestaat, dan is er ook een gevezeld produkt</u>

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "(u,U)"] \\ Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S \end{tikzcd}$$

<u>Bew (vii)</u>: We nemen aan dat de overdekking $(Y_j)_j$ van Y uit één element bestaat. (Anders passen we onderstaand bewijs tweemaal toe, eerst op de overdekking $(X_i)_i$ en dan nogmaals op de overdekking $(Y_j)_j$.)
We hebben dus voor elke i een gevezeld produkt

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "(p_i,P_i)"] \arrow[d] & X_i \arrow[d, "(u,U)\ X_i"] \\ Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S \end{tikzcd}$$

Noteer nu:

$$X_{ij} := X_i \cap X_j$$

$$Z_{ij} := p_i^{-1}(X_{ij}) \ ; \ Z_{ji} := p_j^{-1}(X_{ij})$$

(Dan hebben we preschema's

$$\begin{cases} (Z_{ij}, \mathcal{O}_{Z_{ij}}) := (Z_{ij}, \mathcal{O}_{Z_i}|Z_{ij}) \\ (Z_{ji}, \mathcal{O}_{Z_{ji}}) := (Z_{ji}, \mathcal{O}_{Z_j}|Z_{ij}) \end{cases}).$$

Volgens bewering (ii) hebben we de volgende twee gevezelde produkten:

$$\begin{array}{ccc} Z_{ij} & \xrightarrow{(p_i,P_i)|Z_{ij}} & X_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[(v,V)]{} & S \end{array} \quad (u,U)|X_{ij} \; ; \quad \begin{array}{ccc} Z_{ji} & \xrightarrow{(p_j,P_j)|Z_{ji}} & X_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[(v,V)]{} & S \end{array} \quad (u,U)|X_{ij}$$

Omdat gevezelde produkten op isomorfie na bepaald zijn *), hebben we dus isomorfismen van preschema's

$$(Z_{ij},\mathcal{O}_{Z_{ij}}) \xrightarrow[(\phi_{ij},\theta_{ij})]{\sim} (Z_{ji},\mathcal{O}_{Z_{ji}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

voor elke i en j. We kunnen dus <u>topologisch</u> Z_{ij} en Z_{ji} via ϕ_{ij} met elkaar identificeren. Dit betekent, dat we de leden van de familie $(Z_i)_i$ langs de stukken Z_{ij} "aan elkaar kunnen plakken" <u>als topologische ruimten</u>. We hebben daarmee een topologische ruimte

$$Z = \bigcup Z_i$$

verkregen, met $Z_{ij} = Z_{ji} = Z_i \cap Z_j$. Bovendien hebben we voor elke i een schoof $\mathcal{O}_{Z_i}$ op Z_i en - volgens (8) - preschema-morphismen

$$(Z_{ij},\mathcal{O}_{Z_i}|Z_{ij}) \xrightarrow[(id,\theta_{ij})]{\sim} (Z_{ij},\mathcal{O}_{Z_j}|Z_{ij}).$$

De "plakvoorwaarden" van prop. 3.8 zijn aequivalent met de commutativiteit van het diagram

$$\begin{array}{ccc} (Z_{ijk},\mathcal{O}_{Z_i}|Z_{ijk}) & \xrightarrow[(id,\theta^j_{ik})]{\sim} & (Z_{ijk},\mathcal{O}_{Z_k}|Z_{ijk}) \\ {\scriptstyle (id,\theta^k_{ij})}\searrow\sim & & \sim\swarrow{\scriptstyle (id,\theta^i_{kj})} \\ & (Z_{ijk},\mathcal{O}_{Z_j}|Z_{ijk}) & \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

---

*) Cf. appendix.

(Waarbij $Z_{ijk} = Z_i \cap Z_j \cap Z_k$ en $\theta^k_{ij} = \theta_{ij} \mid Z_{ijk}$).

Beschouw nu het volgende commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd}
(Z_{ijk}, \mathcal{O}_{Z_i}|Z_{ijk}) \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "(p_i,P_i)|Z_{ijk}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& (Z_{ijk}, \mathcal{O}_{Z_j}|Z_{ijk}) \arrow[r, "(p_j,P_j)|Z_{ijk}"'] \arrow[d] & X_{ijk} \arrow[d, "(u,U)|X_{ijk}"] \\
& Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S
\end{tikzcd}$$

De twee factorisaties zijn (id,θ^k_{ij}) en $(id,\theta^i_{kj})\circ(id,\theta^j_{ik})$. Deze zijn gelijk. Dus commuteert diagram (9) en is aan de plakvoorwaarden voldaan. We hebben hiermee een preschema $(Z,\mathcal{O}_Z)$ geconstrueerd (waarbij $\mathcal{O}_Z$ de geplakte schoof is) en een diagram

$$\begin{tikzcd}
(Z,\mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(p,P)"'] \arrow[d, "(q,Q)"'] & X \arrow[d, "(u,U)"] \\
Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S
\end{tikzcd}$$

(Ga na dat (p,P) en (q,Q) door plakken zijn te verkrijgen.) Uit de constructie van $(Z,\mathcal{O}_Z)$ volgt direkt dat dit laatste diagram een gevezeld produkt is.

<u>Bewering (viii)</u>: <u>Zijn</u> S, X, Y <u>preschema's</u>, <u>terwijl</u> $(S_i)_i$ <u>een open overdekking is van</u> S. <u>Zijn verder gegeven twee morphismen van preschema's</u>

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "(u,U)"] \\
Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S
\end{tikzcd}$$

<u>en zij</u> $X_i := u^{-1}(S_i)$, $Y_i := v^{-1}(S_i)$. <u>Dan geldt</u>: <u>Als voor elke</u> i <u>er een gevezeld produkt</u>

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "(p_i,P_i)"] \arrow[d, "(q_i,Q_i)"'] & X_i \arrow[d, "(u,U)|X_i"] \\ Y_i \arrow[r, "(v,V)|Y_i"'] & S_i \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

<u>bestaat, dan is er ook een gevezeld produkt</u>

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "(u,U)"] \\ Y \arrow[r, "(v,V)"'] & S \end{tikzcd}$$

<u>Bew (viii)</u>: Als $X_{ij} := X_i \cap X_j$ en $Y_{ij} := Y_i \cap Y_j$, dan zijn X_{ij} en Y_{ij} open deelverzamelingen van resp. X_i en Y_i. Omdat (10) een gevezeld produkt is, is volgens bewering (iii) ook

$$\begin{tikzcd} Z_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_{ij} \arrow[d, "(u,U)|X_{ij}"] \\ Y_{ij} \arrow[r, "(v,V)|Y_{ij}"'] & S \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

een gevezeld produkt. ($Z_{ij} := p_i^{-1}(X_{ij}) \cap q_i^{-1}(Y_{ij})$). Met andere woorden: de gevezelde produkten (11) bestaan.
Nu geldt:

$$Z_{ij} = X_{ij} \amalg_S Y_{ij} \simeq X_i \amalg_S Y_j \quad \text{(als preschema's)} \ldots\ldots(12)$$

want: Beschouw een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "(p,P)"] \arrow[d, "(q,Q)"'] & X_i \arrow[d, "(u,U)|X_i"] \\ Y_j \arrow[r, "(v,V)|Y_j"'] & S \end{tikzcd}$$

Dan is $up(T) \subset u(X_i) \subset S_i$ en $vq(T) \subset v(Y_j) \subset S_j$. Omdat het diagram commuteert geldt dan, als $S_{ij} := S_i \cap S_j$:

$$up(T) \subset S_{ij} \quad ; \quad vq(T) \subset S_{ij}.$$

Dus ook: $p(T) \subset X_{ij}$ en $q(T) \subset Y_{ij}$. Dus hebben we een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "{(p,P)}"] \arrow[d, "{(q,Q)}"'] & X_{ij} \arrow[d, "{(u,U)|X_{ij}}"] \\ Y_{ij} \arrow[r, "{(v,V)|Y_{ij}}"'] & S \end{tikzcd}$$

en, omdat (11) een gevezeld produkt was, is er precies één morphisme (π,Π), zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "{(\pi,\Pi)}"] \arrow[drr, bend left, "{(p,P)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(q,Q)}"'] & & \\ & Z_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_{ij} \arrow[d, "{(u,U)|X_{ij}}"] \\ & Y_{ij} \arrow[r, "{(v,V)|Y_{ij}}"'] & S \end{tikzcd}$$

commuteert. Hieruit volgt, dat

$$\begin{tikzcd} Z_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d, "{(u,U)|X_i}"] \\ Y_j \arrow[r, "{(v,V)|Y_j}"'] & S \end{tikzcd}$$

een gevezeld produkt is, en, omdat gevezelde produkten op isomorfie na bepaald zijn, dat

$$X_{ij} \Pi_S Y_{ij} = Z_{ij} \simeq X_i \Pi_S Y_j.$$

We hebben dus nu gevonden, dat voor iedere i,j een gevezeld produkt $X_i \Pi_S Y_j$ bestaat. Volgens bewering (vii) bestaat er dan ook een gevezeld produkt $X \Pi_S Y$.

Nu zijn we gereed om stelling 3.11 te bewijzen:

<u>Bewijs van stelling 3.11</u>:

Beschouw twee gegeven morphismen van preschema's

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S \end{tikzcd}$$

Overdek S met een collectie open affiene stukken $(S_i)_i$. Definieer:

$$X_i := u^{-1}(S_i) \quad ; \quad Y_i := v^{-1}(S_i) \ .$$

Overdek X_i met open affiene stukken $(X_{ik})_k$ en Y_i met open affiene stukken $(Y_{il})_l$. Dan bestaan volgens bewering (i) alle gevezelde produkten

$$X_{ik} \Pi_{S_i} Y_{il}.$$

Omdat $X_i = \bigcup X_{ik}$ en $Y_i = \bigcup Y_{il}$ bestaan volgens bewering (vii) ook alle gevezelde produkten

$$X_i \Pi_{S_i} Y_i.$$

Volgens bewering (viii) bestaat dan ook $X \Pi_S Y$ met

$$\begin{tikzcd} X \Pi_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S \end{tikzcd}$$

<u>Definitie 3.12</u>: Een <u>S-preschema Y</u> is een morphisme van preschema's

$$(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (S,\mathcal{O}_S)$$

<u>Definitie 3.13</u>: Als we twee S-preschema's

$$Y_1 \xrightarrow{(\phi_1,\Phi_1)} S \quad ; \quad Y_2 \xrightarrow{(\phi_2,\Phi_2)} S$$

hebben, dan heet een morphisme

$$Y_1 \xrightarrow{(\phi,\Phi)} Y_2$$

een <u>morphisme van S-preschema's</u> (of: een <u>S-morphisme</u>) als het diagram

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "(\phi,\Phi)"] \arrow[dr, "(\phi_1,\Phi_1)"'] & & Y_2 \arrow[dl, "(\phi_2,\Phi_2)"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

commuteert.

<u>Definitie 3.14</u>: Definities 3.12 en 3.13 bepalen de <u>categorie van S-preschema's</u>, genoteerd:

$$\underline{\text{PreSch}}_S \; .$$

<u>Opmerking 3.15</u>: (i) In het vervolg zullen we een S-preschema

$$Y \xrightarrow{(\phi,\Phi)} S$$

vaak noteren met Y als dit geen verwarring geeft. (Men bedenke wel dat niet Y, maar het morphisme (ϕ,Φ) het S-preschema is).

(ii) Als S = Spec (R), dan zullen we ook wel noteren

$$\underline{\text{PreSch}}_R \text{ i.p.v. } \underline{\text{PreSch}}_{\text{Spec}(R)}.$$

Ook zullen we in dat geval een S-preschema wel een R-preschema, of een preschema over R noemen.

(iii) Als Y en X twee S-preschema's zijn, dan hebben we het diagram

$$\begin{array}{ccc} Y \amalg_S X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

Omdat dit diagram commuteert is ook $Y \amalg_S X$ op natuurlijke wijze een S-preschema. Ga na dat in de categorie

$$\underline{\text{PreSch}}_S$$

$Y \amalg_S X$ het categorische produkt is van Y en X.

Opmerking 3.16: In de categorie PreSch is Spec $\mathbb{Z}$ het punt-object.

Want, als X een preschema is met affiene open overdekking $(X_i)_i =$ $= (\text{Spec } R_i)_i$, dan kan voor iedere i precies één morphisme van ringen

$$\mathbb{Z} \longrightarrow R_i$$

gevonden worden. Dus bestaat er ook voor iedere i precies één morphisme

$$\text{Spec } \mathbb{Z} \longleftarrow X_i.$$

Omdat elke doorsnede $X_i \cap X_j$ ook affien te overdekken is, stemmen deze morphismen in de staken op punten van $X_i \cap X_j$ overéén, en kunnen we derhalve deze morphismen plakken tot het unieke morphisme

$$X \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}.$$

Gevolg: De categorie PreSch is isomorf met de categorie

$$\underline{\text{PreSch}}_{\mathbb{Z}}.$$

Beschouw een S-morphisme

$$X \xrightarrow{(\phi,\Phi)} Y.$$

Dan hebben we wegens de produkt-eigenschap een unieke factorisatie (γ,Γ), zoals in het diagram

$$\begin{tikzcd}
X & \\
X \,\Pi_S\, Y \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[ul, "\text{id.}"'] \arrow[l, dashed, "(\gamma,\Gamma)"'] \arrow[dl, "\text{id.}"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

(Let wel: Alles in de categorie $\underline{\text{PreSch}_S}$)

Definitie 3.17: (γ,Γ) heet de grafiek van (ϕ,Φ) over S.

Definitie 3.18: Als X een S-preschema is, dan heet de grafiek van de identiteit op X de *diagonaal* van X over S.

We zullen nu het begrip "deelpreschema" invoeren.

Definitie 3.19: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(Y,\mathcal{O}_Y)$ affiene schema's zijn, en $Y = \mathrm{Spec}\,(B)$, dan heet X een *affien gesloten deelschema* van Y als er een morphisme

$$(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

gegeven is dat geïnduceerd wordt door een ring-morphisme

$$B/\underline{i} \overset{\text{kan.}}{\twoheadleftarrow} B.$$

Definitie 3.20: $(X,\mathcal{O}_X)$ heet een *deel-preschema* van $(Y,\mathcal{O}_Y)$ als er een morphisme

$$(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\phi,\Phi)} (Y,\mathcal{O}_Y)$$

bestaat, terwijl X een deelruimte is van Y en ϕ de kanonieke injectie $X \subset Y$ is, terwijl er bovendien een familie $\{Y_k\}_k$ van open affiene deelverzamelingen van Y bestaat, zodat voldaan is aan:

(i) $X \subset \bigcup_k Y_k$

(ii) Voor elke k is $(X \cap Y_k, \mathcal{O}_X | X \cap Y_k)$ een affien gesloten deelschema van $(Y_k, \mathcal{O}_Y | Y_k)$, waarbij het kanonieke morphisme

$$(X \cap Y_k, \mathcal{O}_X | X \cap Y_k) \longrightarrow (Y_k, \mathcal{O}_Y | Y_k)$$

geïnduceerd wordt door (ϕ, Φ).

<u>Opmerking 3.21</u>: Als X een deelpreschema is van Y, dan is X lokaal gesloten in Y.

<u>Definitie 3.22</u>: $(X, \mathcal{O}_X)$ heet een <u>open deelpreschema</u> van $(Y, \mathcal{O}_Y)$ als geldt:

(i) X is open in Y als deelverzameling

(ii) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_Y | X)$.

<u>Definitie 3.23</u>: $(X, \mathcal{O}_X)$ heet een gesloten <u>deelpreschema</u> van $(Y, \mathcal{O}_Y)$ als geldt:

(i) X is een deelpreschema van Y

(ii) X is een gesloten deelverzameling van Y.

<u>Propositie 3.24</u>: <u>Een gesloten deelpreschema van een affien schema</u> $X = \text{Spec } A$ <u>is een affien gesloten deelschema van</u> X.

<u>Bew</u>: Zij $(Y, \mathcal{O}_Y)$ een gesloten deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$. Kies een collectie $(U_i)_i$ van open affiene deelverzamelingen van X, zodat $(Y \cap U_i, \mathcal{O}_Y | Y \cap U_i)$ een affien gesloten deelschema is van $(U_i, \mathcal{O}_X | U_i)$. Door eventueel deze U_i's te verfijnen kunnen we aannemen dat zij van de vorm

$$U_i = D(a_i),\ a_i \in A$$

zijn. (Dat we dit kunnen doen, d.w.z. dat, als

$$D(a_i) \subset U_i,\ a_i \in A,$$

blijft gelden dat $(Y \cap D(a_i), \mathcal{O}_Y | Y \cap D(a_i))$ een affien gesloten deelschema is van $(D(a_i), \mathcal{O}_X | D(a_i))$, kan men als volgt inzien: We hebben de situatie:

$$\begin{tikzcd}
(D(a_i), \mathcal{O}_X | D(a_i)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (U_i, \mathcal{O}_X | U_i) \arrow[dl] \\
& (X, \mathcal{O}_X) &
\end{tikzcd}$$

Dit induceert het diagram van ringen

$$\begin{tikzcd}
A_{a_i} \arrow[dr, "\lambda"'] & & A_i \arrow[ll, "g"'] \\
& A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(Als we schrijven: $(U_i, \mathcal{O}_X | U_i) = \mathrm{Spec}(A_i)$.) Als we nu noteren:

$$a_i' := f(a_i)$$

dan volgt: $D(a_i') = D(a_i)$, zodat

$$(D(a_i'), \mathcal{O}_X | D(a_i')) = (D(a_i), \mathcal{O}_X | D(a_i)).$$

Ook geldt, indien we schrijven:

$$(Y \cap U_i, \mathcal{O}_Y | Y \cap U_i) = \mathrm{Spec}\ A_i/\underline{a}_i,$$

$$Y \cap D(a_i') = D(\overline{a_i'})$$

als $\overline{a_i'} = a_i'$ (mod $\underline{a}_i$). Dat wil zeggen:

$$(Y \cap D(a_i), \mathcal{O}_Y | Y \cap D(a_i)) = (Y \cap D(a_i'), \mathcal{O}_Y | Y \cap D(a_i')) =$$

$$= (D(a_i'), \mathcal{O}_Y|D(\bar{a}_i')) = \operatorname{Spec}\left({}^{A_i}\!/_{\underline{a}_i}\right)_{\bar{a}_i'} =$$

$$= \operatorname{Spec}\left({}^{(A_i)_{a_i'}} \Big/ {}_{(\underline{a}_i)_{a_i'}} \right)$$

waaruit volgt dat $Y \cap D(a_i)$ een affien gesloten deelschema is van $D(a_i)$.).

Omdat $(Y \cap D(a_i), \mathcal{O}_Y|Y \cap D(a_i))$ een affien gesloten deelschema is van $(D(a_i), \mathcal{O}_X|D(a_i))$ kunnen we schrijven:

$$Y \cap D(a_i) = \operatorname{Spec}\left({}^{A_{a_i}}\!/_{\underline{b}_i} \right)$$

voor een zeker ideaal $\underline{b}_i \subset A_{a_i}$. Omdat Y gesloten is in X, en X - als spectrum van een ring - kompakt is, is ook Y kompakt. Derhalve:

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i).$$

Merk op:

$$(\underline{b}_i)_{\frac{a_j}{1}} = (\underline{b}_j)_{\frac{a_i}{1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

want:

$$\operatorname{Spec}\left[\left({}^{A_{a_i}}\!/_{\underline{b}_i} \right)_{\frac{\bar{a}_j}{1}}\right] = [Y \cap D(a_i)] \cap D(a_j) =$$

$$= [Y \cap D(a_j)] \cap D(a_i) = \operatorname{Spec}\left[\left({}^{A_{a_j}}\!/_{\underline{b}_j} \right)_{\frac{\bar{a}_i}{1}}\right] .$$

Dat wil zeggen:

$$ {}^{A_{a_i a_j}} \Big/ {}_{(\underline{b}_i)_{\frac{a_j}{1}}} = \left({}^{A_{a_i}} \Big/ {}_{\underline{b}_i} \right)_{\frac{\bar{a}_j}{1}} = \left({}^{A_{a_j}} \Big/ {}_{\underline{b}_j} \right)_{\frac{\bar{a}_i}{1}} = {}^{A_{a_i a_j}} \Big/ {}_{(\underline{b}_j)_{\frac{a_i}{1}}}$$

Dus volgt (1). Definiëer nu:

$$\underline{a} := \{x \in A \mid \forall i.\ \tfrac{x}{1} \in \underline{b}_i\}\ .$$

Bewering:

$$\forall i.\ (\underline{a})_{a_i} = \underline{b}_i \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Het is uit de definitie van $\underline{a}$ direkt duidelijk dat voor elke i geldt:

$$(\underline{a})_{a_i} \subset \underline{b}_i\ .$$

Ook geldt $\underline{b}_i \subset (\underline{a})_{a_i}$, voor elke i, want, als

$$x = \frac{y}{a_i^k} \in \underline{b}_i$$

dan hebben we:

$$x = \frac{y}{a_i^k} = \frac{y a_j^k}{(a_i a_j)^k} \in (\underline{b}_i)_{\frac{a_j}{1}} = (\underline{b}_j)_{\frac{a_i}{1}} \qquad \text{(Cf. (1)).}$$

Dus:

$$\exists\ \frac{z_j}{a_j^m} \in \underline{b}_j\ .\ \frac{y a_j^k}{(a_i a_j)^k} = \frac{z_j a_i^m}{(a_i a_j)^m} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

We kunnen m zo groot kiezen als we willen (door eventueel

$$\frac{z_j}{a_j^m} = \frac{z_j a_j^n}{a_j^{m+n}}$$

te nemen) en dus m onafhankelijk maken van de keuze van j. (3) wil nu zeggen:

$$\exists N.\quad (a_i a_j)^N \left[y a_i^m a_j^{k+m} - z_j a_i^{m+k} a_j^k\right] = 0$$

(We kunnen N zo groot nemen dat N niet afhangt van de keuze van j).

Derhalve:

$$a_j^{N+k}\left[ya_i^{m+N}a_j^m - z_j a_i^{m+N+k}\right] = 0.$$

Met andere woorden:

$$\frac{ya_i^{m+N}}{1} = \frac{z_j a_i^{m+N+k}}{a_j^m} \qquad \text{in } \underline{b}_j \quad \text{(voor elke } j\text{).}$$

Dat wil zeggen:

$$ya_i^{m+N} \in \underline{a}$$

(Cf. def. van $\underline{a}$). Bijgevolg

$$x = \frac{ya_i^{m+N}}{a_i^{m+k+N}} \in (\underline{a})_{a_i}$$

zodat voor elke i geldt: $\underline{b}_i \subset (\underline{a})_{a_i}$, waarmee (2) is bewezen.
We kunnen nu gemakkelijk inzien dat Y een affien gesloten deelschema is van X = Spec(A):

$$Y \cap D(a_i) = \operatorname{Spec}\left({A_{a_i}}/{\underline{b}_i}\right) = \operatorname{Spec}\left({A_{a_i}}/{(\underline{a})_{a_i}}\right) =$$

$$= \operatorname{Spec}\left({A}/{\underline{a}}\right)_{\bar{a}_i} = \operatorname{Spec}(A/\underline{a}) \cap D(a_i).$$

Dat wil zeggen: Y en Spec $(A/\underline{a})$ komen overéén op hun respectievelijke doorsneden met de $D(a_i)$'s. Dan komen zij dus in de staken overéén, en zijn derhalve gelijk:

$$\operatorname{Spec}(A/\underline{a}) = Y.$$

<u>Definitie 3.24</u>: Een morphisme (ϕ,Φ): $X \to Y$ van preschema's heet een <u>immersie</u> als er een deelpreschema Z van Y bestaat zodat (ϕ,Φ) door Z factoriseert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(\phi,\Phi)"] \arrow[dr, "(\psi,\Psi)"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

terwijl (ψ,Ψ) een isomorfisme is.

Definitie 3.25: De immersie (ϕ,Φ) uit de vorige definitie heet open (resp. gesloten) als Z een open (resp. gesloten) deelpreschema is van Y.

Propositie 3.26: Een morphisme (ϕ,Φ): $X \to Y$ is een open immersie, dan en slechts dan als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

- (i) ϕ is een homeomorfie van X op een open deelverzameling van Y
- (ii) $\Phi(x)$: $\mathcal{O}_Y(\phi x) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$ is een isomorphisme voor iedere $x \in X$.

Bewijs: Ga na.

Propositie 3.27: Een morphisme (ϕ,Φ): $X \to Y$ is een gesloten immersie, dan en slechts dan als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

- (i) ϕ is een homeomorfie van X op een gesloten deelverzameling van Y
- (ii) $\Phi(x)$: $\mathcal{O}_Y(\phi x) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x)$ is een surjectie voor iedere $x \in X$.

Bewijs: (1) Zij (ϕ,Φ) een gesloten immersie. Dan hebben we een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(\phi,\Phi)"] \arrow[dr, "(\psi,\Psi)"', "\sim"] & & Y \\ & Z \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Hieruit volgt direkt dat ϕ een open injectie is, zodat X homeomorf is met een gesloten deelverzameling (nl. Z) van Y. (Z is een gesloten deelpreschema). Kies nu $x \in X$. Dan $\psi(x) \in Z$. We kunnen, omdat Z een deelpreschema is van Y, een open affiene deelverzameling $U \subset Y$ vinden, zodat

$$(Z \cap Y, \mathcal{O}_Z | Z \cap U) = \operatorname{Spec} {}^{B}/_{\underline{i}} \hookrightarrow \operatorname{Spec} B = (U, \mathcal{O}_Y | U)$$

voor een zekere ring B en een zeker ideaal $\underline{i} \subset B$. Hieruit volgt, als $\phi x = y_{\underline{q}} \in \operatorname{Spec} B$,

$$\mathcal{O}_Y(\phi x) = \mathcal{O}_Y(\psi x) = B_{\underline{q}} \twoheadrightarrow ({}^{B}/_{\underline{i}})_{\underline{q}} = \mathcal{O}_Z(\psi x) \simeq \mathcal{O}_X(x)$$

en dit morphisme is juist $\Phi(x)$. Dus $\Phi(x)$ is surjectief. Hiermee zijn de voorwaarden (i) en (ii) bewezen.

Omgekeerd:

<u>Bewijs</u>: (2) Laat nu voldaan zijn aan de voorwaarden (i) en (ii). We beschouwen eerst het affiene geval:

$$(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Spec} A \quad \text{en} \quad (Y, \mathcal{O}_Y) = \operatorname{Spec} B.$$

Dan induceert $(\phi, \Phi): X \longrightarrow Y$ een ring-morphisme

$$f: B \longrightarrow A.$$

Bewering: <u>f is surjectief</u>, want: Uit voorwaarde (ii) volgt dat voor elk priemideaal $\underline{p} \subset A$ de afbeelding

$$\Phi_{\underline{p}} := \left[B_{f^{-1}\underline{p}} = \mathcal{O}_Y(\phi x_{\underline{p}}) \xrightarrow{\Phi(x_{\underline{p}})} \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}}) = A_{\underline{p}} \right]$$

$$\frac{b}{s} \longmapsto \frac{fb}{fs}$$

een surjectie is. Ook geldt dat $\{D(fb)\}_{b \in B}$ een basis is voor de open topologie op X. (Ga na). Kies nu $a \in A$. Dan geldt voor elke $\underline{p} \subset A$:

$$\frac{a}{1} \in A_{\underline{p}} = \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}})$$

Omdat $\Phi_{\underline{p}}$ surjectief is, bestaat er een element

$$\beta \in \mathcal{O}_Y(y_{f^{-1}\underline{p}})$$

zodat

$$\Phi_{\underline{p}}(\beta) = \frac{a}{1} \in \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}}).$$

Kies nu een open omgeving $D(b')$ van $y_{f^{-1}\underline{p}}$ in Spec B zodat β de restrictie is van een element

$$\frac{b''}{(b')^n} \in B_{b'} = \mathcal{O}_Y(D(b')).$$

Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccc}
B_{f^{-1}\underline{p}} = \mathcal{O}_Y(\phi x_{\underline{p}}) & \xrightarrow{\Phi(x_{\underline{p}})} & \mathcal{O}_X(x_{\underline{p}}) = A_{\underline{p}} \\
\uparrow \quad \uparrow \text{restr.} & & \text{restr.}\uparrow \quad \uparrow \\
B_{b'} = \mathcal{O}_Y(D(b')) & \xrightarrow[\Phi(D(b'))]{} & \mathcal{O}_X(D(fb')) = A_{f(b')}
\end{array}.$$

Dan hebben we:

$$\Phi(Db')\left(\frac{b''}{(b')^n}\right) = \frac{fb''}{(fb')^n} \in A_{fb'} = \mathcal{O}_X(D(fb'))$$

waarbij de restrictie van $\dfrac{fb''}{(fb')^n}$ tot $\mathcal{O}_X(x_{\underline{p}})$ gelijk is aan $\frac{a}{1}$.
Dan bestaat er - wegens de definitie van $\mathcal{O}_X(x_{\underline{p}})$ als injectieve limiet - een omgeving

$$x_{\underline{p}} \in D(f(bb'))$$

zodat $\dfrac{fb''}{(fb')^n} = \dfrac{a}{1}$ in de ring $D(f(bb'))$.

Als we b schrijven voor bb', kunnen we het hierboven gevondene als volgt formuleren:

Bij elk punt $x_p \in X$ hebben we een open omgeving $D(fb)$ gevonden, en een element

$$\frac{c}{b^n} \in \mathcal{O}_Y(D(b))$$

zodat

$$\begin{cases} \mathcal{O}_Y(D(b)) \xrightarrow{\phi(D(b))} \mathcal{O}_X(D(fb)) \\ \dfrac{c}{b^n} \longmapsto \dfrac{a}{1} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

We krijgen op deze manier een overdekking

$$X = \bigcup_{i \in I} D(fb_i)$$

door bij elk punt $x_i \in X$ zo'n omgeving $D(fb_i)$ te kiezen.
Beschouw nu $Y \setminus \phi X$. Dit is een open verzameling. We kunnen opmerken:

$$Y \setminus \phi X = \bigcup_{fb=0} D(b).$$

(Immers, als $D(b) \subset Y \setminus \phi X$, is $\phi^{-1}D(b) = D(fb) = \emptyset$. D.w.z.: fb is nilpotent, dus

$$\exists n.\ fb^n = 0.$$

Vervang nu b door b^n dan is $D(b) = D(b^n)$ en $f(b^n) = 0$.)
We hebben - als we deze laatste overdekking van $Y \setminus \phi X$ noteren met

$$Y \setminus \phi X = \bigcup_{i \in J} D(b_i)$$

$$Y = (\bigcup_{i \in I} D(b_i)) \cup (\bigcup_{i \in J} D(b_i)) \qquad (I \cap J = \emptyset).$$

Volgens $(*)$ bestaat er voor elke $i \in I$ een element

$$\frac{c_i}{(b_i)^{n_i}}$$

zodat

$$\Phi(D(b_i)) : \mathcal{O}_Y(D(b_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(fb_i))$$

$$\frac{c_i}{(b_i)^{n_i}} \longmapsto \frac{a}{1}$$

Omdat (ϕ,Φ) door f wordt geïnduceerd volgt:

$$\frac{fc_i}{(fb_i)^{n_i}} = \frac{a}{1} \in A_{fb_i}.$$

Dus:

$$\exists N_i.\ f(b_i^{N_i})\ [f(c_i) - f(b_i^{n_i}).a] = 0.$$

Hieruit volgt:

$$f(b_i^{n_i+N_i}).a \in f(B).$$

Met andere woorden:

$$\forall i \in I\ \exists M_i.\ f(b_i^{M_i}).\ a \in f(B).$$

Als $i \in J$, dan $f(b_i) = 0$, dus $f(b_i).a = 0 \in f(B)$ dus kunnen we ook zeggen:

$$\forall i \in I \cup J\ \exists M_i.\ f(b_i^{M_i})\ a \in f(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Definieer nu het volgende ideaal:

$$\underline{i} := \{b \in B \mid f(b).\ a \in f(B)\}.$$

Stel: er is een priemideaal $\underline{q} \subset B$ zodat $\underline{i} \subset \underline{q}$. Dan volgt:

$$\forall b \in B.\ f(b).\ a \in f(B) \Rightarrow y_{\underline{q}} \notin D(b).$$

Omdat $Y = \bigcup_{I \cup J} D(b_i)$ is er een b_i zodat

$$y_{\underline{q}} \in D(b_i).$$

D.w.z.: $\forall b_i.\ y_{\underline{q}} \in D(b_i^{M_i}).$

Dus: $\exists i \in I \cup J.\ f(b_i^{M_i}).\ a \notin f(B)$, tegenspraak met (**). We hebben dus gevonden dat $\underline{i}$ in geen enkel priemideaal $\underline{q}$ van B is bevat, zodat $\underline{i} = B$. Dus $1 \in \underline{i}$, zodat

$$a \in f(B).$$

Hiermee is de surjectiviteit van f bewezen. Dus:

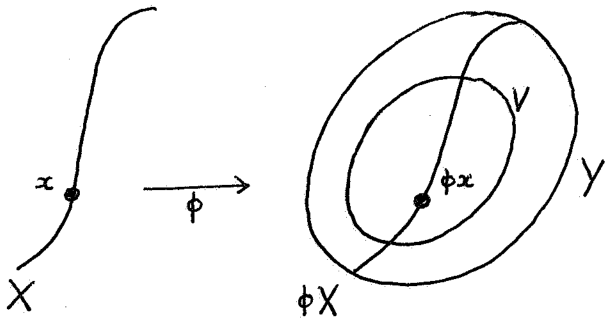
$$(\phi, \Phi): (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

is geïnduceerd door

$$B/\underline{b} \twoheadleftarrow B$$

als $\underline{b} = \mathrm{Ker}(f)$, zodat $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorf is met een gesloten deelpreschema van $(Y, \mathcal{O}_Y)$. (ϕ, Φ) is derhalve een gesloten immersie.

We moeten nu nog het geval bezien, waarin $(X, \mathcal{O}_X)$ en $(Y, \mathcal{O}_Y)$ niet noodzakelijk affien zijn.



Kies een willekeurig punt $x \in X$. Kies een open affiene deelverzameling $V \subset Y$ zodat $\phi x \in V$. We kunnen dan een open affiene deelverzameling $U \subset X$ kiezen, zodat $U \subset \phi^{-1}V$ en $x \in U$. (ϕ, Φ) laat zich dan beperken tot het morphisme

$$(\phi_U, \Phi_U): (U, \mathcal{O}_X|U) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|V).$$

Zeg: $(U, \mathcal{O}_X|U) = \mathrm{Spec}\ A$; $(V, \mathcal{O}_Y|V) = \mathrm{Spec}\ B$. Dan wordt dit morphisme geïnduceerd door een ring-morphisme

$$f: B \longrightarrow A.$$

Omdat ϕU open is in ϕX, en omdat de topologie op ϕU wordt geïnduceerd door die op Y, kunnen we een element $b \in B$ vinden zodat

$$\phi(x) \in D(b) \cap \phi(X) \subset \phi(U).$$

Dan is $\phi^{-1}(D(b)) = \phi^{-1}(D(b) \cap \phi X) = \phi^{-1}(D(b) \cap \phi U) \subset U$, zodat $\phi^{-1}(D(b)) = D(fb)$. Beschouw nu de beperking van (ϕ,Φ) tot $(D(fb), \mathcal{O}_X|D(fb))$:

$$(D(fb), \mathcal{O}_X|D(fb)) \longrightarrow (D(b), \mathcal{O}_Y|D(b)).$$

Er geldt: $\phi(D(fb))$ is gesloten in $D(b)$. Als we nu U vervangen door $D(fb)$ en V door $D(b)$, dan hebben we gevonden:

Bij elk punt $x \in X$ bestaat een open affiene omgeving $U \subset X$ en een open affiene omgeving $V \subset Y$ van ϕx zodat

$$\begin{cases} \text{(i)} & \phi U = \phi^{-1}(V \cap \phi X) \\ \text{(ii)} & \phi U \text{ gesloten in } V \\ \text{(iii)} & (\phi,\Phi) \text{ laat zich beperken tot} \\ & \qquad (U, \mathcal{O}_X|U) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|V). \end{cases}$$

Volgens het eerste deel van het bewijs volgt hieruit dat $(U, \mathcal{O}_X|U)$ isomorf is met een affien gesloten deelschema van $(V, \mathcal{O}_Y|V)$. Als we nu op $Z := \phi X$ de schoof zetten, die gegeven wordt door

$$\mathcal{O}_Z(\phi U) := \mathcal{O}_X(U)$$

dan hebben we gevonden: $(V \cap Z, \mathcal{O}_Z|V \cap Z) \simeq (U, \mathcal{O}_X|U)$ is een affien gesloten deelschema van $(V, \mathcal{O}_Y|V)$. Derhalve is $(Z, \mathcal{O}_Z)$ een gesloten deelpreschema van $(Y, \mathcal{O}_Y)$, isomorf met $(X, \mathcal{O}_X)$.

<u>Propositie 3.28</u>: <u>Zij $(\phi,\Phi): X \to Y$ een morphisme van preschema's en laat $(V_i)_i$ een open overdekking zijn van Y. Dan induceert (ϕ,Φ) op kanonieke manier morphismen</u>

$$(\phi_i,\Phi_i): (\phi^{-1}V_i, \mathcal{O}_X|\phi^{-1}V_i) \longrightarrow (V_i, \mathcal{O}_Y|V_i).$$

<u>Er geldt: (ϕ,Φ) is een gesloten immersie desda voor elke i (ϕ_i,Φ_i) een gesloten immersie is.</u>

Bew: Dit volgt gemakkelijk uit prop. 3.27.

Propositie 3.29: Zij (ϕ,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van preschema's. Dan is (ϕ,Φ) een immersie dan en slechts dan als

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in X.\ \Phi(x) \text{ surjectief} \\ \text{(ii)} & \phi: X \to \phi X \text{ is een homeomorfie op een lokaal gesloten deel } \phi X \text{ van } Y. \end{cases}$$

Bew: (1) Dat - als (ϕ,Φ) een immersie is - aan de voorwaarden (i) en (ii) is voldaan volgt geheel analoog aan het eerste deel van het bewijs van prop. 3.27.

Bew:(2) Laat nu aan beide voorwaarden voldaan zijn. ϕX is lokaal gesloten in Y. We kunnen dus een open affiene deelverzameling U in Y kiezen zodat $\phi X \cap U$ gesloten is in U. (ϕ,Φ) induceert nu het morphisme

$$(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X|\phi^{-1}U) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_Y|U).$$

Dit morphisme is dan surjectief in de staken en $\phi^{-1}U \longrightarrow U$ is een homeomorfie op een gesloten deelverzameling van $U \cap \phi X$ van U, dus - volgens prop. 3.27 - een gesloten immersie.
We hebben nu een stel open affiene deelverzamelingen $(U_i)_{i \in I}$ van Y zodat

$$\phi X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

en zodat voor elke i $\phi X \cap U_i$ isomorf is met een gesloten deelpreschema van U_i. Dan is volgens prop. 3.28

$$(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (\bigcup_i U_i, \mathcal{O}_Y|\bigcup_i U_i)$$

een (gesloten) immersie. Met andere woorden: $(X,\mathcal{O}_X)$ is isomorf met een (gesloten) deelpreschema van een (open) deelpreschema van $(Y,\mathcal{O}_Y)$, dus met een deelpreschema van $(Y,\mathcal{O}_Y)$. Dit isomorfisme geeft de gezochte factorisatie van (ϕ,Φ).

<u>Propositie 3.30</u>: <u>Zijn</u> X, X', Y, Y' <u>S-preschema's</u>, <u>en</u> <u>zijn</u> $(\phi,\Phi): X \to Y$ <u>en</u> $(\phi',\Phi') = X' \to Y'$ <u>twee</u> <u>S-morphismen</u>, <u>dan</u> <u>geldt</u>: <u>Als</u> (ϕ,Φ) <u>en</u> (ϕ',Φ') <u>immersies</u> <u>zijn</u>, <u>dan</u> <u>is</u> <u>ook</u> $(\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi'): X \,\Pi_S\, X' \longrightarrow Y \,\Pi_S\, Y'$ <u>een</u> <u>immersie</u>.

<u>Bew:(i)</u> Neem aan: X, X', Y, Y', S zijn alle affien, terwijl bovendien ϕX en $\phi' X'$ gesloten zijn in Y resp. Y'. (ϕ,Φ) en (ϕ',Φ') zijn dan gesloten immersies en worden dus resp. geïnduceerd door ring-surjecties $B/\underline{i} \overset{f}{\twoheadleftarrow} B$ en $B'/\underline{j} \overset{f'}{\twoheadleftarrow} B'$. Dan wordt $(\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi')$ geïnduceerd door

$$B/\underline{i} \otimes_C B'/\underline{j} \xleftarrow{f \otimes f'} B \otimes_C B$$

en dit is een surjectie. Dus is $(\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi')$ een gesloten immersie. (Hierbij: $S = \text{Spec } C$).

<u>Bew:(ii)</u> Neem aan: S is affien. (Zeg: $S = \text{Spec } C$). Noteer:

$$(\psi,\Psi) := (\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi').$$

Beschouw $(\phi,\Phi): X \to Y$. Kies U open, affien in Y en V open, affien in X zodat $\phi(V) \subset U$. Dan induceert (ϕ,Φ) een morphisme $V \to U$. Dit wordt dan geïnduceerd door een ring-morphisme

$$f: B \to A$$

als $U = \text{Spec } B$, $V = \text{Spec } A$. Men kan op een wijze, analoog aan die in het bewijs van Prop. 3.27 bij elk punt $x \in X$ U en V zo kiezen dat geldt:

$$\begin{cases} \text{(i)} & U \text{ is een open affiene omgeving van } \phi(x) \\ \text{(ii)} & V \text{ is een open affiene omgeving van } x \\ \text{(iii)} & \phi V \text{ is gesloten in } U. \\ \text{(iv)} & (\phi,\Phi) \text{ laat zich beperken tot een morphisme} \\ & \qquad (U, \mathcal{O}_Y|U) \longleftarrow (V, \mathcal{O}_X|V). \end{cases}$$

Analoog kunnen we bij elk punt $x' \in X'$ dergelijke omgevingen U' en V' in resp. Y' en X' vinden.
Kies nu een punt $x \in X \Pi_S X'$. We kunnen dan volgens het voorgaande open affiene omgevingen

$$U \Pi_S U' = \mathrm{Spec}(B \otimes_C B'); \quad V \Pi_S V' = \mathrm{Spec}(A \otimes_C A')$$

van $\psi(x)$ en x in resp. $Y \Pi_S Y'$ en $X \Pi_S X'$ vinden zodat voldaan is aan:

(i) $\psi(V \Pi_S V') \subset U \Pi_S U'$; (ii) $\phi(V)$ gesloten in U ;
(iii) $\phi'(V')$ gesloten in U'.

Dan induceert (ψ,Ψ) een morphisme $U \Pi_S U' \longleftarrow V \Pi_S V'$, geïnduceerd door een ring-morphisme van het type

$$f \otimes f' = B \otimes_C B' \longrightarrow A \otimes_C A'.$$

Wegens (ii) en (iii), en het feit dat (ϕ,Φ) en (ϕ',Φ') immersies zijn volgt dan dat $f \otimes f'$ surjectief is volgens Bew(i). Hieruit volgt dat (ψ,Ψ) een immersie is (Ga na).

Bew(iii): Zijn nu X,X',Y,Y',S niet noodzakelijk affien. Kies een open affiene overdekking van S: $S = \bigcup S_i$. Als $(u,U): X \to S$ de S-struktuur is op X, definieer dan:

$$X_i := u^{-1} S_i$$

en analoog $Y_i \subset Y$, $X_i' \subset X'$ en $Y_i' \subset Y'$. (ψ,Ψ) induceert dan morphismen

$$X_i \Pi_{S_i} X_i' \longrightarrow Y_i \Pi_{S_i} Y_i'$$

en deze zijn volgens Bew(ii) stuk voor stuk immersies. Dan is ook (ψ,Ψ) een immersie, omdat

$$(Y_i \Pi_{S_i} Y_i')_i$$

een open overdekking is van $Y \Pi_S Y'$.

<u>Propositie 3.31</u>: <u>Als $(\phi,\Phi): X \to Y$ en $(\psi,\Psi): Y \to Z$ twee morphismen van preschema's zijn, zodat $(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)$ een immersie is, dan is ook (ϕ,Φ) een immersie.</u>

<u>Bew</u>: Het diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\phi,\Phi)} & Y \\ {\scriptstyle id_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\psi,\Psi)} \\ X & \xrightarrow[(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)]{} & Z \end{array}$$

commuteert. Dus bestaat er een uniek bepaald morphisme (γ,Γ) zodat

$$(\phi,\Phi) = [X \xrightarrow{(\gamma,\Gamma)} X \amalg_Z Y \xrightarrow{(p_2,P_2)} Y]$$

((p_2,P_2) is de projectie op Y). Het is te verifiëren dat ook geldt:

$$(p_2,P_2) = [X \amalg_Z Y \xrightarrow{(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)\amalg id} Z \amalg_Z Y \xrightarrow{\sim} Y]$$

zodat met $(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)\amalg id$ ook (p_2,P_2) een immersie is. We bewijzen nu dat (γ,Γ) een immersie is. Beschouw:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "(\gamma,\Gamma)"] \arrow[drr, bend left, "(\phi,\Phi)"] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\ & X \amalg_Z Y \arrow[r, "(p_2,P_2)"] \arrow[d, "(p_1,P_1)"] & Y \arrow[d, "(\psi,\Psi)"] \\ & X \arrow[r, "(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)"'] & Z \end{tikzcd}$$

Kies $x \in X$ en zij $\phi(x) = y$, $\psi(y) = z$. We kunnen open affiene omgevingen U, V, W van x, y en z in resp. X, Y en Z kiezen zodat $\psi(V) \subset W$ en $\phi(U) \subset V$. We hebben dan een affiene omgeving $U \amalg_W V$ van $\gamma(x)$. (Ga na). Omdat het door (γ,Γ) geïnduceerde morphisme

$$U \longrightarrow U \amalg_W V$$

afkomstig is van een ring-morphisme van de gedaante

$$\begin{cases} A \otimes_C B \longrightarrow A \\ a \otimes 1 \longrightarrow a \end{cases}$$

dat dus surjectief is, volgt dat $U \to U \Pi_W V$ een gesloten immersie is. Dus is (γ,Γ) surjectief in de staken en is γ een homeomorfie van X op $\gamma(X)$. (We kunnen X met U's, zoals hierboven gekozen, overdekken). Omdat $p_i \circ \gamma = id$ volgt ook dat $\gamma(U) = \gamma(X) \cap U \Pi_W V$, en, omdat $\gamma(U)$ gesloten is in $U \Pi_W V$, geldt dat $\gamma(X)$ lokaal gesloten is in $X \Pi_Z Y$. Dus is (γ,Γ) een immersie. (Cf. prop. 3.29).
Het is een direkt gevolg van prop. 3.29 dat de samenstelling van twee immersies weer een immersie is. Dus is $(\phi,\Phi) = (p_2,P_2)\circ(\gamma,\Gamma)$ een immersie.

<u>Gevolg 3.32</u>: <u>De grafiek</u> (γ,Γ) <u>van een S-morphisme</u> (ϕ,Φ) <u>is een immersie</u>.

(Dit is in het voorgaande bewijs al bewezen).

<u>Gevolg 3.33</u>: <u>De diagonaal</u> (δ,Δ) <u>van een S-preschema</u> X <u>is een immersie</u>.

<u>Definitie 3.34</u>: Een Y-preschema $X \to Y$ heet <u>gescheiden</u> als de diagonaal van X over Y een gesloten immersie is.

<u>Definitie 3.35</u>: Een preschema X heet <u>gescheiden</u> als X, opgevat als een Spec($\mathbb{Z}$)-preschema (en dit kan op één manier) gescheiden is.

<u>Definitie 3.36</u>: Een Y-preschema X heet een <u>schema over Y</u> als X als Y-preschema gescheiden is.

<u>Definitie 3.37</u>: Een preschema X heet een <u>schema</u> als X een schema is over Spec($\mathbb{Z}$).

<u>Definitie 3.38</u>: Een morphisme van preschema's (ϕ,Φ): $X \to Y$ heet <u>gescheiden</u> als X als Y-preschema, met de struktuur, geinduceerd door (ϕ,Φ), gescheiden is over Y.

<u>Propositie 3.39</u>: <u>Als</u> X,X',Y,Y' <u>S-preschema's zijn en als</u> (ϕ,Φ): $X \to Y$ <u>en</u> (ϕ',Φ'): $X' \to Y'$ <u>S-morphismen zijn en tevens beide gesloten immersies, dan is ook</u>

$$(\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi'): X \, \Pi_S \, X' \longrightarrow Y \, \Pi_S \, Y'$$

<u>een gesloten immersie.</u>

<u>Bew</u>: Uit prop. 3.30 volgt direkt dat $(\psi,\Psi) := (\phi,\Phi)\Pi(\phi',\Phi')$ een immersie is. We moeten dus alleen bewijzen dat $\psi(X \, \Pi_S \, X')$ een gesloten deelverzameling is van $Y \, \Pi_S \, Y'$. Noteer (enigszins slordig):

$\psi(X \, \Pi_S \, X')$: het <u>deelpreschema</u> van $Y \, \Pi_S \, Y'$ waardoor (ψ,Ψ) factoriseert. ((ψ,Ψ) is een immersie).

ϕX : het <u>deelpreschema</u> van Y waardoor (ϕ,Φ) factoriseert. (ϕX is een gesloten deelpreschema van Y omdat (ϕ,Φ) een gesloten immersie is).

$\phi' X'$: het <u>deelpreschema</u> van Y' waardoor (ϕ',Φ') factoriseert. ($\phi' X'$ is ook een gesloten deelpreschema).

Het is een kwestie van een eenvoudige schermutseling met diagrammen in $\underline{\text{PreSch}}_S$ om te controleren dat

$$\psi(X \, \Pi_S \, X') = \phi X \, \Pi_S \, \phi' X'$$

(<u>als preschema's!</u>). Omdat ϕX en $\phi' X'$ gesloten deelverzamelingen zijn van Y en Y' is ook $\phi X \, \Pi_S \, \phi' X'$ een gesloten deelverzameling van $Y \, \Pi_S \, Y'$. (Dit ziet men in door de constructie van gevezelde produkten, zoals in prop. 3.11 nog eens na te gaan).

Opmerking 3.40: Zij S een T-preschema en zijn X en Y twee S-preschema's. Dan induceert het struktuur-morphisme S → T op natuurlijke manier een morphisme

$$X \Pi_S Y \longrightarrow X \Pi_T Y.$$

(De T-struktuur op X wordt natuurlijk gegeven door X → S → T, etc.)

Bew: Ga na.

Opmerking 3.41: Zij S een T-preschema en zijn X en Y twee S-preschema's, dan geldt:

(i) $X \Pi_S Y \xrightarrow{\sim} S \Pi_{(S\Pi_T S)} (X\Pi_T Y)$

(ii) Als (ϕ,Φ): $X \Pi_S Y \longrightarrow X \Pi_T Y$ door S → T wordt geïnduceerd zoals in opm. 3.40, en als (δ,Δ) de diagonaal is van S over T, dan commuteert het diagram

$$\begin{array}{ccc} X \Pi_S Y & \xrightarrow{\sim} & S \Pi_{(S\Pi_T S)} (X\Pi_T Y) \\ \Big\downarrow (\phi,\Phi) & & \Big\downarrow (\delta,\Delta)\ \Pi\ \mathrm{id} \\ X \Pi_T Y & \xrightarrow[\text{kan.}]{\sim} & (S\Pi_T S)\ \Pi_{(S\Pi_T S)} (X\Pi_T Y) \end{array}$$

Bew: Ga na.

Propositie 3.42: Zijn X en Y S-preschema's en zij S een schema over T. Dan is het volgens opm. 3.40 door S → T geïnduceerde morphisme

$$(\phi,\Phi)\colon X \Pi_S Y \longrightarrow X \Pi_T Y$$

een gesloten immersie.

Bew: Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} X \Pi_S Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\phi,\Phi)"] & S \Pi_{(S\Pi_T S)} (X\Pi_T Y) \arrow[d, "(\delta,\Delta) \Pi \mathrm{id}"] \\ X \Pi_T Y \arrow[r, "\sim"] & (S\Pi_T S) \Pi_{(S\Pi_T S)} (X\Pi_T Y) \end{tikzcd}$$

zoals gedefinieerd in voorgaande opmerking. Omdat S een schema is over T, is (δ,Δ) een gesloten immersie, evenals $\mathrm{id}_{X\Pi_T Y}$, zodat volgens prop. 3.39 ook $(\delta,\Delta)\ \Pi\ \mathrm{id}$ en derhalve ook (ϕ,Φ) een gesloten immersie is.

<u>Propositie 3.43</u>: <u>Als $(\phi,\Phi): X \to Y$ en $(\psi,\Psi): Y \to Z$ twee gescheiden morphismen zijn, dan is ook $(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)$ gescheiden</u>.

<u>Bew</u>: (ϕ,Φ) en $(\psi,\Psi)\circ(\phi,\Phi)$ maken van X een Y-schema resp. een Z-preschema. Zij $(\delta,\Delta)_Y$ de diagonaal van X over Y, en $(\delta,\Delta)_Z$ de diagonaal van X over Z. Het is eenvoudig na te gaan dat het onderstaande diagram

$$\begin{tikzcd} & X \Pi_Y X \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "(\delta,\Delta)_Y"] \arrow[dr, "(\delta,\Delta)_Z"'] & \\ & X \Pi_Z X \end{tikzcd}$$

commuteert. (De vertikale pijl wordt geïnduceerd door $(\psi,\Psi): Y \to Z$. (Cf. Opm. 3.40).) Volgens prop. 3.42 is deze vertikale pijl een gesloten immersie, evenals $(\delta,\Delta)_Y$, zodat $(\delta,\Delta)_Z$ - als samenstelling van twee gesloten immersies - zelf ook een gesloten immersie is.

<u>Opmerking 3.44</u>: <u>Elk affien schema is een schema</u>.

<u>Bew</u>: Zij X = Spec A. De diagonaal van X over Spec $\mathbb{Z}$

$$X \xrightarrow{(\delta,\Delta)} X\ \Pi_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}\ X$$

wordt geïnduceerd door het ring-morphisme

$$\left.\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & A \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ \sum_i a_i\, b_i & \longleftarrow & \sum_i a_i \otimes b_i \end{array}\right\}$$

Dit is een surjectie, dus is (δ,Δ) een gesloten immersie.

We zullen dit resultaat generaliseren tot een algemener criterium op grond waarvan men kan besluiten dat een preschema een schema is (prop. 3.47).

Lemma 3.45: Een immersie is gescheiden.

Bew: Zij (ϕ,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ een immersie. We kunnen dan aannemen dat X een deelpreschema is van Y, en er bestaan een stel affiene open stukken $(Y_i)_i$ van Y zodat

$$\begin{cases} \text{(i)} & X \subset \cup Y_i \\ \text{(ii)} & (X \cap Y_i, \mathcal{O}_X | X \cap Y_i) \text{ affien gesloten in } (Y_i, \mathcal{O}_Y | Y_i). \end{cases}$$

Noteer: $X_i := X \cap Y_i$; $Y_0 := (\cup Y_i, \mathcal{O}_Y | \cup Y_i)$. Uit (i) volgt: (zie de constructie van gevezelde produkten)

$$X \amalg_Y X = X \amalg_{Y_0} X.$$

Uit (ii) volgt (onder meer): X_i is affien. We hebben een open overdekking

$$(X_i \amalg_{Y_i} X_i)_i$$

van $X \amalg_{Y_0} X = X \amalg_Y X$.

Zij nu

$$X \xrightarrow{(\delta,\Delta)} X \amalg_Y X$$

de diagonaal van X over Y. ((ϕ,Φ) induceert de Y-struktuur op X). Volgens opm. (3.32) is (δ,Δ) een immersie. We behoeven alleen nog maar te laten zien dat δX een gesloten deelverzameling is in $X \amalg_Y X$.

Voor elke i hebben we een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "(\delta_i,\Delta_i)"] \arrow[d, "\text{kan.}"'] & X_i \Pi_{Y_i} X_i \arrow[d, "\text{kan.}"] \\ X \arrow[r, "(\delta,\Delta)"] & X \Pi_Y X \end{tikzcd}$$

waarbij (δ_i,Δ_i) de diagonaal is van X_i over Y_i. De diagonalen (δ_i,Δ_i) worden geïnduceerd door surjectieve ring-morphismen

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longleftarrow & A_i \otimes_{B_i} A_i \\ \sum a_i a_i' & \longleftarrow & \sum a_i \otimes a_i' \end{array}$$

Dus zijn de $\delta_i X_i$'s gesloten deelverzamelingen van de $X_i \Pi_{Y_i} X_i$'s. Ook geldt:

$$\delta_i X_i = \delta X \cap X_i \Pi_{Y_i} X_i$$

(Ga na), en omdat de $X_i \Pi_{Y_i} X_i$'s $X \Pi_{Y_0} X = X \Pi_Y X$ overdekken volgt hieruit dat

$$\delta X \subset X \Pi_Y X$$

een gesloten deelverzameling is.

<u>Propositie 3.46</u>: <u>Als (ϕ,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van pre-schema's is, en $(Y_i)_i$ een open overdekking van Y, en als we noteren</u>:

(i) $X_i := \phi^{-1} Y_i$

(ii) $(\phi_i,\Phi_i) := [X_i \longrightarrow X \xrightarrow{(\phi,\Phi)} Y]$

<u>dan geldt</u>: <u>(ϕ,Φ) is gescheiden, d.e.s.d.a. voor elke i (ϕ_i,Φ_i) een gescheiden morphisme is.</u>

Bew: ($\Longrightarrow$) Als (ϕ,Φ) gescheiden is, dan is (ϕ_i,Φ_i) gescheiden volgens prop. (3.43), want het kanonieke morphisme $X_i \longrightarrow X$ is, als immersie, ook gescheiden volgens lemma (3.45).

Bew: ($\Longleftarrow$) Voor elke i geldt: (ϕ_i,Φ_i) is gescheiden. Dus is

$$X_i \xrightarrow{(\delta_i,\Delta_i)} X_i \Pi_{Y_i} X_i = X_i \Pi_Y X_i$$

een gesloten immersie. (Cf. lemma 3.45). Nu is $(X_i \Pi_{Y_i} X_i)_i$ een open overdekking van $X \Pi_Y X$, en

$$X_i = \delta^{-1}(X_i \Pi_Y X_i)$$

(Ga na). Dus is volgens prop. 3.28 ook

$$X \xrightarrow{(\delta,\Delta)} X \Pi_Y X$$

een gesloten immersie.

Propositie 3.47: Zij Y een affien schema en X een preschema met een open affiene overdekking $(X_i)_i$. Dan geldt: Een morphisme

$$(\phi,\Phi)\colon X \longrightarrow Y$$

is gescheiden, d.e.s.d.a:

(i) $X_i \cap X_j$ is affien voor elke i en j.

(ii) De beelden van de morphismen van ringen

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(X_i) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \\ \mathcal{O}_X(X_j) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \end{cases}$$

brengen als ring $\mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ voort.

Bew: Zij $X_i = \operatorname{Spec} A_i$ en $Y = \operatorname{Spec} B$. $X \Pi_Y X$ wordt overdekt door het stelsel $(X_i \Pi_Y X_j)_{i,j}$.

Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "(\delta,\Delta)"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& X \Pi_Y X \arrow[r, "(\pi_1,\Pi_1)"'] \arrow[d, "(\pi_2,\Pi_2)"'] & X \arrow[d, "(\phi,\Phi)"] \\
& X \arrow[r, "(\phi,\Phi)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\delta^{-1}(X_i \Pi_Y X_j) = \delta^{-1}(\pi_1^{-1} X_i \cap \pi_2^{-1} X_j) = \delta^{-1}(\pi_1^{-1} X_i) \cap \delta^{-1}(\pi_2^{-1} X_j).$$

Wegens $\pi_1 \circ \delta = \mathrm{id}$, $\pi_2 \circ \delta = \mathrm{id}$ volgt:

$$\delta^{-1}(X_i \Pi_Y X_j) = X_i \cap X_j$$

Nu geldt: $\{X_i \cap X_j\}_{i,j}$ is een open overdekking van X. Dus:

[(δ,Δ): $X \longrightarrow X \Pi_Y X$ is een gesloten immersie] $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ [$\forall i,j$. (δ,Δ): $X_i \cap X_j \longrightarrow X_i \Pi_Y X_j$ is een gesloten immersie] $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ [$\forall i,j$. $\delta(X_i \cap X_j)$ is een affien gesloten deelschema van $X_i \Pi_Y X_j = \mathrm{Spec}\ A_i \otimes_B A_j$] $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ [$X_i \cap X_j$ is affien en $A_i \otimes_B A_j \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ is surjectief]

Nu is $A_i \otimes_B A_j \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ een surjectief ring-morphisme d.e.s.d.a. de beelden van de morphismen

$$\begin{cases} A_i \longrightarrow A_i \otimes_B A_j \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \\ A_j \longrightarrow A_i \otimes_B A_j \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \end{cases}$$

de ring $\mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ voortbrengen. Hiermee is de prop. bewezen.

§3a. <u>Voorbeelden bij §3</u>.

(i) In §2a (iv) hebben we het volgende open deelpreschema van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ beschouwd:

$$U = (\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X,Y]) \setminus \{x_{\underline{m}}\}\ ;\quad \underline{m} := (X,Y).$$

We hadden gezien dat

$$U = D(X) \cup D(Y) = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X,Y]_X \cup \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X,Y]_Y.$$

We hebben zo een open affiene overdekking van U verkregen. U is een voorbeeld van een niet affien (Cf. §2a (iv)) preschema.

(ii) Beschouw nu eens twee copieën van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$, zeg: Spec $\mathbb{C}[X_1,Y_1]$ en Spec $\mathbb{C}[X_2,Y_2]$, en definieer, analoog aan (i),

$$\begin{cases} U_1 := (\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_1,Y_1]) \setminus \{x_{\underline{m}_1}\}\ ;\ \underline{m}_1 := (X_1,Y_1) \\ U_2 := (\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_2,Y_2]) \setminus \{x_{\underline{m}_2}\}\ ;\ \underline{m}_2 := (X_2,Y_2) \end{cases}$$

In <u>Top</u> hebben we dan het volgende "plakdiagram"(gevezelde som)

$$\begin{tikzcd} T & \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_2,Y_2] \arrow[l] \\ \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_1,Y_1] \arrow[u] & U_1 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

waarbij $U_1 \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_1,Y_1]$ de kanonieke inbedding is, en $U_1 \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X_2,Y_2]$ wordt verkregen door U_1 en U_2 op kanonieke manier te identificeren. De enige punten van Spec $\mathbb{C}[X_1,Y_1]$ en Spec $[X_2,Y_2]$ die niet worden geïdentificeerd zijn $x_{\underline{m}_1}$ en $x_{\underline{m}_2}$. We krijgen - topologisch - dus "het affiene complexe vlak waarbij het gesloten punt (0,0) tweemaal wordt geteld".

De plakstelling verifieert men gemakkelijk. We hebben een preschema

T verkregen met open affiene overdekking

$$T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1,Y_1] \cup \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_2,Y_2].$$

(iii) Beschouw $T_1 := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1]$ en $T_2 := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_2]$. (twee copieën van de complexe rechte). Zij $\underline{m}_1 := (X_1)$ en $\underline{m}_2 := (X_2)$. Beschouw:

$$\begin{cases} U_1 := (\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1]) \setminus \{x_{\underline{m}_1}\} = D(X_1) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1]_{X_1} \\ U_2 := (\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_2]) \setminus \{x_{\underline{m}_2}\} = D(X_2) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_2]_{X_2} \end{cases}$$

U_1 en U_2 zijn dus open affiene deelpreschema's van T_1 en T_2. Definieer nu:

$$\mathbb{C}[X_1]_{X_1} \xleftarrow{\ f\ } \mathbb{C}[X_2]_{X_2}$$

$$\frac{F(\frac{1}{X_1})}{X_1^{-n}} \longleftarrow\!\shortmid \frac{F(X_2)}{X_2^{n}}$$

(Dit kan, want als $F(X_2) = a_0 + a_1X_2 + \ldots + a_mX_2^m$, dan is

$$\frac{F(\frac{1}{X_1})}{X_1^{-n}} = X_1^n \cdot \frac{a_0X_1^m + \ldots + a_m}{X_1^m} \in \mathbb{C}[X_1]_{X_1} \quad).$$

Het is duidelijk dat f een isomorphisme van ringen is. Derhalve hebben we een isomorphisme van preschema's:

$$U_1 \xrightarrow[\sim]{(\phi,\Phi)} U_2$$

door f geïnduceerd.

Beschouw nu in <u>Top</u> het "plak-diagram" (gevezelde som):

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & T_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_1 & \supset & U_1 \end{array}$$

waarbij het morphisme $U_1 \longrightarrow T_2$ gedefinieerd wordt door

$$[U_1 \longrightarrow T_2] := [U_1 \xrightarrow[\sim]{\phi} U_2 \hookrightarrow T_2].$$

(We hebben dus de topologische ruimte T verkregen door T_2 te nemen, en T_1 aan T_2 te "plakken" door via het homeomorphisme ϕ U_1 met U_2 te identificeren.)
We kunnen schrijven:

(i) $T = T_1' \cup T_2$, open overdekking

(ii) T_1' homeomorf met T_1

(iii) $T_1' \cap T_2 = U_2$

(iv) Het homeomorphisme uit (ii), beperkt tot U_2, wordt gegeven door

$$U_2 \xrightarrow[\sim]{\phi^{-1}} U_1.$$

Omdat we T overdekken met slechts twee open deelverzamelingen behoeven we uitsluitend de plakvoorwaarde (prop. 3.8 (i)) te verifiëren. D.w.z.: We moeten de volgende isomorphismen definiëren

$$(U_2, \mathcal{O}_{T_1'}|U_2) \underset{\theta_{21}}{\overset{\theta_{12}}{\rightleftarrows}} (U_2, \mathcal{O}_{T_2}|U_2).$$

(Hierbij zij opgemerkt dat $\mathcal{O}_{T_1'}$ op kanonieke manier via het homeomorphisme tussen T_1 en T_1' wordt geïnduceerd door $\mathcal{O}_{T_1}$).
Welnu, kies een open deelverzameling V_2 in U_2, en definieer:

$$\theta_{21}(V_2) := [\mathcal{O}_{T_2}(V_2) \xrightarrow[\sim]{\Phi'(V_2)} \mathcal{O}_{T_1'}(V_2)].$$

(Hier is $\Phi'(-)$ eveneens op kanonieke wijze door $\Phi(-)$ geïnduceerd. Ga na; het is een kwestie van notatie). Voorts:

$$\theta_{12}(V_2) := \theta_{21}(V_2)^{-1}.$$

Hiermee hebben we het preschema $(T, \mathcal{O}_T)$ verkregen door het plakken van $(T_1', \mathcal{O}_{T_1'})$ en $(T_2, \mathcal{O}_{T_2})$. Nu geldt: $(T, \mathcal{O}_T)$ <u>is niet affien</u>.

Bewijs hiervoor: Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \mathcal{O}_{T_1'}(U_2) \arrow[r, "\text{"restr"}"] & \mathcal{O}_{T_1'}(U_2) & \\ \mathcal{O}_T(T) \arrow[r, "\text{restr.}"] & \mathcal{O}_{T_1'}(U_2) \times \mathcal{O}_{T_2}(U_2) \arrow[ur, "\text{proj.}"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & & \\ & & \mathcal{O}_{T_2}(U_2) \arrow[r, "\text{"restr"}"'] & \mathcal{O}_{T_2}(U_2) \arrow[r, "\sim", "\theta_{21}(U_2)"'] & \mathcal{O}_{T_1'}(U_2) \end{tikzcd}$$

(vgl. de definitie van de geplakte schoof in het bewijs van prop. (3.8)). Kies nu $s \in \mathcal{O}_T(T)$. Dan moet derhalve gelden, als $s_1 := s|T_1'$ en $s_2 := s|T_2$,

$$s_1|U_2 = \theta_{21}(U_2)\ (s_2|U_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

We hebben:

$$\begin{cases} s_1 \in \mathcal{O}_{T_1'}(T_1') = \mathcal{O}_{T_1}(T_1) = \mathbb{C}[X_1] \\ s_2 \in \mathcal{O}_{T_2}(T_2) = \mathbb{C}[X_2]. \end{cases}$$

Zeg: $s_1 = a_0 + \ldots + a_n X_1^n$ en $s_2 = b_0 + \ldots + b_m X_2^m$.
(∗) geeft dan:

$$a_0 + \ldots + a_n X_1^n = \frac{b_0 X_1^m + \ldots + b_m}{X_1^m} \in \mathbb{C}[X_1]_{X_1}$$

zodat de enige mogelijkheid is: $s_1 = a_0 = b_0 = s_2$. Met andere woorden: De enige elementen van de ring $\mathcal{O}_T(T)$ zijn de constanten. Dus:

$$\mathcal{O}_T(T) = \mathbb{C}.$$

Dus, als T affien is, is - als topologische ruimte - T = Spec $\mathbb{C}$, een één-punts verzameling. Dit is in tegenspraak met het feit dat T_2 = Spec $\mathbb{C}[X_2]$ en $T_2 \subset T$. Dus T is niet affien.
Een nadere karakterisering van T volgt in een volgende §.

(iv) De onderliggende topologische ruimte van $X \amalg_Y Z$ is niet altijd het gevezelde produkt in <u>Top</u> van de topologische ruimtes X en Z over Y. ($X \amalg_Y Z$ hier te beschouwen als gevezeld produkt in <u>PreSch</u>). Want kies bijvoorbeeld X = Spec $\mathbb{R}[X]$, Y = Spec $\mathbb{R}$, Z = Spec $\mathbb{C}$. Dan is

$$X \amalg_Y Z = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X].$$

Beschouw nu het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ \mathbb{C} \\ {\scriptstyle(\phi,\Phi)}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ \mathbb{R} \end{array}$$

(gevezeld produkt in <u>PreSch</u>, waarbij (ϕ,Φ) geïnduceerd is door de kanonieke homomorfie $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$). Het diagram van onderliggende topologische ruimten is dan:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathrm{pt} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathrm{pt} \end{array}$$

(waarbij pt het punt-object is in <u>Top</u>.) Als dit laatste diagram een gevezeld produkt is, zou ϕ een homeomorfie moeten zijn, en ϕ is niet injectief. (Ga na) Tegenspraak.

(v) (Cf. Mumford [M], pag. 215)

We geven een voorbeeld van een gesloten deelpreschema. Zij $(\phi,\Phi): X \to Y$ een morphisme van preschema's, en kies een gesloten punt $y \in Y$.

Nu is $\mathcal{O}_Y(y)$ een lokale ring met maximaal ideaal, zeg $\underline{m}(y)$. We kunnen dan het restklassenlichaam

$$k(y) := \mathcal{O}_Y(y) / \underline{m}(y)$$

beschouwen, en als volgt een morphisme

$$(\psi,\Psi)\colon \operatorname{Spec}(k(y)) \longrightarrow Y$$

definiëren: Zij $\operatorname{Spec}(k(y)) = \{x_0\}$ als topologische ruimte, en zij U een open omgeving van $y \in Y$. Definieer:

(i) $\psi(x_0) = y$

(ii) $\Psi(U) := \left[\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathcal{O}_Y(y) \xrightarrow[\text{kan.}]{} k(y) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k(y))}(\{x_0\})\right]$.

(Als U een open deelverzameling is van Y zodat $y \notin U$, dan is $\Psi(U)$ de nulafbeelding). We hebben dan het gevezelde produkt

$$\begin{array}{ccc} X \,\Pi_Y\, \operatorname{Spec}(k(y)) & \xrightarrow{(\pi,\Pi)} & X \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow (\phi,\Phi) \\ \operatorname{Spec}(k(y)) & \xrightarrow[(\psi,\Psi)]{} & Y \end{array}$$

Zij nu $V = \operatorname{Spec}(S)$ een open affiene omgeving van y in Y, en laat

$$(U_i = \operatorname{Spec} R_i)_i$$

een open affiene overdekking zijn van $\phi^{-1}(V) \subset X$.
Dan is $(U_i \,\Pi_V\, \operatorname{Spec} k(y))_i$ een open overdekking van

$$X \,\Pi_Y\, \operatorname{Spec}(k(y)).$$

(Want: $\phi^{-1} V \,\Pi_V\, \operatorname{Spec}(k(y)) = X \,\Pi_Y\, \operatorname{Spec}(k(y))$ (Ga na))

Omdat y een gesloten punt is in Y, en dus ook in V, correspondeert y met een maximaal ideaal $\underline{n}$ van S, en er geldt:

$$k(y) = S_{\underline{n}} / \underline{n}.S_{\underline{n}} \approx S / \underline{n}\,.$$

Dus volgt voor iedere i:

$$U_i \Pi_V \text{Spec}\ (k(y)) = \text{Spec}\ (R_i \otimes_S S/\underline{n}).$$

Nu worden de door (π, Π) geïnduceerde morphismen

$$U_i \Pi_V \text{Spec}\ (k(y)) \longrightarrow U_i$$

geïnduceerd door de kanonieke ringmorphismen

$$R_i \otimes_S {}^S/_{\underline{n}} \xleftarrow{f_i} R_i$$

en - wegens de rechts-exaktheid van het tensorprodukt - zijn deze f_i's surjectief.
Voorts induceert (ϕ, Φ) morphismen

$$\text{Spec}\ (R_i) = (U_i, \mathcal{O}_X|U_i) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|V) = \text{Spec}\ (S),$$

dus ring-morphismen

$$R_i \xleftarrow{g_i} S$$

We hebben nu gevonden een stel open deelverzamelingen $(U_i)_i$ in X zodat de door (π, Π) geïnduceerde morphismen

$$\pi^{-1}\ U_i = U_i\ \Pi_V\ \text{Spec}\ k(y) \longrightarrow U_i$$

gesloten immersies zijn. Dus (π, Π) is een immersie. Ook geldt: $\phi^{-1}(y)$ is de topologische ruimte, die ten grondslag ligt aan $X\ \Pi_Y\ \text{Spec}\ k(y)$, want:

$$U_i\ \Pi_V\ \text{Spec}\ k(y) = \text{Spec}\ (R_i \otimes_S {}^S/_{\underline{n}}) = \text{Spec}\ (R_i/_{g_i(\underline{n})}) =$$

$$= \{x_{\underline{p}} \in U_i \mid \underline{p} \supset g_i(\underline{n})\} = \{x_{\underline{p}} \in U_i \mid \phi(x) = y\}.$$

Dit is - omdat y een gesloten punt is - een gesloten deelverzameling van X. Dus is (π, Π) een gesloten immersie.
We kunnen dus $X\ \Pi_Y\ \text{Spec}\ k(y)$ identificeren met een gesloten deelpreschema van X met onderliggende topologische ruimte $\phi^{-1}(y)$.
$X\ \Pi_Y\ \text{Spec}\ k(y)$ heet de <u>vezel van y</u>.

(vi) In PreSch is Spec $\mathbb{Z}$ het punt-object (Cf. Opm. 3.16). Voor elke $X \in$ PreSch bestaat dus een uniek morphisme

$$X \xrightarrow{(\phi,\Phi)} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}.$$

Zij nu $x \in X$ en $y_{(p)} = \phi x$, $(p) \neq (0)$. Dan induceert Φ een staakmorphisme

$$\Phi(x) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x).$$

Zij $\underline{m}(y)$ het maximale ideaal van de lokale ring $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(y)$, en $\underline{m}(x)$ dat van $\mathcal{O}_X(x)$. Definieer:

$$k(x) := \mathcal{O}_X(x) \Big/ \underline{m}(x) \; .$$

Omdat $\Phi(x)$ een lokaal homomorphisme is, induceert $\Phi(x)$ een ringhomomorphisme

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_{(p)} \Big/ (p)\mathbb{Z}_{(p)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(y) \Big/ \underline{m}(y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x) \Big/ \underline{m}(x) = k(x).$$

Dus is de karakteristiek van het restklassenlichaam $k(x)$ $p \neq 0$.
Als we een punt $x \in X$ hadden gekozen dat (indien mogelijk) op het algemene punt $y_{(0)}$ van Spec $\mathbb{Z}$ was afgebeeld, dan hadden we het morphisme

$$\mathbb{Q} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(y_{(0)}) \Big/ \underline{m}(y_{(0)}) \longrightarrow \mathcal{O}_X(x) \Big/ \underline{m}(x) = k(x)$$

gevonden, en was de karakteristiek van $k(x)$ 0 geweest.

(vii) (Cf. Murre [Mu], pag. 16). We hebben gezien dat in het algemeen de topologische ruimte, die ten grondslag ligt aan het gevezelde produkt $X \Pi_S Y$ van preschema's in het algemeen niet het gevezelde produkt van de resp. onderliggende topologische ruimtes is van X, Y en S. Wel geldt het volgende:
Als $x \in X$ en $y \in Y$, en

$$\begin{tikzcd} X \,\Pi_S\, Y \arrow[r, "{(p,P)}"] \arrow[d, "{(q,Q)}"'] & X \arrow[d, "{(u,U)}"] \\ Y \arrow[r, "{(v,V)}"'] & S \end{tikzcd}$$

is het gevezeld produkt diagram, en als $\exists s \in S$ zodat $u(x) = s = v(y)$, dan bestaat er ook een $z \in X \,\Pi_S\, Y$ zodat $p(z) = x$ en $q(z) = y$.
Het bewijs hiervoor gaat als volgt:
Kies een affiene open omgeving Spec C van s en affiene open omgevingen Spec A van x en Spec B van y zodat

$$u(\text{Spec } A) \subset \text{Spec } C \quad \text{en} \quad v(\text{Spec } B) \subset \text{Spec } C.$$

Dan is Spec $(A \otimes_C B)$ een open affien deel van $X \,\Pi_S\, Y$, en als we de bewering kunnen bewijzen in het affiene geval, zijn we klaar. Neem dus aan: $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $S = \text{Spec } C$. We hebben dan de situatie:

$$\begin{tikzcd} \text{Spec } A \otimes_C B \arrow[r, "{(p,P)}"] \arrow[d, "{(q,Q)}"'] & \text{Spec } A \arrow[d, "{(u,U)}"] & x \arrow[dd, mapsto] \\ \text{Spec } B \arrow[r, "{(v,V)}"'] & \text{Spec } C & \\ y \arrow[rr, mapsto] & & s \end{tikzcd}$$

Laten weer $k(x) = \mathcal{O}_X(x)/\underline{m}(x)$, $k(y) = \mathcal{O}_Y(y)/\underline{m}(y)$ en $k(s) = \mathcal{O}_S(s)/\underline{m}(s)$ de betreffende restklassen lichamen zijn. Dan induceren U en V weer homomorphismen

$$\begin{cases} g_1: k(s) \longrightarrow k(x) \\ g_2: k(s) \longrightarrow k(y) \end{cases}$$

Beschouw nu het diagram

$$\begin{tikzcd}
k(x) \otimes_{k(s)} k(y) & & k(x) \arrow[ll] & \\
& A \otimes_C B \arrow[ul, dashed, "f"'] & A \arrow[l] \arrow[u] & \\
k(y) \arrow[uu] & B \arrow[l] \arrow[u] & C \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr] & \\
& & & k(s) \arrow[uuul, "g_1"'] \arrow[ulll, "g_2"]
\end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots(*)$$

waarbij f de unieke factorisatie is die het diagram commutatief afmaakt. f induceert het morphisme

$$\mathrm{Spec}\ (k(x) \otimes_{k(s)} k(y)) \xrightarrow{(\phi,\Phi)} X \amalg_S Y.$$

Het diagram (*) induceert een diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\ k(x) \otimes_{k(s)} k(y) \arrow[rr] \arrow[dr, "(\phi,\Phi)"] \arrow[dd] & & \mathrm{Spec}\ k(x) \arrow[d] \\
& X \amalg_S Y \arrow[r, "(p,P)"'] \arrow[d, "(q,Q)"'] & X \\
\mathrm{Spec}\ k(y) \arrow[r] & Y &
\end{tikzcd}$$

waaruit men direkt ziet dat

$$\phi(\mathrm{Spec}\ k(x) \otimes_{k(s)} k(y)) \subset p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$$

(als verzamelingen). Ook geldt: ϕ is injectief, want f kunnen we als volgt factoriseren:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_C B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & k(x) \otimes_{k(s)} k(y) \\
& \mathcal{O}_X(x) \otimes_{\mathcal{O}_S(s)} \mathcal{O}_Y(y) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

(Ga na), en hieruit volgt de injectiviteit van ϕ gemakkelijk.
Ook is $\mathrm{Im}\ \phi = p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$, want als $z \in p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$, hebben we het diagram

$$\begin{tikzcd}
k(s) \arrow[rrr, bend left] \arrow[ddd, bend right] & & & \\
& C \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & k(x) \arrow[dd] \\
& B \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_C B \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
& k(y) \arrow[rr] & & k(z)
\end{tikzcd}$$

waaruit gemakkelijk volgt een factorisatie

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_C B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "k"'] & k(x) \otimes_{k(s)} k(y) \arrow[r] & k(z)
\end{tikzcd}$$

Dus een factorisatie

$$\begin{tikzcd}
X \prod_S Y & \mathrm{Spec}\ k(x) \otimes_{k(s)} k(y) \arrow[l, "(\phi,\Phi)"'] & \mathrm{Spec}\ k(z) \arrow[l, "(\psi,\Psi)"'] \arrow[ll, bend left, "(\tau,T)"]
\end{tikzcd}$$

zodat $\phi(\mathrm{Im}\ \psi) = z$.
We hebben nu gevonden dat $\mathrm{Spec}\ k(x) \otimes_{k(s)} k(y)$ als verzameling isomorf is met $p^{-1}x \cap q^{-1}y$, en er is dus een punt $z \in \mathrm{Spec}\ k(x) \otimes_{k(s)} k(y) \subset X \prod_S Y$ zodat $p(z) = x$ en $q(z) = y$.

(viii) (Cf. Murre [Mu], pag. 21). We geven een voorbeeld van een preschema dat geen schema is.
Beschouw $B := \mathbb{C}[X]$ en $A := \mathbb{C}[Y]$, en daarbij $D(X) = \mathrm{Spec}\ B_X$, $D(Y) = \mathrm{Spec}\ B_Y$. Analoog aan voorbeeld (ii) kunnen we Spec B aan Spec A plakken door $D(X)$ en $D(Y)$ te identificeren via het isomorfisme

$$D(X) \xleftarrow[(\phi,\Phi)]{\sim} D(Y)$$

dat geïnduceerd wordt door het ring-morphisme

$$\mathbb{C}[X]_X \xrightarrow[f]{\sim} \mathbb{C}[Y]_Y$$

$$\frac{F(X)}{X^m} \longmapsto \frac{F(Y)}{Y^m}$$

We verkrijgen dan een preschema S = Spec B $\cup$ Spec C. S is geen schema. Om dit in te zien passen we toe prop. (3.47). We hebben de affiene overdekking

$$T = \text{Spec } B \cup \text{Spec } C$$

terwijl

$$\text{Spec } B \cap \text{Spec } C \simeq D(X).$$

Beschouw de beelden van de kanonieke morphismen

$$\begin{cases} B \simeq \mathcal{O}_T(\text{Spec } B) \longrightarrow \mathcal{O}_T(\text{Spec } B \cap \text{Spec } C) \simeq B_X \\ C \simeq \mathcal{O}_T(\text{Spec } C) \longrightarrow \mathcal{O}_T(\text{Spec } B \cap \text{Spec } C) \simeq C_Y \simeq B_X \end{cases}$$

Deze zijn beide $\frac{\mathbb{C}[X]}{1}$.

Echter: $\mathcal{O}_T(\text{Spec } B \cap \text{Spec } C) \simeq \mathbb{C}[X]_X$, en dit wordt niet voortgebracht door $\mathbb{C}[X]$.

Dus is niet voldaan aan de voorwaarde (ii) van prop. (3.47). Dus is S geen schema.

(ix) Een voorbeeld van een niet affien schema is gegeven in voorbeeld (i). Omdat de inbedding

$$U \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[X,Y]$$

een (open) immersie is, en Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ als affien schema een schema is, is ook U een schema.

(x) Een voorbeeld van een geval, waarin voorwaarde (i) van (3.47) niet vervuld is:
Beschouw het preschema, dat verkregen wordt door Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ op Spec $\mathbb{C}[S,T]$ te plakken door de open deelverzamelingen

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y] \setminus \{x_{(X,Y)}\} \quad \text{en} \quad \operatorname{Spec} \mathbb{C}[S,T] \setminus \{y_{(X,Y)}\}$$

op kanonieke manier te identificeren volgens

$$\begin{cases} X \longrightarrow S \\ Y \longrightarrow T \end{cases}$$

Dan is de doorsnijding van de beelden van Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ en Spec $\mathbb{C}[S,T]$ onder de inbedding in de geplakte ruimte precies de open verzameling U uit voorbeeld (ix), en U is niet affien.

§4. $\mathcal{O}_X$-modulen.

<u>Definitie 4.1.</u> Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema en $\mathcal{M}_X$ een schoof van abelse groepen op X. $\mathcal{M}_X$ heet een <u>$\mathcal{O}_X$-moduul</u> als voor elke tweetal open deelverzamelingen U en V van X met $U\subset V$ voldaan is aan:

(i) $\mathcal{M}_X(U)$ is een $\mathcal{O}_X(U)$-moduul.

(ii) Het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V)\times\mathcal{M}_X(V) & \xrightarrow{\text{verm.}} & \mathcal{M}_X(V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{restr.}\times\text{restr.}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\text{restr.}} \\ \mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{M}_X(U) & \xrightarrow{\text{verm.}} & \mathcal{M}_X(U) \end{array}$$

commuteert.

<u>Opmerking 4.2.</u> <u>Als</u> $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A <u>en</u> M <u>is een A-moduul dan induceert</u> M <u>op</u> X <u>op kanonieke wijze een $\mathcal{O}_X$-moduul</u> $\tilde{M}_X$.

Het bewijs wordt hier niet in zijn geheel gegeven, aangezien het praktisch net zo verloopt als in de constructie van de schoof $\mathcal{O}_X$ op het spectrum X = Spec A. Zij bijvoorbeeld U een open kompakte deelverzameling van X. Beschouw weer functies

$$r\colon U \longrightarrow M\times A$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (m_x, a_x)$$

die voldoen aan:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x_{\underline{p}}\in U.\ a_x\notin \underline{p} \\ \text{(ii)} & \forall x,y\in U.\ a_x m_y = a_y m_x \end{cases}$$

en identificeer r met r', gegeven door

$$r'\colon U \longrightarrow M\times A$$
$$x_{\underline{p}} \longmapsto (m'_x, a'_x)$$

als

$$\forall x_{\underline{p}} \in U \, \exists c_x \in A \setminus \underline{p}. \; c_x(a_x m'_x - a'_x m_x) = 0.$$

De zo verkregen verkregen aequivalentieklassen zijn de elementen van het $\mathcal{O}_X(U)$-moduul $\tilde{M}_X(U)$ met de vermenigvuldiging

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) \times \tilde{M}_X(U) &\longrightarrow \tilde{M}_X(U) \\ (\bar{r},\bar{m}) &\longmapsto \bar{r}.\bar{m} \end{aligned}$$

waarbij, als r en m representanten zijn van $\bar{r}$ en $\bar{m}$, gegeven door

$$\begin{aligned} r: U &\longrightarrow A\times A \\ x_{\underline{p}} &\longmapsto (a_x, b_x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} m: U &\longrightarrow M\times A \\ x_{\underline{p}} &\longmapsto (m_x, c_x) \end{aligned}$$

$\bar{r}.\bar{m}$ gerepresenteerd wordt door de functie

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow M\times A \\ x_{\underline{p}} &\longmapsto (a_x m_x, b_x c_x) \end{aligned}$$

Op dezelfde manier als in de constructie van $\mathcal{O}_X$ kunnen we nu - door overgang op projectieve limieten - $\tilde{M}_X(U)$ definiëren voor elke open deelverzameling U van X, en evenzo - door overgang op injectieve limieten - de staken $\tilde{M}_X(x)$.

<u>Definitie 4.3</u>. Als A een ring is en M een A-moduul, terwijl S een multiplicatieve deelverzameling is van A, dan kunnen we als volgt een $S^{-1}A$-moduul <u>$S^{-1}M$</u> definiëren. Zij

$$\mathcal{V} := \{\tfrac{m}{s} \mid m \in M, \; s \in S\}.$$

Definieer als volgt een aequivalentierelatie

$$\frac{m_1}{s_1} \sim \frac{m_2}{s_2} \iff \exists s \in S. \; s[s_2 m_1 - s_1 m_2] = 0.$$

Het is duidelijk hoe men op de verzameling

$$S^{-1}M := \mathcal{V}/_{\sim}$$

een optelling definieert. De scalaire vermenigvuldiging met elementen uit $S^{-1}A$ definieert men met:

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{m}{s_2} := \frac{a_1 m}{s_1 s_2}\ .$$

Dit klopt met de aequivalentierelaties.

<u>Definitie 4.4.</u> Als $\underline{p} \subset A$ een priemideaal is, en $S := A \setminus \underline{p}$, dan definieert men, als M een A-moduul is,

$$M_{\underline{p}} := S^{-1}M$$

($M_{\underline{p}}$ is een $A_{\underline{p}}$-moduul).

<u>Definitie 4.5.</u> Als $a \in A$, en $M \in {}_A\underline{M}$, terwijl $S := \{a^n \mid n=0,1,2,\dots\}$ dan definiëren we:

$$M_a := S^{-1}M.$$

(M_a is een A_a-moduul).

<u>Opmerking 4.6.</u> Analoog aan prop. (2.12) en (2.15) bewijst men:
<u>Als</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ = Spec A <u>en</u> M <u>is een A-moduul, dan geldt voor elke</u> $x_{\underline{p}} \in X$ <u>en elke</u> $a \in A$:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \tilde{M}_X(x) = M_{\underline{p}} \\ \text{(ii)} & \tilde{M}_X(D(a)) = M_a \end{cases}$$

<u>Gevolg 4.7.</u> $\tilde{M}_X(X) = M$ en $\tilde{M}_X(\emptyset) = 0$.

Definitie 4.8. Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema met twee $\mathcal{O}_X$-modulen $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$. Dan heet een morphisme van schoven

$$(\phi,\Phi)\colon (X,\mathcal{N}_X) \longrightarrow (X,\mathcal{M}_X)$$

een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen als voor elke open deelverzameling U van X het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}_X(U) \arrow[r, "\mathrm{id}\times\Phi(U)"'] \arrow[d, "\text{verm.}"] & \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{N}_X(U) \arrow[d, "\text{verm.}"] \\
\mathcal{M}_X(U) \arrow[r, "\Phi(U)"'] & \mathcal{N}_X(U)
\end{tikzcd}$$

commuteert. (ϕ is het identieke morphisme op X).

Opmerking 4.9. Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A en zijn M en N twee A-modulen met een ${}_A$M-morphisme

$$f\colon M \longrightarrow N.$$

Dan wordt door f op kanonieke manier een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$(\phi,\Phi)\colon (X,\tilde{N}_X) \longrightarrow (X,\tilde{M}_X)$$

geïnduceerd. (ϕ is de identiteit op X).

Bew: Voor de open basis-verzamelingen D(a) $(a \in A)$ kunnen we definiëren:

$$\Phi(D(a)) := \left[\begin{array}{l} \tilde{M}_X(D(a)) = M_a \longrightarrow N_a = \tilde{N}_X(D(a)) \\ \qquad\qquad\quad \dfrac{m}{a^n} \longmapsto \dfrac{f(m)}{a^n} \end{array}\right]$$

Als $a_1, a_2 \in A$ zodat $D(a_1) \subset D(a_2)$, dan is $D(a_1) = D(a_1 a_2)$. Omdat het diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{M}_X(D(a_2)) & = & M_{a_2} & \xrightarrow{\Phi(D(a_2))} & N_{a_2} & = & \tilde{N}_X(D(a_2)) \\
{\scriptstyle\text{restr.}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{restr.}} \\
\tilde{M}_X(D(a_1)) & = & M_{a_1a_2} & \xrightarrow[\Phi(D(a_1))]{} & N_{a_1a_2} & = & \tilde{N}_X(D(a_1))
\end{array}$$

commuteert. (Waarbij de vertikale pijlen gegeven zijn door:

$$\begin{cases} M_{a_2} \longrightarrow M_{a_1a_2} \\ \dfrac{m}{a_2^n} \longmapsto \dfrac{ma_1^n}{(a_1a_2)^n} \end{cases} ; \quad \begin{cases} N_{a_2} \longrightarrow N_{a_1a_2} \\ \dfrac{n}{a_2^t} \longmapsto \dfrac{na_1^t}{(a_1a_2)^t} \end{cases} \quad),$$

commuteren de $\Phi(D(a))$'s met restricties. Volgens opmerking (2.17a) geldt voor elke open deelverzameling U van X:

$$\begin{cases} \tilde{M}_X(U) = \varprojlim_{D(a)\subset U} M_X(D(a)) \\ \\ \tilde{N}_X(U) = \varprojlim_{D(a)\subset U} N_X(D(a)). \end{cases}$$

Men kan nu op de gebruikelijke manier, door overgang op projectieve limieten, voor elke open U van X de morphismen

$$\Phi(U): \tilde{M}_X(U) \longrightarrow \tilde{N}_X(U)$$

definiëren.

<u>Opmerking 4.10.</u> <u>Als</u> f: M → N <u>gegeven is, zoals in Opm. (4.9), dan worden de staakmorphismen</u> $\Phi(x)$ <u>gegeven door</u>

$$\begin{cases} \tilde{M}_X(x_{\underline{p}}) = M_{\underline{p}} \longrightarrow N_{\underline{p}} = \tilde{N}_X(x_{\underline{p}}) \\ \qquad\qquad \dfrac{m}{s} \longmapsto \dfrac{f(m)}{s} \end{cases}$$

<u>Definitie 4.11.</u> Als $(X, \mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is met twee $\mathcal{O}_X$-modulen $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$, dan kunnen we een nieuwe schoof definiëren:

$$(\mathcal{M}_X \oplus \mathcal{N}_X)(U) := \mathcal{M}_X(U) \oplus \mathcal{N}_X(U)$$

als U een open deelverzameling is van X. De restricties krijgen we op kanonieke manier: Als $U \subset V$, kies dan

$$\mathcal{M}_X(V) \oplus \mathcal{N}_X(V) \xrightarrow{\text{restr.}\oplus\text{restr.}} \mathcal{M}_X(U) \oplus \mathcal{N}_X(U).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de zo verkregen preschoof een schoof is, en zelfs een $\mathcal{O}_X$-moduul.

<u>Notatie 4.12.</u> De direkte som $\mathcal{M}_X \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_X$ van n copieën van het $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_X$ geven we ook aan met:

$$\mathcal{M}_X^n.$$

We bespreken nu eerst een proces, dat in het vervolg het "<u>verschoven</u>" <u>van een preschoof</u> zal worden genoemd.

Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschoof van abelse groepen, en U een open deelverzameling van X.
Definieer als volgt een relatie $\sim$ op $\mathcal{O}_X(U)$:

$s \sim t \iff$ Er is een open overdekking $(U_i)_i$ van U zodat voor elke i geldt: $s \mid U_i = t \mid U_i$.

(Hierbij: $s, t \in \mathcal{O}_X(U)$.)
$\sim$ is een aequivalentierelatie, afhankelijk van de keuze van U. Bij elke open deelverzameling van X hebben we zo'n relatie. Er geldt:

(i) Als V een open deelverzameling is binnen U, dan:

$$s, t \in \mathcal{O}_X(U);\ s \sim t \Longrightarrow s|V \sim t|V.$$

(ii) Als $s,s',t,t' \in \mathcal{O}_X(U)$, dan volgt

$$s \sim s' \text{ en } t \sim t' \Longrightarrow (s+t) \sim (s'+t')$$

zoals eenvoudig is in te zien. Definieer nu:

$$\mathcal{V}(U) := \mathcal{O}_X(U)/\sim$$

voor elke open deelverzameling U van X. Uit (i) en (ii) volgt direkt dat $\{\mathcal{V}(U)\}_U$ weer een preschoof van abelse groepen is.
Definieer verder:

$$\mathcal{W}(U) := \{(\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i) \mid (U_i)_i \text{ is een open overdekking van } U \text{ en bovendien: Voor elke } i,j \text{ geldt: } s_i \mid U_i \cap U_j \sim s_j \mid U_i \cap U_j\}.$$

(Hierbij zij opgemerkt dat $(U_i)_i$ een niet-vastgekozen overdekking is van U en dat $\bar{s}_2$ de aequivalentieklasse van $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ representeert als element van $\mathcal{V}(U_i)$.)

Ook op $\{\mathcal{W}(U)\}_U$ kunnen weer restricties worden gedefinieerd:
Als $\sigma := (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i)$ een element is van $\mathcal{W}(U)$, en V is een open deelverzameling van U, dan:

$$\sigma|V := (\bar{s}_i|V \cap U_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(V \cap U_i).$$

Dat $\sigma|V$ een element van $\mathcal{W}(V)$ is, volgt omdat wegens

$$s_i \mid U_i \cap U_j \sim s_j \mid U_i \cap U_j$$

ook

$$s_i \mid U_i \cap U_j \cap V \sim s_j \mid U_i \cap U_j \cap V.$$

Definieer nu op $\mathcal{W}(U)$ een relatie $\approx$ als volgt: Als $\sigma,\tau \in \mathcal{W}(U)$, met

$$\begin{cases} \sigma = (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i) \\ \tau = (\bar{t}_j)_j \in \prod_j \mathcal{V}(U'_j) \end{cases}$$

definieer dan:

$$\sigma \approx \tau \iff \forall i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \sim t_j \mid U_i \cap U'_j$$

en noteer:

$$\mathcal{O}'_X(U) := \mathcal{W}(U)/\approx \quad .$$

Om in te zien dat dit kan, moet worden nagegaan dat $\approx$ een aequivalentie relatie is:
Dat steeds $\sigma \approx \sigma$, volgt uit de definitie van $\mathcal{W}(U)$, en het is triviaal dat $\sigma \approx \tau \Rightarrow \tau \approx \sigma$. Zijn nu $\sigma, \tau, \omega \in \mathcal{W}(U)$, met

$$\begin{cases} \sigma = (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i) \\ \tau = (\bar{t}_j)_j \in \prod_j \mathcal{V}(U'_j) \\ \omega = (\bar{w}_k)_k \in \prod_k \mathcal{V}(U''_k) \end{cases}$$

Neem aan dat geldt $\sigma \approx \tau$ en $\tau \approx \omega$. Dat wil zeggen:

$$\begin{cases} \forall i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \sim t_j \mid U_i \cap U'_j \\ \forall j,k.\quad t_j \mid U'_j \cap U''_k \sim w_k \mid U_j \cap U''_k \end{cases}$$

Omdat de aequivalentierelaties $\sim$ compatibel zijn met het nemen van restricties, volgt hieruit:

$$\forall i,j,k.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \cap U''_k \sim w_k \mid U_i \cap U'_j \cap U''_k .$$

Dus hebben we een open overdekking $(V^{ijk}_\alpha)_\alpha$ van $U_i \cap U'_j \cap U''_k$ (voor elke i,j,k één) zodat:

$$\forall i,j,k\ \forall \alpha.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \cap U''_k \cap V^{ijk}_\alpha = w_k \mid U_i \cap U'_j \cap U''_k \cap V^{ijk}_\alpha$$

Ook is voor elke i en k $(U'_j \cap V^{ijk}_\alpha)_{j,\alpha}$ een open overdekking van $U_i \cap U''_k$, zodat volgt:

$$\forall i,k.\quad s_i \mid U_i \cap U''_k \sim w_k \mid U_i \sim U''_k$$

wat zeggen wil:

$$\sigma \approx \omega.$$

Hiermee is bewezen dat $\approx$ een aequivalentierelatie is op $\mathcal{W}(U)$.
Ook geldt, dat $\approx$ compatibel is met het nemen van restricties:
Dat ziet men als volgt in: Als $\sigma = (\bar{s}_i)_i$ en $\tau = (\bar{t}_j)_j$ zoals hiervoor zijn gedefinieerd als elementen van $\mathcal{W}(U)$, dan volgt uit $\sigma \approx \tau$:

$$\forall i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \sim t_j \mid U_i \cap U'_j.$$

Dus ook:

$$\forall i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U'_j \cap V \sim t_j \mid U_i \cap U'_j \cap V$$

als V een open deelverzameling van U is. Dit geeft:

$$\sigma \mid V = (\bar{s}_i \mid U_i \cap V)_i \approx (\bar{t}_j \mid U'_j \cap V)_j = \tau \mid V.$$

Ook induceert de abelse-groep-struktuur op $\mathcal{O}_X(U)$ (en de door deze geïnduceerde struktuur op de $\mathcal{V}(U_i)$'s) een struktuur van abelse groepen op $\mathcal{O}'_X(U)$. Als we de aequivalentieklassen van $\sigma \in \mathcal{W}(U)$ aangeven met $\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}'_X(U)$, dan wordt de optelling op $\mathcal{O}'_X(U)$ gegeven door:

$$\bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{\tau}} := \overline{\overline{(\bar{s}_i + \bar{t}_j \mid U_i \cap U'_j)_{i,j}}}$$

als $\sigma = (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i)$ en $\tau = (t_j)_j \in \prod_j \mathcal{V}(U'_j)$. Ga na dat deze definitie voldoet.

We hebben nu een preschoof $\{\mathcal{O}'_X(U)\}_U$ van abelse groepen op X geconstrueerd.
Bewering: $\{\mathcal{O}'_X(U)\}_U$ is een schoof. Hiertoe verifiëren we beide schoofeigenschappen.
<u>Ten eerste</u>: Kies twee elementen $\bar{\bar{\sigma}}$ en $\bar{\bar{\tau}}$, gegeven door:

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}'_X(U);\ \sigma = (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i) \\ \bar{\bar{\tau}} \in \mathcal{O}'_X(U);\ \tau = (\bar{t}_j)_j \in \prod_j \mathcal{V}(U'_j) \end{cases}$$

Laat bovendien $(U^k)_k$ een open overdekking van U zijn, terwijl geldt:

$$\forall k.\quad \bar{\bar{\sigma}} \mid U^k = \bar{\bar{\tau}} \mid U^k.$$

Dan moeten we laten zien dat $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}}$. Er geldt:

$$\forall k.\quad (\bar{s}_i \mid U_i \cap U^k)_i \approx (\bar{t}_j \mid U_j' \cap U^k)_j.$$

Dat wil zeggen:

$$\forall k,i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U_j' \cap U^k \sim t_j \mid U_i \cap U_j' \cap U^k.$$

Dus kunnen we voor elke k,i,j een open overdekking $(W_\alpha^{kij})_\alpha$ vinden, zodat voor elke α geldt:

$$s_i \mid U_i \cap U_j' \cap U^k \cap W_\alpha^{ijk} = t_j \mid U_i \cap U_j' \cap U^k \cap W_\alpha^{ijk}$$

en, omdat $(U^k \cap W_\alpha^{ijk})_{\alpha,k}$ een open overdekking is van $U_i \cap U_j'$, volgt weer:

$$\forall i,j.\quad s_i \mid U_i \cap U_j' \sim t_j \mid U_i \cap U_j'$$

zodat

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}}.$$

Hiermee is de eerste schoofeigenschap bewezen.
<u>Ten tweede</u>: Stel nu dat $(U^k)_k$ een open overdekking is van U, terwijl we voor elke k bovendien open overdekkingen

$$(U_{i_k}^k)_{i_k}$$

hebben van U^k, met elementen $\bar{\bar{\sigma}}^k \in \mathcal{O}_X^{!}(U^k)$, gegeven door

$$\sigma^k = (\bar{s}_{i_k}^k)_{i_k} \in \prod_{i_k} \mathcal{V}(U_{i_k}^k).$$

Neem ook aan dat geldt:

$$\forall k,l.\quad \bar{\bar{\sigma}}^k \mid U^k \cap U^l = \bar{\bar{\sigma}}^l \mid U^k \cap U^l.$$

We moeten dan bewijzen dat er een $\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}^{!}_{X}(U)$ bestaat zodat

$$\forall k.\quad \bar{\bar{\sigma}} \mid U^k = \bar{\bar{\sigma}}^k.$$

We hebben:

$$\forall k,l.\quad \sigma^k \mid U^k \cap U^l \approx \sigma^l \mid U^k \cap U^l.$$

Dat wil zeggen:

$$\forall k,l.\quad (\bar{s}^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^l)_{i_k} \approx (\bar{s}^l_{i_l} \mid U^k \cap U^l_{i_l})_{i_l}.$$

Wat hetzelfde is als:

$$\forall k,l,i_k,i_l.\quad s^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^l \cap U^k \cap U^l_{i_l} \sim$$

$$\sim s^l_{i_l} \mid U^k_{i_k} \cap U^l \cap U^k \cap U^l_{i_l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Beschouw nu:

$$\sigma := (\bar{s}^k_{i_k})_{k,i_k} \in \prod_{k,i_k} \mathcal{V}(U^k_{i_k}).$$

Nu is $(U^k_{i_k})_{k,i_k}$ een open overdekking van U. Ook geldt:

$$\sigma \in \mathcal{W}(U).$$

Om dit in te zien, is het voldoende om op te merken dat geldt:

$$\forall k,k',i_k,i'_k.\quad s^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^{k'}_{i_{k'}} \sim s^{k'}_{i_{k'}} \mid U^k_{i_k} \cap U^{k'}_{i_{k'}}$$

(en dit volgt uit (*) door daar te substitueren: $k := k$, $i_k := i_k$, $l := k'$, $i_l := i_{k'}$).
Dus

$$\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}^{!}_{X}(U).$$

Ook geldt: $\bar{\bar{\sigma}} \mid U^l = \bar{\bar{\sigma}}^l$, want:

$$\sigma \mid U^l = (\bar{s}^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^l)_{k,i_k} \approx (s^l_{i_l})_{i_l}$$

omdat uit (*) volgt:

$$\forall k,i_k,i_l.\quad s^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^l \cap U^l_{i_l} = s^k_{i_k} \mid U^k_{i_k} \cap U^l_{i_l} \sim s^l_{i_l} \mid U^k_{i_k} \cap U^l_{i_l}$$

(nl, door in (*) te substitueren: $k := k$, $i_k := i_k$, $l := l$, $i_l := i_l$).
Hiermee is ook de tweede schoofeigenschap bewezen.

Opm: Er bestaat een kanoniek morphisme van preschoven:

$$(X,\mathcal{O}'_X) \xrightarrow{(id,\Phi)} (X,\mathcal{O}_X).$$

Bewijs: De constructie van Φ gaat als volgt: Zij U een open deelverzameling van X met $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Kies $\bar{s} \in \mathcal{V}(U)$ en, omdat (U) een open overdekking van U is, definieert $\bar{s}$ een element $\sigma = (\bar{s}) \in \mathcal{W}(U)$, dat weer een aequivalentieklasse $\bar{\bar{\sigma}}$ representeert. Het is eenvoudig na te gaan dat als we Φ definiëren met

$$\Phi(U)(s) := \bar{\bar{\sigma}}$$

(id,Φ) een morphisme van schoven is.

Opm: Φ, zoals hierboven gedefinieerd, induceert voor elke $x \in X$ een isomorphisme

$$\Phi(x):\ \mathcal{O}_X(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'_X(x)$$

tussen de staken van $\mathcal{O}_X$ en $\mathcal{O}'_X$ in x.

Bewijs: (i) $\Phi(x)$ is injectief.
Kies twee elementen s_x, s'_x in $\mathcal{O}_X(x)$, en laat

$$\Phi(x)(s_x) = \Phi(x)(s'_x).$$

We kunnen een open omgeving U van x vinden zodat s_x en s'_x geïnduceerd worden door elementen s, resp. s' van $\mathcal{O}_X(U)$.
Zij nu

$$\begin{cases} \Phi(U)(s) = \bar{\bar{\sigma}} \\ \Phi(U)(s') = \bar{\bar{\sigma}}'. \end{cases}$$

Dan is $\sigma = (\bar{s}) \in \mathcal{V}(U)$ en $\sigma' = (\bar{s}') \in \mathcal{V}(U)$. Wegens de commutativiteit van het diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(x) \arrow[r, "\Phi(x)"] & \mathcal{O}'_X(x) \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[u] \arrow[r, "\Phi(U)"] & \mathcal{O}'_X(U) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kunnen we opmerken, dat de door $\bar{\bar{\sigma}}$ en $\bar{\bar{\sigma}}'$ geïnduceerde elementen $\bar{\bar{\sigma}}_x$ en $\bar{\bar{\sigma}}'_x$ in $\mathcal{O}'_X(x)$ gelijk zijn aan resp. $\Phi(x)(s_x)$ en $\Phi(x)(s'_x)$, zodat $\bar{\bar{\sigma}}_x = \bar{\bar{\sigma}}'_x$. Dus bestaat er een open omgeving V van x met $V \subset U$ zodat $\bar{\bar{\sigma}}|V = \bar{\bar{\sigma}}'|V$. Dat wil zeggen::

$$\sigma \mid V \approx \sigma' \mid V.$$

Oftewel:

$$s \mid V \sim s' \mid V$$

zodat er een open overdekking $(W_\alpha)_\alpha$ van V bestaat zodat

$$\forall \alpha. \quad s \mid V \cap W_\alpha = s' \mid V \cap W_\alpha.$$

Kies nu α_0 zodat $x \in W_{\alpha_0}$. Dan volgt hieruit dat $s_x = s'_x$, zodat $\Phi(x)$ injectief is.

<u>Bewijs</u>: (ii) <u>$\Phi(x)$ is surjectief</u>.
Kies $\bar{\bar{\sigma}}_x \in \mathcal{O}'_X(x)$, en kies een open omgeving U van x zodat $\bar{\bar{\sigma}}_x$ geïnduceerd wordt door $\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}'_X(U)$. Laat σ een representant van $\bar{\bar{\sigma}}$ zijn in $\mathcal{W}(U)$, gegeven door

$$\sigma = (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{V}(U_i).$$

Omdat $(U_i)_i$ een open overdekking is van U is er een i_0 zodat $x \in U_{i_0}$.
Dan geldt:

$$\Phi(U_{i_0})(s_{i_0}) = \bar{\bar{\sigma}} \mid U_{i_0}$$

waaruit weer volgt:

$$\Phi(x)((s_{i_0})_x) = \bar{\bar{\sigma}}_x$$

als $(s_{i_0})_x$ het element in $\mathcal{O}_X(x)$ is, dat geïnduceerd wordt door s_{i_0}.

Opm: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschoof van abelse groepen, en laat $(X,\mathcal{O}_X^!)$ de schoof zijn, verkregen door verschoving van $\mathcal{O}_X$. Zij voorts $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een schoof van abelse groepen, en laat gegeven zijn een morphisme

$$(\psi,\Psi)\colon (Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X).$$

Dan bestaat er een unieke factorisatie van (ψ,Ψ), gegeven in het diagram

$$\begin{tikzcd} (Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[rr, "(\psi,\Psi)"] \arrow[dr, dashed, "(\psi,\Pi)"'] & & (X,\mathcal{O}_X) \\ & (X,\mathcal{O}_X^!) \arrow[ur, "(id,\Phi)"'] & \end{tikzcd}$$

waarin (id,Φ) het kanonieke morphisme is.

Bewijs: We zullen de constructie van Π geven: Zij U een open deelverzameling van X, en laat $\bar{\bar{\sigma}} \in \mathcal{O}_X^!(U)$ gegeven zijn door

$$\sigma = (\bar{s}_i)_i \in \prod_i \mathcal{U}(U_i).$$

Kies bij elke $\bar{s}_i$ een representant $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Beschouw

$$t_i := \Psi(U_i)(s_i) \in \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}U_i)$$

voor elke i. Nu is $(\psi^{-1}U_i)_i$ een open overdekking van $\psi^{-1}(U)$ en er geldt

$$t_i \mid \psi^{-1}U_i \cap \psi^{-1}U_j = \Psi(U_i \cap U_j)(s_i \mid U_i \cap U_j) =$$

$$= \Psi(U_i \cap U_j)(s_j \mid U_i \cap U_j) = t_j \mid \psi^{-1}U_i \cap \psi^{-1}U_j$$

(Ga na!), zodat het stelsel $(t_i)_i$ een element $t \in \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}U)$ induceert. Π wordt nu gedefinieerd door:

$$\Pi(U)(\bar{\bar{\sigma}}) := t.$$

Ga na dat deze definitie voldoet, en dat Π uniek bepaald is.

Opm: Ga na dat we $\mathcal{O}_X^!$ ook hadden kunnen definiëren door de universele eigenschap van de vorige opmerking. (Uiteraard verkrijgen we zo geen existentie bewijs).

Opm: Ga na dat het hiervoor beschreven proces van verschoving ook voor andere preschoven opgaat (bijv: preschoven van verzamelingen, ringen, etc.).

Het voorgaande samenvattend kunnen we formuleren:

Propositie 4.13: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschoof van abelse groepen (verzamelingen, ringen, etc.). Dan bestaat een éénduidig bepaalde schoof van abelse groepen (verzamelingen, ringen, etc.) $(X,\mathcal{O}_X^!)$ met een kanoniek morphisme

$$(\mathrm{id},\Phi) : (X,\mathcal{O}_X^!) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$$

zodat geldt:

(i) Φ induceert isomorfismen tussen alle staken $\mathcal{O}_X^!(x)$ en $\mathcal{O}_X(x)$

(ii) Als $(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$ een morphisme is van preschoven van abelse groepen (verzamelingen, ringen, etc.), en $(Y,\mathcal{O}_Y)$ is een schoof, dan bestaat er een unieke factorisatie

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{O}_X) & & (Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[ll] \arrow[dl, dashed] \\ & (X,\mathcal{O}_X^!) \arrow[ul, "{(\mathrm{id},\Phi)}"] & \end{tikzcd}$$

<u>Opgave 4.13a</u>: Als $(X,\mathcal{O}'_X) \xrightarrow[(\phi,\Phi)]{} (X,\mathcal{O}''_X)$ een morphisme is van schoven, zodat ϕ de identiteit is en Φ staaksgewijs een isomorfisme, dan is Φ zelf een isomorfisme van schoven. (vgl. prop. 3.26).

We zullen nu <u>tensorprodukten van $\mathcal{O}_X$-modulen</u> gaan invoeren:

Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zijn $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen.
Definieer:

$$(\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X)(U) := \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}_X(U)$$

voor elke open deelverzameling U van X.
Noteer verder:

$$\mathcal{M}_X(U) \circ \mathcal{N}_X(U)$$

voor de vrije abelse groep, voortgebracht door de elementen (m_α, n_α) uit $\mathcal{M}_X(U) \times \mathcal{N}_X(U)$. De algemene vorm van een element uit deze groep kunnen we aangeven met

$$\sum_\alpha^{<\infty} \varepsilon_\alpha(m_\alpha,n_\alpha); \quad \varepsilon_\alpha = \pm 1,\ m_\alpha \in \mathcal{M}_X(U),\ n_\alpha \in \mathcal{N}_X(U).$$

Zij P(U) de ondergroep van $\mathcal{M}_X(U) \circ \mathcal{N}_X(U)$, voortgebracht door de elementen van de gedaanten:

$$\begin{cases} \text{(i)} & (m,n_1+n_2) - (m,n_1) - (m,n_2) \\ \text{(ii)} & (m_1+m_2,n) - (m_1,n) - (m_2,n) \\ \text{(iii)} & (mr,n) - (m,rn) \end{cases}$$

(met $m,m_1,m_2 \in \mathcal{M}_X(U)$; $n,n_1,n_2 \in \mathcal{N}_X(U)$; $r \in \mathcal{O}_X(U)$).
Omdat $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ $\mathcal{O}_X$-modulen zijn, hebben we, als V een open deelverzameling van U is, het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & P(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}_X(U) \circ \mathcal{N}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}_X(U) \otimes \mathcal{N}_X(U) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \text{restr.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{restr.}} & & & \\ 0 \longrightarrow & P(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}_X(V) \circ \mathcal{N}_X(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}_X(V) \otimes \mathcal{N}_X(V) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

waarbij de restrictie-afbeeldingen worden gegeven door:

$$\sum_{\alpha}^{<\infty} \varepsilon_\alpha(m_\alpha, n_\alpha) \longmapsto \sum_{\alpha}^{<\infty} \varepsilon_\alpha(m_\alpha \mid V,\ n_\alpha \mid V).$$

Wegens de $\mathcal{O}_X$-moduul-struktuur van $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ gaat onder deze restrictie P(U) over in P(V). Hieruit volgt, dat we een morphisme van abelse groepen

$$\mathcal{M}_X(U) \otimes \mathcal{N}_X(U) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathcal{M}_X(V) \otimes \mathcal{N}_X(V)$$

hebben, dat voorgaand diagram commutatief afmaakt. Op deze wijze hebben we dus een preschoof

$$\mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-)$$

op X ingevoerd.

<u>Opm</u>: De staken van deze preschoof zijn van de vorm

$$\mathcal{M}_X(x) \otimes_{\mathcal{O}_X(x)} \mathcal{N}_X(x)$$

als x een punt is van X.

<u>Bewijs</u>: We dienen in te zien dat als x vast gekozen is,

$$\varinjlim_{x\in U} [\mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}_X(U)] = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\varinjlim_{x\in U} \mathcal{O}_X(U)} \varinjlim_{x\in U} \mathcal{N}_X(U)$$

In het algemeen kunnen we het volgende zeggen: Zijn

$$\begin{cases} \{M_\alpha,\ \phi^\alpha_\beta : M_\alpha \longrightarrow M_\beta,\ \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta\in I} \\ \{N_\alpha,\ \psi^\alpha_\beta : N_\alpha \longrightarrow N_\beta \quad \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta\in I} \end{cases}$$

twee injectieve systemen van abelse groepen over hetzelfde partieel geordende systeem I, terwijl I voldoet aan:

$$\forall \alpha,\beta \in I\ \exists \gamma \in I.\ \ \alpha \prec \gamma \ \text{ en } \ \beta \prec \gamma.$$

Zij voorts

$$\{R_\alpha,\ \pi^\alpha_\beta\colon R_\alpha \to R_\beta,\ \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta \in I}$$

een injectief systeem van ringen, eveneens over I. Laten verder voor elke $\alpha \in I$ zowel M_α als N_α R_α-modulen zijn, terwijl steeds als $\alpha \prec \beta$ de diagrammen

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha \times R_\alpha & \xrightarrow{\text{verm.}} & M_\alpha \\ \Big\downarrow \phi^\alpha_\beta \times \pi^\alpha_\beta & & \Big\downarrow \phi^\alpha_\beta \\ M_\beta \times R_\beta & \xrightarrow[\text{verm.}]{} & M_\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N_\alpha \times R_\alpha & \xrightarrow{\text{verm.}} & N_\alpha \\ \Big\downarrow \psi^\alpha_\beta \times \pi^\alpha_\beta & & \Big\downarrow \psi^\alpha_\beta \\ N_\beta \times R_\beta & \xrightarrow[\text{verm.}]{} & N_\beta \end{array}$$

commuteren. Beschouw verder:

$$V := \{M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha,\ \phi^\alpha_\beta \otimes \psi^\alpha_\beta,\ \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta \in I}$$

(met $(\phi^\alpha_\beta \otimes \psi^\alpha_\beta)(\sum m_i \otimes n_i) = \sum \phi^\alpha_\beta(m_i) \otimes \psi^\alpha_\beta(n_i)$).

Dan is V eveneens een injectief systeem van abelse groepen over I. Beschouw nu:

$$M := \varinjlim_I M_\alpha \quad ; \quad R := \varinjlim_I R_\alpha .$$

M heeft als volgt op natuurlijke wijze de struktuur van een R-moduul: Kies $m \in M$. Dan is er een $\alpha \in I$ zodat m het beeld is van een element $m_\alpha \in M_\alpha$ onder het kanonieke morphisme

$$\phi^\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow M.$$

Kies $r \in R$. Ook hierbij vinden we een $\beta \in I$ zodat $\pi^\beta(r_\beta) = r$ voor een zeker element $r_\beta \in R_\beta$, als π^β het kanonieke morphisme

$$\pi^\beta\colon R_\beta \longrightarrow R$$

is. Kies nu $\gamma \in I$ zodat $\alpha \prec \gamma$ en $\beta \prec \gamma$. Dan is, als $r_\gamma := \pi^\beta_\gamma(r_\beta)$ en $m_\gamma := \phi^\alpha_\gamma(m_\alpha)$,

$$\pi^\gamma(r_\gamma) = r \; ; \quad \phi^\gamma(m_\gamma) = m.$$

We kunnen dan definiëren:

$$\begin{cases} R \times M \longrightarrow M \\ (r,m) \longmapsto \phi^\gamma(r_\gamma . m_\gamma). \end{cases}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat M zo een R-moduul is. Evenzo is N een R-moduul. We hebben derhalve een tensorprodukt

$$M \otimes_R N.$$

Er geldt:

$$M \otimes_R N = \varinjlim_I M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha$$

want, ten eerste kunnen we beschouwen de morphismen

$$M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha \xrightarrow{\theta^\alpha} M \otimes_R N$$

gedefinieerd met

$$\theta^\alpha\Big(\sum_i^{<\infty} m_i \otimes n_i\Big) := \phi^\alpha(m_i) \otimes \psi^\alpha(n_i)$$

(waarbij $\phi^\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow M$ en $\psi^\alpha\colon N_\alpha \longrightarrow N$ de kanonieke morphismen zijn). De diagrammen

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha \arrow[d, "\phi^\alpha_\beta \times \psi^\alpha_\beta"'] \arrow[dr, "\theta^\alpha"] & \\ M_\beta \otimes_{R_\beta} N_\beta \arrow[r, "\theta^\beta"'] & M \otimes_R N \end{tikzcd}$$

commuteren.

Ten tweede, beschouw een abelse groep T tezamen met morphismen

$$\tau^\alpha\colon M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha \longrightarrow T$$

die zò gekozen zijn dat de diagrammen

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha \arrow[d, "\phi^\alpha_\beta \otimes \psi^\alpha_\beta"'] \arrow[dr, "\tau^\alpha"] & \\ & T \\ M_\beta \otimes_{R_\beta} N_\beta \arrow[ur, "\tau^\beta"'] & \end{tikzcd}$$

commuteren. Ga na, dat er dan één morphisme

$$\tau: M \otimes_R N \longrightarrow T$$

te vinden is, waarover alle τ^α's factoriseren. Dus:

$$M \otimes_R N = \varinjlim_{I} M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha.$$

In ons geval vinden we dus voor elke x ∈ X:

$$\varinjlim_{x \in U} [\mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}_X(U)] = \mathcal{M}_X(x) \otimes_{\mathcal{O}_X(x)} \mathcal{N}_X(x)$$

waarmee de staken van de preschoof $\mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-)$ zijn bepaald.

Opm: In het algemeen geldt niet dat $\mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-)$ een schoof is.

Tegenvoorbeeld: Zij X een verzameling, bestaande uit drie punten: a, b en c. Definieer op X de volgende open verzamelingen:

$$A := \{a,b\} \ ; \ B := \{c,b\} \ ; \ C := \{b\} \ ; \ X \ ; \ \emptyset.$$

Zo wordt X een topologische ruimte. Op X definiëren we nu drie schoven:

$$\begin{cases} \mathcal{O}: \text{ een schoof van ringen} \\ \mathcal{M}, \mathcal{N}: \text{ twee } \mathcal{O}\text{-modulen} \end{cases}$$

als volgt:

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\emptyset) := 0 \; ; & \mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(B) = \mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{Z} \\ \mathcal{M}(\emptyset) := 0 \; ; & \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(X) = \mathbb{Z} \; ; \; \mathcal{M}(B) = 0 \\ \mathcal{N}(\emptyset) := 0 \; ; & \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(X) = \mathbb{Z} \; ; \; \mathcal{N}(A) = 0. \end{cases}$$

Alle restricties zijn kanoniek. *) Ook zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ op kanonieke manier $\mathcal{O}$-modulen. We vinden:

$$\mathcal{M}(\emptyset) \otimes_{\mathcal{O}(\emptyset)} \mathcal{N}(\emptyset) = 0 \quad ; \quad \mathcal{M}(A) \otimes_{\mathcal{O}(A)} \mathcal{N}(A) = 0$$

$$\mathcal{M}(B) \otimes_{\mathcal{O}(B)} \mathcal{N}(B) = 0 \quad ; \quad \mathcal{M}(C) \otimes_{\mathcal{O}(C)} \mathcal{N}(C) = \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{N}(X) = \mathbb{Z}.$$

Deze preschoof is echter geen schoof: Kies

$$0 \neq s \in \mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{N}(X)$$

We hebben de open overdekking $X = A \cup B$.
Omdat

$$\mathcal{M}(A) \otimes_{\mathcal{O}(A)} \mathcal{N}(A) = \mathcal{M}(B) \otimes_{\mathcal{O}(B)} \mathcal{N}(B) = 0$$

moet gelden:

$$s \mid A = 0 \quad ; \quad s \mid B = 0.$$

Waaruit met de 1e schoofeigenschap volgt: $s = 0$, tegenspraak.

---

*) Bijv. voor $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$ is de identiteit, alle andere restricties zijn de nulafbeeldingen.

<u>Definitie 4.14</u>: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is, en $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ zijn twee $\mathcal{O}_X$-modulen, dan heet de schoof, genoteerd met

$$(X, \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X)$$

die verkregen wordt door de preschoof

$$(X, \mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-))$$

te verschoven, het <u>tensorprodukt van $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ (over $\mathcal{O}_X$)</u>.

<u>Opmerking 4.15</u>: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A en M,N zijn twee A-modulen, dan geldt:

$$\tilde{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}_X \simeq (\widetilde{M \otimes_A N})_X.$$

<u>Bew</u>: Ga na. (<u>Aanw</u>: Als S een multiplicatieve deelverzameling is van de ring A, dan geldt:

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \simeq S^{-1}(M \otimes_A N).)$$

<u>Opmerking 4.16</u>: <u>Als $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen zijn, dan is ook het tensorprodukt</u>

$$\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X$$

<u>een $\mathcal{O}_X$-moduul</u>.

<u>Bew</u>: Deze $\mathcal{O}_X$-moduul struktuur verkrijgen we als volgt: Beschouw voor elke open deelverzameling U van X het morphisme:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}_X(U) \xrightarrow{v(U)} \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}_X(U) \\ (r, \sum_i^{<\infty} s_i \otimes t_i) \longmapsto \sum_i^{<\infty} s_i \otimes rt_i \end{cases}$$

Deze morphismen geven het morphisme van preschoven:

$$[X, \mathcal{O}_X(-) \times \mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-)] \xleftarrow{(id,v(-))} [X, \mathcal{M}_X(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}_X(-)].$$

Nu kan in het algemeen het volgende worden opgemerkt: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(X,\mathcal{P}_X)$ twee preschoven zijn met een morphisme

$$(X,\mathcal{O}_X) \xleftarrow{(id,\Phi)} (X,\mathcal{P}_X)$$

en als $(X,\mathcal{O}'_X)$ en $(X,\mathcal{P}'_X)$ verkregen zijn, door $\mathcal{O}_X$ resp. $\mathcal{P}_X$ te verschoven, dan kunnen we (id,Φ) samenstellen met het kanonieke morphisme tussen $(X,\mathcal{P}_X)$ en $(X,\mathcal{P}'_X)$, zodat we de situatie hebben:

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{O}_X) & \xleftarrow{(id,\Phi)} & (X,\mathcal{P}_X) \\ & & \Big\uparrow \text{kan.} \\ & & (X,\mathcal{P}'_X) \end{array}$$

Volgens prop. 4.13 kunnen we dit door compositie verkregen morphisme tussen $(X,\mathcal{P}'_X)$ en $(X,\mathcal{O}_X)$ uniek factoriseren door $(X,\mathcal{O}'_X)$:

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{O}_X) & \xleftarrow{(id,\Phi)} & (X,\mathcal{P}_X) \\ \Big\uparrow \text{kan.} & & \Big\uparrow \text{kan.} \\ (X,\mathcal{O}'_X) & \leftarrow\text{-}\text{-}\text{-}\text{-}\text{-}\text{-}\text{-} & (X,\mathcal{P}'_X) \end{array}$$

Het is direkt duidelijk dat het bovengenoemde morphisme (id,v(-)) op deze wijze een morphisme

$$[X,\mathcal{O}_X(-) \times (\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X)(-)] \longleftarrow [(\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X)(-)]$$

definieert, dat de $\mathcal{O}_X$-moduul-struktuur op

$$\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_X$$

induceert.

Opmerking: We hebben, als $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is, volgens voorgaande opmerking de tensorprodukten

$$\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X) \text{ en } (\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X.$$

Door beide schoven in de staken te vergelijken ziet men, dat ze isomorf zijn. We kunnen dus schrijven:

$$\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X.$$

In het algemeen noteren we:

$$\overset{n}{\otimes}\, \mathcal{M}_X := \underbrace{\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X}_{n \text{ keer.}}$$

Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zijn $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen. Beschouw een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$(X,\mathcal{M}_X) \xrightarrow[(id,\Phi)]{} (X,\mathcal{N}_X).$$

Voor elke tweetal open deelverzamelingen U en V van X met $V \subset U$ hebben we dan een diagram van abelse groepen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \Phi(U) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\text{restr.}"] & \mathcal{N}_X(U) \arrow[r, "\Phi(U)"] \arrow[d, "\text{restr.}"] & \mathcal{M}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "\text{restr.}"] & \mathrm{Cok}\ \Phi(U) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\text{restr.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \Phi(V) \arrow[r] & \mathcal{N}_X(U) \arrow[r, "\Phi(V)"] & \mathcal{M}_X(V) \arrow[r] & \mathrm{Cok}\ \Phi(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zodat we twee preschoven van abelse groepen hebben:

$$(X,\mathrm{Ker}\ \Phi(-)) \quad \text{en} \quad (X,\mathrm{Cok}\ \Phi(-)).$$

(i) <u>$(X,\mathrm{Ker}\ \Phi(-))$ is een schoof.</u>

Bew: Zij $(U_i)_i$ een open overdekking van U. Laat voor elke i een

$s_i \in \text{Ker } \Phi(U_i)$ gegeven zijn, zodat voor elke i,j geldt:

$$s_i \mid \text{Ker } \Phi(U_i \cap U_j) = s_j \mid \text{Ker } \Phi(U_i \cap U_j).$$

Omdat $\text{Ker } \Phi(U_i) \subset \mathcal{N}_X(U_i)$ en $\text{Ker } \Phi(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{N}_X(U_i \cap U_j)$, volgt, daar $\mathcal{N}_X$ een schoof is, dat er een $s \in \mathcal{N}_X(U)$ bestaat, zodat $s \mid U_i = s_i, \forall i$. Voorts geldt voor elke i:

$$\Phi(U_i)(s|U_i) = 0.$$

Dus,

$$\Phi(U)(s) \mid U_i = 0, \forall i.$$

Omdat $\mathcal{M}_X$ een schoof is, volgt dan:

$$\Phi(U)(s) = 0.$$

Dus $s \in \text{Ker } \Phi(U)$. (2e schoofeigenschap). De 1e schoofeigenschap volgt direkt uit het feit dat $\text{Ker } \Phi(U) \subset \mathcal{N}_X(U)$.

(ii) <u>In het algemeen geldt niet dat $(X, \text{Cok } \Phi(-))$ een schoof is.</u>

<u>Voorbeeld</u>: Kies $X := \mathbb{R}$, met de "gewone" topologie. Kier verder twee verschillende punten P en Q op $\mathbb{R}$. Definieer:

1) Als U een open samenhangende deelverzameling is van $\mathbb{R}$, evenals V, dan:

$$\mathcal{O}(U) := \mathbb{Z}.$$

Als $U = \cup U_i$ de disjuncte vereniging is van zijn componenten dan:

$$\mathcal{O}(U) = \prod_i \mathbb{Z}.$$

De restricties worden gegeven door:

$$\mathcal{O}(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} = \mathcal{O}(V).$$

(Als $U = \emptyset$, dan $\mathcal{O}(U) := 0$). $\mathcal{O}(-)$ is zo een schoof van ringen op X.

2) $\mathcal{N}(-) := \mathcal{O}(-)$, opgevat als $\mathcal{O}$-moduul.

3) Definieer $\mathcal{M}(-)$ als volgt op X:

a) Als U een open, samenhangende verzameling is in $\mathbb{R}$ zodat $P \notin U$ en $Q \notin U$, dan $\mathcal{M}(U) := \mathbb{Z}$.

b) Als U een open, samenhangende verzameling is in $\mathbb{R}$ zodat $P \in U$ of $Q \in U$, dan $\mathcal{M}(U) := 0$.

c) Als U een willekeurige open deelverzameling is in $\mathbb{R}$ dan kunnen we U schrijven als een disjuncte vereniging van samenhangende open componenten:

$$U = \bigcup_i U_i .$$

Definieer dan: $\mathcal{M}(U) := \prod_i \mathcal{M}(U_i)$.

Ga na dat geldt:

(α) $\mathcal{M}(-)$ is een $\mathcal{O}(-)$-moduul.

(β) Voor elke open deelverzameling U van $\mathbb{R}$ geldt: $\mathcal{M}(U) \subset \mathcal{N}(U)$, en deze injecties geven een morphisme van schoven.

(Aanwijzing: Als $V \subset U$, en V en U zijn beide open en samenhangend, dan hebben we de volgende drie gevallen:

$$\begin{cases} P \notin U,\ Q \notin U \\ P \in V,\ Q \in V \\ P \notin V,\ Q \notin V \quad \text{en} \quad P \in U \quad \text{of} \quad Q \in U. \end{cases}$$

De restricties zijn successievelijk:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} = \mathcal{M}(V) \\ \mathcal{M}(U) = 0 \longrightarrow 0 = \mathcal{M}(V) \\ \mathcal{M}(U) = 0 \xrightarrow{\text{kan.}} \mathbb{Z} = \mathcal{M}(V). \end{cases}$$

Het is dan duidelijk hoe in het algemeen de restricties gedefinieerd worden.
De $\mathcal{O}$-moduul-struktuur verkrijgt men door te definiëren:

$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U).$$

Als U samenhangend is en P of $Q \in U$, dan wordt dit:

$$\mathbb{Z} \times 0 \xrightarrow{\text{kan.}} 0$$

etc., etc.
De tweede schoofeigenschap controleren we in het geval $U = (U_i)_i$ met U samenhangend, evenals alle U_i's. Bovendien nemen we aan dat P of $Q \in U$.
Zij $s_i \in \mathcal{M}(U_i)$ en laat

$$\forall i,j. \quad s_i \mid U_i \cap U_j = s_j \mid U_i \cap U_j.$$

Definieer:

$$\mathcal{V} := \bigcup_{\{i \mid s_i = 0\}} U_i \quad ; \quad \mathcal{W} := \bigcup_{\{i \mid s_i \neq 0\}} U_i.$$

Dan volgt direkt dat $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \emptyset$, $\mathcal{V} \cap U \neq \emptyset$, en we krijgen:

$$U = (\mathcal{V} \cap U) \cup (\mathcal{W} \cap U).$$

Dit is een disjuncte vereniging van twee open verzamelingen. Omdat U samenhangend is, moet $\mathcal{W} \cap U = \emptyset$. Dus: $\forall i.\ s_i = 0$, etc).

Nu geldt: De preschoof

$$\left(\mathcal{N}(U) / \mathcal{M}(U)\right)_U \text{ open in } \mathbb{R}$$

is geen schoof. (Ga na wat de restricties zijn). Want kies $U := \mathbb{R}$, $U_P := \mathbb{R} \setminus \{P\}$, $U_Q := \mathbb{R} \setminus \{Q\}$.
Dan geldt: $U = U_P \cup U_Q$, terwijl

$$\mathcal{N}(U_P) / \mathcal{M}(U_P) \simeq \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}.$$

Evenzo:

$$\mathcal{N}(U_Q)/\mathcal{M}(U_Q) \simeq \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$$

en

$$\mathcal{N}(U_P \cap U_Q)/\mathcal{M}(U_P \cap U_Q) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

terwijl

$$\mathcal{N}(\mathbb{R})/\mathcal{M}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}.$$

Kies nu $z_P \in \mathcal{N}(U_P)/\mathcal{M}(U_P)$, $z_Q \in \mathcal{N}(U_Q)/\mathcal{M}(U_Q)$ zò, dat $z_P \neq z_Q$. (Opgevat als elementen van $\mathbb{Z}$). Wegens $(*)$ geldt:

$$z_P \mid U_P \cap U_Q = 0 = z_Q \mid U_P \cap U_Q$$

zodat er een element $z \in \mathcal{N}(\mathbb{R})/\mathcal{M}(\mathbb{R})$ zou moeten bestaan zodat $z \mid U_P = z_P$ en $z \mid U_Q = z_Q$, wat zou betekenen dat $z_P = z_Q$ (als elementen van $\mathbb{Z}$), tegenspraak. Dus aan de tweede schoofeigenschap is niet voldaan.

Opmerking 4.17. (Notatie-afspraak)

We hebben tot hiertoe consequent notaties gebruikt van het type

$$(X, \mathcal{M}_X) \xrightarrow{(id, \Phi)} (X, \mathcal{N}_X) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Hierbij werkte het functoriële morphisme $\Phi(-)$ in omgekeerde richting:

$$\mathcal{M}_X(U) \xleftarrow{\Phi(U)} \mathcal{N}_X(U).$$

We zullen in het vervolg morphismen $(*)$, waarbij de topologische afbeelding de identiteit is, ook gaan noteren met:

$$\Phi : \mathcal{N}_X \longrightarrow \mathcal{M}_X.$$

Wel blijft afgesproken dat, indien we de schoven aangeven met paren $(X,\mathcal{M}_X)$ en $(X,\mathcal{N}_X)$, we de morphismen ook zullen noteren met paren (id,Φ) op de tot nog toe gebruikelijke manier.

<u>Definitie 4.18</u>: Als we een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\Phi: \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{N}_X$$

hebben, dan heet de schoof, verkregen door het verschoven van de preschoof

$$(X, \mathrm{Cok}\ \Phi(-))$$

de <u>cokern</u> van Φ.

We zullen nu de opmerkingen over de cokern van een morphisme van schoven generaliseren tot het geval van injectieve limieten.

<u>Propositie 4.19</u>: <u>Zij I een partiële geordende verzameling, en zij</u>

$$\{\mathcal{M}_\alpha;\ \Phi^\alpha_\beta : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_\beta;\ \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta \in I}$$

<u>een injectief systeem van $\mathcal{O}_X$-modulen. Dan is de familie</u>

$$\{\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha(U)\ |\ U \text{ open in } X\}$$

<u>een preschoof, waarvan de staak in een punt</u> $x \in X$ <u>de vorm heeft</u>

$$\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha(x).$$

(Voor het bewijs, zie de appendix).

<u>Opmerking 4.20</u>: De preschoof $\{\varinjlim \mathcal{M}_\alpha(U)\}_U$, zoals in propositie (4.19) gegeven, is in het algemeen geen schoof. (Cf. de opmerking over Cokernen. Een cokern is een injectieve limiet *)). De door verschoving van deze preschoof te verkrijgen schoof noteren we met

$$\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha.$$

---

*) Zie appendix.

Deze is de injectieve limiet van het stelsel $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ in de categorie der $\mathcal{O}_X$-modulen (Ga na). Volgens prop. (4.19) en prop. (4.13) zijn de staken van deze schoof gegeven door:

$$(\varinjlim_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha)(x) = \varinjlim_{\alpha\in I} (\mathcal{M}_\alpha(x)).$$

Gevolg 4.21: Als $\{\mathcal{M}_\alpha\}_\alpha$ een familie $\mathcal{O}_X$-modulen is, dan hebben we de som

$$\sum_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha.$$

(De som is een injectieve limiet *)). De staken van deze schoof zijn van de vorm

$$\sum_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha(x).$$

Notatie 4.22: Als we de som nemen van $|I|$ copiëen van een $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_X$, dan schrijven we voor deze som vaak

$$\mathcal{M}_X^{(I)}.$$

Notatie 4.23: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is, en $\mathcal{M}_X$ en $\mathcal{N}_X$ zijn twee $\mathcal{O}_X$-modulen, dan geven we de klasse van $\mathcal{O}_X$-moduul-morphismen van $\mathcal{M}_X$ naar $\mathcal{N}_X$ aan met:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_X,\mathcal{N}_X).$$

Opmerking 4.24: Als $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan is

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X) \simeq \mathcal{M}_X(X).$$

Deze (1-1)-correspondentie verkrijgt men als volgt:

(i) Zij 1_X het eenheids-element van $\mathcal{O}_X(X)$. Definieer dan:

---

*) Zie appendix.

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X) \longrightarrow \mathcal{M}_X(X) \\ \qquad\qquad \Phi \longmapsto \Phi(X)(1_X) \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

(ii) Zij nu $\sigma \in \mathcal{M}_X(X)$. Zij U een open deelverzameling van X. Definieer:

$$\begin{cases} \Phi_\sigma(U): \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{M}_X(U) \\ \qquad\qquad s \longmapsto s.(\sigma|U). \end{cases}$$

Het is eenvoudig te controleren dat $\Phi_\sigma(-)$ hiermee een element is van

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X).$$

Definieer:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X) \longleftarrow \mathcal{M}_X(X) \\ \qquad\qquad \Phi_\sigma(-) \longleftarrow\!\shortmid\ \sigma \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**).$$

Het isomorfisme tussen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X)$ en $\mathcal{M}_X(X)$ wordt door $(*)$ en $(**)$ gegeven. (Ga na).

<u>Opmerking 4.25</u>: Zij nu I een willekeurige index-verzameling, en zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte. Beschouw de som

$$\mathcal{O}_X^{(I)}.$$

Dan hebben we voor elke $i \in I$ een kanoniek morphisme

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{h_i(-)} \mathcal{O}_X^{(I)}$$

(waarbij $\mathcal{O}_X$ op de $i^{\underline{e}}$ component wordt gelegd). (Bedenk hierbij dat men $h_i(-)$ hier definieert als een afbeelding naar de preschoof

$$\sum_{i \in I} \mathcal{O}_X(U).$$

Men moet dan nog verschoven!). Er geldt dan:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)},\mathcal{M}_X) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}_X) \simeq \prod_{i\in I} \mathcal{M}_X(X).$$

Met andere woorden: Er is een (1-1)-correspondentie tussen de $\mathcal{O}_X$-moduul-morphismen

$$\mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{M}_X$$

en de families

$$\{s_i\}_{i\in I}$$

van elementen $s_i \in \mathcal{M}_X(X)$. Deze correspondentie wordt gegeven door:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)},\mathcal{M}_X) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{M}_X(X) \\ \qquad\qquad\qquad \Phi \longmapsto \{\Phi\circ h_i(X)(1_X)\}_{i\in I} \end{cases}$$

en, omgekeerd, als $\{s_i\}_{i\in I}$ een element is van

$$\prod_i \mathcal{M}_X(X),$$

dan wordt de hiermee corresponderende Φ gegeven door:

$$\Phi(U):\ \mathcal{O}_X^{(I)}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{M}_X(X)$$

welke geïnduceerd wordt door het morphisme van preschoven

$$\begin{cases} \Phi'(U):\ \sum_{i\in I} \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{M}_X(U) \\ \qquad\qquad \sum_{i\in I}^{<\infty} a_i \longmapsto \sum_{i\in I}^{<\infty} a_i.(s_i|U) \end{cases}$$

$(a_i \in \mathcal{O}_X(U))$.

<u>Terminologie 4.26</u>: Zij $(X,\mathcal{F}_X)$ een schoof (van verzamelingen, abelse groepen, ringen, o.i.d.)

(i) Een element

$$s \in \mathcal{F}_X(U)$$

heet een "<u>snede van $\mathcal{F}_X$ over U</u>".

(ii) Een element

$$s \in \mathcal{F}_X(X)$$

heet ook een "<u>globale snede van $\mathcal{F}_X$</u>".

Beschouw nu een geringde ruimte $(X,\mathcal{O}_X)$ en daarbij een $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_X$. Zij verder $\{s_i\}_{i\in I}$ een familie van globale sneden van $\mathcal{M}_X$; dan induceert deze familie een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\Phi\colon \mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{M}_X.$$

Als $x\in X$, dan hebben we het door Φ geïnduceerde staak-morphisme

$$\Phi(x)\colon \mathcal{O}_X^{(I)}(x) \longrightarrow \mathcal{M}_X(x).$$

<u>Definitie 4.27</u>: $\mathcal{M}_X$ heet <u>voortgebracht door de familie globale sneden $\{s_i\}_{i\in I}$</u> als voor elke $x\in X$ $\Phi(x)$ een surjectief morphisme is.

(Anders gezegd: Als voor elke $x\in X$ het $\mathcal{O}_X(x)$-moduul $\mathcal{M}_X(x)$ wordt voortgebracht door de familie

$$\{(s_i)_x\}_{i\in I}$$

waarbij $(s_i)_x$ het door s_i geïnduceerde element is van $\mathcal{M}_X(x)$.)

<u>Definitie 4.28</u>: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is, en $\mathcal{M}_X$ is een $\mathcal{O}_X$-moduul, dan heet $\mathcal{M}_X$ <u>voortgebracht door zijn globale</u>

sneden als $\mathcal{M}_X$ wordt voortgebracht door de familie

$$\{s \mid s \in \mathcal{M}_X(X)\}.$$

Opmerking 4.29: $\mathcal{M}_X$ is voortgebracht door zijn globale sneden als er een index-verzameling I bestaat, benevens een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\Phi: \mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{M}_X$$

waarbij Φ in de staken surjectief is.

Opmerking 4.30: Er bestaat een $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_X$, tezamen met een punt $x_0 \in X$, zodat, voor elke open omgeving U van x_0, $\mathcal{M}_X|U$ niet wordt voortgebracht door zijn globale sneden:

Voorbeeld:

Kies $X := \mathbb{R}$ (met de "gewone topologie") en $x_0 := 0$. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}$, en schrijf U als disjuncte vereniging van zijn componenten:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Definieer:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) := \prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i) \\ \mathcal{O}_X(U_i) := Z \end{cases}$$

We hebben zo een schoof van ringen $\mathcal{O}_X$. Definieer ook:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_X(U) := \prod_{i \in I} \mathcal{M}_X(U_i) \\ \mathcal{M}_X(U_i) := \begin{cases} 0 & \text{als } x_0 \in U_i \\ \mathbb{Z} & \text{als } x_0 \notin U_i. \end{cases} \end{cases}$$

We kunnen dan op kanonieke manier $\mathcal{M}_X$ tot een $\mathcal{O}_X$-moduul maken. (Ga na).

Beschouw nu

$$\mathcal{M}_X|U$$

waarbij U een samenhangende omgeving is van x_0. Dan is $\mathcal{M}_X(U) = 0$, dus is de enige globale snede van $\mathcal{M}_X|U$ het nulelement.
Echter, kies $x_1 \neq x_0$, $x_1 \in U$. Dan is $(\mathcal{M}_X|U)(x_1) = \mathbb{Z}$, en dus kan $(\mathcal{M}_X|U)(x_1)$ nooit worden voortgebracht door de elementen uit $(\mathcal{M}_X|U)(x_1)$, die geïnduceerd worden door globale sneden.

<u>Definitie 4.31</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul.
$\mathcal{M}_X$ heet <u>quasi-coherent</u> als er bij elk punt $x \in X$ een open omgeving U van x bestaat, en een exakte rij van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\mathcal{O}_X|U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0$$

(Opmerking hierbij: Een rij van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\mathcal{M}_X' \longrightarrow \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_X''$$

heet <u>exakt</u> (in $\mathcal{M}_X$) als voor elke $x \in X$ de rij van staken in x

$$\mathcal{M}_X'(x) \longrightarrow \mathcal{M}_X(x) \longrightarrow \mathcal{M}_X''(x)$$

welke door bovenstaande rij wordt geïnduceerd, eeen exakte rij is van $\mathcal{O}_X(x)$-modulen.
Merk op dat dit in definitie (4.31) samenvalt met het feit dat $\mathcal{M}_X|U$ de cokern is van het betreffende morphisme

$$\mathcal{O}_X|U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(J)}.$$

(Ga na, zie de constructie van de cokern).

Triviale voorbeelden:

(i) $\mathcal{O}_X$ is een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul.
(ii) Als $\mathcal{M}_X$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan ook elke som

$$\mathcal{M}_X^{(I)}.$$

Opmerking 4.32: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul.
Beschouw twee open deelverzamelingen U en V van X zodat $V\subset U$. Dan is $\mathcal{M}_X(U)$ een $\mathcal{O}_X(U)$-moduul, en wegens de restrictie

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

is $\mathcal{O}_X(V)$ een $\mathcal{O}_X(U)$-algebra. We hebben dan een $\mathcal{O}_X(V)$-moduul-morphisme

$$\begin{cases} \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_X(V) \\ \sum_i^{<\infty} m_i \otimes r_i \longmapsto \sum_i^{<\infty} r_i.(m_i|V) \end{cases}$$

(Ga na). Als verder $W\subset V\subset U$, dan commuteert bovendien het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_X(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{id} \otimes \text{restr.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{restr.}} \\ \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(W) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_X(W) \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(Ga na).

Stelling 4.33: (Mumford, [M], pag. 272, Th. 3)

Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Dan zijn de volgende vier uitspraken aequivalent:

(i) Voor elke affiene open deelverzameling U van X is

$$\mathcal{M}_X|U \simeq \tilde{M}$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U)$-moduul M.

(ii) Er bestaat een open affiene overdekking $(U_i)_i$ van X zodat voor elke i geldt:

$$\mathcal{M}_X|U_i \simeq \tilde{M}_i$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduul M_i.

(iii) $\mathcal{M}_X$ is quasi-coherent

(iv) Voor elk paar open affiene deelverzamelingen U en V van X met $V \subset U$ is het in opmerking (4.32) gedefinieerde morphisme van $\mathcal{O}_X(V)$-modulen

$$\mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{M}_X(V)$$

een isomorfie.

Bewijs:
Voordat we de stelling bewijzen, maken we eerst een viertal opmerkingen:

Opmerking I: Zij M een R-moduul. Dan bestaan er index-verzamelingen I en J zodat we een exakte rij

$$R^{(I)} \longrightarrow R^{(J)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kunnen construeren.

Bew. Opm. I: Zij $\{m_\alpha\}_{\alpha\in J}$ een stel voortbrengenden van M.
Dan hebben we een exakte rij

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^{(J)} \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

waarbij α de kanonieke surjectie is en K de kern van α.
Zij $\{n_\beta\}_{\beta\in I}$ een stel voortbrengenden van K. We hebben dan weer een kanonieke surjectie

$$R^{(I)} \longrightarrow K$$

en dus een samenstelling

$$R^{(I)} \longrightarrow K \longrightarrow R^{(J)}.$$

De rij

$$R^{(I)} \longrightarrow R^{(J)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

is dan exakt. (Vgl. de definitie van quasi-coherentie).

Opmerking II: Als M', M en M" drie R-modulen zijn, en als we een exakte rij

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

hebben, dan is, als $\mathrm{Spec}(R) = (X, \mathcal{O}_X)$, de door deze rij geïnduceerde rij van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\widetilde{M'} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \widetilde{M''}.$$

(Cf. Opm. 4.9) ook exakt.

Bew. Opm. II: Zij $x_{\underline{p}} \in X$. Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M'}(x) \arrow[r, "\tilde{\alpha}(x)"'] \arrow[d, equal] & \widetilde{M}(x) \arrow[r, "\tilde{\beta}(x)"'] \arrow[d, equal] & \widetilde{M''}(x) \arrow[d, equal] \\
M'_{\underline{p}} \arrow[r, "\alpha_{\underline{p}}"'] & M_{\underline{p}} \arrow[r, "\beta_{\underline{p}}"'] & M''_{\underline{p}}
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}(\alpha_{\underline{p}}) = \mathrm{Ker}(\beta_{\underline{p}})$, want

(a) $\quad \beta_{\underline{p}}\, \alpha_{\underline{p}}\, (\frac{m'}{s}) = \frac{\beta\alpha m'}{s} = \frac{0}{s} = 0 \quad$ en

(b) $\quad \beta_{\underline{p}}\, (\frac{m}{s}) = 0 \Longrightarrow [\exists t \notin \underline{p}.\ t\beta(m) = 0] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [\exists t \notin \underline{p}.\ \beta(tm) = 0] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [\exists t \notin p\ \exists\, m' \in M'.\ tm = \alpha(m')].$

Dus:

$$\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{\alpha(m')}{ts} = \alpha_{\underline{p}}(\frac{m'}{ts}).$$

Gevolg: <u>Opmerking III</u>: Zij ϕ: M $\longrightarrow$ N een morphisme van R-modulen, en zij Spec R = $(X, \mathcal{O}_X)$. Dit induceert een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\tilde{\phi}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}.$$

Er geldt:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{Cok}(\tilde{\phi}) = \widetilde{\mathrm{Cok}(\phi)} \\ \text{(ii)} & \mathrm{Ker}(\tilde{\phi}) = \widetilde{\mathrm{Ker}(\phi)}. \end{cases}$$

<u>Bew. Opm. III</u>: De rij

$$M \xrightarrow{\phi} N \longrightarrow \mathrm{Cok}\ \phi \longrightarrow 0$$

is exakt. Dus ook de rij van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\phi}} \tilde{N} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cok}(\phi)} \longrightarrow 0$$

is exakt. Dus $\mathrm{Cok}(\tilde{\phi}) = \widetilde{\mathrm{Cok}(\phi)}$. Analoog voor de kern.

<u>Opmerking IV</u>: Zijn M', M en M" drie R-modulen en zij Spec(R) = $(X, \mathcal{O}_X)$, terwijl

$$\widetilde{M'} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \widetilde{M''}$$

een exakte rij is van $\mathcal{O}_X$-modulen.
Dan is ook

$$M' \xrightarrow{\tilde{\alpha}(X)} M \xrightarrow{\tilde{\beta}(X)} M''$$

een exakte rij (van R-modulen).

<u>Bew. Opm. IV</u>: Merk allereerst op, dat $\tilde{\alpha}(X)$ op de wijze van Opm. 4.10

$\tilde{\alpha}$ induceert. (Dit ziet men als volgt: Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
M' & = & \widetilde{M'}(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}(X)} & \widetilde{M}(X) & = & M \\
\Big\downarrow \text{kan.} & & \Big\downarrow \rho'_x & & \Big\downarrow \rho_x & & \Big\downarrow \text{kan.} \\
M'_{\underline{p}} & = & \widetilde{M'}(x) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}(x)} & \widetilde{M}(x) & = & M_{\underline{p}}
\end{array}$$

(waarbij $x = x_{\underline{p}} \in X$). Dan geldt: Als

$$\frac{m'}{s} \in M'_{\underline{p}} = \widetilde{M'}(x)$$

dan:

$$\tilde{\alpha}(x)\left(\frac{m'}{s}\right) = \frac{1}{s} \cdot \tilde{\alpha}(x)\left(\frac{m'}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left[\tilde{\alpha}(x) \circ \rho'_x(m')\right] = \frac{1}{s} \cdot \left[\rho_x \circ \tilde{\alpha}(X)(m')\right] =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{\tilde{\alpha}(X)(m')}{1}\right] = \frac{\tilde{\alpha}(X)(m')}{s},$$

waaruit volgt dat het door $\tilde{\alpha}(X)$ geïnduceerde morphisme in de staken overééenstemt met $\tilde{\alpha}$, zodat beide morphismen gelijk zijn.)

(i) Im $\tilde{\alpha}(X) \subset$ Ker $\tilde{\beta}(X)$.

Want, kies $m' \in M'$, en definieer

$$\underline{i} := \{s \in R \mid s.\left[\tilde{\beta}(X).\tilde{\alpha}(X)(m')\right] = 0\}.$$

Dan is $\underline{i}$ een ideaal. Stel $\underline{i} \neq R$. Dan is er een maximaal ideaal $\underline{m} \subset R$, zodat $\underline{i} \subset \underline{m}$. Echter:

$$\widetilde{M'}(x_{\underline{m}}) \xrightarrow[\tilde{\alpha}(x_{\underline{m}})]{} \widetilde{M}(x_{\underline{m}}) \xrightarrow[\tilde{\beta}(x_{\underline{m}})]{} \widetilde{M''}(x_{\underline{m}})$$

is een exakte rij. Dus:

$$\tilde{\beta}(x_{\underline{m}}) \circ \tilde{\alpha}(x_{\underline{m}})\left(\frac{m'}{1}\right) = 0 \qquad (\text{in } R_{\underline{m}}).$$

D.w.z.:

$$\exists\, t \in R \setminus \underline{m}.\ t\tilde{\beta}(X)\circ\tilde{\alpha}(X)(m') = 0.$$

Dus $t \in \underline{i} \subset \underline{m}$, tegenspraak. Dus $\underline{i} = R$, zodat $1 \in \underline{i}$, waaruit volgt:

$$\tilde{\beta}(X)\circ\tilde{\alpha}(X)(m') = 0.$$

(ii) Ker $\tilde{\beta}(X) \subset$ Im $\tilde{\alpha}(X)$.

Want, kies $m \in$ Ker $\tilde{\beta}(X)$. Beschouw het ideaal

$$\underline{j} := \{t \in R \mid tm \in \tilde{\alpha}(X)(M')\}.$$

Zij $\underline{j} \neq R$. Dan is er een maximaal ideaal $\underline{i} \subset \underline{m}$. Kies $x_{\underline{m}} \in X$ en beschouw

$$M'_{\underline{m}} \xrightarrow[\tilde{\alpha}(x_{\underline{m}})]{} M_{\underline{m}} \xrightarrow[\tilde{\beta}(x_{\underline{m}})]{} M''_{\underline{m}}.$$

Dan is

$$\tilde{\beta}(x_{\underline{m}})\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{\tilde{\beta}(X)(m)}{1} = 0.$$

Dus:

$$\frac{m}{1} = \tilde{\alpha}(x_{\underline{m}})\left(\frac{m'}{s}\right) = \frac{\tilde{\alpha}(X)(m')}{s}$$

voor ieder element $\frac{m'}{s} \in M'_{\underline{m}}$. Dat wil zeggen:

$$\exists\, t \notin \underline{m}.\ t\left[sm - \tilde{\alpha}(X)(m')\right] = 0.$$

Dan:

$$tsm = \tilde{\alpha}(X)(tm').$$

Dus $ts \in \underline{j}$. Echter: $s \notin \underline{m}$, $t \notin \underline{m} \Longrightarrow st \notin \underline{m} \supset \underline{j}$, tegenspraak. Dus $\underline{j} = R$, zodat $m \in \tilde{\alpha}(X)(M')$.

<u>Bewijs van stelling 4.33</u>:

We bewijzen: (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iv).

Bew. (iv) $\Longrightarrow$ (iii): Kies $x \in X$, en daarbij een open affiene omgeving U van x. Noteer:

$$R := \mathcal{O}_X(U).$$

We kunnen dan een exakte rij van R-modulen

$$R^{(I)} \longrightarrow R^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}_X(U) \longrightarrow 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

vinden. (Cf. Opm. I). Nu is Spec (R) = $(U, \mathcal{O}_X|U)$, dus induceert de exakte rij (2) een exakte rij van $\mathcal{O}_X|U$-modulen.

$$\mathcal{O}_X|U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(J)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}_X(U)} \longrightarrow 0 \qquad \dots\dots\dots\dots(3)$$

(Cf. Opm. II). Ook hebben we een kanoniek isomorfisme van $\mathcal{O}_X|U$-modulen

$$\widetilde{\mathcal{M}_X(U)} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathcal{M}_X|U \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

(want: kies $D(a) \subset U$ (dus $a \in R$). Dan geldt:

$$\widetilde{\mathcal{M}_X(U)}(D(a)) = \mathcal{M}_X(U)_a = \mathcal{M}_X(U) \otimes_R R_a =$$

$$= \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(D(a)) \xrightarrow[(iv)]{\sim} \mathcal{M}_X(D(a)).$$

Omdat het diagram 4.32 (1) commuteert hebben we voor iedere $D(b) \subset D(a)$ commutatieve diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{M}_X(U)}(D(a)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{restr.}"] & \mathcal{M}_X(D(a)) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\
\widetilde{\mathcal{M}_X(U)}(D(b)) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{M}_X(D(b))
\end{tikzcd}$$

zodat - door overgang op projectieve limieten - voor elke open deelverzameling W van U geldt:

$$\widetilde{\mathcal{M}_X(U)}(W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X(W),$$

waaruit (4) volgt.)

Dus volgt uit (3) dat we een exakte rij

$$\mathcal{O}_X|U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0$$

hebben, waarmee (iii) bewezen is.

Bew. (iii) $\Longrightarrow$ (ii): We weten dat $\mathcal{M}_X$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul is. We kunnen dan voor X een open overdekking $(U_i)_i$ vinden, en daarbij exakte rijen

$$\mathcal{O}_X|U_i^{(I_i)} \xrightarrow[\Phi_i]{} \mathcal{O}_X|U_i^{(J_i)} \longrightarrow \mathcal{M}_X|U_i \longrightarrow 0.$$

Door eventueel deze overdekking op een geschikte manier te verfijnen kunnen we bovendien veronderstellen dat elke U_i ook affien is, zeg:

$$(U_i, \mathcal{O}_X|U_i) = \mathrm{Spec}(R_i).$$

Dan is weer:

$$\mathcal{O}_X|U_i^{(I_i)} = \widetilde{R_i^{(I_i)}} \quad ; \quad \mathcal{O}_X|U_i^{(J_i)} = \widetilde{R_i^{(J_i)}}$$

zoals door controle in de staken gemakkelijk is te verifiëren.
We hebben dus exakte rijen

$$\widetilde{R_i^{(I_i)}} \xrightarrow[\Phi_i]{} \widetilde{R_i^{(J_i)}} \longrightarrow \mathcal{M}_X|U_i \longrightarrow 0$$

en dus moet $\mathcal{M}_X|U_i$ - als cokern van Φ_i - van de vorm $\tilde{M}_i$ zijn voor een zeker $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduul M_i. (Cf. Opm. III). Hiermee is (ii) bewezen.

Bew. (ii) $\Longrightarrow$ (i): We hebben een open affiene overdekking $(U_i)_i$ van X, zodat voor elke i

$$\mathcal{M}_X|U_i \simeq \widetilde{M}_i$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduul M_i.

Als voor een open affiene deelverzameling U van X geldt dat

$$\mathcal{M}_X|U \simeq \widetilde{M}$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U)$-moduul M, en als U = Spec R, dan is voor elke $a \in R$

$$\mathcal{M}_X|D(a) \simeq \widetilde{M_a}$$

zoals eenvoudig is te controleren. Derhalve kunnen we uit (ii) concluderen dat er een basis $\{U_i\}_i$ voor de open topologie van X bestaat, zodat de U_i's affien zijn, terwijl

$$\mathcal{M}_X|U_i \simeq \widetilde{M_i}$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduul M_i. Zij nu U een open affiene deelverzameling van X, en noteer:

$$R := \mathcal{O}_X(U).$$

(Dus $(U, \mathcal{O}_X|U)$ = Spec R). Omdat U kompakt is kunnen we een eindige deeloverdekking $(U_i)_i$ van U vinden, bestaande uit elementen van bovengenoemde basis $\{U_i\}_i$.
Elk van deze U_i's kunnen we weer eindig overdekken met kleinere open affiene deelverzamelingen van het type

$$D(a) \subset U, \quad a \in R.$$

We hebben dan de situatie:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, R = U & U_i = \mathrm{Spec}\, R_i \arrow[l, hook'] \\ \mathrm{Spec}\, R_a = D(a) \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

(voor een zekere ring R_i). Dit induceert een diagram van commutatieve ringen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & R_i \arrow[dl, "f'"] \\ R_a & \end{tikzcd}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat, als a' = f(a),

$$D(a) = D(a').$$

Het ring-morphisme f induceert dan het indentieke morphisme

$$(D(a), \mathcal{O}_X|D(a)) \longleftarrow (D(a'), \mathcal{O}_X|D(a'))$$

en dus:

$$R_a = (R_i)_{a'} \ .$$

Beschouw nu het $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduul M_i. Wegens

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R_i \\ \| & & \| \\ \mathcal{O}_X(U) & & \mathcal{O}_X(U_i) \end{array}$$

kunnen we M_i ook opvatten als een R-moduul. Noteer hiervoor: M_i^0 in plaats van M_i. (De vermenigvuldiging wordt dan gegeven door:

$$r \in R,\ m \in M_i \quad ; \quad r.m := f(r).m \qquad)$$

Voorts geldt:

$$\begin{cases} \tilde{M}_i|D(a') \simeq \widetilde{(M_i)_{a'}} \\ \tilde{M}_i^0|D(a) \simeq \widetilde{(M_i^0)_a} \end{cases}$$

terwijl, omdat f de identificatie van $\mathcal{O}_X|D(a)$ en $\mathcal{O}_X|D(a')$ induceert,

$$(M_i^0)_a = (M_i)_{a'} \ .$$

Dus volgt:

$$\mathcal{M}_X|D(a) \simeq \widetilde{(M_i^0)_a}.$$

We hebben nu gevonden, dat we U kunnen overdekken met open deelverzamelingen $D(a_i)$, $a_i \in R$ zodat

$$\mathcal{M}_X|D(a_i) \simeq \tilde{N}_i$$

voor zekere R_{a_i}-modulen N_i.

Beschouw nu twee open deelverzamelingen U en V van X zodat $U \supset V$.

Beschouw hierbij de volgende exakte rij:

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \mathcal{M}_X(V) \longrightarrow \prod_i \mathcal{M}_X(V \cap D(a_i)) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{M}_X(V \cap D(a_i) \cap D(a_j)) \\ \qquad \sigma_V \longmapsto \{\sigma_V|D(a_i)\}_i \\ \qquad\qquad \{\sigma_i\}_i \longmapsto \{\sigma_i|D(a_i a_j) - \sigma_j|D(a_i a_j)\}_{i,j} \end{cases}$$

en definieer als volgt voor elke i en elk paar (i,j) schoven $\mathcal{M}_i^*$ en $\mathcal{M}_{i,j}^*$ op U:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_i^*(V) := \mathcal{M}_X(V \cap D(a_i)) \\ \mathcal{M}_{i,j}^*(V) := \mathcal{M}_X(V \cap D(a_i) \cap D(a_j)). \end{cases}$$

(Ga na dat zo inderdaad schoven verkregen worden). We hebben dan een exakte rij van schoven op U:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow \prod_i \mathcal{M}_i^* \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{M}_{i,j}^* \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Nu is $\prod_i \mathcal{M}_i^*$ van de vorm $\tilde{M}$ voor een zeker R-moduul M. (Want:

$$\mathcal{M}_i^*(V) = \mathcal{M}_X(V \cap D(a_i)) =$$

$$= (\mathcal{M}_X|D(a_i))(V \cap D(a_i)) = \tilde{N}_i(D(a_i) \cap V),$$

dus elke $\mathcal{M}_i^*$ is van de vorm $\tilde{N}_i$, waarbij N_i een zeker R_{a_i}-moduul is, etc.

Wegens het kanonieke morphisme

$$R \longrightarrow R_{a_i}$$

kunnen we N_i ook opvatten als een R-moduul. We schrijven dan N_i^0 in plaats van N_i. Dan is:

$$\mathcal{M}_i^* \simeq \widetilde{N_i^0}$$

als $\mathcal{O}_X|U$-moduul, en bij gevolg:

$$\prod_i \mathcal{M}_i^* \simeq \prod_i \widetilde{N_i^0}$$

zoals gemakkelijk is na te gaan.)
Analoog is $\mathcal{M}_{i,j}^*$ van de vorm $\widetilde{M}$ voor een zeker R-moduul M.
We kunnen voor (5) dus ook schrijven

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow \widetilde{M}_1 \longrightarrow \widetilde{M}_2.$$

Volgens opm. III is dan ook $\mathcal{M}_X|U$ van de vorm $\widetilde{M}$ voor een zeker R-moduul M, zodat (i) bewezen is.

<u>Bew. (i) $\Longrightarrow$ (iv)</u>: Kies twee open deelverzamelingen U en V van X, beide affien, zodat $V \subset U$. Zij U = Spec R, V = Spec S en laat

$$\mathcal{M}_X|U = \widetilde{M}$$

voor een zeker $\mathcal{O}_X(U)$-moduul M.
We hebben voor M een exakte rij

$$R^{(I)} \longrightarrow R^{(J)} \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad \text{.......................(6)}$$

(Cf. Opm. I). Deze rij induceert de exakte rij van $\mathcal{O}_X|U$-modulen

$$\mathcal{O}_X|U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0.$$

Passen we restrictie toe tot V, dan vinden we een exakte rij

$$\mathcal{O}_X|V^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|V^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}_X|V \longrightarrow 0.$$

Nu is $\mathcal{M}_X|V = \tilde{N}$ voor een zeker $\mathcal{O}_X(V)$-moduul N.
Dus:

$$\mathcal{O}_X|V^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|V^{(J)} \longrightarrow \tilde{N} \longrightarrow 0$$

oftewel:

$$\widetilde{S^{(I)}} \longrightarrow \widetilde{S^{(J)}} \longrightarrow \tilde{N} \longrightarrow 0.$$

Dit induceert volgens opm. IV de exakte rij van S-modulen

$$S^{(I)} \longrightarrow S^{(J)} \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Ook volgt uit (6):

$$R^{(I)} \otimes_R S \longrightarrow R^{(J)} \otimes_R S \longrightarrow M \otimes_R S \longrightarrow 0$$

is een exakte rij van S-modulen. Dus:

$$S^{(I)} \longrightarrow S^{(J)} \longrightarrow M \otimes_R S \longrightarrow 0$$

is exakt. Hieruit volgt dat $M \otimes_R S$ en N, als cokernen van eenzelfde morphisme

$$S^{(I)} \longrightarrow S^{(J)}$$

isomorf zijn:

$$N \simeq M \otimes_R S.$$

Dus:

$$\tilde{N}(V) \simeq \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V)$$

oftewel:

$$\mathcal{M}_X(V) \simeq \mathcal{M}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V)$$

waarmee (iv) bewezen is.

<u>Definitie 4.34</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul.

$\mathcal{M}_X$ heet <u>van eindig type</u> als voor elke $x \in X$ er een open omgeving U van x bestaat, zodat $\mathcal{M}_X|U$ voortgebracht wordt door een eindige familie globale sneden.

<u>Opmerking 4.35</u>: $\mathcal{M}_X$ is een $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type dan en slechts dan als er voor iedere $x \in X$ een open omgeving U van x bestaat en een exakt rijtje van de vorm

$$(\mathcal{O}_X|U)^n \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

<u>Bew</u>: We hebben een isomorfisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}\left[(\mathcal{O}_X|U)^n, \mathcal{M}_X|U\right] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_X(U)$$

Laat met het morphisme Φ in $(*)$ corresponderen het element

$$(s_i)_{i=1}^{n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_X(U).$$

Dat wil zeggen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{O}_X|U \xrightarrow{h_i} (\mathcal{O}_X|U)^n \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M}_X|U & \\ 1_U \longmapsto s_i & (i = 1,\ldots,n). \end{array}\right.$$

Kies $y \in U$, en kies $\sigma_y \in \mathcal{M}_X(y)$. We hebben dan een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\Phi(U)\circ h_i(U)"'] \arrow[d, "\rho_y^U"'] & \mathcal{M}_X(U) \arrow[d, "\rho_y^U"] \\
\mathcal{O}_X(y) \arrow[r, "\Phi(y)\circ h_i(y)"] & \mathcal{M}_X(y)
\end{tikzcd}$$

waarbij $\Phi(y)$ surjectief is. (Omdat $(*)$ exakt is).

Dus is er een element

$$(\sigma_i)_{i=1}^n \in \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_X(y)$$

zodat

$$\Phi(y)((\sigma_i)_i) = \sigma_y.$$

Dit wil zeggen:

$$\Phi(y)(\sum_{i=1}^n h_i(y)(\sigma_i)) = \sigma_y.$$

Hieruit volgt:

$$\sigma_y = \Phi(y)(\sum_{i=1}^n \sigma_i . [h_i(y)(1_y)]) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sigma_i . [\Phi(y) \circ h_i(y) \circ \rho_y^U(1_U)] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sigma_i . [\rho_y^U \circ \Phi(U) \circ h_i(U)(1_U)] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sigma_i . \rho_y^U(s_i) .$$

Met andere woorden: $\mathcal{M}_X(y)$ wordt voortgebracht door de familie

$$\{\rho_y^U(s_i)\}_{i=1}^n$$

waarbij $\{s_i\}_i$ een eindige familie globale sneden is van $\mathcal{M}_X|U$. Dus is, indien een exakt rijtje (*) bestaat, $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type.

Omgekeerd, zij nu gegeven dat $\mathcal{M}_X$ van eindig type is. Kies x en U zoals in de definitie en laat $\mathcal{M}_X|U$ voortgebracht zijn door de familie globale sneden

$$\{s_i\}_{i=1}^n$$

Met deze familie correspondeert weer een $\mathcal{O}_X|U$-moduul-morphisme

$$\Phi\colon (\mathcal{O}_X|U)^n \longrightarrow \mathcal{M}_X|U$$

gegeven door - als $V\subset U$, V open -

$$\Phi(V)((t_i)_i) := \sum_{i=1}^{n} t_i.\rho_V^U(s_i).$$

Nu is de rij

$$(\mathcal{O}_X|U)^n \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0$$

exakt als Φ in de staken surjectief is. Kies $y\in U$. $\mathcal{M}_X(y)$ wordt voortgebracht door de familie

$$\{\rho_y^U(s_i)\}_{i=1}^{n}$$

Dus, als $\sigma_y \in \mathcal{M}_X(y)$, hebben we een som

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^{n} r_i.[\rho_y^U(s_i)] \qquad (r_i \in \mathcal{O}_X(y)).$$

Dus:

$$\sigma_y = \Phi(y)((r_i)_i)$$

waarmee de surjectiviteit gevonden is.

<u>Opmerking 4.36</u>: (i) Elke quotient-schoof van een $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type is weer van eindig type.

(ii) Als $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is van eindig type, dan ook elke eindige som

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_X$$

en elk eindig tensorprodukt

$$\overset{n}{\otimes}\, \mathcal{M}_X$$

(Ga na).

<u>Opmerking 4.37</u>: <u>Zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type. Zij</u> $x \in X$, <u>en zij</u> U <u>een open omgeving van</u> x. <u>Als nu</u> $\{s_i\}_{i=1}^n$ <u>een familie van sneden van $\mathcal{M}_X$ is over</u> U, <u>zodat</u>

$$\{\rho_x^U(s_i)\}_{i=1}^n$$

$\mathcal{M}_X(x)$ <u>voortbrengt, dan bestaat er een open omgeving</u> V <u>van</u> x <u>met</u> $V \subset U$ <u>zodat voor elke</u> $y \in V$ <u>het stel</u>

$$\{\rho_y^U(s_i)\}_{i=1}^n$$

$\mathcal{M}_X(y)$ <u>voortbrengt</u>.

<u>Bew</u>: Kies een open omgeving W van x zodat we een eindig stel globale sneden $\{t_i\}_{i=1}^m$ van $\mathcal{M}_X|W$ hebben, zodat voor elke $y \in W$ $\mathcal{M}_X(y)$ wordt voortgebracht door het stel

$$\{\rho_y^V(t_i)\}_{i=1}^m$$

Ook wordt $\mathcal{M}_X(x)$ voortgebracht door het stelsel

$$\{\rho_x^U(s_i)\}_{i=1}^n$$

zodat geldt:

$$\rho_x^W(t_i) = \sum_{j=1}^n r_{ij} \circ \rho_x^U(s_j) \qquad (i = 1,\dots,m)$$

(Hierbij $r_{ij} \in \mathcal{O}_X(x)$ voor elke i en j). Omdat we eindig veel elementen r_{ij} hebben, kunnen we binnen $U \cap W$ een open omgeving V van x vinden, en elementen

$$r'_{ij} \in \mathcal{O}_X(V)$$

zodat

$$\rho_V^W(t_i) = \sum_{j=1}^n r'_{ij} \circ \rho_V^U(s_j) \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Kies nu $y \in V$. Dan wordt $\mathcal{M}_X(y)$ voortgebracht door

$$\{\rho_y^W(t_i)\}_{i=1}^m$$

dus door

$$\{\sum_{j=1}^n \rho_y^V(r'_{ij}) \cdot \rho_y^U(s_j)\}_{i=1}^m$$

dus door

$$\{\rho_y^U(s_j)\}_{j=1}^n$$

Opmerking 4.38: Zij X een kompakte ruimte met een schoof van ringen $\mathcal{O}_X$. Zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type. Als $\mathcal{M}_X$ wordt voortgebracht door zijn globale sneden, dan wordt $\mathcal{M}_X$ al voortgebracht door een eindige familie globale sneden.

Bew: Kies $x \in X$. Kies een open omgeving U van x en een eindig aantal globale sneden van $\mathcal{M}_X|U$, zeg

$$\{s_1, \ldots, s_m\}$$

zodat

$$\{\rho_x^U(s_i)\}_{i=1}^m$$

een stel voortbrengenden is voor $\mathcal{M}_X(x)$.
Ook wordt $\mathcal{M}_X(x)$ voortgebracht door een familie

$$\{\rho_x^U(t_j)\}_{j \in J}$$

waarbij $\{t_j\}_{j \in J}$ een stel globale sneden is van $\mathcal{M}_X$. We hebben dus sommen

$$\rho_x^U(s_i) = \sum_{j_i}^{<\infty} r_{ij_i} \cdot \rho_x^X(t_{j_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

met $r_{ij_i} \in \mathcal{O}_X(x)$. Hieruit volgt dat het eindige stelsel

$$\{\rho_x^X(t_{j_i})\}_{j_i,i}$$

$\mathcal{M}_X(x)$ voortbrengt. We hebben dus gevonden: Bij elk punt $x \in X$ bestaat een open omgeving U van x en een eindig stelsel

$$\{t|U\}$$

(waarbij de t's globale sneden zijn van $\mathcal{M}_X$) zodat $\mathcal{M}_X(x)$ door het stelsel

$$\{\rho_x^X(t)\}$$

wordt voortgebracht. We kunnen dan volgens de vorige opmerking een open omgeving V van x vinden zodat voor elke $y \in V$ geldt: $\mathcal{M}_X(y)$ wordt voortgebracht door het stelsel

$$\{\rho_y^X(t)\}.$$

Kies nu bij iedere $x \in X$ zo'n omgeving V. We krijgen dan een open overdekking van X, en we hebben een eindige deeloverdekking

$$(V_1,\ldots,V_k).$$

Voor elke $\alpha \in \{1,\ldots,k\}$ vinden we een eindig stelsel

$$\{\rho_V^X(t)\}^{(\alpha)}$$

zodat voor elke $y \in V_\alpha$ $\mathcal{M}_X(y)$ wordt voortgebracht door

$$\{\rho_y^X(t)\}^{(\alpha)}.$$

Kies nu voor elke α het stelsel $\{t\}^{(\alpha)}$. De vereniging van deze stelsels geeft dan een eindige familie globale sneden van $\mathcal{M}_X$ die $\mathcal{M}_X$ voortbrengt.

<u>Opgave</u>: Een $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_X$ van eindig type is niet noodzakelijk quasi-coherent. (Zie bijv. A. Grothendieck [G] Chap. 0 §5.2).

<u>Definitie 4.39</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul.

$\mathcal{M}_X$ heet <u>coherent</u> als geldt:

(i) $\mathcal{M}_X$ is van eindig type

(ii) Voor elke open deelverzameling U van X en door elk natuurlijk getal $n > 0$ en voor elk $\mathcal{O}_X|U$-moduul-morphisme

$$u:\ (\mathcal{O}_X|U)^n \longrightarrow \mathcal{M}_X|U$$

is de kern van u van eindig type.

<u>Opmerking</u>: <u>Merk op dat beide condities in bovenstaande definitie van locale aard zijn!</u>

<u>Definitie 4.40</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul.

$\mathcal{M}_X$ <u>heeft een eindige presentatie</u> als er voor elke $x \in X$ een open omgeving U bestaat, zodat $\mathcal{M}_X|U$ isomorf is met de cokern van een morphisme van $\mathcal{O}_X|U$-modulen

$$(\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^q$$

waarbij p en q positieve natuurlijke getallen zijn.

<u>Triviale opmerking</u>: Als $\mathcal{M}_X$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is met een eindige presentatie, dan is $\mathcal{M}_X$ quasi-coherent en van eindig type.

<u>Opmerking 4.41</u>: <u>Als $\mathcal{M}_X$ een coherent $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan heeft $\mathcal{M}_X$ een eindige presentatie</u>.

<u>Bew</u>: $\mathcal{M}_X$ is van eindig type. We kunnen dus bij elk punt $x \in X$ een open omgeving U van x vinden, alsmede een exakt rijtje van de vorm

$$(\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0.$$

Vul dit rijtje aan tot de exakte rij

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}_X|U \longrightarrow 0.$$

Dan is - omdat $\mathcal{M}_X$ coherent is - ook K van eindig type: We hebben een open omgeving V van x (met $V \subset U$) en een exakt rijtje

$$(\mathcal{O}_X|V)^q \longrightarrow K|V \longrightarrow 0.$$

Dan hebben we de samenstelling

$$(\mathcal{O}_X|V)^q \longrightarrow K|V \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p|V.$$

Nu is $(\mathcal{O}_X|U)^p|V = (\mathcal{O}_X|V)^p$, zodat we een exakte rij

$$(\mathcal{O}_X|V)^q \longrightarrow (\mathcal{O}_X|V)^p \longrightarrow \mathcal{M}_X|V \longrightarrow 0$$

vinden, waaruit volgt dat $\mathcal{M}_X$ een eindige presentatie heeft.

<u>Opmerking 4.42</u>: <u>Niet elk $\mathcal{O}_X$-moduul met eindige presentatie is coherent</u>.

<u>Voorbeeld</u>: Kies

$$R := \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] := \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots] \Big/ (X_1^2, X_1X_2, X_1X_3, \ldots);$$

Definieer: $(X, \mathcal{O}_X) :=$ Spec R. Kies $\mathcal{M}_X := \mathcal{O}_X$ (als $\mathcal{O}_X$-moduul). Dan heeft $\mathcal{M}_X$ uiteraard een eindige presentatie. Beschouw voorts het R-moduul-morphisme

$$\begin{cases} \mathbb{C}[x_1, \ldots] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[x_1, \ldots] \\ \qquad 1 \longrightarrow x_1 \end{cases}$$

Dan is $K := \operatorname{Ker} \phi = (x_1, x_2, \ldots)$, en we hebben een exakte rij

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\phi} R$$

Deze rij induceert de exakte rij

$$0 \longrightarrow \tilde{K} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\phi} \mathfrak{m}_X.$$

Nu is $\tilde{K} = \mathrm{Ker}\ \tilde{\phi}$ niet van eindig type, want stel wel:
Kies $x \in X$ en bij x een open omgeving U en een exakte rij

$$(\mathcal{O}_X|U)^n \longrightarrow \tilde{K}|U \longrightarrow 0.$$

Door eventueel U te verkleinen kunnen we aannemen dat er een $a \in R$ bestaat, zodat $U = D(a)$, zodat we een exakte rij hebben:

$$(\mathcal{O}_X|D(a))^n \longrightarrow \tilde{K}|D(a) \longrightarrow 0.$$

Dit induceert een exakte rij van R_a-modulen

$$R_a^{(n)} \longrightarrow K_a \longrightarrow 0$$

($a \neq x_1$, want x_1 is nilpotent, dus $D(x_1) = \emptyset$, tegenspraak) waaruit blijkt dat K_a een eindig voortgebracht R_a-moduul is. Neem aan dat het stelsel

$$\{\frac{f_1}{1}, \ldots, \frac{f_t}{1}\}$$

K_a voortbrengt. Er geldt: $f_i \in \mathrm{Ker}\ \Phi$, zodat de constante term der f_i's nul is. We kunnen derhalve een $N \in \mathbb{N}$ vinden, zodat

$$f_i \in (x_1, \ldots, x_N) \qquad (i = 1, \ldots, t).$$

Dan ook:

$$\frac{f_i}{1} \in (x_1, \ldots, x_N)_a \qquad (i = 1, \ldots, t).$$

Kies N zo groot dat a te schrijven is als een polynoom in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$. Dan volgt:

$$K_a = (x_1, \ldots, x_N)_a$$

oftewel:

$$(x_1,\dots)_a = (x_1,\dots,x_N)_a.$$

Kies M > N. Dan geldt:

$$\frac{x_M}{1} \in (x_1,\dots,x_N)_a.$$

Dat wil zeggen: We kunnen een polynoom $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ vinden en een $n \in \mathbb{N}$, zodat

$$a^n x_M - f(x_1,\dots,x_N) = 0.$$

Dus:

$$a(X_1,\dots,X_N)^n X_M - f(X_1,\dots,X_N) \in (X_1^2, X_1X_2,\dots).$$

Dus is $a(X_1,\dots,X_N) \in X_1.\mathbb{C}[X_1,\dots]$, zodat a - als element van R - nilpotent is, zodat $D(a) = \emptyset$; tegenspraak, omdat $x \in D(a)$.

<u>Opmerking 4.43</u>: <u>Elk sub-moduul van eindig type van een coherent $\mathcal{O}_X$-moduul is coherent.</u>

<u>Bewijs</u>: Zij $\mathcal{M}_X$ een coherent $\mathcal{O}_X$-moduul en zij $\mathcal{N}_X$ een sub-moduul van $\mathcal{M}_X$ van eindig type. Kies een open deelverzameling U van X, en zij n > 0. Beschouw een exakte rij

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^n \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{N}_X|U.$$

Dit induceert:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^n \xrightarrow[\Psi\Phi]{} \mathcal{M}_X|U$$

als Ψ de kanonieke injectie $\mathcal{N}_X|U \hookrightarrow \mathcal{M}_X|U$ is. Omdat $\mathcal{M}_X|U$ coherent is, is K van eindig type. Dus $\mathcal{N}_X$ is coherent.

<u>Propositie 4.44</u>: (Cf. J.-P. Serre [FAC] 13, Th.1)

<u>Zij</u> $(X,\mathcal{O}_X)$ <u>een geringde ruimte, en zijn</u> $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}''$

drie $\mathcal{O}_X$-modulen. Laat verder gegeven zijn een exakte rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow[\alpha]{} \mathcal{M} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0.$$

Als twee van deze drie $\mathcal{O}_X$-modulen coherent zijn, dan is de derde het ook.

Bewijs (i): Stel: $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}''$ zijn coherent.

Dan is $\mathcal{M}$ van eindig type, zodat er bij elke $x \in X$ een open omgeving U van x bestaat, en een exakt rijtje van de vorm

$$(\mathcal{O}_X|U)^p \xrightarrow[\gamma_U]{} \mathcal{M}|U \longrightarrow 0.$$

Als

$$\mathcal{M}|U \xrightarrow[\beta_U]{} \mathcal{M}''|U$$

het door β geïnduceerde morphisme is, kunnen we de exakte rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_U \xrightarrow[\lambda_U]{} (\mathcal{O}_X|U)^p \xrightarrow[\beta_U \circ \gamma_U]{} \mathcal{M}''|U$$

beschouwen. Omdat $\mathcal{M}''$ coherent is, is $\mathcal{N}_U$ van eindig type. (Als $\mathcal{O}_X|U$-moduul).

Beschouw nu het diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_U \arrow[r, "\lambda_U"'] & (\mathcal{O}_X|U)^p \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_U"] & \mathcal{M}''|U \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}'|U \arrow[r, "\alpha_U"'] & \mathcal{M}|U \arrow[r, "\beta_U"'] \arrow[d] & \mathcal{M}''|U \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Omdat $\mathcal{N}_U$ van eindig type is, is ook $\gamma_U \circ \lambda_U(\mathcal{N}_U)$ van eindig type $)^*$, en

- als sub-moduul van het coherente moduul $\mathcal{M}|U$ - volgens Opm. 4.43 dus coherent.
Ook is eenvoudig na te gaan dat

$$\mathcal{M}'|U \xrightarrow[\alpha_U]{\sim} \gamma_U \circ \lambda_U(\mathcal{N}_U)$$

zodat $\mathcal{M}'|U$ coherent is.
Omdat we dit voor elke $x \in X$ en elke geschikte omgeving U van x kunnen doen, en omdat coherentie een lokale eigenschap is, volgt hieruit dat $\mathcal{M}'$ coherent is.

)* Zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen bij een geringde ruimte $(X,\mathcal{O}_X)$ en zij

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \mathcal{N}$$

een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen. Dan definiëren we

$$\phi(\mathcal{M}) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\ \phi).$$

Bewijs (ii): Stel: $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}$ zijn coherent.

$\mathcal{M}$ is van eindig type, dus $\mathcal{M}''$ is van eindig type. We moeten dus nog bewijzen dat voor elke open deelverzameling U van X en elk exakt rijtje van de vorm

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}''|U$$

geldt, dat K een $\mathcal{O}_X|U$-moduul van eindig type is.
Beschouw nu een morphisme

$$\Phi: (\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}''|U.$$

Dit wordt bepaald door een stel elementen

$$s_1,\ldots,s_p \in \mathcal{M}''(U).$$

Kies $x \in U$. We hebben dan de elementen

$$\rho_x^U(s_1),\dots,\rho_x^U(s_p)\in\mathcal{M}''(x).$$

Wegens de exaktheid van de rij

$$0\longrightarrow\mathcal{M}'\longrightarrow\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}''\longrightarrow 0$$

kunnen we dan een open omgeving U' van x binnen U vinden, en elementen

$$s_1',\dots,s_p'\in\mathcal{M}(U')$$

zodat

$$\beta(x)\circ\rho_x^{U'}(s_i') = \rho_x^U(s_i) \qquad (i = 1,\dots,p)$$

Beschouw nu voor een willekeurige $i\in\{1,\dots p\}$ de elementen s_i en $\beta(U')(s_i')$. Dan geldt:

$$\rho_x^{U'}\circ\beta(U')(s_i') = \beta(x)\circ\rho_x^{U'}(s_i') = \rho_x^U(s_i)$$

zodat er een omgeving U" van x binnen U' bestaat, zodat

$$\rho(U')(s_i')|U'' = s_i|U''.$$

Omdat we slechts eindig veel indices i hebben geldt derhalve:
Er is een open omgeving V van x binnen U' zodat geldt:

$$\beta(V)\circ\rho_V^{U'}(s_i') = \rho_V^U(s_i) \qquad (i = 1,\dots,p)$$

Omdat $\mathcal{M}$ van eindig type is, kunnen we een omgeving W van x vinden met $W\subset V$, en een stel elementen

$$n_1,\dots,n_q\in\mathcal{M}'(W)$$

zodat voor elke $y\in W$ $\mathcal{M}'(y)$ voortgebracht wordt door het stelsel

$$\{\rho_y^W(n_1),\dots,\rho_y^W(n_q)\}.$$

(Cf. Opm. 4.37). Beschouw nu de exakte rij

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{M}''|U$$

Voor elke $y \in W$ geldt dan:

$$(f_1,\dots,f_p) \in K(y) \iff \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot [\rho_y^U(s_i)] = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot [\rho_y^V \circ \rho_V^U(s_i)] = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot [\rho_y^V \circ \beta(V) \circ \rho_V^{U'}(s_i')] = 0 \iff$$

$$\iff \beta(y)(\sum_{i=1}^{p} f_i \cdot \rho_y^{U'}(s_i')) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot \rho_y^{U'}(s_i') \in \mathrm{Im}(\alpha(y)) \iff$$

$$\iff \exists g_1,\dots,g_q \in \mathcal{O}_X(y). \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot \rho_y^{U'}(s_i') = \sum_{j=1}^{q} g_j \, \alpha(y)(\rho_y^W(n_j)) \;\dots\dots(*)$$

Nu bepaalt de familie

$$\{\rho_W^{U'}(s_1'),\dots,\rho_W^{U'}(s_p') \;;\; -\alpha(W)(n_1),\dots,-\alpha(W)(n_q)\}$$

een $\mathcal{O}_X|W$-moduul-morphisme

$$(\mathcal{O}_X|W)^{p+q} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M}|W.$$

Ook hebben we het kanonieke morphisme

$$(\mathcal{O}_X|W)^{p+q} \longrightarrow (\mathcal{O}_X|W)^p$$

en het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & K'|W & \xrightarrow{\lambda} & (\mathcal{O}_X|W)^{p+q} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M}|W \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_W} \\
0 \longrightarrow & K|W & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X|W)^p & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}'|W
\end{array}$$

(Ga na). De betrekking (*) zegt nu precies, dat

$$(f_1,\dots,f_p)\in K|W \iff \exists(g_1,\dots,g_q).\ (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)\in K'|W.$$

Dat wil zeggen:

$$(f_1,\dots,f_p)\in K|W \iff (f_1,\dots,f_p)\in \mathrm{Im}((\mathrm{kan})\circ\lambda).$$

Dus:

$$K|W = \mathrm{Im}((\mathrm{kan})\circ\lambda).$$

Nu is $\mathcal{M}$ coherent, dus $\lambda(K')$ is van eindig type, dus $\mathrm{Im}((\mathrm{kan})\circ\lambda)$ is van eindig type, dus $K|W$ is van eindig type.
Omdat we dit voor elke $x\in U$ kunnen doen, volgt dat K van eindig type is als $\mathcal{O}_X|U$-moduul.

Bewijs (iii): Stel: $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}''$ zijn coherent.

Kies $x\in X$, en een open omgeving U van x zodat $\mathcal{M}'|U$ en $\mathcal{M}''|U$ worden voortgebracht door families sneden $n_1,\dots,n_q\in\mathcal{M}'(U)$, resp. $(s_1,\dots,s_p)\in\mathcal{M}''(U)$. Door U eventueel te verkleinen kunnen we bovendien aannemen dat er sneden $s_1',\dots,s_p'\in\mathcal{M}(U)$ bestaan, zodat

$$\beta(U)(s_i') = s_i \qquad (i=1,\dots,p)$$

De familie

$$\{s_1',\dots,s_p'\ ;\ \alpha(U)(n_1),\dots,\alpha(U)(n_q)\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(*)$$

brengt dan $\mathcal{M}|U$ voort, zodat $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is van eindig type. (Kies nl. $y\in U$, $\sigma_y\in\mathcal{M}(y)$. Dan geldt:

$$\beta(y)(\sigma_y)\in\mathcal{M}''(y),$$

zeg:

$$\beta(y)(\sigma_y) = \sum_{i=1}^{p} f_i\cdot\rho_y^U(s_i)$$

($f_i\in\mathcal{O}_X(y)$; $i=1,\dots,p$). Beschouw nu

$$\tau_y := \sigma_y - \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot \rho_y^U(s_i') \in \mathcal{M}(y).$$

Dan is

$$\beta(y)(\tau_y) = 0,$$

dus $\tau_y \in \mathcal{M}'(y)$. Zeg:

$$\tau_y = \sum_{j=1}^{q} g_j \cdot \rho_y^U \circ \alpha(U)(n_j) \qquad (g_j \in \mathcal{O}_X(y);\ j = 1,\dots,q)$$

Dan:

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot \rho_y^U(s_i') + \sum_{j=1}^{q} g_j \cdot \rho_y^U(\alpha(U)(n_j))$$

waaruit volgt dat de familie (*) $\mathcal{M}|U$ voortbrengt.
We moeten nu nog bewijzen, dat voor elke open deelverzameling U van X, en voor elk exakt rijtje van de vorm

$$0 \longrightarrow K_U \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(r)} \xrightarrow[\Phi]{} \mathcal{M}|U \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (**)$$

K_U van eindig type is.
Beschouw nu dit rijtje (**). Dan wordt Φ gegeven door een eindig stel sneden

$$t_1,\dots,t_r \in \mathcal{M}(U).$$

Beschouw het exakte rijtje

$$0 \longrightarrow K_U' \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(r)} \xrightarrow[\beta_U \circ \Phi]{} \mathcal{M}'|U$$

(waarbij β_U door β is geïnduceerd) $\beta_U \circ \Phi$ wordt gegeven door: (als $y \in U$)
Als $(f_1,\dots,f_r) \in \mathcal{O}_X(y)^{(r)}$, dan

$$\beta_U(y) \circ \Phi(y)(f_1,\dots,f_r) = \beta_U(y)\left(\sum_{k=1}^{r} f_k \cdot \rho_y^U(t_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} f_k \cdot \rho_y^U(\beta_U(t_k))$$

Met andere woorden: $\beta_U \circ \Phi$ wordt bepaald door het stel

$$\beta_U(t_1),\ldots,\beta_U(t_r) \in \mathcal{M}''(U)$$

(zoals in Opm. (4.25)). De staak in y van K'_U wordt gegeven door de elementen

$$(f_1,\ldots,f_r) \in (\mathcal{O}_X(y))^r$$

waarvoor geldt:

$$\sum_{k=1}^{r} f_k \cdot \rho_y^U(\beta_U(t_k)) = 0.$$

Kies x vast. Omdat $\mathcal{M}''$ coherent is, is K'_U van eindig type. We kunnen dus een open omgeving V van x binnen U vinden, alsmede een eindige familie sneden boven V van $K'_U|V$, zeg

$$(f_1^1,\ldots,f_1^r),(f_2^1,\ldots,f_2^r),\ldots,(f_s^1,\ldots,f_s^r)$$

die $K'_U|V$ voortbrengen. Noteer:

$$u_j := \sum_{i=1}^{r} f_j^i \cdot \rho_V^U(t_i) \in \mathcal{M}(V).$$

Dan:

$$\beta(V)(u_j) = \sum_{i=1}^{r} f_j^i \cdot \rho_V^U \beta(U)(t_i) = 0.$$

(Omdat $(f_j^1,\ldots,f_j^r) \in K'_U(V)$). Dus, wegens de exaktheid van de rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

hebben we:

$$u_j \in \alpha(V)(\mathcal{M}'(V)),$$

zeg:

$$u_j = \alpha(V)(u_j') \qquad (u_j' \in \mathcal{M}'(V))$$

Beschouw het exakte rijtje

$$0 \longrightarrow K_V'' \longrightarrow (\mathcal{O}_X|V)^{(s)} \xrightarrow[\Psi]{} \mathcal{M}'|V$$

waarbij Ψ bepaald wordt door het stel

$$u_1', \ldots, u_s' \in \mathcal{M}'(V).$$

Omdat ook $\mathcal{M}'$ coherent is, kunnen we een omgeving W van x binnen V kiezen, benevens een eindig stel sneden van $K_V''(W)$, zeg

$$(g_1^1, \ldots, g_1^s), (g_2^1, \ldots, g_2^s), \ldots, (g_t^1, \ldots, g_t^s)$$

die $K_V''|W$ voortbrengen.
Beschouw nu de familie

$$\{\sum_{j=1}^{s} g_k^j . (f_j^i|W)\}_{\substack{i=1,\ldots,r \\ k=1,\ldots,t}}$$

(dit zijn sneden in $(\mathcal{O}_X|W)^{rt}$). Dan brengt deze familie $K_U|W$ voort....(~~***~~)
Want, zij $y \in W$, en zij $(f_1, \ldots, f_r) \in K_U(y)$. Dat wil zeggen:

$$\sum_{k=1}^{r} f_k . \rho_V^U(t_k) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dan volgt hieruit:

$$\beta_U(y)(\sum_{k=1}^{r} f_k . \rho_y^U(t_k)) = 0$$

oftewel:

$$\sum_{k=1}^{r} f_k . \rho_y^U(\beta_U(t_k)) = 0.$$

Hieruit volgt dat $(f_1, \ldots, f_r) \in K_U'(y)$ dus: Er is een stel $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{O}_X(y)$ zodat

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} g_j . \rho_y^V(f_j^i) \quad (i = 1, \ldots, r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Nu geldt (1), dus volgt:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} g_j.\rho_y^V(f_j^k).\rho_y^U(t_k) = 0.$$

Of, wegens

$$u_j = \sum_{k=1}^{r} f_j^k.\rho_V^U(t_k),$$

$$\sum_{j=1}^{s} g_j.\rho_y^V(u_j) = 0.$$

Dit betekent dat $(g_1,\dots,g_s)\in K_V''(y)$, zodat de g_j's te schrijven zijn als lineaire combinaties van de $\rho_y^W(g_k^j)$'s. Dus kunnen we volgens (2) elke f_i schrijven als lineaire combinatie van de produkten

$$\rho_y^V(f_j^i).\rho_y^W(g_k^j)$$

waaruit (~~***~~) volgt.
Uit (~~***~~) volgt direkt dat K_U van eindig type is. Dus is $\mathcal{M}$ coherent.

Gevolg 4.45: Elke eindige som van coherente $\mathcal{O}_X$-modulen is weer coherent. (Ga na).

Propositie 4.46: (Cf. J.-P. Serre, [FAC], 13, Th.2)

Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee coherente $\mathcal{O}_X$-modulen. Zij

$$\phi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme. Dan zijn Ker(ϕ), Cok(ϕ), Im(ϕ) ook coherent.

Bewijs: $\mathcal{M}$ is coherent, Im(ϕ) is van eindig type en omdat $\mathcal{N}$ ook coherent is, is Im(ϕ) coherent. We hebben een exakte rij

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\phi) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Im}(\phi) \longrightarrow 0$$

waarbij $\mathcal{M}$ en $\mathrm{Im}(\phi)$ coherent zijn. Dus is $\mathrm{Ker}(\phi)$ coherent. Ook is - wegens

$$\mathrm{Im}(\phi) \simeq \mathrm{CoIm}(\phi)$$

(Ga na) - de rij

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\phi) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Cok}(\phi) \longrightarrow 0$$

exakt, zodat ook $\mathrm{Cok}(\phi)$ coherent is.

Opmerking 4.47: Als $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee coherente deelschoven zijn van een coherente schoof $\mathcal{F}$ van modulen, dan zijn ook de schoven $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ (Ga na hoe men deze definieert) coherent.

Bew: $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ is een deelschoof van $\mathcal{F}$ van eindig type, dus coherent. Ook is de rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}\cap\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}} \longrightarrow 0$$

exakt en, wegens de exaktheid van de rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/_{\mathcal{N}} \longrightarrow 0$$

volgt dat $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ coherent is. Nu is $\mathcal{M}/_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}}$ van eindig type, en bovendien

$$\mathcal{M}/_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}} \subset \mathcal{F}/_{\mathcal{N}}$$

zodat ook $\mathcal{M}/_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}}$ coherent is, waaruit de coherentie van $\mathcal{N}\cap\mathcal{M}$ volgt.

Opmerking 4.48: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is, en $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ zijn coherente $\mathcal{O}_X$-modulen, dan is ook $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ coherent.

Bewijs: $\mathcal{M}$ is coherent, dus kunnen we voor elke $x\in X$ een open omgeving U van x vinden, alsmede een exakt rijtje

$$(\mathcal{O}_X|U)^q \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}|U \longrightarrow 0.$$

Nu geldt wegens de rechts-exaktheid van het tensor-produkt, dat we een exakt rijtje

$$\mathcal{O}_X|U^{(q)}\otimes_{\mathcal{O}_X|U}\mathcal{N}|U \longrightarrow \mathcal{O}_X|U^{(p)}\otimes_{\mathcal{O}_X|U}\mathcal{N}|U \longrightarrow (\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N})|U \longrightarrow 0$$

hebben. (Ga dit goed na!)
Nu is

$$\mathcal{O}_X|U^{(q)}\otimes_{\mathcal{O}_X|U}\mathcal{N}|U \simeq (\mathcal{N}|U)^{(q)}$$

zodat we een exakte rij

$$(\mathcal{N}|U)^q \longrightarrow (\mathcal{N}|U)^p \longrightarrow (\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})|U \longrightarrow 0$$

hebben. Nu is $\mathcal{N}|U$ coherent, dus $(\mathcal{N}|U)^q$ is coherent. Omdat we de coherentie lokaal kunnen controleren is hiermee ook $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ coherent, als cokern.

Propositie 4.49: Zij A een noetherse ring, en zij $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A. Zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Dan zijn de volgende uitspraken aequivalent.

(i) $\mathcal{M}$ is coherent.

(ii) $\mathcal{M}$ is quasi-coherent en van eindig type

(iii) Er is een A-moduul M van eindig type zodat $\mathcal{M} \simeq \tilde{M}$.

Bew(i) $\Longrightarrow$ (ii): Als $\mathcal{M}$ coherent is, dan is $\mathcal{M}$ per definitie van eindig type, en heeft een eindige presentatie. Met andere woorden: Voor elk punt $x \in X$ bestaat er een open omgeving U en een exakte rij

$$(\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^q \longrightarrow \mathcal{M}|U \longrightarrow 0$$

zodat $\mathcal{M}$ quasi-coherent is.

Bew(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Zij nu $\mathcal{M}$ van eindig type en quasi-coherent. Volgens St.4.33(i) bestaat er dan een A-moduul M zodat

$$\mathcal{M} \simeq \tilde{M}.$$

We moeten nog bewijzen dat M van eindig type is. $\mathcal{M}$ is van eindig type. Dus kunnen we bij elk punt $x \in X$ een open omgeving U vinden en een exakt rijtje van de vorm

$$(\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}|U \longrightarrow 0.$$

We kunnen, door eventueel te verfijnen, aannemen dat deze U's van de vorm D(a) zijn ($a \in A$). We hebben dan exakte rijtjes

$$(A_a)^{p(a)} \longrightarrow M_a \longrightarrow 0 \qquad \text{..........................}(*)$$

($p(a) \in \mathbb{N}$). Nu vormen deze D(a)'s een open overdekking van X, en we kunnen dus een eindige deeloverdekking kiezen:

$$D(a_1),\ldots,D(a_n).$$

Uit (*) volgt dan, dat voor elke $i \in \{1,\ldots,n\}$, M_{a_i} wordt voortgebracht door een eindig stel elementen, zeg:

$$\frac{f_1^{(i)}}{1},\ldots,\frac{f_{p_i}^{(i)}}{1} \in M_{a_i}.$$

Kies nu $m \in M$. Dan geldt:

$$\frac{m}{1} \in M_{a_i} \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Dus:

$$\frac{m}{1} = \frac{\alpha_1^{(i)} f_1^{(i)} + \ldots + \alpha_{p_i}^{(i)} f_{p_i}^{(i)}}{a_i^{N_i}} \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Wat zeggen wil:

$$\exists N \in \mathbb{N}.\quad a_i^N m = r_1^{(i)} f_1^{(i)} + \ldots + r_{p_i}^{(i)} f_{p_i}^{(i)}$$

voor zekere elementen $r_j^{(i)} \in A$. Omdat we eindig veel a_i's hebben, kunnen we N onafhankelijk van de keuze van i kiezen. Nu volgt uit

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)$$

dat het ideaal, voortgebracht door $a_1,\dots,a_n$ A zelf is, dus 1 bevat:

$$1 = r_1a_1 + \dots + r_na_n.$$

We vinden dan:

$$m = (r_1a_1 + \dots + r_na_n)^{N(n+1)}.m.$$

Als we deze som uitschrijven, vinden we bij elke term een zekere index i zodat $a_i^{N_i}$ factor is van die term. Met andere woorden: m is te schrijven als

$$m = \sum_{j=1}^{n} s_j(a_j^N m) \qquad (s_j \in A).$$

Dus: M wordt voortgebracht door het eindige stelsel

$$\{f_j^{(i)}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p_i}}.$$

Met andere woorden: M is van eindige type.

Bew: (iii) $\Longrightarrow$ (i): We hebben nu: $\mathcal{M} \simeq \tilde{M}$, waarbij M een A-moduul is van eindig type. We hebben dus een exakte rij

$$A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

en dus ook

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

zodat $\mathcal{M}$ zeker van eindig type is. Kies nu een open deelverzameling U van X. We moeten bewijzen dat voor elk exakt rijtje

$$0 \longrightarrow K_U \longrightarrow (\mathcal{O}_X|U)^p \longrightarrow \mathcal{M}|U \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(*)$$

K_U van eindig type is. Omdat dit locaal gecontroleerd kan worden mogen we veronderstellen dat $U = D(a)$, $a \in A$. Het exakte rijtje (*) wordt dan:

$$0 \longrightarrow K_U \longrightarrow \widetilde{(A_a)^p} \longrightarrow \tilde{M}_a$$

zodat $K_U \simeq \tilde{N}$ met $N = \mathrm{Ker}((A_a)^p \longrightarrow M_a)$.
Als we kunnen bewijzen dat voor elk exakt rijtje

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (A_a)^p \longrightarrow M_a$$

K van eindig type is (als A_a-moduul) zijn we klaar.
Welnu: A_a is noethers en van eindig type, dus is K - als deelmoduul van $(A_a)^p$ - ook van eindig type.

<u>Definitie 4.50</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte. Zij voorts $\mathcal{A}$ een schoof van ringen op X, zodat voldaan is aan de volgende twee eisen:

(i) Voor elke open deelverzameling U van X is er een ring-morphisme

$$\Phi(U) \colon \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{A}(U).$$

(ii) Voor elk paar open deelverzamelingen U en V van X met $V \subset U$ commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\Phi(U)"'] \arrow[d, "\text{restr.}"'] & \mathcal{A}(U) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "\Phi(V)"'] & \mathcal{A}(V)
\end{tikzcd}$$

Dan heet $\mathcal{A}$ een <u>$\mathcal{O}_X$-algebra</u>.

<u>Opmerking</u>: Een $\mathcal{O}_X$-algebra is dus niets anders dan een morphisme van geringde ruimten

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow[(id, \Phi)]{} (X, \mathcal{O}_X)$$

<u>Definitie 4.51</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte. Laat bovendien voor elke $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{O}_n$ een schoof van additieve subgroepen van $\mathcal{O}_X$ zijn, zodat geldt:

$$\mathcal{O}_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$$

terwijl bovendien voor iedere open deelverzameling $U\subset X$ geldt:

$$\mathcal{O}_n(U) \times \mathcal{O}_m(U) \xrightarrow{\text{verm.}} \mathcal{O}_{n+m}(U).$$

Dan heet $\mathcal{O}_X$ een <u>schoof van gegradeerde ringen</u>. (De kanonieke morphismen $\mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_X$ zijn de injecties $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_X$).

<u>Definitie 4.52</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte. Zij voorts $(X,\mathcal{A})$ een schoof van gegradeerde ringen met gradering

$$\mathcal{A} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n.$$

Laat verder op $\mathcal{A}$ een $\mathcal{O}_X$-algebra-struktuur gegeven zijn door een morphisme

$$\Phi\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}$$

zodat bovendien voor elke open deelverzameling U van X en elke $s\in\mathcal{O}_X(U)$ geldt:

$$\Phi(U)(s)\in\mathcal{A}_0(U).$$

Dan heet $\mathcal{A}$ een <u>gegradeerde $\mathcal{O}$-algebra</u>.

<u>Definitie 4.53</u>: Zij $(X,\mathcal{S})$ een schoof van gegradeerde ringen met gradering

$$\mathcal{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n.$$

Zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{S}$-moduul, terwijl bovendien (als som van schoven van abelse groepen)

$$\mathcal{M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n .$$

Als nu geldt voor elke open deelverzameling $U \subset X$ dat

$$\mathcal{S}_n(U) \times \mathcal{M}_m(U) \xrightarrow{\text{verm.}} \mathcal{M}_{m+n}(U)$$

($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$), dan heet $\mathcal{M}$ een <u>gegradeerd $\mathcal{S}$-moduul</u>.

<u>Opmerking 4.54</u>: <u>Elke $\mathcal{O}_X$-algebra $\mathcal{A}$ is op te vatten als een $\mathcal{O}_X$-moduul. Definieer namelijk voor elke open deelverzameling U van X</u>

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(U) \\ \qquad (r,a) \longrightarrow [\Phi(U)(r)].a \end{cases}$$

<u>als Φ de $\mathcal{O}_X$-algebra-struktuur is op $\mathcal{A}$.</u>

<u>Enkele opmerkingen</u>: Als $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_n$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra is, dan kunnen we niet alleen $\mathcal{A}$, maar ook elke homogene component $\mathcal{A}_n$ opvatten als een $\mathcal{O}_X$-moduul. Evenzo is, als $\mathcal{S}$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra is, en $\mathcal{M}$ een gegradeerd $\mathcal{S}$-moduul met gradering $\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}$, zowel als elke $\mathcal{M}_n$ op te vatten als een $\mathcal{O}_X$-moduul. Verder zij opgemerkt dat voor elke $x \in X$ $\mathcal{A}(x)$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X(x)$-algebra is.

<u>Opmerking 4.55</u>: <u>Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema. Zij voor elke $n \in \mathbb{Z}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}_n$ gegeven. Definieer:</u>

$$\mathcal{M} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n .$$

<u>Dan is $\mathcal{M}$ quasi-coherent dan en slechts dan als elke $\mathcal{M}_n$ quasi-coherent is.</u>

Bewijs: Kies $n_0 \in \mathbb{Z}$. Voor elke open deelverzameling U van X hebben we een morphisme

$$\alpha_{n_0}(U): \begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n(U) \longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n(U) \\ \sum\limits^{<\infty} s_n \longrightarrow s_{n_0} \end{cases}$$

en er geldt: $\operatorname{Im}(\alpha_{n_0}(U)) = \mathcal{M}_{n_0}(U)$. We vinden zo een morphisme van preschoven

$$\alpha_{n_0}(-): \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n(-) \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n(-)$$

en, door verschoving, een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\alpha_{n_0}: \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n.$$

Het is eenvoudig om in de staken te controleren dat

$$\operatorname{Im}(\alpha_{n_0}) = \mathcal{M}_{n_0}.$$

Neem nu aan dat $\mathcal{M}$ quasi-coherent is. Dan hebben we een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\alpha_{n_0}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

tussen twee quasi-coherente modulen met $\operatorname{Im}(\alpha_{n_0}) = \mathcal{M}_{n_0}$. Dan is ook $\mathcal{M}_{n_0}$ quasi-coherent. (Kies namelijk een open affiene deelverzameling U van X. Dan bestaat er volgens St. (4.33) een $\mathcal{O}_X(U)$-moduul M zodat

$$\mathcal{M}|U \simeq \tilde{M}.$$

Het door α_{n_0} geïnduceerde morphisme

$$\tilde{M} = \mathcal{M}|U \xrightarrow{\alpha'_{n_0}} \mathcal{M}|U = \tilde{M}$$

induceert dan een $\mathcal{O}_X(U)$-moduul-morphisme

$$f_{n_0} : M \longrightarrow M$$

en het is direkt na te gaan dat dan geldt:

$$\widetilde{\mathrm{Im}(f_{n_0})} = \mathrm{Im}(\alpha'_{n_0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{n_0})|U = \mathcal{M}_{n_0}|U$$

waarmee volgens St. (4.33) bewezen is dat $\mathcal{M}_{n_0}$ quasi-coherent is. Dat, als elke $\mathcal{M}_n$ quasi-coherent is, ook $\mathcal{M}$ quasi-coherent is, is triviaal.

<u>Gevolg (i)</u>: Als $\mathcal{A}$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra is met gradering $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_n$, dan is - als $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema is - $\mathcal{A}$ quasi-coherent dan en slechts dan als elke $\mathcal{A}_n$ quasi-coherent is.

<u>Gevolg (ii)</u>: Als $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema is, en $\mathcal{S}$ is een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra, terwijl $\mathcal{M}$ een gegradeerd $\mathcal{S}$-moduul is met gradering $\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_n$, dan is $\mathcal{M}$ als $\mathcal{O}_X$-moduul quasi-coherent dan en slechts dan als elke $\mathcal{M}_n$ als $\mathcal{O}_X$-moduul quasi-coherent is.

<u>Opmerking 4.56</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema en $\mathcal{S} = \sum \mathcal{S}_n$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra. Als $\mathcal{S}$ quasi-coherent is, en U is een open affiene deelverzameling van X, dan is $\mathcal{S}(U)$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X(U)$-algebra met gradering

$$\mathcal{S}(U) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n(U).$$

<u>Bew</u>: Ga na.

<u>Definitie 4.57</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zijn $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen met een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\Phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} .$$

$\mathcal{N}$ heet een sub-$\mathcal{O}_X$-moduul van $\mathcal{M}$ als voor elke $x \in X$ $\Phi(x)$ een inclusie is.

Zij nu $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{S}$ een $\mathcal{O}_X$-algebra. We kunnen $\mathcal{S}$ dan op een kanonieke manier opvatten als een $\mathcal{O}_X$-moduul. Zij $\mathcal{M}$ een sub-$\mathcal{O}_X$-moduul van $\mathcal{S}$. Als U een open deelverzameling is van X, dan is $\mathcal{M}(U)$ een sub-$\mathcal{O}_X(U)$-moduul van $\mathcal{S}(U)$. Zij nu $\mathcal{B}(U)$ de sub-algebra van $\mathcal{S}(U)$ die over $\mathcal{O}_X(U)$ wordt voortgebracht door $\mathcal{M}(U)$. (De elementen van $\mathcal{B}(U)$ zijn dus eindige sommen van termen van de vorm

$$\alpha m_1 \dots m_t \qquad (\alpha \in \mathcal{O}_X(U);\ m_i \in \mathcal{M}(U)).$$

De familie $\{\mathcal{B}(U) \mid U \text{ open in } X\}$ vormt een preschoof. Zij $\mathcal{B}'$ de door verschoving hieruit verkregen schoof. Ga na dat $\mathcal{B}'$ een $\mathcal{O}_X$-algebra is.

<u>Definitie 4.58</u>: <u>$\mathcal{B}'$ heet de door $\mathcal{M}$ voortgebrachte sub-$\mathcal{O}_Y$-algebra van $\mathcal{S}$</u>.

<u>Opmerking 4.59</u>: <u>Zij $\mathcal{S}$ een $\mathcal{O}_X$-algebra en zij $\mathcal{M}$ een sub-$\mathcal{O}_X$-moduul van $\mathcal{S}$. Laat voor elke $x \in X$ $\mathcal{S}(x)$ voortgebracht zijn over $\mathcal{O}_X(x)$ door $\mathcal{M}(x)$. Dan is $\mathcal{S}$ voortgebracht door $\mathcal{M}$.</u>

<u>Bew</u>: Beschouw de preschoof $\{\mathcal{S}'(U)\}$ waarbij $\mathcal{S}'(U)$ de sub-algebra is van $\mathcal{S}(U)$, voortgebracht door $\mathcal{M}(U)$. Kies $x \in X$ en beschouw $\mathcal{S}'(x) \subset \mathcal{S}(x)$. Kies $\sigma_x \in \mathcal{S}(x)$. Zeg:

$$\sigma_x = \sum_i^{<\infty} a_i s_1^{(i)} \dots s_{n_i}^{(i)} \qquad (a_i \in \mathcal{O}_X(x),\ s_j^{(i)} \in \mathcal{M}(x)).$$

Omdat de verzameling $\{a_i\}_i \cup \{s_j^{(i)}\}_{i,j}$ eindig is, kunnen we een open omgeving U van x vinden, alsmede elementen $a_i' \in \mathcal{O}_X(U)$, $t_j^{(i)} \in \mathcal{M}(U)$ die a_i resp. $s_j^{(i)}$ induceren. D.w.z.: σ_x wordt geïnduceerd door een element $\sigma_U \in \mathcal{S}'(U)$. Dus $\sigma_x \in \mathcal{S}'(x)$. Dus is $\mathcal{S}'(x) = \mathcal{S}(x)$, zodat - omdat $\mathcal{S}$ uit $\mathcal{S}'$ te verkrijgen is door verschoving - $\mathcal{S}$ door $\mathcal{M}$ is voortgebracht.

We gaan nu het direkte en het inverse beeld van schoven invoeren.

Zij $\psi: X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten, en zij $\mathcal{O}_X$ een schoof, gedefinieerd op X. We construeren bij $\mathcal{O}_X$ en ψ een schoof $\psi_*\mathcal{O}_X$, gedefinieerd op Y.

Zij V een open deelverzameling van Y. Dan is $\psi^{-1}V$ een open deelverzameling van X, zodat we kunnen definiëren:

$$\psi_*\mathcal{O}_X(V) := \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V).$$

Als V' ook open is in Y, terwijl $V' \subset V$, dan definiëren we de restricties als volgt:

$$\psi_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \xrightarrow[\text{restr.}]{} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V') = \psi_*\mathcal{O}_X(V').$$

Ga na dat $\psi_*\mathcal{O}_X$ zo een schoof is op Y.

<u>Definitie 4.60</u>: $\psi_*\mathcal{O}_X$ heet het <u>direkte beeld</u> van $\mathcal{O}_X$ bij ψ.

Beschouw nogmaals de continue afbeelding $\psi: X \longrightarrow Y$. Laten nu $\mathcal{O}_1$ en $\mathcal{O}_2$ twee schoven zijn, gedefinieerd op X, en zij $\Phi: \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_2$ een morphisme van de betreffende schoven. Als V een open deelverzameling is van Y, dan kunnen we definiëren:

$$\psi_*\Phi(V) := \left[\psi_*\mathcal{O}_1(V) = \mathcal{O}_1(\psi^{-1}V) \xrightarrow[\Phi(\psi^{-1}V)]{} \mathcal{O}_2(\psi^{-1}V) = \psi_*\mathcal{O}_2(V)\right].$$

Zo is een morphisme van schoven $\psi_*\Phi: \psi_*\mathcal{O}_1 \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_2$ verkregen. Met andere woorden:

<u>Opmerking 4.61</u>: <u>ψ_* is een covariante functor</u>.

<u>Opmerking 4.62</u>: <u>Als $\psi: X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding is en $\Phi: \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_2$ is een morphisme van op X gedefinieerde schoven, dan zijn er voor elke $x \in X$ kanonieke morphismen</u>

$$\bar{\theta}_i(x): \psi_*\mathcal{O}_i(\psi x) \longrightarrow \mathcal{O}_i(x) \qquad (i = 1,2)$$

<u>zodat het diagram</u>

$$\begin{array}{ccc}
\psi_* \mathcal{O}_1(\psi x) & \xrightarrow{\bar\theta_1(x)} & \mathcal{O}_1(x) \\
\downarrow {\scriptstyle \psi_*\Phi(\psi x)} & & \downarrow {\scriptstyle \Phi(x)} \\
\psi_* \mathcal{O}_2(\psi x) & \xrightarrow{\bar\theta_2(x)} & \mathcal{O}_2(x)
\end{array}$$

<u>commuteert</u>.

<u>Bewijs</u>:

$$\mathcal{V}_1 := \{\psi^{-1}V \mid V \text{ open in } Y \text{ en } x \in \psi^{-1}V\}$$

is een deelfamilie van

$$\mathcal{V}_2 := \{U \mid U \text{ open in } X \text{ en } x \in U\}$$

zodat we een kanoniek morphisme ($i = 1,2$) hebben:

$$\psi_* \mathcal{O}_i(\psi x) = \varinjlim_{\mathcal{V}_1} \psi_* \mathcal{O}_i(V) = \varinjlim_{\mathcal{V}_1} \mathcal{O}_i(\psi^{-1}V) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V}_2} \mathcal{O}_i(U) = \mathcal{O}_i(x)$$

Noem dit morphisme $\bar\theta_i(x)$. De commutativiteit van het diagram is triviaal.

<u>N.B.</u>: Als U een open deelverzameling is van Y en ψ: U $\longrightarrow$ Y is de kanonieke injectie, dan is voor elke $x \in U$ $\bar\theta(x)$ een isomorfisme.

<u>Opmerking 4.63</u>: <u>Als</u> $(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ <u>een morphisme van schoven is, dan is er een geïnduceerd morphisme</u>

$$\psi_*\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X$$

<u>terwijl voor elke</u> $x \in X$ <u>geldt</u>:

$$\bar\theta(x) \circ \Psi_*(\psi x) = \Psi(x).$$

<u>Bew</u>: Kies V open in Y en definieer:

$$\psi_*(V) := \left[\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow[\Psi(V)]{} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) = \psi_*\mathcal{O}_X(V)\right].$$

De tweede bewering is triviaal.

We definiëren nu het inverse beeld van een schoof.

Zij weer ψ: $X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten, en laat $\mathcal{O}_Y$ een op Y gedefinieerde schoof zijn. Kies een open deelverzameling U in X en noteer:

$$\mathcal{V}(U) := \{V \subset Y \mid V \text{ open en } U \subset \psi^{-1}V\}.$$

We hebben dan, met de restrictie afbeeldingen van $\mathcal{O}_Y$, een gericht systeem

$$\{\mathcal{O}_Y(V) \mid V \in \mathcal{V}(U)\}$$

en we kunnen definiëren:

$$\tilde{\psi}\,\mathcal{O}_Y(U) := \varinjlim_{V \in \mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_Y(V).$$

Als U' nog een open deelverzameling is van X en $U' \subset U$, dan is $\mathcal{V}(U) \subset \mathcal{V}(U')$, zodat we een kanoniek morphisme

$$\tilde{\psi}\,\mathcal{O}_Y(U) = \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V}(U')} \mathcal{O}_Y(V) = \tilde{\psi}\,\mathcal{O}_Y(U')$$

hebben. Op deze wijze hebben we restrictie-morphismen ingevoerd en is $\tilde{\psi}\,\mathcal{O}_Y$ een preschoof op X.

<u>Definitie 4.64</u>: De door verschoving van $\tilde{\psi}\mathcal{O}_Y$ te verkrijgen schoof $\psi^*\mathcal{O}_Y$ op X heet het <u>inverse beeld</u> van $\mathcal{O}_Y$ bij ψ.

Zij weer ψ: $X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding, en zij Φ: $\mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_2$ een morphisme van op Y gedefinieerde schoven. Als U een open deelverzameling is van X, dan hebben we een morphisme

$$\varinjlim_{V \in \mathcal{V}(U)} \Phi(V) \colon \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_1(V) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_2(V)$$

omdat Φ per definitie compatibel is met het nemen van restricties in $\mathcal{O}_1$ en $\mathcal{O}_2$. We hebben dus een door Φ geïnduceerd morphisme van preschoven, gegeven door

$$\tilde{\psi}\Phi(U) = \varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \Phi(U): \tilde{\psi}\mathcal{O}_1(U) \longrightarrow \tilde{\psi}\mathcal{O}_2(U).$$

(Dat $\tilde{\psi}\Phi(-)$ compatibel is met het nemen van restricties in $\tilde{\psi}\mathcal{O}_1$ resp. $\tilde{\psi}\mathcal{O}_2$, is direkt te verifiëren.) Verschoving geeft het morphisme van schoven

$$\psi^*\Phi: \psi^*\mathcal{O}_1 \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_2.$$

<u>Opmerking 4.65</u>: <u>ψ^* is een covariante functor.</u>

<u>Opmerking 4.66</u>: <u>Als $\psi: X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding is en $\Phi: \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_2$ is een morphisme van op Y gedefinieerde schoven, dan zijn er voor elke $x\in X$ kanonieke morphismen</u>

$$\theta_i(x): \psi^*\mathcal{O}_i(x) \longrightarrow \mathcal{O}_i(\psi x) \qquad (i = 1,2)$$

<u>zodat het diagram</u>

$$\begin{tikzcd}
\psi^*\mathcal{O}_1(x) \arrow[r, "\theta_1(x)"'] \arrow[d, "\psi^*\Phi(x)"'] & \mathcal{O}_1(\psi x) \arrow[d, "\Phi(\psi x)"] \\
\psi^*\mathcal{O}_2(x) \arrow[r, "\theta_2(x)"'] & \mathcal{O}_2(\psi x)
\end{tikzcd}$$

<u>commuteert. Bovendien zijn $\theta_1(x)$ en $\theta_2(x)$ bijectief.</u>

<u>Bewijs</u>: Er geldt:

$$\psi^*\mathcal{O}_i(x) = \tilde{\psi}\mathcal{O}_i(x) = \varinjlim_{\substack{x\in U\\ U \text{ open}}} \tilde{\psi}\mathcal{O}_i(U) = \varinjlim_{\substack{x\in U\\ U \text{ open}}} \varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_i(V).$$

Dus als $\sigma_x\in\psi^*\mathcal{O}_i(x)$, dan kunnen we een open omgeving U van x en een $V\in\mathcal{W}(U)$ vinden, alsmede een element $\tau_V\in\mathcal{O}_i(V)$ dat σ_x induceert. Ook geldt: $\psi x\in V$, zodat τ_V een element $\tau_{\psi x}\in\mathcal{O}_i(\psi x)$ induceert. Definieer:

$$\theta_i(x)(\sigma_x) := \tau_{\psi x}.$$

Omdat voor elke open omgeving V van ψx er een open omgeving U van x te vinden is zodat $V \in \mathcal{V}(U)$, is dit een bijectie. (Ga na). Uit de constructie van $\theta_i(x)$ volgt direkt de commutativiteit van het diagram.

Opmerking 4.67: Als U een open deelverzameling is van Y en ψ: U $\longrightarrow$ Y is de inbedding van U in Y, dan is

$$\psi^{*}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y|U.$$

Bew: Ga na.

Opmerking 4.68: Zij (ψ,Ψ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van schoven. Dan is er een geïnduceerd morphisme

$$\Psi^{*}\colon \psi^{*}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

terwijl voor elke $x \in X$ geldt:

$$\Psi^{*}(x) = \psi(x)\circ\theta(x).$$

Bewijs: Zij U een open deelverzameling van X. Omdat Ψ per definitie compatibel is met het nemen van restricties hebben we een morphisme

$$\varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \Psi(V)\colon \varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \qquad \dots\dots\dots(*)$$

Verder induceren (voor $V\in\mathcal{V}(U)$) de restricties

$$\mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

een uniek morphisme

$$\varinjlim_{V\in\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \qquad \dots\dots\dots\dots(**)$$

zodat (*) en (**) een preschoof-morphisme induceren, gegeven door

$$\tilde{\Psi}(U) := [\tilde{\psi}\mathcal{O}_Y(U) = \varinjlim \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)].$$

(Ga na dat $\tilde{\Psi}$ compatibel is met het nemen van restricties). Verschoving geeft dan een morphisme

$$\Psi^*(-): \psi^*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

De laatste bewering laat zich direkt verifiëren.

<u>Opmerking 4.69</u>: <u>Zij</u> ψ: X $\longrightarrow$ Y <u>een continue afbeelding en zijn</u> $\mathcal{O}_X$ <u>en</u> $\mathcal{O}_Y$ <u>schoven op</u> X <u>resp.</u> Y. <u>Dan bestaan er kanonieke morphismen van schoven</u>

$$\begin{cases} \rho_{\mathcal{O}_Y}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\psi^*\mathcal{O}_Y \\ \sigma_{\mathcal{O}_X}: \psi^*\psi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \end{cases}$$

<u>Bewijs(i)</u>: Zij V een open deelverzameling van Y. Dan is $\psi^{-1}V$ open in X, terwijl

$$V \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V).$$

We hebben derhalve een kanonieke afbeelding

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim_{W \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V)} \mathcal{O}_Y(W) = \tilde{\psi}\mathcal{O}_Y(\psi^{-1}V).$$

Ga na dat we zo een morphisme van preschoven

$$(X, \tilde{\psi}\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

verkregen hebben. Verschoving geeft een morphisme van schoven

$$(\psi, \Psi_{\mathcal{O}_Y}): (X, \psi^*\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Volgens opm. (4.63) is er dan een geïnduceerd morphisme

$$\rho_{\mathcal{O}_Y} := (\Psi_{\mathcal{O}_Y})_*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\psi^*\mathcal{O}_Y.$$

Bewijs(ii): De identiteit $\psi_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V)$ geeft een kanoniek morphisme

$$(\psi,\Psi_{\mathcal{O}_X}):\ (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\psi_*\mathcal{O}_X)$$

en we hebben volgens opm. (4.68) een geïnduceerd morphisme

$$\sigma_{\mathcal{O}_X} := (\Psi_{\mathcal{O}_X})^*:\ \psi^*\psi_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

waarmee de opmerking is bewezen.

Notatie 4.70: De verzameling morphismen van een op X gedefinieerde schoof $\mathcal{O}_1$ naar een eveneens op X gedefinieerde schoof $\mathcal{O}_2$, waarbij de onderliggende topologische afbeelding de identiteit op X is, noteren we met

$$\mathrm{Mor}_X(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2).$$

Lemma 4.71: Als ψ: X $\longrightarrow$ Y een continue afbeelding is en $\alpha\in\mathrm{Mor}_X(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$, $\beta\in\mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)$ dan commuteren de diagrammen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_1 & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{N}_1}} & \psi_*\psi^*\mathcal{N}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_*\psi^*\beta} \\ \mathcal{N}_2 & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{N}_2}} & \psi_*\psi^*\mathcal{N}_2 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \psi^*\psi_*\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{M}_1}} & \mathcal{M}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\psi^*\psi_*\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \psi^*\psi_*\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{M}_2}} & \mathcal{M}_2 \end{array}$$

Bew: We bewijzen de commutativiteit van het linkerdiagram: $\rho_{\mathcal{N}_1}$ wordt gegeven door: (V open in Y)

$$\mathcal{N}_1(V) \xrightarrow{\text{kan.}} \varinjlim_{W\in\vartheta(\psi^{-1}V)} \mathcal{N}_1(W) = \tilde{\psi}\mathcal{N}_1(\psi^{-1}V) \xrightarrow{\text{kan.}} \psi^*\mathcal{N}_1(\psi^{-1}V) = \psi_*\psi^*\mathcal{N}_1(V)$$

zoals direkt uit de definitie van $\rho_{\mathcal{N}_1}$ volgt. Nu commuteren de diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1(V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta(V)"] & \varinjlim_{\mathcal{V}(\psi^{-1}V)} \mathcal{N}_1(W) \arrow[r] \arrow[d, "\varinjlim \beta(V)"] & \psi^*\mathcal{N}_1(\psi^{-1}V) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi^*\beta(\psi^{-1}V)"] & \psi_*\psi^*\mathcal{N}_1(V) \arrow[d, "\psi_*\psi^*\beta(V)"] \\
\mathcal{N}_2(V) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathcal{V}(\psi^{-1}V)} \mathcal{N}_2(W) \arrow[r] & \psi^*\mathcal{N}_2(\psi^{-1}V) \arrow[r, equal] & \psi_*\psi^*\mathcal{N}_2(V)
\end{tikzcd}$$

zodat het linker diagram van het lemma commuteert. Op analoge manier verifieert men de commutativiteit van het rechter diagram.

<u>Lemma 4.72</u>: <u>Zij ψ: X $\longrightarrow$ Y een continue afbeelding, en zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee schoven, gedefinieerd op resp. X en Y. Dan geldt:</u>

(i) $[\psi^*\mathcal{N} \xrightarrow[\psi^*\rho_{\mathcal{N}}]{} \psi^*\psi_*\psi^*\mathcal{N} \xrightarrow[\sigma_{\psi^*\mathcal{N}}]{} \psi^*\mathcal{N}]$ = identiteit

(ii) $[\psi_*\mathcal{M} \xrightarrow[\rho_{\psi_*\mathcal{M}}]{} \psi_*\psi^*\psi_*\mathcal{M} \xrightarrow[\psi_*\sigma_{\mathcal{M}}]{} \psi_*\mathcal{M}]$ = identiteit

<u>Bewijs</u>: Omdat we (i) in de staken kunnen controleren en we de functor ψ_* ook voor preschoven kunnen definiëren, is het voldoende om na te gaan dat - met deze uitbreiding van de definitie van ψ_* - geldt:

$$[\tilde{\psi}\mathcal{N} \longrightarrow \tilde{\psi}\psi_*\tilde{\psi}\mathcal{N} \longrightarrow \tilde{\psi}\mathcal{N}] = \text{identiteit.}$$

Kies nu U open in X en $n_U \in \tilde{\psi}\mathcal{N}(U)$. Kies hierbij $V \in \mathcal{V}(U)$ en $n_V \in \mathcal{N}(V)$, zodat n_V n_U induceert. Omdat $V \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V)$ hebben we ook een element $n_{\psi^{-1}V} \in \tilde{\psi}\mathcal{N}(\psi^{-1}V)$, door n_V geïnduceerd, en er geldt:

$$n_{\psi^{-1}V}|U = n_U \ .$$

Voorts is $\tilde{\psi}\mathcal{N}(\psi^{-1}V) = \psi_*\tilde{\psi}\mathcal{N}(V)$, zodat we $n_{\psi^{-1}V}$ kunnen opvatten als element van $\psi_*\tilde{\psi}\mathcal{N}(V)$. We schrijven dan n'_V in plaats van $n_{\psi^{-1}V}$. Ook induceert n'_V op zijn beurt een element

$$n'_U \in \tilde{\psi}\psi_*\tilde{\psi}\mathcal{N}(U) \ .$$

Er geldt, zoals uit de definities direkt volgt:

$$\rho_{\mathcal{N}}(V)(n_V) = n'_V \text{ , dus } \tilde{\psi}\rho_{\mathcal{N}}(U)(n_U) = n'_U \text{ .}$$

Voorts is $\sigma_{\psi^*\mathcal{N}}(U)(n'_U) = n'_{\psi^{-1}V}|U$, zodat we vinden:

$$\sigma_{\tilde{\psi}\mathcal{N}}(U)\circ\psi\rho_{\mathcal{N}}(U)(n_U) = n_U$$

waarmee (i) bewezen is. Analoog bewijst men (ii).

<u>Propositie 4.73</u>: <u>Zij ψ: X $\longrightarrow$ Y een continue afbeelding, en zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee schoven, gedefinieerd op X resp. Y, dan bestaat er een functorieel (in $\mathcal{M}$ en in $\mathcal{N}$) isomorphisme</u>

$$\mathrm{Mor}_X(\psi^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \approx \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N},\psi_*\mathcal{M}).$$

<u>Bewijs</u>: Definieer:

$$\mathrm{Mor}_X(\psi^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \underset{d}{\overset{s}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N},\psi_*\mathcal{M})$$

$$\nu \longmapsto \psi_*(\nu)\circ\rho_{\mathcal{N}}$$

$$\sigma_{\mathcal{M}}\circ\psi^*(\mu) \longleftarrow\!\!\mid \mu$$

Dan geldt (met behulp van beide voorgaande lemma's:

$$d\circ s(\nu) = d(\psi_*(\nu)\circ\rho_{\mathcal{N}}) = \sigma_{\mathcal{M}}\circ\psi^*\psi_*(\nu)\circ\psi^*\rho_{\mathcal{N}} = \nu\circ\sigma_{\psi^*\mathcal{N}}\circ\psi^*\rho_{\mathcal{N}} = \nu$$

$$s\circ d(\mu) = s(\sigma_{\mathcal{M}}\circ\psi^*(\mu)) = \psi_*\sigma_{\mathcal{M}}\circ\psi_*\psi^*(\mu)\circ\rho_{\mathcal{N}} = \psi_*\sigma_{\mathcal{M}}\circ\rho_{\psi_*\mathcal{M}}\circ\mu = \mu$$

Zodat s en d een isomorfie geven. Zij nu $\alpha\in\mathrm{Mor}_X(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$ en $\beta\in\mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)$. Dan commuteert het diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_X(\psi^*\mathcal{N}_2,\mathcal{M}_1) & \xrightarrow[s]{\sim} & \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N}_2,\psi_*\mathcal{M}_1) \\
{\scriptstyle \mathrm{Mor}_X(\psi^*\beta,\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}_Y(\beta,\psi_*\alpha)} \\
\mathrm{Mor}_X(\psi^*\mathcal{N}_1,\mathcal{M}_2) & \xrightarrow[s]{\sim} & \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N}_1,\psi_*\mathcal{M}_2)
\end{array}$$

want, als $\nu \in \mathrm{Mor}_X(\psi^* \mathcal{N}_2, \mathcal{M}_1)$, dan geldt:

$$d \circ \mathrm{Mor}_X(\beta, \psi_*(\alpha)) \circ s(\nu) = d(\psi_*(\alpha \circ \nu) \circ \rho_{\mathcal{N}_2} \circ \beta) = (\alpha \circ \nu) \circ \sigma_{\psi^*\mathcal{N}_2} \circ \psi^*(\rho_{\mathcal{N}_2} \circ \beta) =$$

$$= \alpha \circ \nu \circ \psi^*(\beta) = \mathrm{Mor}_X(\psi^*\beta, \alpha) \; .$$

Opmerking 4.74: Er geldt:

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_X(\psi^*\psi_*\mathcal{M}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_Y(\psi_*\mathcal{M}, \psi_*\mathcal{M}) \\ \qquad \sigma_{\mathcal{M}} \longmapsto \text{identiteit} \end{cases}$$

en evenzo:

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_X(\psi^*\mathcal{N}, \psi^*\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N}, \psi_*\psi^*\mathcal{N}) \\ \qquad \text{identiteit} \longmapsto \rho_{\mathcal{N}} \end{cases}$$

Samenvattend kunnen we zeggen dat ψ^* en ψ_* geadjungeerde functoren zijn.

Zij nu $(\psi, \Psi): (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ een morphisme van geringde ruimtes, terwijl $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul en $\mathcal{N}$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul is. We kunnen $\psi_*\mathcal{M}$ als een $\psi_*\mathcal{O}_X$-moduul opvatten, door te definiëren:

$$\psi_*\mathcal{O}_X(V) \times \psi_*\mathcal{M}(V) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}V) \times \mathcal{M}(\psi^{-1}V) \xrightarrow[\text{verm.}]{} \mathcal{M}(\psi^{-1}V) = \psi_*\mathcal{M}(V)$$

voor elke open deelverzameling V van Y.
Verder induceert Ψ volgens opm. (4.63) een morphisme van schoven van ringen

$$\Psi_*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X$$

zodat we met de vermenigvuldiging

$$\begin{cases} \mathcal{O}_Y(V) \times \psi_*\mathcal{M}(V) \longrightarrow \psi_*\mathcal{M}(V) \\ \qquad (\alpha, m) \longmapsto \Psi_*(V)(\alpha).m \end{cases}$$

$\psi_* \mathcal{M}$ de struktuur van een $\mathcal{O}_Y$-moduul kunnen geven.

<u>Definitie 4.75</u>: $\psi_* \mathcal{M}$, opgevat als $\mathcal{O}_Y$-moduul noteren we met

$$[\psi]_* \mathcal{M}.$$

Kies voorts een open deelverzameling U in X. Omdat de moduul-vermenigvuldiging

$$\mathcal{O}_Y(V) \times \mathcal{N}(V) \longrightarrow \mathcal{N}(V)$$

per definitie compatibel is met het nemen van restricties, hebben we een morphisme

$$\tilde{\psi}\mathcal{O}_Y(U) \times \tilde{\psi}\mathcal{N}(U) = \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{O}_Y(V) \times \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{N}(V) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V}(U)} \mathcal{N}(V) = \tilde{\psi}\mathcal{N}(U).$$

Verschoving van dit morphisme geeft de vermenigvuldiging

$$\psi^*\mathcal{O}_Y(U) \times \psi^*\mathcal{N}(U) \longrightarrow \psi^*\mathcal{N}(U)$$

die $\psi^*\mathcal{N}$ tot een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul maakt.
Nu is er een door Ψ geïnduceerd morphisme van schoven van ringen

$$\Psi^*: \psi^*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

zodat $\mathcal{O}_X$ en $\psi^*\mathcal{O}_Y$-algebra is. We hebben derhalve een $\mathcal{O}_X$-moduul

$$\psi^*\mathcal{N} \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X .$$

<u>Definitie 4.76</u>:

$$[\psi]^*\mathcal{N} := \psi^*\mathcal{N} \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

Zij nu $\mathcal{M}'$ nog een $\mathcal{O}_X$-moduul en $\mathcal{N}'$ nog een $\mathcal{O}_Y$-moduul en stel

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \; ; \quad \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$$

α induceert het morphisme

$$\psi_*\alpha\colon \psi_*\mathcal{M} \longrightarrow \psi_*\mathcal{M}'$$

Het is direkt te verifiëren dat $\psi_*\alpha$ een morphisme van $\psi_*\mathcal{O}_X$-modulen is. Geven we $\psi_*\mathcal{M}$ en $\psi_*\mathcal{M}'$ weer de struktuur van $\mathcal{O}_Y$-modulen, dan is $\psi_*\alpha$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme, en we noteren in dat geval:

$$[\psi]_*\alpha\colon [\psi]_*\mathcal{M} \longrightarrow [\psi]_*\mathcal{M}' \ .$$

Zo is $[\psi]_*$ een covariante functor die aan $\mathcal{O}_X$-modulen $\mathcal{O}_Y$-modulen toevoegt.

Beschouw nu het morphisme

$$\psi^*\beta\colon \psi^*\mathcal{N} \longrightarrow \psi^*\mathcal{N}' \ .$$

Kies U open in X, en zij $\alpha \in \tilde{\psi}\mathcal{O}_Y(U)$ en $n \in \tilde{\psi}\mathcal{N}(U)$, en kies $V \in \mathcal{V}(U)$, zodat α en n worden geïnduceerd door elementen $\alpha' \in \mathcal{O}_Y(V)$ en $n' \in \mathcal{N}(V)$. Dan wordt het element $\alpha.n$ per definitie van de $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul-struktuur op $\psi^*\mathcal{N}$ geïnduceerd door $\alpha'n' \in \mathcal{N}(V)$, terwijl de elementen $\tilde{\psi}\beta(U)(n)$ en $\tilde{\psi}\beta(U)(\alpha.n)$ worden geïnduceerd door $\beta(V)(n')$ resp. $\beta(V)(\alpha'n') = \alpha'\beta(V)(n')$, zodat

$$\tilde{\psi}\beta(U)(\alpha.n) = \alpha.\tilde{\psi}\beta(U)(n) \ .$$

Hieruit volgt dat $\psi^*\beta$ een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme is. Definiëer nu:

$$[\psi]^*\beta := [[\psi]^*\mathcal{N} = \psi^*\mathcal{N} \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \xrightarrow[\psi^*\beta\times \mathrm{id.}]{} \psi^*\mathcal{N}' \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = [\psi]^*\mathcal{N}']$$

Hiermee is $[\psi]^*$ een covariante functor die $\mathcal{O}_Y$-modulen overvoert in $\mathcal{O}_X$-modulen.

<u>Opmerking 4.77</u>: <u>De functor $[\psi]^*$ is rechts-exakt en commuteert met inductieve limieten.</u>

Bew: Zij

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}' \xrightarrow[\alpha]{} \mathcal{N} \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{N}'' \longrightarrow 0$$

een exakte rij van $\mathcal{O}_Y$-modulen. Dan hebben we een commutatief diagram (Cf. opm. 4.66)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}'(\psi x) & \xrightarrow[\alpha(\psi x)]{} & \mathcal{N}(\psi x) & \xrightarrow[\beta(\psi x)]{} & \mathcal{N}''(\psi x) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
0 & \longrightarrow & \psi^*\mathcal{N}'(x) & \xrightarrow[\psi^*\alpha(x)]{} & \psi^*\mathcal{N}(x) & \xrightarrow[\psi^*\beta(x)]{} & \psi^*\mathcal{N}''(x) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

zodat ook de onderste rij exakt is. Dan is ook de rij

$$\psi^*\mathcal{N}'(x) \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(x)} \mathcal{O}_X(x) \longrightarrow \psi^*\mathcal{N}(x) \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(x)} \mathcal{O}_X(x) \longrightarrow \psi^*\mathcal{N}''(x) \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(x)} \mathcal{O}_X(x) \longrightarrow 0$$

exakt, waaruit volgt:

$$[\psi]^*\mathcal{N}' \xrightarrow[{[\psi]^*\alpha}]{} [\psi]^*\mathcal{N} \xrightarrow[{[\psi]^*\beta}]{} [\psi]^*\mathcal{N}'' \longrightarrow 0$$

is een exakte rij van $\mathcal{O}_X$-modulen. (Cf. constructie van de staken van tensorprodukten).

Laat nu

$$\{\mathcal{N}_\alpha;\ \phi^\alpha_\beta : \mathcal{N}_\alpha \longrightarrow \mathcal{N}_\beta;\ \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta \in I}$$

een injectief systeem van $\mathcal{O}_Y$-modulen zijn. Dan is

$$\{\psi^*\mathcal{N}_\alpha,\ \psi^*\phi^\alpha_\beta\}$$

een injectief systeem van $\psi^*\mathcal{O}_Y$-modulen, evenals

$$\{[\psi]^*\mathcal{N}_\alpha,\ [\psi]^*\phi^\alpha_\beta\}$$

er één is van $\mathcal{O}_X$-modulen. Voor elke $\alpha \in I$ is er een kanoniek morphisme

$$\phi^\alpha : \mathcal{N}_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{N}_\alpha$$

dat een morphisme

$$\psi^*\phi^\alpha :\ \psi^*\mathcal{N}_\alpha \longrightarrow \psi^* \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha$$

induceert. Deze morphismen bepalen uniek een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme

$$\varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha \longrightarrow \psi^* \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha .$$

Voor elke $x\in X$ is dit morphisme in de betreffende staak bijectief wegens:

$$(\varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha)(x) = \varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha(x) \simeq \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha(\psi x) = (\varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha)\psi x = (\psi^* \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha)(x)$$

(cf. (4.19) en (4.66)), zodat

$$\varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha = \psi^* \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha \text{ ....(i)}$$

Ook hebben we voor elke $\alpha\in I$ een kanoniek morphisme

$$\psi^*\mathcal{N}_\alpha \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \longrightarrow (\varinjlim_{\alpha\in I} \psi^*\mathcal{N}_\alpha)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

zodat er een door deze morphismen uniek bepaald $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\varinjlim_I (\psi^*\mathcal{N}_\alpha \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

is gevonden. Dit morphisme is bijectief in de staken (Ga na), zodat we met behulp van (i) vinden:

$$\varinjlim_I [\psi]^*\mathcal{N}_\alpha = \varinjlim_I (\psi^*\mathcal{N}_\alpha \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) = (\varinjlim_I \psi^*\mathcal{N}_\alpha)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X =$$

$$= \psi^*(\varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = [\psi]^* \varinjlim_I \mathcal{N}_\alpha$$

waarmee de opmerking is bewezen.

<u>Opmerking 4.78</u>: <u>Als $\mathcal{N}_1$ en $\mathcal{N}_2$ twee $\mathcal{O}_Y$-modulen zijn, dan geldt</u>:

$$[\psi]^*\mathcal{N}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} [\psi]^*\mathcal{N}_2 \simeq [\psi]^*(\mathcal{N}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_2)$$

Bewijs: Ga na.

Opmerking 4.79: Als $\mathcal{N}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-moduul is, dan is $[\psi]^*\mathcal{N}$ ook quasi-coherent.

Bewijs: Kies $x \in X$. Dan is $\psi x \in Y$ en er bestaat een open omgeving V van ψx, alsmede een exakte rij van de vorm

$$\mathcal{O}_Y|V^{(I)} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_Y|V^{(J)} \xrightarrow{\beta} \mathcal{N}|V \longrightarrow 0 .$$

Wegens de rechts-exaktheid van $[\psi]^*$ volgt hieruit dat de rij

$$[\psi]^*\mathcal{O}_Y|\psi^{-1}V^{(I)} \xrightarrow[{[\psi]^*\alpha}]{} [\psi]^*\mathcal{O}_Y|\psi^{-1}V^{(J)} \xrightarrow[{[\psi]^*\beta}]{} [\psi]^*\mathcal{N}|\psi^{-1}V \longrightarrow 0$$

exakt is, waaruit de opmerking volgt. ($[\psi]^*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X$).

Opmerking 4.80: Als $\mathcal{N}$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul van eindig type is, dan is ook $[\psi]^*\mathcal{N}$ als $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type.

Bewijs: Ga na.

Lemma 4.81: Zij $f: B \longrightarrow A$ een ring-morphisme. Zij M een B-moduul en N een A-moduul. Noteer N' i.p.v. N als we N opvatten als B-moduul ($b.n := f(b).n$). Dan is er een functorieel (in M en N) isomorphisme

$$\underline{\mathcal{M}}_A(M\otimes_B A,N) \simeq \underline{\mathcal{M}}_B(M,N')$$

Bewijs: Zij $\nu \in \underline{\mathcal{M}}_A(M\otimes_B A,N)$. Definieer dan:

$$s'(\nu)(m) := \nu(m\otimes 1) \ .$$

Hiermee is $s'(\nu) \in \underline{\mathcal{M}}_B(M,N')$ wegens

$$s'(\nu)(b.m) = \nu(b.m\otimes 1) = \nu(m\otimes f(b)) = s'(\nu)(m).b \ .$$

Zij omgekeerd $\mu \in \underline{\mathcal{M}}_B(M,N')$. Definieer:

$$\begin{cases} d'(\mu): M\otimes_B A \longrightarrow N \\ \sum_i^{<\infty} m_i \otimes a_i \longmapsto \sum_i^{<\infty} a_i . \mu(m_i) \end{cases}$$

Dan is wegens

$$d'(\mu)(m.b\otimes a) = \mu(mb).a = \mu(m).f(b)a = d'(\mu)(m\otimes f(b).a)$$

$$d'(\mu) \in \underline{\mathcal{M}}_A(M\otimes_B A, N)$$

Ga na dat de afbeeldingen $\nu \longmapsto s'(\nu)$ en $\mu \longmapsto d'(\mu)$ het betreffende functoriële isomorfisme geven.

Lemma 4.82: Zij ϕ: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ een $\mathcal{B}$-algebra. ($\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ gedefinieerd op een topologische ruimte X.) Zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{B}$-moduul en $\mathcal{N}$ een $\mathcal{A}$-moduul. We kunnen $\mathcal{N}$ de structuur van $\mathcal{B}$-moduul geven met behulp van ϕ. We noteren $\mathcal{N}'$ i.p.v. $\mathcal{N}$ als we de $\mathcal{B}$-moduul-struktuur willen aangeven.
Er is een functorieel (in $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$) isomorfisme.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}').$$

Bewijs: Zij $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{A}, \mathcal{N})$. Dan is er voor elke open deelverzameling U van X een morphisme

$$\nu'(U) := \left[\mathcal{M}(U)\otimes_{\mathcal{B}(U)}\mathcal{A}(U) \xrightarrow{\text{kan.}} (\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{A})(U) \xrightarrow{\nu(U)} \mathcal{N}(U)\right]$$

We vinden zo een bijectie tussen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{A}, \mathcal{N})$ en de verzameling van preschoof-morphismen

$$\mathcal{M}(-)\otimes_{\mathcal{B}(-)}\mathcal{A}(-) \longrightarrow \mathcal{N}(-)$$

die compatibel zijn met de $\mathcal{A}$-moduul-struktuur. Het lemma volgt nu direkt uit lemma (4.81).

Stelling 4.83: Zij $(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van geringde ruimtes. Zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul en $\mathcal{N}$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul. Dan bestaat er een functorieel (in $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$) isomorfisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},[\psi]_*\mathcal{M})$$

Bewijs: Zij

$$\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) .$$

Dan hebben we:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\psi^*\mathcal{N}\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X,\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\psi^*\mathcal{O}_Y}(\psi^*\mathcal{N},\mathcal{M}') \\ \qquad\qquad \nu \longmapsto s'(\nu) \end{cases}$$

volgens lemma (4.82), waarbij $\mathcal{M}'$ $\mathcal{M}$ is, opgevat als $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul, waarbij deze moduul struktuur verkregen wordt door middel van

$$\Psi^*\colon \psi^*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X .$$

Als U een open deelverzameling van X is, wordt $s'(\nu)$ gedefinieerd door

$$s'(\nu)(U)(n) = \nu(U)(n\otimes 1)$$

als $n \in \psi^*\mathcal{N}(U)$. (n induceert het element

$$n\otimes 1 \in \psi^*\mathcal{N}(U)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(U)}\mathcal{O}_X(U)$$

en we noteren het beeld van dit element onder het kanonieke morphisme

$$\psi^*\mathcal{N}(U)\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(U)}\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow (\psi^*\mathcal{N}\otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X)(U)$$

(enigszins slordig) ook met $n\otimes 1$). Nu is $s'(\nu)$ een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme. Dat wil zeggen:

$$s'(\nu)(U)(an) = \Psi^{*}(U)(a).s'(\nu)(U)(n)$$

$(a \in \psi^{*}\mathcal{O}_Y(U))$. Nu is $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ als schoof van abelse groepen. We kunnen dus $s'(\nu)$ opvatten als een morphisme van schoven van abelse groepen, zodat we hebben:

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_X(\psi^{*}\mathcal{N},\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N},\psi_{*}\mathcal{M}) \\ \quad s'(\nu) \longmapsto s(s'(\nu)) \end{cases}$$

Ook is - als schoof van abelse groepen - $\psi_{*}\mathcal{M} = [\psi]_{*}\mathcal{M}$, zodat

$$s(s'(\nu)) \in \mathrm{Mor}_Y(\mathcal{N},[\psi]_{*}\mathcal{M})$$

We bewijzen nu dat $\nu^{(s)} := s(s'(\nu))$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme is. Kies hiertoe V open in Y en kies bovendien

$$n' \in \mathcal{N}(V) \quad ; \quad a' \in \mathcal{O}_Y(V)$$

Omdat $V \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V)$, induceren n' en a' elementen

$$n \in \psi^{*}\mathcal{N}(\psi^{-1}V) \quad \text{resp.} \quad a \in \psi^{*}\mathcal{O}_Y(\psi^{-1}V) \ .$$

Deze laatste elementen kunnen we ook opvatten als elementen van $\psi_{*}\psi^{*}\mathcal{N}(V)$ resp. $\psi_{*}\psi^{*}\mathcal{O}_Y(V)$. Noteer n" i.p.v. n in dat geval. Er geldt:

$$\nu^{(s)}(V)(n') = \psi_{*}s'(\nu)(V)\circ\rho_{\mathcal{N}}(V)(n') = \psi_{*}s'(\nu)(V)(n'') =$$

$$= (s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n))''$$

(Hierbij geven we met $(s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n))''$ het element $s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n)$ aan, opgevat als element van $[\psi]_{*}\mathcal{M}(V)$.)
Nu is $\psi_{*}\mathcal{M}$ op natuurlijke manier een $\psi_{*}\mathcal{O}_Y$-moduul en $[\psi]_{*}\mathcal{M}$ heeft per definitie de $\mathcal{O}_Y$-moduul-struktuur

$$\begin{cases} \mathcal{O}_Y(V) \times [\psi]_{*}\mathcal{M}(V) \longrightarrow [\psi]_{*}\mathcal{M}(V) \\ \quad (a',m'') \longmapsto [\psi_{*}(V)(a')].m'' \end{cases}$$

waarbij

$$\Psi_*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X$$

het kanonieke morphisme bij Ψ is. Nu is

$$\Psi_*(V)(a') = (\Psi(V)(a'))''$$

($(\Psi(V)(a'))''$ zijnde het element $\Psi(V)(a')$, opgevat als element van $\psi_*\mathcal{O}_X(V)$.) Dus:

$$\begin{aligned} \nu^{(s)}(V)(a'n') &= (s'(\nu)(\psi^{-1}V)(an))'' = ([\Psi^*(\psi^{-1}V)(a)].[s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n)]'' = \\ &= (\Psi(V)(a'))''.(s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n))'' = \\ &= [\Psi_*(V)(a')].[s'(\nu)(\psi^{-1}V)(n)]'' = a'.\nu^{(s)}(V)(n') \end{aligned}$$

zodat we bewezen hebben dat $\nu^{(s)}$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme is. We hebben dus gevonden:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},[\psi]_*\mathcal{M}) \\ \qquad\qquad \nu \longmapsto \nu^{(s)} \end{cases}$$

We construeren nu omgekeerd een afbeelding

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \longleftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},[\psi]_*\mathcal{M})$$

als volgt: Kies

$$\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},[\psi]_*\mathcal{M})$$

Dan kunnen we - als we μ opvatten als morphisme van schoven van abelse groepen - ook schrijven:

$$\mu \in \mathrm{Mor}(\mathcal{N},\psi_*\mathcal{M})$$

Volgens prop. (4.73) is hierbij een uniek bepaalde

$$d(\mu) \in \mathrm{Mor}(\psi^* \mathcal{N}, \mathcal{M})$$

te vinden. Nu is volgens lemma (4.82)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^* \mathcal{N}, \mathcal{M}) \xleftarrow[d']{\sim} \mathrm{Hom}_{\psi^* \mathcal{O}_Y}(\psi^* \mathcal{N}, \mathcal{M}')$$

waarbij $\mathcal{M}'$ $\mathcal{M}$ is, opgevat als $\psi^* \mathcal{O}_Y$-moduul. Als we dus kunnen bewijzen dat $d(\mu)$ een $\psi^* \mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme is, dan hebben we bij μ een morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\mu^{(d)} := d'(d(\mu)) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^* \mathcal{N}, \mathcal{M})$$

geconstrueerd.

Kies U open in X en beschouw elementen

$$n \in \tilde{\psi} \mathcal{N}(U) \quad ; \quad a \in \tilde{\psi} \mathcal{O}_Y(U) \ .$$

Dan is er een $V \in \mathcal{V}(U)$, en zijn er elementen

$$n' \in \mathcal{N}(V) \quad ; \quad a' \in \mathcal{O}_Y(V)$$

die n resp. a induceren. Omdat ook $V \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V)$, induceren n' en a' ook elementen

$$n_1 \in \tilde{\psi} \mathcal{N}(\psi^{-1}V) \quad ; \quad a_1 \in \tilde{\psi} \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}V)$$

en er geldt:

$$n_1|U = n \quad ; \quad a_1|U = a.$$

Het element an wordt dan geïnduceerd door a'n', terwijl

$$a_1 n_1|U = an \ .$$

Nu is

$$d(\mu)(U)(n) = d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1)|U$$

en

$$d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1) = (\mu(V)(n'))''$$

(waarbij $(\mu(V)(n'))''$ het element $\mu(V)(n')$ is, opgevat als element van $\mathcal{M}(\psi^{-1}V)$. Derhalve geldt:

$$\begin{aligned} d(\mu)(\psi^{-1}V)(a_1n_1) &= (\mu(V)(a'n'))'' = (\Psi_*(V)(a').\mu(V)(n'))'' = \\ &= \Psi(V)(a').(\mu(V)(n'))'' = \Psi(V)(a').d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1) = \\ &= \Psi^*(\psi^{-1}V)(a_1).d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1) = a_1.d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1) \end{aligned}$$

(waarbij in de laatste term de vermenigvuldiging is genomen in de door Ψ^* op $\mathcal{M}$ geïnduceerde $\psi^*\mathcal{O}_Y$-struktuur). Derhalve is

$$d(\mu)(U)(an) = [a_1.d(\mu)(\psi^{-1}V)(n_1)]\,|U = a.d(\mu)(\psi^{-1}V)(n)$$

zodat $d(\mu)$ een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme is. Derhalve hebben we verkregen:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^*\mathcal{N},\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},[\psi]_*\mathcal{M}) \\ \qquad\qquad \nu \longmapsto \nu^{(s)} \\ \qquad\qquad \mu^{(d)} \longleftarrow\!\shortmid \mu \end{cases}$$

Uit prop. (4.73) en lemma (4.82) volgt dat

$$(\nu^{(s)})^{(d)} = d'(d(s(s'(\nu)))) = d'(s'(\nu)) = \nu$$

en

$$(\mu^{(d)})^{(s)} = s(s'(d'(d(\mu)))) = s(d(\mu)) = \mu$$

en ook de functorialiteit van het verkregen isomorfisme.

Zij nu $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een geringde ruimte en $\mathcal{S}$ een positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra. Dan zeggen we dat $\mathcal{S}_+$ is voortgebracht door $\mathcal{S}_1$ (als we een gradering

$$\mathcal{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$$

van $\mathcal{S}$ hebben, en noteren:

$$\mathcal{S}_+ := \sum_{n\geq 1} \mathcal{S}_n \qquad),$$

als voor elke $y \in Y$ geldt, dat $\mathcal{S}_+(y)$ wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1(y)$. Met dit laatste bedoelen we dat elk element

$$\sigma \in \mathcal{S}_+(y)$$

te schrijven is als een eindige som van termen van de vorm

$$\sigma_0 \ \tau_1 \ \cdots \ \tau_n$$

met $\sigma_0 \in \mathcal{S}_0(y)$; $\tau_1,\dots,\tau_n \in \mathcal{S}_1(y)$ (n mag per term verschillen). Aequivalent met deze definitie is de volgende uitspraak:
$\mathcal{S}_+$ wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1$, dan en slechts dan als $\mathcal{S}$ als $\mathcal{S}_0$-algebra wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1$ en het eenheidselement $1 \in \mathcal{S}(Y)$.

Laat nu $(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van geringde ruimtes zijn. Zij voorts:

$$\alpha\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{A}$$

een $\mathcal{O}_Y$-algebra. Dan is

$$\psi^*\alpha\colon \psi^*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi^*\mathcal{A}$$

een $\psi^*\mathcal{O}_Y$-algebra en we hebben het kanonieke morphisme

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \psi^*\mathcal{A} \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X =: [\psi]^*\mathcal{A}.$$

dat $[\psi]^*\mathcal{A}$ tot een $\mathcal{O}_X$-algebra maakt. (Dit morphisme is, omdat $[\psi]^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$, niets anders dan

$$[\psi]^*\alpha\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow [\psi]^*\mathcal{A} \,.)$$

Zij nu $\mathcal{S} = \sum \mathcal{S}_n$ een positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra met struktuurmorphisme

$$\alpha\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{S}_0 \,.$$

Omdat $[\psi]^*$ commuteert met het nemen van inductieve limieten geldt ook:

$$[\psi]^*\mathcal{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} [\psi]^*\mathcal{S}_n \quad ; \quad [\psi]^*\alpha\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow [\psi]^*\mathcal{S}_0 \ .$$

Dit heeft tot gevolg dat $[\psi]^*\mathcal{S}$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra is.
Neem nu bovendien aan dat $\mathcal{S}_+$ wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1$. Dan wordt voor elke $y \in Y$ $\mathcal{S}(y)$ als $\mathcal{O}_Y(y)$-algebra voortgebracht door het deelmoduul

$$\mathcal{S}_0(y) \sum \mathcal{S}_1(y) \ .$$

Wegens opm. (4.66) wordt dan ook voor elke $x \in X$ $\psi^*\mathcal{S}(x)$ voortgebracht door

$$\psi^*\mathcal{S}_0(x) \sum \psi^*\mathcal{S}_1(x)$$

over $\psi^*\mathcal{O}_Y(x)$. Dan wordt ook

$$\psi^*\mathcal{S}(x) \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y(x)} \mathcal{O}_X(x)$$

over $\mathcal{O}_X(x)$ voortgebracht door

$$[\psi]^*\mathcal{S}_0(x) \sum [\psi]^*\mathcal{S}_1(x)$$

zodat $[\psi]^*\mathcal{S}_+(x)$ wordt voortgebracht door $[\psi]^*\mathcal{S}_1(x)$. Als gevolg hiervan, en van opm. (4.79) en opm. (4.80) geldt:

<u>Propositie 4.84</u>: <u>Zij $(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van preschema's. Als $\mathcal{S}$ een quasi-coherent positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra is, zodat $\mathcal{S}_+$ wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1$, terwijl bovendien $\mathcal{S}_1$ als $\mathcal{O}_Y$-moduul van eindig type is, dan is $[\psi]^*\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra, zodat $[\psi]^*\mathcal{S}_+$ wordt voortgebracht door het $\mathcal{O}_X$-moduul van eindig type $[\psi]^*\mathcal{S}_1$.</u>

<u>Propositie 4.85</u>: <u>Zij</u> $(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ <u>een morphisme van affiene schema's</u>. <u>Zij</u> $X = \operatorname{Spec} A$ <u>en</u> $Y = \operatorname{Spec} B$. (ψ,Ψ) <u>induceert dan een ring-morphisme</u>

$$f\colon B \longrightarrow A\ .$$

<u>Zij</u> M <u>een A-moduul</u>. <u>Noteer</u> M' <u>voor</u> M, <u>opgevat als B-moduul</u>. <u>Dan is er een functorieel isomorfisme</u>

$$[\psi]_*\tilde{M} \simeq \tilde{M}'$$

<u>Bewijs</u>: Kies $b \in B$. Dan is als abelse groep

$$[\psi]_*\tilde{M}(D(b)) = \psi_*\tilde{M}(D(b)) = \tilde{M}(\psi^{-1}D(b)) = \tilde{M}(D(fb)) = M_{fb}\ .$$

De $\mathcal{O}_Y(D(b))$-moduul-struktuur wordt gegeven door:

$$\begin{cases} B_b \times M_{fb} \longrightarrow M_{fb} \\ \left(\dfrac{\beta}{b^n}, \dfrac{m}{(fb)^t}\right) \longmapsto \dfrac{f(\beta).m}{(fb)^{n+t}} \end{cases}$$

Ook geldt: $\tilde{M}'(D(b)) = (M')_b$, en de B_b-moduul-struktuur van $(M')_b$ wordt gegeven door:

$$\begin{cases} B_b \times (M')_b \longrightarrow (M')_b \\ \left(\dfrac{\beta}{b^n}, \dfrac{m'}{b^t}\right) \longmapsto \dfrac{\beta.m'}{b^{n+t}} = \dfrac{(f(\beta).m)'}{b^{n+t}} \end{cases}$$

(Hierbij geven we een element μ van M, opgevat als element van M', aan met μ'.) Definieer nu:

$$\begin{cases} (M')_b \xrightarrow{\theta_b} M_{fb} \\ \dfrac{m'}{b^t} \longmapsto \dfrac{m}{(fb)^t} \end{cases}$$

Dan is θ_b een B_b-moduul-isomorfisme. Ook commuteren voor elke $b,b' \in B$ de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
{[\psi]_*\tilde{M}(D(b))} \arrow[d, "\text{restr.}"'] & = & M_{fb} \arrow[d, "\text{kan.}"'] & (M')_b \arrow[l, "\theta_b"', "\sim"] \arrow[d, "\text{kan.}"'] & = & \tilde{M}'(D(b)) \arrow[d, "\text{restr.}"'] \\
{[\psi]_*\tilde{M}(D(bb'))} & = & M_{f(bb')} & (M')_{bb'} \arrow[l, "\sim", "\theta_{bb'}"'] & = & \tilde{M}'(D(bb'))
\end{tikzcd}$$

zodat inderdaad $\tilde{M'} \simeq \widetilde{[\psi]_*M}$. Ga zelf de functorialiteit na.

<u>Opmerking 4.86</u>: Zij (ψ,Ψ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van geringde ruimtes. Dan hebben we een morphisme van schoven van ringen

$$\Psi_*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X$$

zodat $\psi_*\mathcal{O}_X$ een $\mathcal{O}_Y$-algebra is. We kunnen elke $\mathcal{O}_Y$-algebra op natuurlijke manier opvatten als een $\mathcal{O}_Y$-moduul. In dit geval wordt deze moduulstruktuur gegeven door:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_Y(V) \times \psi_*\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X(V) \\ \\ \qquad (r,s) \longmapsto [\Psi_*(V)(r)].s \end{cases}$$

Dit $\mathcal{O}_Y$-moduul is dus precies $[\psi]_*\mathcal{O}_X$.
Zij nu bovendien

$$\Phi: \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}$$

een $\mathcal{O}_X$-algebra. Dan is met het struktuur-morphisme

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow[\Psi_*]{} \psi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow[\psi_*\Phi]{} \psi_*\mathcal{A}$$

$\psi_*\mathcal{A}$ een $\mathcal{O}_Y$-algebra. Vatten we $\psi_*\mathcal{A}$ op als een $\mathcal{O}_Y$-moduul, dan verkrijgen we - net zo als hiervoor - juist $[\psi]_*\mathcal{A}$. Bovendien, als we $\psi_*\Phi$ opvatten als $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme, dan hebben we:

$$[\Psi]_*\Phi: [\psi]_*\mathcal{O}_X \longrightarrow [\psi]_*\mathcal{A}.$$

<u>Definitie 4.87</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A, en zij f: A $\longrightarrow$ S een A-algebra. Zij $(Z,\mathcal{O}_Z)$ = Spec S. Dan induceert f een morphisme van affiene schema's

$$(\phi,\Phi):(Z,\mathcal{O}_Z) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$$

$\tilde{S}$ is dan per definitie de $\mathcal{O}_X$-algebra

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow[\Phi_*]{} \phi_*\mathcal{O}_Z$$

<u>Opmerking 4.88</u>: (Notaties zoals in voorgaande definitie). De $\mathcal{O}_X$-algebra $\tilde{S} = \phi_*\mathcal{O}_Z$ induceert het $\mathcal{O}_X$-moduul $[\phi]_*\mathcal{O}_Z$. (Cf. opm. (4.86)). Ook kunnen we S opvatten als A-moduul met de vermenigvuldiging

$$\begin{cases} A \times S \longrightarrow S \\ (a,s) \longrightarrow f(a)s \end{cases}$$

Noteer S' i.p.v. S als we het A-moduul bedoelen. Volgens prop. (4.85) geldt dan:

$$[\phi]_*\mathcal{O}_Z \simeq \widetilde{S'} \ .$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen: Bij elke A-algebra S bestaat er op kanonieke manier een $\mathcal{O}_X$-algebra $\tilde{S}$, die - opgevat als $\mathcal{O}_X$-moduul - precies het $\mathcal{O}_X$-moduul is, dat door S - opgevat als A-moduul - wordt geïnduceerd.

<u>Propositie 4.89</u>: <u>Zij</u> $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ = Spec B <u>en zij</u> f: B $\longrightarrow$ A <u>een ring-morphisme</u>. f <u>induceert dan een morphisme van affiene schema's</u>

$$(\psi,\Psi):\ (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

<u>Zij</u> N <u>een B-moduul</u>. <u>Dan is er een functorieel</u> (<u>in</u> N) <u>isomorphisme</u>

$$[\psi]^*\tilde{N} \xrightarrow{\sim} \widetilde{N \otimes_B A} \ .$$

<u>Bewijs</u>: Noteer: $M := N\otimes_B A$. M is dan een A-moduul, dat we wegens $f: B \longrightarrow A$ ook als B-moduul kunnen opvatten. Noteer in dat geval M' i.p.v. M. (Als we een element $m \in M$ opvatten als element van M', dan noteren we m' i.p.v. m). De B-moduul-struktuur van M' is gegeven door

$$b.(n\otimes 1)' := (n\otimes fb)' = (n.b\otimes 1)'$$

zodat we een B-moduul-morphisme

$$\begin{cases} \mu: N \longrightarrow M' = (N\otimes_B A)' \\ \quad n \longmapsto n\otimes 1 \end{cases}$$

hebben. μ induceert op zijn beurt een $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme

$$\tilde{\mu}: \tilde{N} \longrightarrow \tilde{M'} \simeq [\psi]_* \tilde{M}$$

(cf. Prop. (4.85)). Wegens

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^* \tilde{N}, \tilde{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{N}, [\psi]_* \tilde{M})$$

is er bij $\tilde{\mu}$ een éénduidig bepaald morphisme

$$\tilde{\mu}^{(d)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}([\psi]^* \tilde{N}, \tilde{M})$$

Als we bewijzen kunnen dat $\tilde{\mu}^{(d)}$ bijectief is in de staken, dan zijn we klaar. Hiertoe bepalen we $\tilde{\mu}^{(d)}$ expliciet, zodat we deze bijectiviteit kunnen controleren:

Laat $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul zijn en $\mathcal{N}$ een $\mathcal{O}_Y$-moduul. Beschouw een $\mathcal{O}_Y$-moduul-morphisme

$$\tilde{\mu}: \mathcal{N} \longrightarrow [\psi]_* \mathcal{M}$$

Als morphisme van schoven van abelse groepen kunnen we dan schrijven:

$$\tilde{\mu}: \mathcal{N} \longrightarrow \psi_* \mathcal{M}$$

Hieruit construeren we

$$d(\tilde{\mu}) := [\psi^{*}\mathcal{N} \xrightarrow[\psi^{*}\tilde{\mu}]{} \psi^{*}\psi_{*}\mathcal{M} \xrightarrow[\sigma_{\mathcal{M}}]{} \mathcal{M}]$$

en dit morphisme induceert (door uitvermenigvuldigen)

$$[\psi]^{*}\mathcal{N} = \psi^{*}\mathcal{N} \otimes_{\psi^{*}\mathcal{O}_{Y}} \mathcal{O}_{X} \xrightarrow[\tilde{\mu}(d)]{} \mathcal{M}$$

Kies nu $x \in X$ en zij $y = \psi x$. Volgens opm. (4.66) geldt:

$$\theta(x) : \psi^{*}\mathcal{N}(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(y).$$

Kies een element

$$n_x \in \psi^{*}\mathcal{N}(x)$$

en laat

$$n_y := \theta(x)(n_x) \in \mathcal{N}(y)$$

Dan wordt n_y geïnduceerd door een zeker element

$$n_V \in \mathcal{N}(V)$$

voor een geschikte open omgeving V van y. Nu is $V \in \mathcal{V}(\psi^{-1}V)$, zodat n_V een element

$$n_{\psi^{-1}V} \in \psi^{*}\mathcal{N}(\psi^{-1}V)$$

induceert dat, indien we daarop de restrictie toepassen tot de staak $\psi^{*}\mathcal{N}(x)$, op zijn beurt weer n_x geeft. Beschouw nu het element

$$\tilde{\mu}(V)(n_V) \in \psi_{*}\mathcal{M}(V) .$$

We kunnen dit element ook opvatten als element van $\mathcal{M}(\psi^{-1}V)$, en noteren het dan met

$$(\tilde{\mu}(V)(n_V))'' \in \mathcal{M}(\psi^{-1}V) .$$

Door restrictie tot de staak $\mathcal{M}(x)$ verkrijgen we een element

$$(\tilde{\mu}(V)(n_V))''_x \in \mathcal{M}(x)$$

en er geldt:

$$[d(\mu)(x)](n_x) = (\tilde{\mu}(V)(n_V))''_x$$

We gaan nu deze expliciete definitie van $d(\mu)$ in ons affiene geval narekenen:

We kiezen: $\mathcal{N} = \tilde{N}$; $\mathcal{M} = \tilde{M} = \widetilde{N\otimes_B A}$; $x = x_{\underline{p}}$ ($\underline{p}$ een priemideaal van A); $y = \psi x = y_{\underline{q}}$ ($\underline{q}$ een priemideaal van B met $\underline{q} = f^{-1}\underline{p}$). Merk allereerst op dat f een morphisme van ringen

$$B_{\underline{q}} \longrightarrow A_{\underline{p}}$$

induceert, en dat we een bijectie

$$\begin{cases} N_{\underline{q}}\otimes_{B_{\underline{q}}} A_{\underline{p}} \xrightarrow{\sim} (N\otimes_B A)_{\underline{p}} \\ \dfrac{n}{s}\otimes\dfrac{a}{t} \longmapsto \dfrac{n\otimes a}{f(s).t} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

hebben. (Ga na).

Het B-moduul-morphisme

$$\begin{cases} \mu\colon N \longrightarrow M' = (N\otimes_B A)' \\ n \longmapsto (n\otimes 1)' \end{cases}$$

induceerde

$$\tilde{\mu}\colon \tilde{N} \longrightarrow [\psi]^{*}\tilde{M} \simeq \tilde{M'} = (\widetilde{N\otimes_B A})'$$

Beschouw $n_x \in \psi^{*}\tilde{N}(x)$. We hebben dan een situatie

$$\begin{cases} \psi^{*}\tilde{N}(x) \xrightarrow[\theta(x)]{\sim} \tilde{N}(y) \xleftarrow[\text{restr.}]{} \tilde{N}(D(b)) = N_b \\ n_x \longmapsto \dfrac{n}{b^k} \longleftarrow\!\!\!\shortmid \dfrac{n}{b^k} \end{cases}$$

(Dus: $D(b)$ komt overeen met de open omgeving V van $y = \psi x$ en $\frac{n}{b^k}$ met het element n_V). Voorts hebben we:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \tilde{N}(D(b)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}(D(b))} & [\psi]_* \tilde{M}(D(b)) = ((N\otimes_B A)')_b \\ \frac{n}{b^k} & \longmapsto & \frac{(n\otimes 1)'}{b^k} \end{array}\right.$$

($\frac{(n\otimes 1)'}{b^k}$ komt overeen met $\tilde{\mu}(V)(n_V)$.) Nu kunnen we als abelse groep $[\psi]_* \tilde{M}(D(b))$ identificeren met

$$\tilde{M}(D(fb)) = (N\otimes_B A)_{fb}$$

Deze identificatie is gegeven door:

$$\left\{\begin{array}{ccc} ((N\otimes_B A)')_b = [\psi]_* \tilde{M}(D(b)) = (\tilde{M}(D(fb)))' = ((N\otimes_B A)_{fb})' \\ \frac{(n\otimes 1)'}{b^k} \longleftarrow\!\!\!\!\!\xrightarrow{\quad 1 \quad} \left(\frac{n\otimes 1}{(fb)^k}\right)' \end{array}\right.$$

Dus vinden we:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \tilde{N}(D(b)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}(D(b))} & (N\otimes_B A)_{fb} \\ \frac{n}{b^k} & \longmapsto & \frac{n\otimes 1}{(fb)^k} \end{array}\right.$$

(Als morphisme van abelse groepen). Dus als we $a_x \in \mathcal{O}_X(x)$ kiezen, zeg

$$a_x = \frac{\alpha}{s} \in A_{\underline{p}} = \mathcal{O}_X(x)$$

dan wordt $\tilde{\mu}^{(d)}(x)$ gegeven door:

$$\left\{\begin{array}{ccc} N_{\underline{q}} \otimes_{B_{\underline{q}}} A_{\underline{p}} = (\psi^{*}\tilde{N} \otimes_{\psi^{*}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(x) & \xrightarrow{\tilde{\mu}^{(d)}(x)} & \widetilde{N\otimes_B A}\,(x) = (N\otimes_B A)_{\underline{p}} \\ \frac{n}{b^k} \otimes \frac{\alpha}{s} = n_x \otimes a_x & \longmapsto & \frac{n\otimes\alpha}{(fb)^k . s} \end{array}\right.$$

en dit morphisme is juist de bijectie (*). Dus is $\tilde{\mu}^{(d)}$ bijectief in de staken.

Ga zelf na dat het isomorfisme $[\psi]^{*}\tilde{\tilde{N}} \simeq \tilde{M}$ functorieel in N is.

<u>Opmerking 4.90</u>: Zij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ = Spec B en zij S een gegradeerde B-algebra. (Dat wil zeggen: Er is een ring-morphisme

$$\xi: B \longrightarrow S$$

en er zijn additieve ondergroepen S_n van S zodat

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

terwijl $\xi(B)\subset S_0$ en $\forall n,m\in\mathbb{N}.\ S_n.S_m\subset S_{n+m}$). Beschouw de $\mathcal{O}_Y$-algebra $\tilde{S}$ (Cf. opm. (4.86) en def. (4.87)). Als $y = y_{\underline{q}}\in Y$, dan is - als abelse groep -

$$\tilde{S}(y) = (S')_{\underline{q}}$$

(zie opm. (4.86) voor de notatie S'), terwijl de $\mathcal{O}_Y(y)$-algebra-struktuur van $\tilde{S}(y)$ gegeven wordt door

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(y) = B_{\underline{q}} & \longrightarrow & (S')_{\underline{q}} = \tilde{S}'(y) = \tilde{S}(y) \\ \frac{b}{t} & \longmapsto & \frac{\xi(b^*)'}{t} \end{array}$$

Nu is $S' = \sum_{n\in\mathbb{N}} S'_n$ (als we met S'_n S_n aangeven, opgevat als B-moduul). Dus:

$$\tilde{S'} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{S'_n}$$

en $\tilde{S'}(y)$ heeft de gradering

$$(S')_{\underline{q}} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} S'_n)_{\underline{q}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (S'_n)_{\underline{q}}$$

(Ga na). Hiermee is $\tilde{S}$ een gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra. Nu is, als $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A, en als het morphisme van affiene schema's

$$(\psi,\Psi):\ (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

wordt geïnduceerd door een ring-morphisme

$$f:\ B \longrightarrow A$$

$[\psi]^{*\sim}S = \psi^{*\sim}S \otimes_{\psi^* \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra, (Cf. opm. (4.84)) met het kanonieke struktuur-morphisme

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \psi^{*\sim}S \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

en de gradering

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi^{*\sim}S_n \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X .$$

Dus, als $x = x_{\underline{p}} \in X$, $y = \psi x = y_{\underline{q}} \in Y$ $(\underline{q} = f^{-1}\underline{p})$, dan hebben we:

$$(\psi^{*\sim}S \otimes_{\psi^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(x) \simeq \sum_{n\in\mathbb{N}} (S'_n)_{\underline{q}} \otimes_{B_{\underline{q}}} A_{\underline{p}}$$

(We gebruiken hier de kanonieke isomorfismen $\psi^{*\sim}S(x) \simeq \tilde{S}(\psi x)$ en $\psi^*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_Y(\psi x)$ (Cf. opm. (4.66))).

Ook hebben we een gegradeerde A-algebra

$$T := S\otimes_B A$$

met het struktuurmorphisme

$$\begin{cases} A \longrightarrow S\otimes_B A \\ a \longmapsto 1\otimes a \end{cases}$$

en de gradering

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n \otimes_B A .$$

Dus hebben we een gegradeerde $\mathcal{O}_X$-algebra $\tilde{T}$, in de staken gegeven door

$$\tilde{T}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (S'_n \otimes_B A)_{\underline{p}}$$

Met de definities uit het bewijs van de vorige propositie wordt $\tilde{\mu}^{(d)}$ gegeven door:

$$\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} (S'_n)_{\underline{q}} \otimes_B A_{\underline{p}} \xrightarrow{\sim} \sum_{n\in\mathbb{N}} (S'_n \otimes_B A)_{\underline{p}} \\ \frac{s'_n}{u} \otimes \frac{a}{v} \longmapsto \frac{s'_n \otimes a}{f(u).v} \end{cases}$$

(als morphismen van $\mathcal{O}_X(x)$-modulen. We hebben hier S' en T' in plaats van N resp. M in de voorgaande propositie. (T' is T, opgevat als A-moduul).). Het is direkt duidelijk dat $\tilde{\mu}^{(d)}(x)$ een morphisme is van gegradeerde $\mathcal{O}_X(x)$-algebra's. Hieruit volgt onmiddellijk:

<u>Propositie 4.91</u>: <u>Zij</u> $(X,\mathcal{O}_X) = \operatorname{Spec} A$ <u>en</u> $(Y,\mathcal{O}_Y) = \operatorname{Spec} B$. <u>Zij het morphisme van affiene schema's</u>

$$(\psi,\Psi)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

<u>geïnduceerd door een ring-morphisme</u>

$$f\colon B \longrightarrow A$$

<u>Als</u> S <u>een gegradeerde B-algebra is, en</u>

$$T := S \otimes_B A$$

<u>is de op kanonieke manier hieruit geconstrueerde gegradeerde A-algebra, dan is er een functorieel isomorfisme</u>

$$[\psi]^{*}\tilde{S} \xrightarrow{\sim} \tilde{T}$$

<u>van gegradeerde</u> $\mathcal{O}_X$<u>-algebra's</u>.

Tot slot van §4 geven we nog enige opmerkingen en definities betreffende inverteerbare $\mathcal{O}_X$-modulen.

<u>Definitie 4.92</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en laten $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen zijn. Kies een open deelverzameling U van X. Noteer:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{N}|U)$$

Dit is een abelse groep. Zij nu $U'\subset U$ een tweede open deelverzameling van X. Dan hebben we op kanonieke manier een restrictie-morphisme

$$\rho^U_{U'}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{N}|U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U'}(\mathcal{M}|U',\mathcal{N}|U')$$

zodat

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})(-)$$

een preschoof van abelse groepen op X is. Ga na dat deze preschoof aan beide schoofeigenschappen voldoet. Zelfs is deze schoof op kanonieke manier een $\mathcal{O}_X$-moduul:

Als $r\in\mathcal{O}_X(U)$ en $\alpha\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{N}|U)$, dan definiëren we

$$r.\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{N}|U)$$

als volgt: Kies V open in X met $V\subset U$, dan:

$$\begin{cases} (r.\alpha)(V): \mathcal{M}(V) \longrightarrow \mathcal{N}(V) \\ \qquad\qquad\qquad m \longmapsto (r|V).\alpha(V)(m) \end{cases}$$

Ga na dat $r.\alpha$ een $\mathcal{O}_X|U$-moduul-morphisme is, en dat zo

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

een $\mathcal{O}_X$-moduul wordt.

<u>Opmerking 4.93</u>: <u>Als</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ <u>een geringde ruimte is, en</u> $\mathcal{M}$ <u>en</u> $\mathcal{N}$ <u>zijn twee</u> $\mathcal{O}_X$<u>-modulen, dan bestaat er een kanoniek morphisme</u>

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(x) \xrightarrow{\theta(x)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(x)}(\mathcal{M}(x), \mathcal{N}(x))$$

<u>voor elke</u> $x \in X$.

<u>Bew</u>: Kies

$$\sigma_x \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(x)$$

Dan bestaat er een open omgeving U van x in X en een element

$$\sigma_U \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U, \mathcal{N}|U)$$

dat σ_x induceert.
Kies nu een element $\tau_x \in \mathcal{M}(x)$. We kunnen dan een open omgeving U' van x binnen U vinden, benevens een element $\tau_{U'} \in \mathcal{M}(U')$ dat τ_x induceert. Dan hebben we een element

$$\sigma_U(U')(\tau_{U'}) \in \mathcal{N}(U')$$

dat op zijn beurt door restrictie tot de staak $\mathcal{N}(x)$ een element $\tau'_x \in \mathcal{N}(x)$ induceert. Definieer:

$$\theta(x)(\sigma_x) : \tau_x \longmapsto \tau'_x$$

Ga na dat deze constructie éénduidig is.
<u>N.B.</u>: $\theta(x)$ is in het algemeen noch injectief, noch surjectief!

<u>Definitie 4.94</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte en zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Dan heet

$$\check{\mathcal{M}} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

het <u>duale $\mathcal{O}_X$-moduul van $\mathcal{M}$</u>.

<u>Definitie 4.95</u>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte, en zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. $\mathcal{M}$ heet <u>lokaal</u> <u>vrij</u> als er bij elke $x \in X$ een open omgeving U bestaat en een index verzameling I, zodat

$$\mathcal{M}|U \simeq \mathcal{O}_X|U^{(I)} .$$

<u>Definitie 4.96</u>: Een lokaal vrij $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}$ heet <u>van rang n</u> als er bij elke $x \in X$ een open omgeving U bestaat, zodat

$$\mathcal{M}|U \simeq \mathcal{O}_X|U^{(n)} .$$

<u>Definitie 4.97</u>: Een lokaal vrij $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}$ van rang 1 heet een <u>inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul</u>.

<u>Opmerking 4.98</u>: Een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is quasi-coherent.

<u>Opmerking 4.99</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen zijn, dan bestaat er een functorieel kanoniek morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen</u>

$$\check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

<u>Bewijs</u>: Zij U een open deelverzameling van X. Als V een tweede open deelverzameling is van X met $V \subset U$ en m is een element van $\mathcal{M}(V)$, dan kunnen we definiëren:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{O}_X|U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{N}|U) \\ \qquad a \otimes n \longmapsto [m \longmapsto \alpha(V)(m).(n|V)] \end{cases}$$

Ga na dat zo een morphisme van preschoven

$$\check{\mathcal{M}}(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \mathcal{N}(-) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})(-)$$

is verkregen. Verschoving levert het gevraagde $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme. Ga de functorialiteit na.

<u>Propositie 4.100</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen zijn en $\mathcal{M}$ is inverteerbaar, dan is er een functorieel kanoniek isomorphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen</u>

$$\check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}).$$

<u>Bewijs</u>: Omdat we de bijectiviteit van het in opm. (4.99) gedefinieerde morphisme in de staken kunnen controleren, mogen we aannemen dat $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X$. Dit morphisme komt dan overéén met het isomorphisme

$$\check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{N} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{N}).$$

(Ga goed na!).

<u>Opmerking 4.101</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan is ook $\check{\mathcal{M}}$ inverteerbaar</u>.

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Opmerking 4.102</u>: <u>Voor elk $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}$ bestaat er een kanoniek morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen</u>

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}).$$

<u>Bewijs</u>: Zij U een open deelverzameling van X en zij $r \in \mathcal{O}_X(U)$. Definieer als volgt een morphisme

$$\mu_r \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|U,\mathcal{M}|U)$$

Als $V \subset U$ een open deelverzameling van X is en $m \in \mathcal{M}(V)$, dan zij

$$\mu_r(V)(m) := (r|V).m$$

Ga na dat we zo een morphisme μ_r hebben gedefinieerd. Het gevraagde $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M})$$

wordt dan gegeven door

$$r \longmapsto \mu_r \ .$$

<u>Propositie 4.103</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan is</u>

$$\mathcal{O}_X \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}).$$

<u>Bew</u>: Omdat we de bijectiviteit van het in opm. (4.102) gedefinieerde morphisme

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M})$$

in de staken controleren kunnen we aannemen dat $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X$. Het morphisme is dan het kanonieke isomorphisme

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \ .$$

<u>Opmerking 4.104</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan geldt</u>:

$$\check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X \ .$$

<u>Bew</u>: Dit is een direkt gevolg van prop. (4.100) en prop. (4.103).

<u>Opmerking 4.105</u>: <u>Zijn $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee inverteerbare $\mathcal{O}_X$-modulen, dan is ook het $\mathcal{O}_X$-moduul</u>

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$$

<u>inverteerbaar</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies $x \in X$ en bij x een open omgeving U zodat

$$\mathcal{M}|U \simeq \mathcal{O}_X|U \quad ; \quad \mathcal{N}|U \simeq \mathcal{O}_X|U \ .$$

Dan is

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})|U = \mathcal{M}|U \otimes_{\mathcal{O}_X|U} \mathcal{N}|U \simeq \mathcal{O}_X|U \otimes_{\mathcal{O}_X|U} \mathcal{O}_X|U = \mathcal{O}_X|U \ .$$

Notatie 4.106: Zij $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul. Noteer:

(i) Als $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, dan $\mathcal{M}^{\otimes n} := \overset{n}{\otimes} \mathcal{M}$

(ii) Als $n = 0$, dan $\mathcal{M}^{\otimes n} := \mathcal{O}_X$

(iii) Als $n = -1$, dan $\mathcal{M}^{\otimes n} := \check{\mathcal{M}}$

(iv) Als $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$, dan $\mathcal{M}^{\otimes n} := \check{\mathcal{M}}^{\otimes(-n)}$

Opmerking 4.107: Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan is voor elke $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{M}^{\otimes n}$$

een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul.

Bew: Dit volgt direkt uit opm. (4.101) en opm. (4.105).

Opmerking 4.108: Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan geldt voor elke $m,n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{M}^{\otimes m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{\otimes n} = \mathcal{M}^{\otimes(m+n)}$$

Bew: Dit volgt direkt uit

$$\check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X .$$

Tot slot nog twee definities:

Definitie 4.109: Zij $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul. Dan noteren we:

$$\Gamma_*(\mathcal{M}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^{\otimes n}(X)$$

(Som van abelse groepen).

<u>Opmerking 4.110</u>: <u>Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is, dan is</u> $\Gamma_*(\mathcal{M})$ <u>een gegradeerde ring</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies $s \in \mathcal{M}^{\otimes n}(X)$ en $t \in \mathcal{M}^{\otimes m}(X)$. Dan kunnen we het element

$$s \otimes t \in \mathcal{M}^{\otimes n}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{M}^{\otimes m}(X)$$

beschouwen. Nu levert de verschoving een kanoniek morphisme van abelse groepen

$$\mathcal{M}^{\otimes n}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{M}^{\otimes m}(X) \longrightarrow (\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{\otimes m})(X)$$

zodat het beeld van $s \otimes t$ onder dit morphisme een element is van

$$\mathcal{M}^{\otimes (m+n)}(X) \ .$$

Dit element zij per definitie s.t. We hebben zo een vermenigvuldiging op $\Gamma_*(\mathcal{M})$ gedefinieerd en op deze wijze een gegradeerde ring verkregen (waarbij de graad ook negatief kan zijn).

<u>Definitie 4.111</u>: Zij $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul en $\mathcal{N}$ een willekeurig $\mathcal{O}_X$-moduul. Definieer:

$$\Gamma_*(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{\otimes n})(X)$$

<u>Opmerking 4.112</u>: $\Gamma_*(\mathcal{M},\mathcal{N})$ <u>is een gegradeerd $\Gamma_*(\mathcal{M})$-moduul</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies $s \in \mathcal{M}^{\otimes m}(X)$ en $t \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}(X)$. Dan is $t \otimes s$ een element van

$$(\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n})(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{M}^{\otimes m}(X)$$

Dit induceert weer op kanonieke manier een element

$$t.s \in (\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}^{\otimes m})(X) = (\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes (m+n)})(X)$$

Ga na dat met deze vermenigvuldiging een $\Gamma_*(\mathcal{M})$-moduul-struktuur op $\Gamma_*(\mathcal{M},\mathcal{N})$ is verkregen.