stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 83/71 SEPTEMBER

J. VAN DE LUNE

CURSUS WISKUNDE

Analyse

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Literatuur

[1] T.M. Apostol, Calculus I, Blaidell Pub. Co., 1964.

[2] H.S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier series and integrals, Dover 1930.

[3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformationen, Springer 1937.

[4] G.M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung I, II, III, Berlin 1964.

[5] H.J. Lighthill, Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge 1958.

[6] K. Knopp, Elemente der Funktionentheorie, Sammlung Göschen, Berlin 1971.

K. Knopp, Funktionentheorie I, II, idem.

K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I, II, idem.

[7] W. Rudin, Real and Complex Analysis, J. Wiley, New York 1966.

[8] A. Zygmund, Trigonometric Series I, II, Cambridge 1959.

Hoofdstuk 1

Differentiaal- en Integraalrekening.

In dit hoofdstuk wordt (dikwijls in de vorm van opgaven) een beknopt overzicht gegeven van een aantal onderwerpen uit de differentiaal- en integraalrekening.

De optelling in $\mathbb{R}$.

Betreffende de optelling van reële getallen veronderstellen we bekend,

A1 : $a + b = b + a$, (commutativiteit)

A2 : $(a + b) + c = a + (b + c)$, (associativiteit)

A3 : $\exists\, w \in \mathbb{R} : (a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + w = a)$,

A4 : $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, \overset{*}{a} \in \mathbb{R} : a + \overset{*}{a} = w$.

Opmerkingen:

* In eerste instantie kan er alleen maar gesproken worden van de som van twee reële getallen.
* De associatieve wet heeft tot gevolg: als we in een "eindige som" $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ op twee manieren haakjes plaatsen zodanig dat er in de ontstane vormen alleen nog maar optellingen van twee reële getallen voorkomen, dan leveren beide vormen na uitwerking hetzelfde resultaat op.

Voorbeeld:

$$(a_1+a_2) + (a_3+a_4) = a_1 + ((a_2+a_3) + a_4)$$

* Er is precies één getal w met de eigenschap $a+w = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$ (bewijs dit).
  Voor w schrijven we in het vervolg 0.
* Bij gegeven $a \in \mathbb{R}$ is er ook precies één element $\overset{*}{a}$ met de eigenschap $a+\overset{*}{a} = 0$ (bewijs dit).
  Voor $\overset{*}{a}$ schrijven we in het vervolg $-a$.
* Voor $a + (-b)$ schrijven we voortaan $a - b$.

Opgaven:

1. $a+x = a+y \Rightarrow x = y$

2. $-0 = 0$

3. $-(-a) = a$

4. $a \neq 0 \Rightarrow -a \neq 0.$

5. $-(a+b) = (-a) - b$

De vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$.

Betreffende de vermenigvuldiging van reële getallen veronderstellen we bekend

M1 : $a.b = b.a$, (commutativiteit)

M2 : $(a.b).c = a.(b.c)$,(associativiteit)

M3 : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 : (a \in \mathbb{R} \Rightarrow a.\alpha = a)$

M4 : $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \ \exists \check{a} \in \mathbb{R} : a.\check{a} = \alpha.$

Opmerkingen:

* Ook voor de vermenigvuldiging geldt dat er in eerste instantie slechts van het produkt van twee reële getallen kan worden gesproken.

* Analoog aan de tweede opmerking betreffende de optelling.

* Ook het getal α is uniek (bewijs dit) en wordt in het vervolg geschreven als 1.
De eis $1 \neq 0$ is opgenomen om te voorkomen dat $\mathbb{R}$ uit slechts één element zou bestaan (Zie opgave 7).

* Analoog aan de vierde opmerking betreffende de optelling.
Voor $\check{a}$ schrijven we in het vervolg a^{-1}. Waarom het bestaan van a^{-1} alleen wordt geeist als $a \neq 0$ zal duidelijk worden in de opgaven 6 en 7.

* Voor $a.b^{-1}$ schrijven we ook wel $\frac{a}{b}$.

Het verband tussen optelling en vermenigvuldiging

Het verband tussen de optelling en de vermenigvuldiging wordt gevormd door de regel

$a.\ (b + c) = (a\ .\ b) + (a\ .\ c)$, (distributiviteit).

Opgaven

6 $\left.\begin{array}{l} a\ .\ x = a\ .\ y \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

7 $a\ .\ 0 = 0$

8 $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$

9 $1^{-1} = 1$

10 $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

11 $a\ .\ b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

12 $\left.\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a\ .\ b)^{-1} = (a^{-1})\ .\ (b^{-1})$

13 $-\ (a\ .\ b) = (-\ a).b = a.(-\ b)$

14 $a\ .\ b = (-\ a)\ .\ (-\ b)$

Definitie : $a^{o} = 1$, $a^{1} = a$, $a^{2} = a.a$, $a^{3} = a^{2}\ .\ a$, ...,

$a^{n+1} = a^{n}\ .\ a$, ... enz.

Als $a \neq 0$, dan definiëren we

(a^{-1} is reeds gedefinieerd), $a^{-2} = (a^{-1})^{2}$,

...., $a^{-n} = (a^{-1})^{n}$ als $n \in \mathbb{N}$.

Opgave:

15 Als m en n gehele getallen zijn dan is

$a^{m+n} = a^{m}\ .\ a^{n}$, $(a^{m})^{n} = a^{m.n}$.

Indien nodig neme men hierbij $a \neq 0$.

1.2. De ordeningsrelatie op $\mathbb{R}$.

We veronderstellen bekend dat op $\mathbb{R}$ een ordeningsrelatie $<$ bestaat, zodanig dat

01 : $\left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \Rightarrow a < c$, (transitiviteit)

02 : $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ voor alle $c \in \mathbb{R}$

03 : $\left.\begin{array}{l} a < b \\ 0 < c \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c$

04 : Voor twee willekeurige elementen a en b uit $\mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende mogelijkheden: $a < b$, $a = b$, $b < a$.

Opmerkingen:

* Eigenschap 02 legt verband tussen de ordening en de optelling.

* Eigenschap 03 legt verband tussen de ordening en de vermenigvuldiging.

* Eigenschap 04 heet ook wel de "Trichotomie wet".
  Een ordeningsrelatie die aan 04 voldoet heet ook wel "totaal", "volledig" of "lineair".

* Voor $a < b$ schrijven we ook vaak $b > a$.

* $a \leq b$ zal betekenen: $a < b \vee a = b$.

16 $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

17 $\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < b + d$

18 $\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b > 0$

19 $\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b > 0$

20 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

21 $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

22 Als $a > 0$ dan is $a + a^{-1} \geq 2$.

23 $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

24 $$\left.\begin{array}{l} b > 0 \\ a < b \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d.$$

25 Als $0 < a < b$ dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$
$a^n < b^n$.

26 Als $a > 0$, $b > 0$ en $a^n < b^n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ dan is $a < b$.

27 Als $0 < a < b$ dan is voor elke $n \in \mathbb{N}$
$a^{-n} > b^{-n}$.

28 Zij $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ en

$0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Toon aan dat dan

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{\phi(1)}}{b_1} + \frac{a_{\phi(2)}}{b_2} + \ldots + \frac{a_{\phi(n)}}{b_n}$$

waarbij ϕ een permutatie van $\{1,2,3, \ldots, n\}$ is.

29 In de som $S = \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k \cdot (2k-1)$ is

van ε_k, $(k = 1,2, \ldots, n)$ alleen bekend dat $|\varepsilon_k| = 1$

(ε_k is dus $+1$ of -1).

Toon aan dat $S \neq 0$.

De modulus (= absolute waarde) van een reëel getal

Definitie:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ als } a > 0 \\ 0 \text{ als } a = 0 \\ -a \text{ als } a < 0 \end{cases}$$

Opgaven:

30 $|a| \geq 0$; $|-a| = |a|$

31 $a \leq |a|$

32 $|a + b| \leq |a| + |b|$

33 $|a - b| \leq |a| + |b|$

34 $|a + b| \geq ||a| - |b||$

35 $|a - b| \geq ||a| - |b||$

36 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

37 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

38 $|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$; $\left|\prod_{k=1}^{n} a_i\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_i|$, $(n \in \mathbb{N})$

39 Als $a \neq 0$ dan is $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

40 Als $b \neq 0$ dan is $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Aan de ordenings axioma's voegen we nog toe

05 : $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > b$.

In plaats van 05 zegt men ook vaak dat de ordening op $\mathbb{R}$ Archimedisch is.

Opgaven: 41. Toon aan dat bij elke $a > 0$ en elke $b \in \mathbb{R}$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat, zodanig dat $n.a > b$.

42 (Ongelijkheid van Bernoulli). Als
$h > -1$ en $h \neq 0$ dan geldt voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$

$(1 + h)^n > 1 + nh.$

43 Zij $h > 0$. Toon aan dat bij elk reëel getal a een natuurlijk getal N te vinden is zodanig dat

$(1 + h)^N > a.$

44 Toon aan dat

* $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

* $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

* $2 \leq (1 + \frac{1}{m})^m < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq 4$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$

* $(n + 1)^n < n^{n+1}$ voor $n = 3,4,5, \ldots$.

* bij elke $x \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 + \frac{x}{n+1})^{x+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq N$.

Toon tevens aan dat N zo bepaald kan worden dat

$(1 + \frac{x}{n})^n \leq \frac{1}{(1 - \frac{x}{N})^N}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq N$.

1.3 Faculteiten en binomiaal coëfficienten

Definitie

$$\begin{aligned} 0\,! &= 1 \\ 1\,! &= 1 \\ 2\,! &= 1.2 \\ &\vdots \\ n\,! &= 1.2.3.\ \ldots\ n \end{aligned}$$

Definitie: $\binom{x}{0} = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ \dots\ (x-k+1)}{k!}, \quad (x \in \mathbb{R};\ k = 1,2,3,\dots)$$

Opgaven:

45 Als n en k niet-negatieve gehele getallen zijn zodanig dat $k \leq n$, dan is

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

46 $\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$, $(x \in \mathbb{R};\ k = 0,1,2,\ \dots)$

47 De getallen $\binom{n}{k}$ uit opgave 45 zijn natuurlijke getallen.

48 Toon aan dat het produkt van $r (r \in \mathbb{N})$ opeenvolgende natuurlijke getallen deelbaar is door r !

49 Als $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ dan is

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \quad (n = 0,1,2,3,\ \dots) \quad \text{(Newton)}$$

Opmerking: Men realisere zich dat hierbij vooral de commutativiteit van de vermenigvuldiging een belangrijke rol speelt.

50 $$\left.\begin{aligned} 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}\right\} \quad (n = 0,1,2,3,\ \dots)$$

51 Als p een priemgetal is dan is $\binom{p}{k}$ deelbaar door p zolang $1 \leq k \leq p-1$.

52 Als p een priemgetal is dan geldt voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ dat $(a + b)^p - a^p - b^p$ deelbaar is door p.

53 Als p priem is en $a_i \in \mathbb{Z}$, $(i = 1,2,3,\ \dots,n)$ dan is $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p - \sum_{i=1}^{n} a_i^p$ deelbaar door p.

54 Zij p priem en $a \in \{1,2,3, \ldots, p-1\}$ dan is $a^{p-1} - 1$ deelbaar door p (Fermat).

Toon verder aan dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ en elke $n \in \mathbb{N}$ de macht x^n geschreven kan worden in de gedaante

$$x^n = c_{n,1}\, x + c_{n,2}\, x\,(x-1) + c_{n,3}\, x\,(x-1)(x-2) + \ldots +$$

$$+ c_{n,n}\, x\,(x-1)(x-2) \ldots (x-n+1)$$

waarbij $c_{n,1} = c_{n,n} = 1$ en

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + k.c_{n,k}, \quad (2 \leq k \leq n+1).$$

Als $p \geq 3$ en priem is dan zijn de coëfficienten $c_{p,k}$, $(k = 2,3,\ldots,p-1)$ deelbaar door p.
Leid vervolgens af dat $(n-1)! + 1$ dan en slechts dan deelbaar is door n als n een priemgetal is (stelling van Wilson).

1.4 Rijen en limieten van rijen

De definities van de begrippen rij en limiet van een rij staan in ZC 79/71, blz. 20 e.v.

Opgave 55. Toon aan dat een reële rij hoogstens één limiet heeft.

Gevolg: Als een rij $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ een limiet a heeft dan kunnen we ook zeggen dat a de limiet is van de rij f.

Schrijfwijze: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$.

In dit geval zegt men ook vaak: de rij f convergeert naar a.

Definitie. Een rij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heet een Cauchy-rij (of fundamentaal rij) als

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : (m,n \geq N \Rightarrow |f(m) - f(n)| < \varepsilon).$$

Opgaven

56 Toon aan dat elke convergente rij een Cauchy-rij is.

57 Toon aan dat elke monotoon niet-dalende, naar boven begrensde rij een Cauchy-rij is.

58 Laat rechtstreeks (met behulp van opgave 44) zien dat de rij $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ een Cauchy-rij is.

59 Toon aan dat een Cauchy-rij begrensd is. Een convergente rij is dus ook begrensd.

60 Een deelrij van een Cauchy-rij is weer een Cauchy-rij.

61 Toon aan dat: Als de rij f convergent is met limiet a dan is ook elke deelrij f^* van f convergent met limiet a.

62 Toon aan dat: als de Cauchy-rij f een convergente deelrij f^* heeft met limiet a dan is f ook convergent met limiet a.

Aan de reeds genoemde grondeigenschappen van het stelsel $\mathbb{R}$ voegen we nu het volgende axioma toe:
Indien de rij $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ een Cauchy-rij is, dan bestaat er een reëel getal a zodanig dat a de limiet is van de rij f. Korter gezegd: Elke Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is convergent.

Opgaven:

63 Toon aan dat elke monotoon niet-dalende begrensde rij convergent is.

Voorbeeld: Van de rij $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$$

weten we **reeds** dat hij stijgend is en ook begrensd ($f(n) < 4$) zodat deze rij als gevolg van opgave 63 een limiet heeft. In het vervolg zullen we deze limiet steeds aangeven met de letter e.

$$\text{Dus} \quad e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Opgaven:

64 In opgave 44 hebben we gezien dat de rij $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = (1 + \frac{x}{n})^n$ op den duur stijgend is en begrensd.

Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} f(n) > 0.$$

65 Bewijs de limietstellingen op blz. 21 van ZC 79/71.

66 Bepaal in elk der volgende gevallen een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq N$ geldt:

* $0,74 < \dfrac{3n^2 + 5n + 7}{4n^2 + 6n + 1} < 0,76$

* $2^n > n^2$

* $1 < \sqrt[n]{100} < 1,001$

* $n! < n^n < (2n)!$

* $(n!)^2 > n^n$

67 Bereken de volgende limieten

* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}).\sqrt{n}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}}{(5 + \frac{1}{5})^n}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

68 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = a$

69 $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ b_n \text{ begrensd} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

70 $\left.\begin{array}{l} a_n \leqq G \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \end{array}\right\} \Longrightarrow a \leqq G.$

71 $\left.\begin{array}{l} a_n \leqq b_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{array}\right\} \Longrightarrow a \leqq b$

72 $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

73 $\left.\begin{array}{l} a_n \leqq b_n \leqq c_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

74 Men realisere zich dat als a_n een reële rij is de volgende uitspraken equivalent zijn

* a_n is convergent

* a_n is een Cauchy-rij

75 (Cauchy) Als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ en $g_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

dan is ook $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = a$

76 Als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = ab$$

77 Als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bepaal dan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_n^2$

78 Als $a_n = \sqrt[n]{n}$ dan is a_n op den duur dalend. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

79 Als $|r| < 1$ dan is $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

80 De rij $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ is divergent.

81 Zij $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ waarbij $c > o$.

Toon aan dat a_n op den duur monotoon niet-stijgend is en begrensd.

Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

82 Zij $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} + a_n \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ voor $n = 1,2,3,\ldots$.

Toon aan dat a_n stijgend is en begrensd. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

83 Zoals bekend is $\sqrt{2}$ irrationaal zodat $n\sqrt{2}$ voor geen enkele $n \in \mathbb{N}$ geheel is.

Toon aan dat

$$a_n = \frac{1}{n.\sin(n\,\pi\,\sqrt{2})}$$

begrensd is.

84 Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n!\,\pi\,x)$ voor alle rationale x.

85 Als $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$ dan is $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1$

86 Zij $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$, (vergelijk opgave 44).

Toon aan dat

* $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

* $|\exp(x) - 1 - x| \leq 2\,|x|^2$ voor alle x met $|x| \leq 1$.

87 Als gegeven is dat

$a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - na_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

toon dan aan dat $\lim_{n\to\infty} S_n$ bestaat en ≤ 1 is.

88 Van de rij a_n is gegeven dat

$a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

$a_{m+n} \leq a_m \cdot a_n$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$ (c.f. ZC 79/71, blz.19).

1.5 Reeksen

Zij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}$.

Bij deze rij construeren we een nieuwe rij $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ zodanig dat

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Deze rij S_n noemen we de reeks behorende bij de rij a_n.
Een reeks is dus een (op een speciale manier verkregen) rij.
Als de reeks S_n naar S convergeert dan schrijven we

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($\Longleftrightarrow S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$), en noemen we S de som van deze reeks.

Zo is bijvoorbeeld

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} .$$

Immers: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

zodat $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

We weten dat S_n dan en slechts dan convergeert als S_n een Cauchy-rij is (opgave 74).

Dus: de reeks S_n is convergent als:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: (m, n \geq N \Longrightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon).$$

Nemen we $m > n$, ($m = n+p$ met $p \geq 1$) dan is

$$S_m - S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+p}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$

$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \stackrel{\text{def}}{=} R_{n,p}$$

zodat we ook kunnen zeggen dat de reeks S_n dan en slechts dan convergeert als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: (n \geq N, p \geq 1 \Longrightarrow |R_{n,p}| < \varepsilon).$$

Hieruit volgt dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(hetgeen niets anders is als een verkorte schrijfwijze voor de rij $S_1, S_2, S_3, \ldots$) zeker convergeert als de reeks

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert, immers

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|.$$

Het omgekeerde is niet altijd waar:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ is convergent, maar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n + \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ is divergent.}$$

Opgaven

89 $(1 - r)(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) = a.(1 - r^n)$.

Voor $r \neq 1$ geldt dus

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a. \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} . r^n.$$

Als bovendien $|r| < 1$

dan is $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$.

Opmerking: Voor een reeks zoals $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ schrijven we ook vaak $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$.

90 Zij b_n op den duur ≥ 0 en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.

Als $|a_n| \leq b_n$ (op den duur) dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

(Majoranten stelling).

91 Is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent met som S dan is ook

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ convergent met som S.

Algemener: In een convergente reeks kan men op willekeurige wijze haakjes plaatsen zonder de convergentie te verstoren of de som te veranderen (N.B. de volgorde der a_n's wordt hierbij niet gewijzigd).

Deze uitspraak geldt niet voor divergente reeksen; immers

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ is divergent terwijl

$\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{2n-1} + (-1)^{2n})$ convergent is met som 0,

en $-1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{2n} + (-1)^{2n+1})$ convergent is met som -1.

92 Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

93 Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert.

Daar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ is de bewering in de vorige opgave niet omkeerbaar.

94 Als $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dan is

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$, $(\lambda \in \mathbb{R})$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Ook is $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots = A + B$.

95 (Leibnitz). Indien voor de rij a_n op den duur geldt $a_n \geqq 0$ en $a_{n+1} \leqq a_n$ dan is de reeks

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ convergent.

96 Zij op den duur $a_n > 0$ en $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \alpha < 1$

dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

97 Toon aan dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de volgende reeks convergeert
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

De som van deze reeks noemen we $E(x)$. Laat zien dat

$|E(x) - 1 - x| \leqq 2|x|^2$ voor alle $|x| \leqq 1$.

98 Als op den duur $a_n \geqq 0$ en $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq L$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

Vermenigvuldiging van reeksen

Zijn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gegeven reeksen dan wordt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

met
$$c_1 = a_1 b_1$$
$$c_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2$$
$$\vdots$$
$$c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 \cdot b_n$$

het Cauchy-produkt van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ genoemd.

Stelling (Mertens)

Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert absoluut terwijl

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

dan is het Cauchy-produkt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent met som A.B.

Bewijs: We schrijven $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ en $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Dan is $C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n =$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_1 + \\ &\quad a_2 b_1 + a_1 b_2 + \\ &\quad a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-2} b_3 + \ldots + a_1 b_n = \\ &= b_1 A_n + b_2 A_{n-1} + b_3 A_{n-2} + \ldots + A_1 b_n . \end{aligned}$$

Schrijven we $A_n = A + \alpha_n$ dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ en

$$C_n = b_1(A + \alpha_n) + b_2(A + \alpha_{n-1}) + \ldots + b_n(A + \alpha_1) =$$

$$= A \,.\, B_n + (\alpha_n b_1 + \alpha_{n-1} b_2 + \ldots + \alpha_1 b_n).$$

We behoeven dus alleen nog maar aan te tonen dat

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n b_1 + \alpha_{n-1} b_2 + \ldots + \alpha_1 b_n) = 0.$$

Nu is $|\alpha_n b_1 + \alpha_{n-1} b_2 + \ldots + \alpha_1 b_n| \leqq$

$$\leqq |\alpha_n||b_1| + |\alpha_{n-1}|.|b_2| + \ldots + |\alpha_1||b_n| =$$

$$= \{|\alpha_n|.|b_1| + \ldots + |\alpha_N|.|b_{n-N+1}|\} + \{|\alpha_{N-1}||b_{n-N+2}| + \ldots + |\alpha_1||b_n|\}$$

$$\leqq (\max_{N\leqq k\leqq n} |\alpha_k|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-N+1}|) +$$

$$+ (\max_{1\leqq k<N} |\alpha_k|).(|b_{n-N+2}| + \ldots + |b_n|).$$

Nemen we nu N ongeveer gelijk aan $\frac{n}{2}$ dan is wegens $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,

$\max\limits_{N\leqq k\leqq n} |\alpha_k|$ op den duur klein, terwijl

$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-N+1}|$ begrensd is.

Verder is $|\alpha_k|$ begrensd en $|b_{n-N+2}| + \ldots +$ klein wegens de abs.

convergentie van $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Samenvattend kunnen we dus zeggen dat

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n b_1 + \alpha_{n-1} b_2 + \ldots + \alpha_1 b_n) = 0,$$

zodat de stelling bewezen is.

Opgaven:

99 Toon met behulp van de stelling van Mertens aan dat

$E(x + y) = E(x) \,.\, E(y)$.

100 Toon aan dat het Cauchy-produkt van de convergente reeks

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ met zichzelf divergeert.

101 * (Cauchy) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absoluut convergeren dan is het Cauchy-produkt van deze reeksen ook abs. convergent.

* (Abel) Als $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ en het Cauchy-produkt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ van deze reeksen convergeert met som C dan geldt: $C = A \,.\, B$.

102 Men tone aan dat de volgende reeksen voor alle $x \in \mathbb{R}$ absoluut convergeren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} \,.$$

De som van de eerste reeks noemen we $S(x)$, die van de tweede $C(x)$. Toon verder aan

$C(2) < 0$

$S(x) > 0$ voor $0 < x < 2$

$S(-x) = -S(x)$

$C(-x) = C(x)$

$S(x + y) = S(x) \,.\, C(y) + C(x) \,.\, S(y)$

$C(x + y) = C(x) \,.\, C(y) - S(x) \,.\, S(y)$

$S^2(x) + C^2(x) = 1$.

$S(2x) = 2S(x)\, C(x)$

$C(2x) = 1 - 2S^2(x) = 2C^2(x) - 1$.

1.6 Limieten van funkties: continuïteit

Zij $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ (d.w.z. x_0 is een verdichtingspunt van D) en $a \in \mathbb{R}$.

Dan heet a de limiet van f in het punt x_0 (x_0 behoeft niet tot D te behoren) als

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R} : (x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Schrijfwijze: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Voorbeelden : * $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ op $x \neq 1$,

$x_0 = 1$ en $a = 2$.

Dan is

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = \left|(x + 1) - 2\right| = \left|x - 1\right| < \varepsilon$$

zodra $|0 < |x - x_0| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$.

Dus $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

* $f(x) = \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$ voor $x \neq 0$,

$x_0 = 0$ en $a = 1$.

Dan is (zie vraagstuk 86) $|f(x) - 1| = \left|\dfrac{\exp(x) - 1}{x} - 1\right| =$

$$= \left|\frac{\exp(x) - 1 - x}{x}\right| \leq \frac{2|x|^2}{|x|} = 2|x| < \varepsilon$$

zodra $0 < |x| < \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$.

Dus $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Opgaven:

103 Bepaal de volgende limieten

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S(x)}{x}$

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{C(x) - 1}{x^2}$

* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{E(x) - E(x_0)}{x - x_0}$

104 Als $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ en $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

dan geldt

$$\lim_{x\to x_0} \{f(x) + g(x)\} = a + b$$

$$\lim_{x\to x_0} \{f(x) - g(x)\} = a - b$$

$$\lim_{x\to x_0} \{f(x) \,.\, g(x)\} = a \,.\, b.$$

Is bovendien $b \neq 0$ dan geldt ook

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}\ .$$

Zij $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.
Dan heet f continu in x_0 als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

De funktie f heet continu op D als f continu is in elk punt van D.

Opgaven:

105 Als f en g continu zijn in x_0 dan zijn ook de functies $f + g$, $f - g$, $f \,.\, g$ en $|f|$ continu in x_0. Is bovendien $g(x_0) \neq 0$ dan is ook $\frac{f}{g}$ continu in x_0.

106 Bestudeer de paragraaf "Continue afbeeldingen" uit ZC 79/71.

107 Toon aan dat

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$\min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

108 Als $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$ dan definiëren we $f \vee g : D \to \mathbb{R}$ en $f \wedge g : D \to \mathbb{R}$ als volgt

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

Toon aan dat, als f en g continu zijn in x_0, ook $f \vee g$ en $f \wedge g$ continu zijn in x_0.

109 Als g continu is in u_0 en f is continu in $x_0 = g(u_0)$ dan is $f \circ g$ $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$ continu in u_0.

110 Toon aan dat de volgende funkties f continu zijn in elk punt van hun definitie-gebied:

* $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
* $f(x) = \exp(x)$
* $f(x) = E(x)$
* $f(x) = S(x)$
* $f(x) = C(x)$

111 Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu op $[a,b]$ zodanig dat $f(a) < c$ en $f(b) > c$. Toon aan dat er een ξ bestaat zodanig dat $a < \xi < b$ en $f(\xi) = c$.

112 Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu op $[a,b]$.
Toon aan dat

* f begrensd is

* er een $\xi_1 \in [a,b]$ bestaat zodanig dat
  $f(x) \leqq f(\xi_1)$ voor alle $x \in [a,b]$

* er een $\xi_2 \in [a,b]$ bestaat zodanig dat
  $f(x) \geqq f(\xi_2)$ voor alle $x \in [a,b]$.

113 Zij I een gesloten interval in $\mathbb{R}$ en f en g continue afbeeldingen van I naar $\mathbb{R}$.
Zij $D \subset I$ zodanig dat $\bar{D} = I$ en $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in D$.
Dan is $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in I$.

114 Zij $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ en $e_n^* = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

Toon aan dat

$\lim\limits_{n\to\infty} (e_n^* - e_n) = 0.$

Concludeer dat $\exp(1) = E(1) = e$.

Toon verder aan dat

* $E(n) = \{E(1)\}^n = \{\exp(1)\}^n = \exp(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$
* $E(1) = E(q \cdot \frac{1}{q}) = \{E(\frac{1}{q})\}^q$ voor alle $q \in \mathbb{N}$
* $\exp(1) = \{\exp(\frac{1}{q})\}^q$ voor alle $q \in \mathbb{N}$.
* $\exp(\frac{p}{q}) = E(\frac{p}{q})$ voor alle $p, q \in \mathbb{N}$
* $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$
* $E(r) = \exp(r)$ voor alle $r \in \mathbb{Q}$
* $E(x) = \exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (maak gebruik van opgave 113).

115 Zij $f : D \to \mathbb{R}$ zodanig dat

* D samenhangend
* f continu op D
* f (relatief) maximaal is in elk punt van D.

Toon aan dat f constant is op geheel D.

116. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu in 0 terwijl

$f(x) = f(2x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Toon aan dat $f(x) = f(0)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

117 Zij $f : R \to \mathbb{R}$ continu in 0 en 1 terwijl

$f(x) = f(x^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Toon aan dat $f(x) = f(0) = f(1)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Uniforme continuiteit

Zij $f : D \to \mathbb{R}$. Dan heet f uniform continu op D als

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta : (x_1, x_2 \in D \wedge |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Stelling

Als f continu is op een compacte verzameling D dan is f uniform continu op D.

Bewijs f continu op D $\Longrightarrow$ f continu in elk punt x van

$D \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_x : (t \in B_{\delta_x}(x) \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon)$

Nu is $D \subset \bigcup_{x \in D} B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$.

Omdat D compact en $B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$ open is voor elke x, bestaat er dus een eindig aantal bollen $B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$ die D reeds overdekken:

$B_{\frac{1}{2}\delta_{x_1}}(x_1), B_{\frac{1}{2}\delta_{x_2}}(x_2), \ldots , B_{\frac{1}{2}\delta_{x_n}}(x_n)$.

Neem nu $\delta_\varepsilon = \min_{i=1,2,\ldots,n} \{\frac{1}{2}\delta_{x_i}\}$.

Zij nu $|t_1 - t_2| < \delta$ en $t_1 \in B_{\frac{1}{2}\delta_{x_i}}(x_i)$; dan is ook $t_1 \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ en

$t_2 \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ zodat $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. Q.E.D.

118 Als $f : D \to \mathbb{R}$ continu is op D en D is niet compact dan behoeft f niet uniform continu te zijn (neem $f(x) = \frac{1}{x}$ op $D = \{x \mid x > 0\}$).

119 Zij $f : D \to \mathbb{R}$ uniform continu op D en zij D begrensd. Dan is f begrensd op D.

120 Als f uniform continu is op D dan is f ook (gewoon) continu op D.

1.7. Differentieerbaarheid

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in D \cap D'$. Dan heet f differentieerbaar in x_0 met afgeleide L als

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Voor L schrijven we vaak $f'(x_0)$ of $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$.

Als $D' = D$ en f is differentieerbaar in elk punt van D dan heet f differentieerbaar op D.

Opgave:

121 De funktie $f : D \to R$ heet differentieerbaar in $x_0 \in D \cap D'$ als er een funktie h bestaat zodanig dat

* h en f hetzelfde definitie gebied hebben
* h continu is in x_0
* $f(x) = f(x_0) + h(x).(x - x_0)$ voor alle x uit het definitie gebied van f.

Toon aan dat deze definitie van differentieerbaarheid equivalent is met de reeds eerder gegevene en dat $f'(x_0) = h(x_0)$.

122 Indien de funkties f en g differentieerbaar zijn in x_0 dan zijn ook $f + g$, $f - g$ en $f \cdot g$ differentieerbaar in x_0 met

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Is bovendien $g(x_0) \neq 0$, dan is ook $\frac{f}{g}$ differentieerbaar in x_0

met $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

123 Als g differentieerbaar is in u_0 en f is differentieerbaar in $x_0 = g(u_0)$ dan is $f \circ g$ ook differentieerbaar in u_0 met

$$(f \circ g)'(u_0) = f'(x_0).g'(u_0) = f'(g(u_0)).g'(u_0).$$

Maak gebruik van vraagstuk 121.

124 Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu in a en b en differentieerbaar op (a,b). Als bovendien $f(a) = f(b)$, toon dan aan dat er een $\xi \in (a,b)$ bestaat met de eigenschap $f'(\xi) = 0$.
Maak gebruik van vraagstuk 112.

125 Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu in a en b en differentieerbaar op (a,b). Toon aan dat er dan een $\xi \in (a,b)$ bestaat zodanig dat

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dit is de "Eerste middelwaardestelling" der differentiaalrekening.

126 Zij $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar op (a,b) met overal $f'(x) = 0$. Dan is f constant op (a,b).

127 Zij $a < x_0 < b$, f differentieerbaar op $[a,b] \setminus \{x_0\}$ en continu in x_0 terwijl $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Dan is f ook differentieerbaar in x_0 met afgeleide $f'(x_0) = L$.

128 Zijn f en g continu in a en b en differentieerbaar op (a,b) dan bestaat er een $\xi \in (a,b)$ zodanig dat

$$\{f(a) - f(b)\}.g'(\xi) = \{g(a) - g(b)\}.f'(\xi).$$

Als $g(a) \neq g(b)$ dan is $g'(\xi) \neq 0$ zodat

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dit is de "Tweede middelwaardestelling der differentiaalrekening".

129 Toon aan dat de volgende funkties $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ overal differentieerbaar zijn en bepaal hun afgeleiden

* $f(x) = x^n$, $(n = 0,1,2,...)$
* $f(x) = E(x) = \exp(x)$
* $f(x) = S(x)$

  (Aanwijzing: $\lim\limits_{n \to 0} \frac{S(h)}{h} = 1$ en $\lim\limits_{h \to 0} \frac{C(h) - 1}{h} = 0$)
* $f(x) = C(x)$.

130 Zij $f : [a,b] \to [c,d]$ omkeerbaar met omkeerfunktie
$f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$.

Als f differentieerbaar is in x_0 met $f'(x_0) \neq 0$ en f^{-1} is continu in $u_0 = f(x_0)$ dan is f^{-1} differentieerbaar in u_0 met

$$(f^{-1})'(u_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(u_0))} .$$

131 Zijn I_1 en I_2 intervallen en is $f : I_1 \to I_2$ surjectief dan heeft f elk van de volgende drie eigenschappen zodra f aan twee van deze eigenschappen voldoet

* f is continu op I_1
* f is strikt stijgend (c.q. dalend) op I_1.
* f is omkeerbaar.

In dit geval heeft de omkeerfunktie f^{-1} (= de inverse funktie van f) ook deze drie eigenschappen.

De surjectieve funktie $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ is continu en stijgend op $\mathbb{R}$. Dus is exp omkeerbaar.

Noem de omkeerfunktie $l : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Dan geldt voor $u_0 > 0$: $l'(u_0) = \dfrac{1}{(\exp)'(l(u_0))} = \dfrac{1}{\exp(l(u_0))} = \dfrac{1}{u_0}$.

Opmerking: Als $f : I_1 \to I_2$ (strikt) stijgend (c.q. dalend) is en surjectief dan volgt daaruit reeds dat f continu en omkeerbaar is.

132 Zij f differentieerbaar op (a,b) met
$f'(x) > 0$ $(\geq 0)(\leq 0)(< 0)$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is f stijgend (niet dalend)(niet stijgend)(dalend) op (a,b).

133 $C(x) = 0$ heeft op $[0,2]$ precies één oplossing.

Noem deze oplossing $\frac{\pi}{2}$.

Toon verder aan dat:

$S(\frac{\pi}{2}) = 1$; $S(\pi) = 0$; $S(2\pi) = 0$

$C(\pi) = -1$; $S(\frac{\pi}{4}) = C(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$S(x) > 0$ op $0 < x < \pi$;

$C(2\pi) = 1$;

$S(x + \pi) = -S(x)$

$C(x + \pi) = -C(x)$

$$\left.\begin{array}{l} S(x + 2\pi) = S(x) \\ C(x + 2\pi) = C(x) \end{array}\right\}$$ S en C zijn dus periodiek met periode 2π.

$S(\pm x + \frac{\pi}{2}) = C(x)$ dus $S(\frac{\pi}{2} + x) = S(\frac{\pi}{2} - x)$

$C(x + \frac{\pi}{2}) = -S(x)$

1.8 Integratie volgens Riemann

Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Op het interval $[a,b]$ brengen we een verdeling $V = \{a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b\}$ aan en noemen

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$$M_k = \sup_{a_{k-1} \leq x \leq a_k} f(x) \qquad (k = 1,2,3,\ldots, n)$$

$$m_k = \inf_{a_{k-1} \leq x \leq a_k} f(x) \qquad (k = 1,2,3,\ldots, n).$$

De sommen $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (a_k - a_{k-1})$ en

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (a_k - a_{k-1})$$

heten respectievelijk boven- en ondersom van f over $[a,b]$ behorende bij de verdeling V.

Opgaven:

134 Voor de bij een verdeling V behorende sommen S en s geldt

$(b - a) \cdot m \leqq s \leqq S \leqq (b - a) \cdot M.$

135 Zij V een verdeling en V^* een verdeling die uit V is ontstaan door toevoeging van één deelpunt.

Toon aan dat

$$S_{V*} \leqq S_V$$

en $s_{V*} \geqq s_V$.

136 Zijn V en W verdelingen en V + W de verdeling die uit V (uit W) ontstaat door toevoeging van de deelpunten van W (van V) dan geldt

$$s_V \leqq s_{V+W} \leqq S_{V+W} \leqq S_W.$$

Conclusie: een ondersom is altijd kleiner of gelijk aan een bovensom.

Definitie: $I^* = \inf\limits_{V} S_V$

$$I_* = \sup\limits_{V} s_V \quad .$$

I^* en I_* heten respectievelijk de bovenste en de onderste integraal van f over $[a,b]$.

137 $(b - a) . m \leqq I_* \leqq I^* \leqq (b - a) . M; I^* - I_* \leqq S_V - s_W.$

<u>Definitie</u>. Als $I_* = I^*$ dan heet f integreerbaar over [a,b]. Het getal

I_* ($= I^*$) schrijven we dan als $\int_a^b f(x)dx$.

138 Zij f : [0,1] → R zodanig dat

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ als x rationaal is} \\ f(x) = 1 \text{ als x irrationaal is.} \end{cases}$$

Toon aan dat voor deze funktie geldt $I^* = 1$ en $I_* = 0$, zodat f niet integreerbaar is.

139 Als bij elke $\varepsilon > 0$ een stel sommen S en s gevonden kan worden met de eigenschap $S' - s < \varepsilon$ dan is f integreerbaar (gebruik vraagstuk 137).

140 Zij f monotoon niet dalend op [a,b] en V een verdeling van [a,b] zodanig dat

$a_k = a + k . \frac{b-a}{n}$, $(k = 0,1,2,\ldots, n)$.

Toon aan dat $S_V - s_V = \frac{b-a}{n} \{f(b) - f(a)\}$

en concludeer dat f integreerbaar is over [a,b].

141 Als f integreerbaar en $\geqq 0$ is op [a,b] dan is

$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$.

142 Als f integreerbaar en $\geqq 0$ is op [a,b] en f is in een continuiteitspunt positief dan is $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Zonder bewijs vermelden we de volgende stellingen.

* Als f continu is op [a,b] dan is f integreerbaar op [a,b].
* Als f integreerbaar is over [a,b] en $a \leq c < b$ dan is f ook integreerbaar over [a,c] en [c,b].

Bovendien is $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Als f integreerbaar is over [a,c] en [c,b] terwijl $a < c < b$ dan is f ook integreerbaar over [a,b] en voor de bijbehorende integralen geldt

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Als f en g integreerbaar zijn over [a,b] met $a < b$. dan zijn ook de volgende funkties integreerbaar over [a,b]:

$\lambda . f$ (met λ constant), $f + g$, $f - g$, $f . g$, $\frac{f}{g}$ (onder de extra conditie $\inf\limits_{a \leq x \leq b} |g(x)| > 0$) en $|f|$.

Bovendien geldt dan

$$\int_a^b \lambda . f(x)dx = \lambda . \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Definitie

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \text{ als } a < b.$$

143 $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ zodra al deze integralen bestaan.

144 Bereken $\int_0^1 dx \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 1dx$, $\int_0^1 x\,dx$ en $\int_0^1 x^2dx$ door een aantal boven- en ondersommen uit te rekenen.

Hoofdstelling der integraalrekening:

Als f integreerbaar is op $[a,b]$ en de funktie F is continu in a en b en differentieerbaar op (a,b) met $F'(x) = f(x)$, dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bewijs: Zij $V = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n\}$ een verdeling van $[a,b]$ dan is

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n} \{F(a_k) - F(a_{k-1})\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k) \cdot (a_k - a_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (a_k - a_{k-1}) \text{ met } a_{k-1} < \xi_k < a_k. \end{aligned}$$

Voor elke verdeling V geldt dus

$$s_V \leqq F(b) - F(a) \leqq S_V$$

zodat $\quad I_* \leqq F(b) - F(a) \leqq I^*.$

Aangezien f integreerbaar is geldt $I_* = I^*$,

zodat $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{def}}{=} F(x)\Big|_a^b .$

145 Bereken:

$$\int_a^b E(x)dx \;;\quad \int_a^b S(x)dx \;;\quad \int_a^b C(x)dx.$$

Stelling : Als f integreerbaar is op [a,b] dan is

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \;,\; (a \leq x \leq b) \quad \text{(uniform) continu op } [a,b].$$

Bewijs:

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq$$

$$\leq |x_2 - x_1| \,.\, \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

waaruit de bewering direct volgt.

Stelling: Als f integreerbaar is op [a,b] en f is continu in $x_0 \in [a,b]$ dan is de funktie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ met

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \text{ differentieerbaar in } x_0 \text{ met } F'(x_0) = f(x_0).$$

Bewijs: $$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\right\} - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \{f(x) - f(x_0)\}dx$$

en deze vorm is in absolute waarde

$$\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| . \sup_{x\in[x_0,x_0+h]} |f(x) - f(x_0)| =$$

$$= \sup_{x\in[x_0,x_0+h]} |f(x) - f(x_0)|$$

en dit is wegens de continuiteit van f in $x_0 \leq \varepsilon$ als $|h|$ maar klein genoeg is. Q.E.D.

<u>Toepassing</u>. De funktie $\frac{1}{x}$ is op $x > 0$ continu en dus integreerbaar over elk eindig gesloten interval $[1,t]$ dat rechts van 0 ligt.

We definiëren de funktie $l : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als volgt

$$l(t) = \int_1^t \frac{dx}{x} \quad , (t > 0).$$

De vorige stelling zegt dan dat l op $(0,\infty)$ differentieerbaar is met $l'(x) = \frac{1}{x}$.

Het is duidelijk dat $l(1) = 0$.

Beschouw nu voor een of ander positieve constante a de funktie

$\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met

$$\phi(t) = l(a) + l(t) - l(at)$$

Deze ϕ is differentieerbaar op $(0,\infty)$ met

$$\phi'(x) = l'(x) - l'(ax) . a =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{ax} . a = 0.$$

Daar $\phi(1) = 0$ moet $\phi(x)$ dus steeds gelijk aan 0 zijn.

Gevolg: $l(at) = l(a) + l(t)$, $(a, t > 0)$.

Daar $E(t) > 0$ voor elke $t \in \mathbb{R}$, is $l(E(t))$ op geheel $\mathbb{R}$ gedefinieerd en tevens differentieerbaar met als afgeleide in het punt x

$$l'(E(x)) . E'(x) = \frac{1}{E(x)} . E(x) = 1.$$

Dus is $l(E(t)) - t$ constant op $\mathbb{R}$ met als waarde 0.

Gevolg: $l(E(t)) = t$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Daar $l'(t) = \frac{1}{t} > 0$ op $t > 0$, is l monotoon stijgend.

Op $t > 0$ geldt ook $E(l(t)) = t$; stel namelijk maar eens dat $E(l(t)) = u$, dan volgt daaruit dat $l(E(l(t))) = l(t) = l(u)$ en omdat l monotoon is moet $u = t$ zijn.

De funkties E en l zijn dus elkaars inverse.

146 Als $b(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$,

toon dan aan dat $b(t) + b(\frac{1}{t})$ constant is op $t > 0$.

147 Zij $T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$ op $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.

Toon aan dat $b(T(x)) = x$ voor alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Voor $x = \frac{\pi}{4}$ levert dit : $\frac{\pi}{4} = b(1)$.

Toon aan dat $|b(t)| < \frac{\pi}{2}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ en dat $T(b(t)) = t$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

De funkties b en T zijn dus elkaars inverse.

Transformatie van integralen.

Zij ϕ differentieerbaar op $[a,b]$ met integreerbare afgeleide; $\alpha \leq \phi(x) \leq \beta$ voor alle $x \in [a,b]$.

Zij F differentieerbaar op $[\alpha,\beta]$ met continue afgeleide f.

De funktie $F \circ \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $(F \circ \phi)(x) = F(\phi(x))$ is dan differentieerbaar op $[a,b]$ met als afgeleide

$$F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

Uit de gegevens volgt dat deze afgeleide integreerbaar is, zodat volgens de hoofdstelling geldt

$$\int_a^b f(\phi(x)) \,.\, \phi'(x)dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Volgens dezelfde hoofdstelling geldt ook

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

zodat $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$

Voorbeelden. We berekenen $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (vergelijk 147)

Voor ϕ nemen we de funktie $T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$ op $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Dan is $\phi(0) = 0$, $\phi(\frac{\pi}{4}) = 1$ (volgens 134) en $\phi'(x) = \frac{1}{C^2(x)} > 0$

zodat ϕ stijgend is : $0 \leq \phi(x) \leq 1$.

Bovengenoemde integraal kan nu als volgt worden berekend:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{4})} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\phi^2(x)} \,.\, \phi'(x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\frac{S^2(x)}{C^2(x)}} \,.\, \frac{1}{C^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Zij $\phi(x) = ax$ op $x > 0$ (a is een positieve constante) en

$f(x) = \frac{1}{x}$ op $x > 0$. Als $b > 0$ dan is

$$\int_a^{a.b} \frac{dx}{x} = \int_{\phi(1)}^{\phi(b)} \frac{dx}{x} = \int_1^b \frac{1}{\phi(x)} \,.\, \phi'(x)dx = \int_1^b \frac{1}{ax} \,.\, a\,dx =$$

$$= \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

Gevolg: $l(ab) = l(a) + l(b)$, $(a,b > 0)$.

Partiële integratie

148 Als F en G op [a,b] differentieerbaar zijn met integreerbare afgeleiden f resp. g dan geldt:

$$\int_a^b f(x) \,.\, G(x)dx = F(x) \,.\, G(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \,.\, g(x)dx.$$

Voorbeeld.

$$\int_1^t l(x)dx = \int_1^t 1 \,.\, l(x)dx =$$

$$= x \,.\, l(x) \Big|_1^t - \int_1^t x \,.\, \frac{1}{x}\, dx = t\, l(t) - t + 1,\ (t > 0).$$

Als aanvulling op vraagstuk 148 vermelden we zonder bewijs de volgende stelling.

Als f en g integreerbaar zijn op [a,b] en

$$F(t) = A + \int_a^t f(x)dx \text{ en } G(t) = B + \int_a^t g(x)dx \text{ (A,B constant)}$$

dan geldt

$$\int_a^b f(t)\, G(t)dt = F(t) \,.\, G(t) \Big|_a^b - \int_a^b F(t)\, g(t)dt.$$

1.9 Funkties van begrensde variatie

Zij f gedefinieerd op [a,b]. Bij een verdeling V van dit interval construeren we de som

$$\sum_V = \sum_k \left| f(a_k) - f(a_{k-1}) \right| .$$

Als de collectie van sommen $\sum_V$, waarbij V alle mogelijke verdelingen van [a,b] doorloopt, begrensd is:

$\sum_V \leq G$ voor alle V,

dan heet f van begrensde variatie op [a,b].

149 Een monotone funktie op [a,b] is van begrensde variatie.

150 Als f integreerbaar is op [a,b] dan is

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $(a \leq x \leq b)$ van begrensde variatie op [a,b].

151 Als f differentieerbaar is op [a,b] met begrensde afgeleide dan is f van begrensde variatie op [a,b].

152 Als f van begrensde vairatie is op [a,b] met $a < b$ en c ligt tussen a en b dan is f ook van begrensde variatie op [a,c] en [c,b]. Evenzo volgt uit de begrensde variatie op [a,c] en [c,b] die op [a,b].

<u>Definitie</u>: Als f van begrensde variatie is op [a,b] dan heet het

getal $\sigma = \operatorname{Sup}_V \sum_V$

de totale variatie van f over [a,b].

153 Zij f van begrensde variatie op [a,b], $\sigma(\alpha,\beta)$ de totale variatie van f over $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ en $\alpha < \gamma < \beta$ dan geldt

* $\sigma(\alpha,\beta) \geq 0$
* $\sigma(\alpha,\gamma) + \sigma(\gamma,\beta) = \sigma(\alpha,\beta)$.
* $\sigma(a,x)$ is monotoon niet dalend in x.
* $\sigma(\alpha,\beta) \geq |f(\beta) - f(\alpha)|$
* $\sigma(a,x) - f(x)$ is monotoon niet dalend.

154 Aangezien $f(x) = \sigma(a,x) - \{\sigma(a,x) - f(x)\}$ is f te schrijven als het verschil van twee monotoon niet-dalende funkties.
Gevolg: f is integreerbaar over een interval waarop f van begrensde variatie is.

155 Als f en g op $[a,b]$ van begrensde variatie zijn dan ook $|f|$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$.
Is bovendien $|g(x)| \geq \delta > 0$ voor alle $x \in [a,b]$ dan is ook $\frac{f}{g}$ van begrensde variatie op $[a,b]$.

1.10 <u>De (Riemann -) Stieltjes integraal.</u>

Op het interval $[a,b]$ zijn gegeven de funkties F en G. Bij een verdeling V van $[a,b]$ construeren we de som

$$R(V) = \sum_k F(\xi_k)\,\{G(a_k) - G(a_{k-1})\}$$

waarbij $a_{k-1} \leq \xi_k \leq a_k$, $k = 1,2,3,\ldots, n$.

Zij $\delta_V = \max_k |a_k - a_{k-1}|$; δ_V heet de grofheid van de verdeling V.

Als voor elke rij verdelingen V_n van $[a,b]$ met $\delta_{V_n} \to 0$ de bijbehorende rij van sommen $R(V_n)$ altijd (hoe de ξ's ook gekozen zijn) convergent is dan heet F integreerbaar naar G over $[a,b]$.
Hierbij is $\lim_{n\to\infty} R(V_n)$ onafhankelijk van de keuze van de rij verdelingen V_n als maar voldaan is aan $\delta_{V_n} \to 0$. Ga dit na.
Voor $\lim_{n\to\infty} R(V_n)$ schrijven we

$$\int_a^b F(x)\,dG(x)$$ en deze integraal heet de (Riemann -) Stieltjes integraal van F naar G over $[a,b]$.

Hieronder vermelden we zonder bewijs een aantal stellingen betreffende Stieltjes integralen. Voor een nadere behandeling van dit integraal begrip verwijzen we naar [4], deel III, hoofdstuk XV, §5.

Stelling. Als F integreerbaar is naar G over [a,b] dan is ook G integreerbaar naar F over [a,b]. Voor de bijbehorende Stieltjes integralen geldt dan:

$$\int_a^b F(x)dG(x) + \int_a^b G(x)dF(x) = F(x).G(x)\Big|_a^b .$$

Stelling. Als F_1 en F_2 integreerbaar zijn naar G dan is dat ook het geval met $F_1 + F_2$ en $F_1 - F_2$ terwijl

$$\int_a^b (F_1(x) \pm F_2(x))dG(x) = \int_a^b F_1(x)dG(x) \pm \int_a^b F_2(x)dG(x).$$

$$\text{en} \int_a^b G(x)d\{F_1(x) \pm F_2(x)\} = \int_a^b G(x)dF_1(x) \pm \int_a^b G(x)dF_2(x).$$

Stelling. Zij F integreerbaar naar G over [a,b] en zij $a < c < b$.

Dan is F ook integreerbaar naar G over [a,c] en [c,d], terwijl

$$\int_a^c F(x)dG(x) + \int_c^b F(x)dG(x) = \int_a^b F(x)dG(x).$$

Opmerking. Uit het bestaan van

$$\int_a^c F(x)dG(x) \text{ en } \int_c^b F(x)dG(x), \quad (a < c < b)$$

kan men in het algemeen niet concluderen dat F integreerbaar is naar G over [a,b].

Stelling. Als F continu is op [a,b] en G is op dit interval monotoon dan bestaat

$$\int_a^b F(x)dG(x).$$

Opgave. In de laatst genoemde stelling mag "monotoon" worden vervangen door "van begrensde variatie".

Stelling. Is F op [a,b] integreerbaar en voldoet G aan een z.g. Lipschitz-conditie:

$$|G(x_1) - G(x_2)| \leqq L.|x_1 - x_2|,$$

waarbij L constant en $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$,

dan is F integreerbaar naar G over [a,b].

Stelling. Als F integreerbaar is op [a,b] en G is te schrijven als

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad (a \leqq x \leqq b;\ g \text{ integreerbaar op } [a,b])$$

dan bestaat $\int_a^b F(x)dG(x)$

en bovendien geldt $\int_a^b F(x)dG(x) = \int_a^b F(x)g(x)dx$

waarbij de laatste integraal een (gewone) Riemann-integraal is.

Opgaven.

156 Zij F integreerbaar en zij G differentieerbaar op [a,b] met integreerbare afgeleide g. Dan is

$$\int_a^b F(x)dG(x) = \int_a^b F(x) \, . \, g(x)dx.$$

157 Zij F continu en G van begrensde variatie op [a,b].
Toon aan dat:

$$\left|\int_a^b F(x)dG(x)\right| \leqq M \, . \, \sigma$$

waarbij $M = \max_{x\in[a,b]} |F(x)|$ en σ de totale variatie van G over [a,b] is.

1.11. De sommatieformule van Euler.

Opgaven.

158 Als f continu is dan is (voor $n \in \mathbb{N}$ en $0 < \varepsilon < 1$)

$$\int_{n-\varepsilon}^{n+\varepsilon} f(x)d[x] = f(n).$$ ([x] is het grootste gehele getal $\leq x$).

159 Als f continu is dan is (voor $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n$; $0 < \varepsilon < 1$)

$$\int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} f(x)d[x] = \sum_{k=m}^{n} f(k).$$

Als f continu is dan is dus

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} f(x)d[x] = \int_{m-0}^{n+0} f(x)d[x] =$$

$$= \int_{m}^{n} f(x)dx - \int_{m-0}^{n+0} f(x)d\psi_1(x) \text{ waarbij } \psi_1(x) = x - [x] - \tfrac{1}{2}.$$

Nu is $$\int_{m-0}^{n+0} f(x)d\,\psi_1(x) = f(x)\,.\,\psi_1(x)\Big|_{m-0}^{n+0} - \int_{m-0}^{n+0} \psi_1(x)\,.\,df(x).$$

Is f bovendien differentieerbaar met integreerbare afgeleide dan is

$$\int_{m-0}^{n+0} \psi_1(x)df(x) = \int_{m-0}^{n+0} \psi_1(x)f'(x)dx = \int_{m}^{n} \psi_1(x)f'(x)dx =$$

$$= \int_{m}^{n} f'(x)d\psi_2(x) \text{ waarbij } \psi_2(x) = \beta_1 + \int_{0}^{x} \psi_1(x)dx, \ (\beta_1 \text{ constant}).$$

Verder is $$\int_{m}^{n} f'(x)d\psi_2(x) = f'(x)\psi_2(x)\Big|_{m}^{n} - \int_{m}^{n} \psi_2(x)df'(x).$$

Is f voldoende vaak differentieerbaar dan laat bovenstaande procedure zich een aantal malen voortzetten en we vinden

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx - f(x)\psi_1(x)\Big|_{m-0}^{n+0} + f'(x)\psi_2(x)\Big|_m^n + - + \ldots.$$

$$+ (-1)^{r-1} f^{(r)}(x)\ \psi_{r+1}(x)\Big|_m^n + (-1)^r \int_m^n \psi_{r+1}(x)\ df^{(r)}(x).$$

waarbij $\psi_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$,

$$\psi_{v+1}(x) = \beta_v + \int_0^x \psi_v(x)dx,\ v \geqq 1,\ \beta_v \text{ constant.}$$

Hierbij kiezen we de β's zodanig dat

$$\int_0^1 \psi_{v+1}(x)dx = 0,\ v \geqq 0.$$

Het gevolg van deze keuze van de β's is dat de funkties $\psi_v (v \geqq 1)$ periodiek worden met periode 1.

Opgaven: Toon aan dat $\beta_1 = \frac{1}{12}$, $\beta_2 = 0$.

Bewijs dat: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = l(n) + \frac{1}{2} - \int_1^n \frac{\psi_1(x)}{x^2} dx.$

Bewijs dat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^{s+1}} dx,\ (s > 1).$$

Bewijs dat:

$$l(n!) = (n + \tfrac{1}{2})l(n) - n + 1 + \int_1^n \frac{\psi_1(x)}{x} dx.$$

1.12. De tweede stelling van het gemiddelde voor integralen :

Zij de funktie h op [a,b] integreerbaar en zij ϕ op dit interval monotoon. Dan bestaat er een getal $\zeta \in [a,b]$ zodanig dat

$$\int_a^b \phi(x) \, . \, h(x)dx = \phi(a) \int_a^\zeta h(x)dx + \phi(b) \int_\zeta^b h(x)dx.$$

Bewijs: Voor de eenvoud nemen we ϕ monotoon niet-dalend.

Definiëren we $H(x) = \int_a^x h(u)du$ dan is

$$\int_a^b \phi(x)\, h(x)dx = \int_a^b \phi(x)d\, H(x) =$$

$$= \phi(b)\, H(b) - \phi(a)\, H(a) - \int_a^b H(x)\, d\, \phi(x) =$$

$$= \phi(b)\, H(b) - \int_a^b H(x)\, d\, \phi(x).$$

Nu is

$$\{\phi(b) - \phi(a)\}\min_x H(x) \leqq \int_b^a H(x)d\, \phi(x) \leqq \{\phi(b) - \phi(a)\}.\, \max_x H(x)$$

zodat $\int_a^b H(x)d\, \phi(x) = \{\phi(b) - \phi(a)\}.\, H(\zeta)$ voor zekere $\zeta \in [a,b]$.

Dus $\int_a^b \phi(x)\, h(x)dx = \phi(b)\, H(b) - \{\phi(b) - \phi(a)\}\, H(\zeta) =$

$$= \phi(a)\, H(\zeta) + \phi(b)\, .\, \{H(b) - H(\zeta)\} =$$

$$= \phi(a) \int_a^\zeta h(x)dx + \phi(b) \int_\zeta^b h(x)dx. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Opgave: Zij ϕ monotoon niet dalend en h integreerbaar op [a,b].
Als A en B constanten zijn die voldoen aan

$$A \leqq \lim_{x\downarrow a} \phi(x)$$

$$B \geqq \lim_{x\uparrow b} \phi(x)$$

dan bestaat er een $\zeta \in [a,b]$ zodanig dat

$$\int_a^b \phi(x)\, h(x)dx = A\int_a^\zeta h(x)dx + B\int_\zeta^b h(x)dx.$$

Hoofdstuk 2.

Fourier-reeksen *)

2.1. De formules van Euler

Onder een trigonometrische reeks verstaan we een reeks van de gedaante

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x).$$

In deze paragraaf nemen we aan dat deze reeks voor alle $x \in \mathbb{R}$ convergeert en de bijbehorende som zullen we aangeven met $U(x)$. Het verband tussen $U(x)$ en de coëfficienten a_k, b_k werd reeds door Euler aangegeven. Hij ging als volgt te werk.

Uit $U(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x)$

volgt $\int_{-\pi}^{\pi} U(x)dx = \pi\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\,x\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin k\,x\,dx)$.

Wegens $\int_{\pi}^{\pi} \cos k\,x\,dx = 0$ en $\int_{-\pi}^{\pi} \sin k\,x\,dx = 0$, $(k = 1,2,3, \ldots)$

vinden we dus $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x)dx$.

Om a_n en b_n uit te drukken in U wordt de reeks met $\cos n\,x$ resp. $\sin n\,x$ vermenigvuldigd en dan van $-\pi$ naar π geïntegreerd.
Dit levert

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos n\,x\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\,x\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx)$$

*) In dit hoofdstuk gebruiken we voor S(x) en C(x) de meer klassieke notatie sin x en cos x.

en $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin n x \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \, dx +$

$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cos k x \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \sin k x \, dx).$

Men gaat gemakkelijk na dat

$$2 \cos n x \cos k x = \cos (n+k)x + \cos (n-k)x$$

$$2 \cos n x \sin k x = \sin (n+k)x - \sin (n-k)x$$

$$2 \sin n x \cos k x = \sin (n+k)x + \sin (n-k)x$$

$$2 \sin n x \sin k x = \cos (n-k)x - \cos (n+k)x$$

Voor $n \neq k$ volgt hieruit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cos k x \, dx = \frac{\sin(n+k)x}{2(n+k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-k)x}{2(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

evenals

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \sin k x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cos k x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \sin k x \, dx = 0.$$

Is $n = k$ dan vinden we

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cos n x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \sin n x \, dx = \pi$$

en $\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \sin n x \, dx = 0.$

Een rechtstreekse substitutie van deze formules leidt tot de volgende formules van Euler:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos n x \, dx, \quad (n = 0,1,2,3, \ldots)$$

en $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \sin n x \, dx, \quad (n = 1,2,3, \ldots).$

Bovenstaande methode ter bepaling van het verband tussen U(x) en de getallen a_n en b_n is natuurlijk alleen correct als de termsgewijze integratie toegestaan is.
We zullen ons om deze kwestie niet verder bekommeren en een strenge theorie opbouwen door uit te gaan van de formules van Euler.

2.2. Fourier-reeksen

Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiek met periode 2π, $f(x + 2\pi) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en zij f tevens integreerbaar op $[-\pi,\pi]$. Bijgevolg is f dan automatisch integreerbaar op elk interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
We definiëren

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \, dx , \qquad (n = 0,1,2,3, \ldots)$$

en

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x \, dx , \qquad (n = 1,2,3, \ldots).$$

Met behulp van deze getallen, de Fourier-constanten van f, construeren we nu, zuiver formeel, de volgende trigonometrische reeks

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

en noemen deze de bij f behorende Fourier-reeks.
Naar aanleiding van deze formele constructie kan men vragen voor welke waarden van x deze reeks convergeert en wat in geval van convergentie de som van de reeks is.
Om deze vragen (ten dele) te kunnen beantwoorden beschouwen we de partiële sommen van de Fourier-reeks in het punt x_0:

$$S_N(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} (\cos n\, x_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\, x\, dx + \sin n\, x_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\, x\, dx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\{\cos n\, x_0 \cos n\, x + \sin n\, x_0 \sin n\, x\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n(x - x_0)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\ \{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(x - x_0)\}dx.$$

Aangezien de integrand in de laatste integraal de periode 2π heeft kunnen we ook schrijven

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x)\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(x - x_0)\}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + u)\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n\, u\}du.$$

We tonen aan dat

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos N\, u = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{als } \sin\frac{u}{2} \neq 0.$$

We gaan uit van

$$\begin{array}{l} \sin(t + a) = \sin t \cos a + \cos t \sin a \\ \underline{\sin(t - a) = \sin t \cos a - \cos t \sin a} \ - \\ \sin(t + a) - \sin(t-a) = 2 \cos t \sin a \end{array}$$

en substitueren hierin $a = \frac{u}{2}$ en $t = u, 2u, 3u, \ldots, Nu$.
Optelling levert dan

$$\sin\, (N + \tfrac{1}{2})u - \sin\frac{u}{2} = 2 \sin\frac{u}{2}\ (\cos u + \cos 2\, u + \ldots + \cos N\, u)$$

of $\sin\, (N + \tfrac{1}{2})u = 2 \sin\frac{u}{2}\ .\ (\tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos N\, u)$

waaruit de bewering direct is af te lezen.

Voor $u = 0$ geldt

$$\tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos N u = N + \tfrac{1}{2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} .$$

Voor $S_N(x_0)$ vinden we dus $S_N(x_0) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + u) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}\, du.$

Voor de verdere bestudering van deze integraal is het volgende lemma van fundamenteel belang.

Lemma (Riemann).

Zij f op $[a,b]$ integreerbaar dan is

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Bewijs: Alvorens het algemene bewijs te leveren beschouwen we ter illustratie het geval dat f continu differentieerbaar is:

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = f(x). \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \Big|_a^b - \int_a^b f'(x). \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, dx;$$

in absolute waarde is dit

$$\leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| dx$$

hetgeen tot nul nadert als $\lambda \to \infty$.

Het algemene geval: Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Daar f integreerbaar is op $[a,b]$ kan men een verdeling

$V = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b\}$ kiezen zodanig dat de bijbehorende boven- en ondersom minder dan $\frac{\varepsilon}{2}$ van elkaar verschillen.

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \sum_{r=1}^{n} \int_{a_{r-1}}^{a_r} f(x) \cos \lambda x \, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{a_{r-1}}^{a_r} \{f(x) - f(a_r)\} \cos \lambda x \, dx + \sum_{r=1}^{n} \int_{a_{r-1}}^{a_r} f(a_r) \cos \lambda x \, dx.$$

De eerste van deze twee sommen is in absolute waarde

$$\leq \sum_{r=1}^{n} (a_r - a_{r-1}).(M_r - m_r) = S - s < \frac{\varepsilon}{2}$$

omdat $|f(x) - f(a_r)| \leqq M_r - m_r$ op $a_{r-1} \leqq x \leqq a_r$,

en de tweede

$$= \left| \sum_{r=1}^{n} f(a_r) \frac{\sin \lambda a_r - \sin \lambda a_{r-1}}{\lambda} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{r=1}^{n} M \cdot \frac{2}{\lambda} = \frac{2nM}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$$

als λ maar groot genoeg is ($M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$).

Dus: $\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \right| < \varepsilon$ als λ maar groot genoeg wordt gekozen.

Q.E.D.

Toepassing op $S_N(x_0)$.

We schrijven voor $0 < \delta < \pi$

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right\} f(x_0+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Daar $\dfrac{f(x_0+u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$ op $[-\pi,-\delta]$ en $[\delta,\pi]$ integreerbaar is gaan van

bovenstaande integralen de eerste en de laatste naar nul als $N \to \infty$.

Het wel of niet bestaan van $\lim_{N\to\infty} S_N(x_0)$ hangt dus alleen af van de middelste integraal.

Conclusie: Voor elke vaste $\delta \in (0,\pi]$ geldt

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ S_N(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right\} = 0.$$

Aangezien $\delta > 0$ willekeurig klein (doch vast) gekozen kan worden hangt het gedrag van $S_N(x_0)$ voor zeer grote waarden van N eigenlijk alleen af van de waarden van $f(x)$ voor x dicht bij x_0.
Deze uitspraak wordt wel het "localisatie principe van Riemann" genoemd.

Lemma. Als $0 < \delta \leq \pi$ dan is

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du - \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} du \right\} = 0.$$

Bewijs: Het verschil der bovenstaande integralen is gelijk aan

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)\left\{ \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right\} \sin(N+\tfrac{1}{2})u \, du.$$

De funktie $\dfrac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{u - 2 \sin \frac{u}{2}}{2 u \sin \frac{u}{2}} =$

$$= \frac{u - 2\left(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{2^3.3!} + \frac{u^5}{2^5.5!} - + \dots\right)}{2 u \left(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{2^3.3!} + \frac{u^5}{2^5.5!} - + \dots\right)} =$$

$$= \frac{u \cdot \left(\frac{1}{2^2.3!} - \frac{u^2}{2^4.5!} + \dots\right)}{1 - \frac{u^2}{2^2.3!} + \frac{u^4}{2^4.5!} - + \dots)}$$

is op $[-\delta,\delta]$ continu (en dus begrensd integreerbaar) zodat volgens het lemma van Riemann

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)\left\{ \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right\}\sin(N+\tfrac{1}{2})u \, du = 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Voor ons doel kunnen we dus volstaan met de bestudering van

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} du,$$ $(\delta > 0)$ in plaats van

$S_N(x_0)$.

Lemma. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Bewijs: Toon eerst aan dat genoemde limiet bestaat, door bijv.

$\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx$, partiëel te integreren en daarna A naar ∞ te laten gaan.

Nu is $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi (\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos Nx)dx =$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \quad \text{Q.E.D.}$$

Stelling. (Lipschitz)

Als er een positieve constante α bestaat zodanig dat de funkties

$\displaystyle\frac{f(x_0+u) - A}{u^\alpha}$ en $\displaystyle\frac{f(x_0-u) - B}{u^\alpha}$ (waarbij A en B constanten zijn) op

$u > 0$ begrensd zijn, dan convergeert de Fourier-reeks van f in het punt x_0 met als som $\displaystyle\frac{A+B}{2}$.

Deze stelling is een bijzonder geval van de volgende.

Stelling. (Dini).

Als er een constante S bestaat zodanig dat de (mogelijk oneigenlijke) integraal

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S|}{u}\,du$$

voor zekere $\delta > 0$ convergeert, dan convergeert de Fourier-reeks van f in x_0 met als som S.

Bewijs: Bij gegeven $\varepsilon > 0$ kiezen we $\delta' > 0$ zo klein dat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta'} \frac{|f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S|}{u} \, du < \varepsilon.$$

Dan is

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} \, du =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S\} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} \, du +$$

$$+ \frac{2S}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u} \, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta'} \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S}{u} \sin (N+\tfrac{1}{2})u \, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta'}^{\delta} \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S}{u} \sin (N+\tfrac{1}{2})u \, du +$$

$$+ \frac{2S}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin u}{u} \, du.$$

De eerste van deze integralen is in absolute waarde $< \varepsilon$ voor alle N. De tweede heeft voor $N \to \infty$ volgens het lemma van Riemann de limiet 0, terwijl de derde voor $N \to \infty$ convergeert naar

$$\frac{2S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \, du = \frac{2S}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = S.$$

Hiermee is de stelling van Dini aangetoond.

Stelling (Dirichlet). Indien f in de buurt van x_0 (d.w.z. op zeker interval $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ met $\delta > 0$) van begrensde variatie is dan convergeert de bij f behorende Fourierreeks in het punt x_0 met als som

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

waarbij $f(x_0+0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$ en

$$f(x_0-0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\uparrow x_0} f(x).$$

Bewijs: $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x_0+u)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x_0-u)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du.$$

We beperken ons tot de bestudering van het gedrag van

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x_0+u)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du$$

voor $N \to \infty$. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat $f(x_0+u)$ monotoon niet-dalend is op $0 \leqq u \leqq \delta$.

We schrijven $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x_0+u)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta'} \{f(x_0+u) - f(x_0+0)\}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta'}^{\delta} \{f(x_0+u) - f(x_0+0)\}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} f(x_0+0)\int_0^\delta \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du.$$

Volgens de tweede middelwaardestelling der integraalrekening (paragraaf 1.12) is

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta'}\{f(x_0+u) - f(x_0+0)\}\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\{f(x_0+\delta') - f(x_0+0)\}\int_{\zeta_N}^{\delta'}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du$$

en dit is in abs. waarde

$\leqq \frac{1}{\pi}\{f(x_0+\delta') - f(x_0+0)\}.\ 2G$ voor alle $N \in \mathbb{N}$, waarbij

$$G = \max_x \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right|.$$

We kunnen δ' dus zodanig fixeren dat

$$(0 \leqq)\ \frac{1}{\pi}\{f(x_0+\delta') - f(x_0+0)\}.\ 2G < \varepsilon \text{ voor alle } N \in \mathbb{N}.$$

Volgens het lemma van Riemann is (bij vaste δ' en δ)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta'}^{\delta}\{f(x_0+u) - f(x_0+0)\}\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du = 0.$$

Verder is

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\,f(x_0+0)\int_0^{\delta}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du = \tfrac{1}{2}f(x_0+0).$$

Resumerend kunnen we zeggen dat hiermee de stelling van Dirichlet bewezen is; de behandeling van

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} f(x_0-u)\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\,du$ verloopt namelijk analoog aan het

bovenstaande.

2.3. De sommen van Fejér

In deze paragraaf besteden we aandacht aan

$$\sigma_N(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_N(x)}{N+1}$$

waarbij $S_k(x)$ de k-de partiële som is van de Fourier-reeks van een funktie f.

Voor $\sigma_N(x)$ kunnen we schrijven

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u) \frac{\sin(k+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u) \frac{\sum_{k=0}^{N} \sin(k+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

Men gaat gemakkelijk na dat

$$\cos(t+a) - \cos(t-a) = -2 \sin t \sin a.$$

Nemen we in deze formule achtereenvolgens

$t = \frac{u}{2}$, $\frac{3}{2} u$, $\frac{5}{2} u$, ..., $\frac{2N+1}{2} u$ en steeds $a = \frac{u}{2}$ dan vindt men door

optelling dat

$$\cos\,(N+1)u - 1 = -2 \sin \frac{u}{2} \sum_{k=0}^{N} \sin(k+\tfrac{1}{2})u.$$

Voor $\sigma_N(x)$ kunnen we dus schrijven

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u) \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} \cdot \frac{1 - \cos(N+1)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u) \left\{ \frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2 du.$$

Nemen we voor f de funktie die constant 1 is, dan is het zonder meer duidelijk dat $\sigma_N(x) = 1$ voor alle $N \in \mathbb{N}$, met als gevolg

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2 du = 1, \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Stelling. Als f in het punt x_0 continu is dan geldt

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(x_0) = f(x_0).$$

Bewijs: Uit het voorgaande leidt men moeiteloos af dat

$$\sigma_N(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{\pi}^{\pi} \{f(x_0+u) - f(x_0)\} \left\{ \frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2 du =$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right\}.$$

Hierin fixeren we δ zodanig dat

$$|f(x_0+u) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor alle } |u| \leq \delta, \quad (0 < \delta \leq \pi).$$

De middelste integraal is dan in absolute waarde

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi(N+1)} \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2 du \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2 du = \frac{\varepsilon}{2}$$

en de overige (in absolute waarde)

$$\leq \frac{2M}{2\pi(N+1)} \int_{\delta}^{\pi} \left\{\frac{\sin \frac{N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}\right\}^2 du \leq$$

$$\leq \frac{2M}{2\pi(N+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{(\sin \frac{u}{2})^2} du \leq$$

$$\leq \frac{M}{\pi(N+1)} \cdot (\pi - \delta) \cdot \frac{1}{(\sin \frac{\delta}{2})^2} <$$

$$< \frac{M}{N+1} \cdot \frac{1}{(\sin \frac{\delta}{2})^2}$$

waarbij $M = \sup\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|$.

Voor voldoend grote waarden van N geldt dus

$|\sigma_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Q.E.D.

Gevolg: Als f continu is in x_0 en de Fourierreeks van f convergeert in dit punt dan heeft deze Fourier-reeks in x_0 de som $f(x_0)$.

Bewijs: Gegeven is dat $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ bestaat.
Noemen we de waarde van deze limiet L dan moeten we aantonen dat $L = f(x_0)$. Omdat $S_n(x_0) \to L$ voor $n \to \infty$, convergeert ook $\sigma_n(x_0)$ naar L (ga dit na). Op grond van de vorige stelling weten we reeds dat $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ voor $n \to \infty$. Daar $\sigma_n(x_0)$ hoogstens één limiet kan hebben volgt hieruit dat $L = f(x_0)$.

Opgave: Toon aan dat $\sigma_n(x)$ op $[-\pi,\pi]$ uniform naar f(x) convergeert als f continu (en dus uniform continu) is op dit interval.
Leid hieruit af dat een funktie die continu is op een interval $[a,b]$ zich ε-nauwkeurig door een polynoom laat benaderen; anders gezegd:

bij elke $\varepsilon > 0$ is een polynoom $P_\varepsilon(x)$ te vinden zodanig dat

$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ voor alle $x \in [a,b]$.

Dit is de z.g. approximatiestelling van Weierstrass.

Het verschijnsel van Gibbs.

Men gaat gemakkelijk na dat, als

$m \leqq f(x) \leqq M$, voor alle $x \in [-\pi,\pi]$

ook geldt dat

$m \leqq \sigma_n(x) \leqq M$, voor alle $x \in [-\pi,\pi]$ en alle $n \in \mathbb{N}$.

Het gedrag van de funktie $S_n(x)$ kan daarentegen in dit opzicht aanzienlijk afwijken van dat van $\sigma_n(x)$. De grafiek van $S_n(x)$ kan nogal buiten de grenzen van $f(x)$ uitschieten. We zullen dit meer in detail laten zien voor de funktie f die als volgt gedefinieerd is

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} \text{ voor } x \in (0,2\pi)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x+2\pi) = f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

De Fourier-reeks van deze funktie convergeert in elk punt x naar $f(x)$ (ga dit na).

Aangezien f een oneven funktie is zijn alle Fourier-constanten a_k, $(k = 1,2,3,\ldots.)$ gelijk aan nul; ook $a_0 = 0$ wegens

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Voor b_k vinden we

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin k\, x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin k\, x\, dx =$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x \sin k\, x\, dx = \frac{1}{k}\,,\ (k = 1,2,3,\ldots).$$

We vinden dus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k x}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Van deze Fourier-reeks bekijken we de partiële som:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k x}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \cos k u \, du =$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} \cos k u\right) du = -\tfrac{1}{2} \int_0^x du + \int_0^x \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k u\right) du =$$

$$= -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} \, du.$$

Nemen we hierin $x = \frac{2}{2n+1}$ (waarom?) dan is

$$S_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = -\frac{\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n+1}} \, dt,$$

waaruit men gemakkelijk afleidt dat

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Nu is $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = 1{,}85 \ldots$ en $f(+0) = \frac{\pi}{2} = 1{,}57 \ldots$,

zodat de grafiek van $S_n(x)$ voor grote waarden van n aanzienlijk buiten de grenzen van f blijft uitsteken.

Integratie van Fourier-reeksen

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodiek met periode 2π en integreerbaar over $[-\pi,\pi]$.

Zuiver formeel kunnen we van zo'n funktie de Fourier-reeks beschouwen:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k x + b_k \sin k x).$$

In deze paragraaf zullen we aantonen dat deze formele relatie na termsgewijze integratie overgaat in een gelijkheid:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{a_0}{2}(x_2-x_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\sin kx_2 - \sin kx_1}{k} - b_k \frac{\cos kx_2 - \cos kx_1}{k}\right)$$

voor alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Bewijs: We definiëren $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als volgt

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{a_0}{2} x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Het is duidelijk dat F continu is op geheel $\mathbb{R}$.

Verder is F op elk eindig gesloten interval van begrensde variatie (vergelijk vraagstuk 150) hetgeen direct is in te zien door te schrijven:

$$F(x) = -\frac{a_0}{2} x + \int_{-\pi}^{x} \frac{|f(t)| + f(t)}{2} dt - \int_{-\pi}^{x} \frac{|f(t)| - f(t)}{2} dt.$$

Bovendien is F periodiek met periode 2π.

Immers

$$F(x + 2\pi) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}(x + 2\pi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x+2\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}(x + 2\pi) =$$

$$= F(x) + \int_{x}^{x+2\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = F(x)$$

wegens $\int_{x}^{x+2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \pi a_0$.

Volgens Dirichlet convergeert de Fourier-reeks van F in elk punt $x \in \mathbb{R}$ naar $F(x)$.

De Fourier-constanten van F zijn:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

en voor $k = 1,2,3, \ldots$ is

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\,\frac{\sin kx}{k} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,F(x)\,\frac{\sin kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,d\,F(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dF(x) =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,.\,(f(x) - \frac{a_0}{2})dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k}$$

en $B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)d\,\frac{-\cos kx}{k} =$

$$= \frac{1}{\pi}\,F(x)\,\frac{-\cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}\,dF(x) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx(f(x) - \frac{a_0}{2})dx = \frac{a_k}{k}$$

waarbij a_k en b_k de Fourier-constanten van f zijn.
We hebben dus aangetoond dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right).$$

Hieruit volgt:

$$F(x_2)-F(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\{-\frac{b_k}{k}(\cos kx_2 - \cos kx_1) + \frac{a_k}{k}(\sin kx_2 - \sin kx_1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx + b_k\int_{x_1}^{x_2}\sin kx\,dx\right).$$

Voor $F(x_2) - F(x_1)$ kunnen we schrijven

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\pi}^{x_2} f(t)dt - \frac{a_0}{2}\,x_2 - \int_{-\pi}^{x_1} f(t)dt + \frac{a_0}{2}\,x_1 =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt - \frac{a_0}{2}\,(x_2 - x_1).$$

Samenvattend geldt dus voor alle $x_1, x_2 \in R$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{x_1}^{x_2} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx.$$

Opgave: Toon aan dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De ongelijkheid van Bessel

Zij T_n een trigonometrisch polynoom van de orde n:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Voor een gegeven integreerbare funktie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ proberen we de coëfficienten in T_n zodanig te bepalen dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - T_n(x)\}^2 dx$$

minimaal wordt. Uitwerking van de integraal levert

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x) - T_n(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\}dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\{\frac{\alpha_0}{2}\pi a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \pi a_k + \beta_k \pi b_k)\} +$$

$$+ (\frac{\alpha_0}{2})^2 . 2\pi + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx + \beta_k^2 \sin^2 kx\, dx)$$

wegens $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0$ als $k \neq l$.

Daar $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$, kunnen we dus schrijven

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - T_n(x)\}^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx + [(\frac{\alpha_0^2}{2} - \alpha_0 a_0) + \sum_{k=1}^{n} \{(\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k) + (\beta_k^2 - 2\beta_k b_k)\}] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx + [\tfrac{1}{2}\{(\alpha_0 - a_0)^2 - a_0^2\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \{(\alpha_k - a_k)^2 - a_k^2 + (\beta_k - b_k)^2 - b_k^2\}].$$

Hieruit leest men direct af dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - T_n(x)\}^2 \, dx$$

minimaal wordt voor $\alpha_k = a_k$ en $\beta_k = b_k$. Substitutie van deze coëfficienten levert dan

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - T_n(x)\}^2 \, dx$$

voor elk trigonometrisch polynoom $T_n(x)$ van de orde n.

Aangezien $\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2 \, dx \geq 0$ vinden we

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Daar het rechterlid niet van n afhangt kunnen we zelfs concluderen tot de z.g. "ongelijkheid van Bessel":

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

<u>De volledigheidsrelatie van Parseval</u>.

Stelling: Als $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ integreerbaar is dan geldt

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

waarbij a_k en b_k de Fourier-constanten van f zijn.

Bewijs: Daar f integreerbaar is kunnen we bij een gegeven $\varepsilon > 0$ een verdeling van $[-\pi,\pi]$ vinden zodanig dat de bijbehorende boven- en ondersom hoogstens $\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{8M}$ van elkaar verschillen ($M = \sup|f(x)|$). Met behulp hiervan ziet men gemakkelijk in dat er een continue funktie $\phi_\varepsilon(x)$ geconstrueerd kan worden zodanig dat $|\phi_\varepsilon(x)| \leqq M$ voor alle $x \in [-\pi,\pi]$ en

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{\pi}{4M} .$$

Deze continue funktie $\phi_\varepsilon(x)$ kan op haar beurt door haar eigen Féjer-sommen $\sigma_n(x)$ zodanig worden benaderd dat

$$|\phi_\varepsilon(x) - \sigma_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}$$

voor alle $x \in [-\pi,\pi]$ en alle $n \geqq N_\varepsilon$.
Hieruit volgt dat

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2\,dx \leq \qquad (S_n(x) \text{ is een partiële som van de Fourier-reeks van } f)$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \sigma_n(x)\}^2\,dx = \qquad (\sigma_n(x) \text{ is een trigonometrisch polynoom van de orde } n)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_\varepsilon(x) + \phi_\varepsilon(x) - \sigma_n(x)\}^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_\varepsilon(x)\}^2\,dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_\varepsilon(x)\}\{\phi_\varepsilon(x) - \sigma_n(x)\}\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\phi_\varepsilon(x) - \sigma_n(x)\}^2\,dx \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_\varepsilon(x)|\,dx + \frac{4M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_\varepsilon(x)|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \cdot (\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}})^2 < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ voor alle } n \geq N_\varepsilon,$$

waarmee is aangetoond dat

$$\lim_{n\to\infty} \{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

of

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Gevolg. Als de funkties f en g integreerbaar zijn over $[-\pi,\pi]$ dan geldt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{a_0 a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k^* + b_k b_k^*)$$

waarbij de a_k en b_k de Fourier-constanten van f en de a_k^* en b_k^* de Fourier-constanten van g zijn.

Bewijs: De Fourier-constanten van f+g zijn $a_k + a_k^*$ en $b_k + b_k^*$. Volgens Parseval is dus

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) + g(x)\}^2\, dx = \frac{(a_0+a_0^*)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{(a_k+a_k^*)^2 + (b_k+b_k^*)^2\},$$

waaruit men met behulp van de relatie van Parseval voor f en g onmiddellijk het gestelde afleidt.

<u>De maximaliteit van het stelsel {1, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x,...}</u>.

De ruimte Φ definiëren we als de verzameling van alle integreerbare funkties f: $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$.
Door te definiëren

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{voor alle } x \in [-\pi,\pi]$$

en

$$(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \qquad \text{voor alle } x \in [-\pi,\pi] \text{ en alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

wordt Φ een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.
Definiëren we bovendien

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

dan wordt Φ een reële lineaire ruimte met inwendig produkt (vergelijk ZC 80/71), als we tenminste funkties f en g identificeren als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - g(x)\}^2\, dx = 0.$$

In deze ruimte is

$$B \overset{\text{def}}{=} \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

een orthogonaal stelsel:

$(b_1, b_2) = 0$ voor alle $b_1, b_2 \in B$ met $b_1 \neq b_2$.

We zullen aantonen dat B een maximaal stelsel is; d.w.z. B kan alleen met de $0 \in \Phi$ worden uitgebreid tot een groter orthogonaal stelsel.

Bewijs: Zij $B \cup \{\phi\}$ een orthogonaal stelsel voor zekere $\phi \in \Phi$. Dan is $(\phi, b) = 0$ voor alle $b \in B$. Dit heeft tot gevolg dat alle Fourier-constanten van ϕ gelijk aan nul zijn. Volgens Parseval moet dan gelden

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(x)\, dx = 0,$$

zodat ϕ een nulfunktie (= een met $0 \in \Phi$ geïdentificeerde funktie) moet zijn.

Opgave: Toon aan, zonder gebruik te maken van de relatie van Parseval, dat B niet met een continue $(\phi \neq 0)$ kan worden uitgebreid tot een groter orthogonaal stelsel.

Een convergentie stelling voor trigonometrische reeksen

Stelling. Als de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ monotoon niet-stijgend naar 0 convergeert dan convergeert de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

voor elke $x \in R$.

Deze stelling zal blijken een bijzonder geval te zijn van de volgende.

Stelling: De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k$ is convergent zodra aan elk der volgende voorwaarden is voldaan:

1) $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \dots$

2) $\alpha_n \to 0$ als $n \to \infty$

3) $|\sum_{k=1}^{n} \beta_k| \leqq G$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en zekere constante G.

Bewijs: We bewijzen deze stelling door met behulp van partiële sommatie aan te tonen dat

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\beta_k| < \varepsilon \quad \text{voor alle } n > N_\varepsilon.$$

We schrijven $B_0 = 0$ en $B_k = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$; dan is

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\beta_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(B_k-B_{k-1}) =$$

$$= -\alpha_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k(\alpha_k-\alpha_{k+1}) + \alpha_{n+p} \beta_{n+p}$$

en dit is in absolute waarde (wegens $\alpha_k \geqq \alpha_{k+1}$)

$$\leqq \alpha_{n+1}.G + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} G.(\alpha_k-\alpha_{k+1}) + \alpha_{n+p}.G =$$

$$= 2G\,\alpha_{n+1} < \varepsilon \quad \text{als } n \text{ maar groot genoeg is.}$$

Volgens Cauchy is de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k$ dan convergent.

Om de eerstgenoemde stelling te bewijzen is het voldoende aan te tonen dat bij vaste $x \in [0,\pi]$ geldt

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leqq G_x \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ en zekere } G_x.$$

Voor $x = 0$ en $x = \pi$ is dit triviaal (neem $G_x = 0$). We nemen daarom een x tussen 0 en π.

Men toont gemakkelijk aan dat

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\, x}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

en in absolute waarde is dit

$$\leq \frac{2}{2 \sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{als } 0 < x < \pi.$$

Bij vaste $x \in [-\pi,\pi]$ is $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ dus begrensd. Q.E.D.

Opgave: De reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ is op $0 < x < \pi$ convergent als de rij a_n monotoon tot 0 nadert.

Hoofdstuk 3. De Fourier-transformatie.*)

Zij de funktie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (of $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) integreerbaar over elk eindig gesloten interval en bovendien van dien aard dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

een convergente (oneigenlijke) integraal is.

De integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xti}\, f(x)\, dx$$

is dan ook (absoluut) convergent voor elke $t \in \mathbb{R}$ en definieert een funktie $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ welke de Fourier-getransformeerde van f heet:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xti}\, f(x)\, dx. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

---

*) Voor zover in het vervolg gebruik gemaakt wordt van de theorie der analytische functies verwijzen we naar Knopp [6].

Stelling: $\lim_{|t|\to\infty} \hat{f}(t) = 0.$

Bewijs: We schrijven

$$\hat{f}(t) = \left\{\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{\infty}\right\} e^{-xti} f(x)\, dx$$

en kiezen daarbij A zo groot dat

$$\left|\int_{-\infty}^{-A} e^{-xti} f(x)\, dx\right| \leqq \int_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

en

$$\left|\int_{A}^{\infty} e^{-xti} f(x)\, dx\right| \leqq \int_{A}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$.
De resterende integraal

$$\int_{-A}^{A} e^{-xti} f(x)\, dx = \int_{-A}^{A} (\cos xt - i \sin xt)\, f(x)\, dx$$

heeft volgens het lemma van Riemann voor $|t| \to \infty$ de limiet 0.
Conclusie: $|\hat{f}(t)| < \varepsilon$ als $|t|$ maar groot genoeg is.

Stelling: $\hat{f}(t)$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.

Bewijs:

$$|\hat{f}(t_1) - \hat{f}(t_2)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-xt_1 i} - e^{-xt_2 i})\, f(x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} 2i\, e^{-\frac{xt_1}{2} i - \frac{xt_2}{2} i} \left(\frac{e^{-\frac{t_1-t_2}{2} xi} - e^{\frac{t_1-t_2}{2} xi}}{2i}\right) f(x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\sin \frac{t_1-t_2}{2} x|.|f(x)| \, dx =$$

$$= 2 \{\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{\infty}\} |\sin \frac{t_1-t_2}{2} x|.|f(x)| \, dx \leq$$

$$\leq 2 \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| \, dx + 2 \int_{-A}^{A} |\sin \frac{t_1-t_2}{2} x|.|f(x)| \, dx + 2 \int_{A}^{\infty} |f(x)| \, dx.$$

Hierin fixeren we A zodanig dat

$$2 \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| \, dx + 2 \int_{A}^{\infty} |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Aangezien $|\sin \phi| \leq |\phi|$ voor alle $\phi \in \mathbb{R}$, geldt

$$2 \int_{-A}^{A} |\sin \frac{t_1-t_2}{2} x|.|f(x)| \, dx \leq$$

$$\leq |t_1-t_2|.\int_{-A}^{A} |x \, f(x)| \, dx$$

en dit is $< \frac{\varepsilon}{2}$ als t_1 en t_2 maar dicht genoeg bij elkaar liggen.
Q.E.D.

Gevolg: $\hat{f}$ is over elk interval $[a,b]$ integreerbaar.

<u>De omkeerformule voor de Fourier-transformatie</u>

Stelling: Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ op elk interval $[a,b]$ integreerbaar terwijl

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

convergeert.
Is f op een omgeving van $x_0 \in \mathbb{R}$ van begrensde variatie dan geldt

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti} \hat{f}(t) \, dt = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} .$$

Bewijs: We tonen eerst aan dat voor elke vaste $A > 0$ geldt

$$\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\hat{f}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+u)\,\frac{\sin Au}{2}\,du.$$

Er geldt dat

$$\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\hat{f}(t)\,dt = \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt =$$

$$= \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{-\infty}^{-P} + \int_{-P}^{P} + \int_{P}^{\infty} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt =$$

$$= \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{-\infty}^{-P} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt +$$

$$+ \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{-P}^{P} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt +$$

$$+ \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{P}^{\infty} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt.$$

Nu is bij vaste A

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{-\infty}^{-P} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq 2A. \int_{-\infty}^{-P} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{voor voldoend grote } P > 0.$$

Evenzo is $\left|\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\,\{\int_{P}^{\infty} e^{-xti}\,f(x)\,dx\}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ voor voldoend grote $P > 0$.

Conclusie:

$$\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti} \{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xti} f(x)\, dx\}\, dt =$$

$$= \lim_{P\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti} \{\int_{-P}^{P} e^{-xti} f(x)\, dx\}\, dt.$$

Nu is

$$\int_{-A}^{A} e^{x_0 ti} \{\int_{-P}^{P} e^{-xti} f(x)\, dx\}\, dt =$$

$$= \int_{-A}^{A} \int_{-P}^{P} e^{(x_0-x)ti} f(x)\, dx\}\, dt =$$

$$= \int_{-P}^{P} \{\int_{-A}^{A} e^{(x_0-x)ti} f(x)\, dt\}\, dx$$

(zie [2], pag. 191)

$$= 2 \int_{-P}^{P} f(x) \frac{\sin A(x_0-x)}{x_0-x}\, dx =$$

$$= 2 \int_{-P-x_0}^{P-x_0} f(x_0+u) \frac{\sin Au}{u}\, du.$$

Daar de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+u) \frac{\sin Au}{u}\, du$$

(zèlfs absoluut) convergeert, kunnen we dus schrijven

$$\int_{-A}^{A} e^{x_0 t i} \hat{f}(t)\, dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+u) \frac{\sin Au}{u}\, du.$$

De laatste integraal kunnen we als volgt schrijven

$$\int_0^\infty \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin Au}{u}\, du =$$

$$= \{\int_0^T + \int_T^\infty\} \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin Au}{u}\, du.$$

We fixeren hierin de T zodanig dat

$$\left|\int_T^\infty \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin Au}{u}\, du\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{voor alle } A \in \mathbb{R}.$$

Volgens Dirichlet geldt

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^T \{f(x_0+u) + f(x_0-u)\} \frac{\sin Au}{u}\, du = \pi . \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} .$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen dat

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti}\, \hat{f}(t)\, dt = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} .$$

Opmerking: In plaats van

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A}$$

schrijft men ook vaak

$$\text{H.W.} \int_{-\infty}^{\infty} \quad , \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \quad \text{of} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty}$$

(H.W. = Hauptwert c.q. hoofdwaarde; P.V. = principle value; V.P. = valeur principal).

De Laplace-transformatie (eenzijdig) met zijn omkeerformule

Zij f: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ integreerbaar op elk vak $[0,T]$ met $T > 0$ en zij

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx, \qquad (s = \sigma + it \in \mathbb{C})$$

voor $s = \sigma_0 + it_0$ convergent.
De algemene theorie der Laplace-transformaties leert dat deze integraal dan ook convergeert voor elke $s \in C$ met $\sigma > \sigma_0$ en op dit halfvlak zelfs een regulaire funktie definieert:

$$L(s) = L_f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Deze funktie (met haar analytische voortzetting) heet de Laplace-transformatie van f.

Stelling: Is de integraal voor $L(s)$ absoluut convergent voor $s = s_0$ en is f in een omgeving van het punt $x_0 \in [0,\infty)$ van begrensde variatie dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} e^{sx_0} L(s)\,ds = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

waarbij σ een willekeurige constante $\geqq \sigma_0$ en de integratieweg rechtlijnig is.

Bewijs: We breiden eerst het definitiegebied van f uit:

$f(x) = 0$ voor alle $x < 0$.

Dan kunnen we schrijven (op $\sigma \geqq \sigma_0$)

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-(\sigma+it)x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-xti} \{e^{-\sigma x} f(x)\}\,dx.$$

We kunnen L(s) dus opvatten als de Fourier-transformatie van $e^{-\sigma x} f(x)$.

Uit de gegevens leidt men gemakkelijk af dat $e^{-\sigma x} f(x)$ in een omgeving van x_0 van begrensde variatie is zodat de omkeerformule voor de Fourier-transformaties ons leert dat

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{x_0 ti} L(\sigma+it)\, dt = e^{-\sigma x_0} \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} .$$

Hieruit volgt, door links en rechts met $e^{\sigma x_0}$ te vermenigvuldigen.

$$\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{(\sigma+it)x_0} L(\sigma+it)\, dt,$$

terwijl deze laatste integraal ook als complexe integraal kan worden geschreven:

$$\int_{-A}^{A} e^{(\sigma+it)x_0} L(\sigma+it)\, dt = \frac{1}{i} \int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} e^{sx_0} L(s)\, ds.$$

Samenvattend is hiermee de omkeerformule voor (eenzijdige) Laplace-transformaties aangetoond.

Voorbeeld voor het berekenen van een Laplace-transformatie:
Van de funktie $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ veronderstellen we bekend

1) f is overal continu

2) $f(x) = 1$ voor alle $0 \leqq x \leqq 1$

3) f is differentieerbaar op $x > 1$, terwijl op dit interval
$f'(x) = -\frac{1}{x} f(x-1)$.

We gaan eerst na of wel zinvol van de Laplace-transformatie van f gesproken kan worden.
Daartoe merken we op dat

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\, dt = x f(x) \quad \text{voor alle } x \geqq 1.$$

Om dit in te zien stellen we

$$\phi(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt - x\,f(x) \quad \text{op } x > 1.$$

Omdat f overal continu en op $x > 1$ zelf differentieerbaar is, is ook ϕ differentieerbaar op $x > 1$.
Nu is op $x > 1$

$$\phi'(x) = f(x) - f(x-1) - \{x\,f'(x) + f(x)\} = 0,$$

zodat ϕ constant is.
Daar

$$\lim_{x \downarrow 1} \phi(x) = \int_0^1 f(t)\,dt - 1.f(1) = 0 = \phi(1)$$

moet wel gelden

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt - x\,f(x) = 0 \quad \text{voor alle } x \geqq 1.$$

Vervolgens laten we zien dat $f(x) > 0$ voor alle $x \geqq 0$. Als $f(x)$ überhaupt nulpunten heeft dan ook een kleinste; noem dit punt x_0.
Het is duidelijk dat dan $x_0 > 1$.
Substitutie van x_0 in bovenstaande integraal betrekking levert dan

$$\int_{x_0-1}^{x_0} f(t)\,dt = x_0\,f(x_0) = 0.$$

Aangezien x_0 het kleinste nulpunt is van f en $f(x) > 0$ op $x_0-1 \leqq x \leqq x_0$ (waarom) is

$$\int_{x_0-1}^{x_0} f(t)\,dt > 0.$$

Uit deze tegenspraak concluderen we:

$$f(x) > 0 \quad \text{voor alle } x \geqq 0.$$

Uit de betrekking $f'(x) = -\frac{1}{x} f(x-1)$ op $x > 1$ volgt dan dat f op $x > 1$ monotoon daalt.

Hieruit volgt dat

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

voor alle $s \in \mathbb{C}$ met $\sigma > 0$ absoluut convergeert. Om $L(s)$ te berekenen gaan we als volgt te werk. Voor (reële) $s > 0$ geldt:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, x\, df(x) = \int_1^\infty e^{-sx}\, x\, df(x) =$$

$$= \int_1^\infty e^{-sx}\, x\, f'(x)\, dx = -\int_1^\infty e^{-sx} f(x-1)\, dx =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-s(x+1)} f(x)\, dx = -e^{-s} L(s).$$

Anderzijds is

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, x\, df(x) = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx}\, df(x) =$$

$$= -\frac{d}{ds} \left[e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(x)\, d\, e^{-sx} \right] =$$

$$= -\frac{d}{ds} \left[-f(0) + s \int_0^\infty f(x) \,.\, e^{-sx}\, dx \right] =$$

$$= -\frac{d}{ds} (s\, L(s)) = -sL'(s) - L(s).$$

Dus: $\quad e^{-s} L(s) = s\, L'(s) + L(s)$

of $\quad L'(s) = \frac{e^{-s} - 1}{s} \,.\, L(s), \quad (s > 0).$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is

$$L(s) = L(0) \,.\, \exp \{\int_0^s \frac{e^{-z} - 1}{z} \, dz\}.$$

Het blijkt dus dat L(s) een gehele analytische functie van s is. We kunnen ook schrijven:

$$L(s) = L(0).\, \exp \{\int_0^1 \frac{e^{-z} - 1}{z} \, dz + \int_1^s \frac{e^{-z} - 1}{z} \, dz\} =$$

$$= L(0) \exp \{\int_0^1 \frac{e^{-z} - 1}{z} \, dz - \log s + \int_1^\infty \frac{e^{-z}}{z} \, dz - \int_s^\infty \frac{e^{-z}}{z} \, dz\} =$$

$$= \frac{c}{s} \exp \{- \int_s^\infty \frac{e^{-z}}{z} \, dz\} \quad \text{voor zekere constante } c.$$

Men gaat gemakkelijk na dat

$$\lim_{s \to \infty} s \, L(s) = f(0),$$

zodat c = 1 moet zijn.

Conclusie: $L(s) = \frac{1}{s} \exp \{- \int_s^\infty \frac{e^{-z}}{z} \, dz\}, \quad (s > 0).$

Opmerking: Men kan aantonen dat $L(0) = e^\gamma$, waarbij γ de constante van Euler is:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n),$$

zodat we ook kunnen schrijven

$$L(s) = \exp\{\gamma + \int_0^s \frac{e^{-z} - 1}{z} \, dz\}.$$

Een toepassing van de omkeerformule voor Laplace-transformaties

Op het interval $[-1,0]$ zij een continu differentieerbare funktie f gegeven zodanig dat

$$f(0) = \int_{-1}^{0} f(u)\, du.$$

Gevraagd wordt het definitiegebied van f uit te breiden tot $[-1,\infty)$ zodanig dat

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\, du \qquad \text{voor alle } x \geqq 0.$$

Verder wordt gevraagd naar het asymptotisch gedrag van $f(x)$ voor grote waarden van x.

Oplossing: We tonen eerst aan dat de gevraagde voortzetting inderdaad mogelijk is.
Aangezien f moet voldoen aan

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\, du$$

moet f gezocht worden onder de continue funkties op $[-1,\infty)$. Uit deze integraalbetrekking volgt dan tevens dat f op $x > 0$ differentieerbaar moet zijn, met

$$f'(x) = f(x) - f(x-1), \quad x > 0.$$

Beperken we voorlopig x tot het interval $0 \leqq x \leqq 1$ dan is $f(x-1)$ een bekende continue funktie.
De oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking (met randvoorwaarde $f(0) = \int_{-1}^{0} f(u)\, du$) luidt:

$$f(x) = e^{x} \{f(0) - \int_{0}^{x} e^{-u} f(u-1)\, du\}, \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Men gaat gemakkelijk na dat deze f op $0 \leq x \leq 1$ inderdaad voldoet aan de betrekking:

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\, du.$$

Stel dat de continue funktie f reeds bepaald is op $[-1,x_0]$ met $x_0 > 0$, dan is

$$f(x) = e^{x} \{e^{-x_0} f(x_0) - \int_{x_0}^{x} e^{-u} f(u-1)\, du\}$$

de voortzetting van f op $[x_0,x_0+1]$. Ga dit na.
De gevraagde voortzetting is dus inderdaad mogelijk.
Voor de bestudering van het asymptotisch gedrag van f voor $x \to \infty$, zullen we gebruik maken van de Laplace-transformatie van f.
Eerst tonen we aan dat f begrensd is op $[-1,\infty)$ zodat we inderdaad zinvol over de Laplace-transformatie van f kunnen spreken (op $\mathrm{Re}\ s = \sigma > 0$).
Zij $M = \max_{x\in[-1,0]} |f(x)|$ en zij $M^* > M$.

Als f niet begrensd is, dan moet er een kleinste getal $a > 0$ zijn zodanig dat $|f(a)| = M^*$.
Maar dit zou met zich meebrengen dat

$$M^* = |f(a)| = |\int_{a-1}^{a} f(u)\, du| < 1.M^* = M^*$$

hetgeen een tegenspraak is.

Conclusie: $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \geq -1$.

De Laplace-transformatie van f bepalen we voor $\sigma > 0$ als volgt:

$$L(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \{\int_{x-1}^{x} f(u)\, du\}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-sx}}{-s} \int_{x-1}^{x} f(u)\,du \Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-sx}}{-s} \{f(x) - f(x-1)\}\,dx =$$

$$= \frac{1}{s} \int_{-1}^{0} f(u)\,du + \frac{1}{s} L(s) - \frac{1}{s} \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x-1)\,dx =$$

$$= \frac{f(0)}{s} + \frac{L(s)}{s} - \frac{1}{s} \int_{0}^{1} e^{-sx} f(x-1)\,dx - \frac{e^{-s}}{s} L(s).$$

Dus:

$$L(s).(s-1+e^{-s}) = f(0) - \int_{0}^{1} e^{-sx} f(x-1)\,dx \quad \text{op } \sigma > 0.$$

Schrijven we

$$\psi(s) = f(0) - \int_{0}^{1} e^{-sx} f(x-1)\,dx, \quad (s \in C)$$

dan is ψ een op het gehele complexe vlak regulaire funktie (= gehele funktie). In alle punten $s \in \mathbb{C}$ met $e^{-s} + s - 1 \neq 0$ geldt dus

$$L(s) = \frac{\psi(s)}{e^{-s} + s - 1}\,.$$

Aangezien bij voorbaat duidelijk is dat $L(s)$ op $\sigma > 0$ regulair is, ligt het voor de hand te vermoeden dat $e^{-s} + s - 1$ geen nulpunten heeft op $\sigma > 0$. Dat dit vermoeden juist is blijkt als volgt:

$$e^{-s} + s - 1 = s\,.\,\frac{e^{-s} + s - 1}{s} =$$

$$= s.\,\{1 - \frac{1 - e^{-s}}{s}\} = s.\,\{1 - \int_{0}^{1} e^{-sx}\,dx\};$$

op $\sigma > 0$ geldt

$$\left|\int_0^1 e^{-sx}\,dx\right| \leq \int_0^1 e^{-\sigma x}\,dx < 1$$

zodat

$$1 - \int_0^1 e^{-sx}\,dx \neq 0 \quad \text{op } \sigma > 0.$$

Op $\sigma > 0$ geldt dus:

$$L(s) = \frac{\psi(s)}{e^{-s} + s - 1}\,.$$

Daar f op $x > 0$ continu differentieerbaar is, is f in de buurt van elk punt $x_0 > 0$ van begrensde variatie, zodat volgens de omkeerformule geldt:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} e^{sx_0}\frac{\psi(s)}{e^{-s}+s-1}\,ds$$

waarbij σ een (willekeurig te kiezen) positieve constante is.
Om de bepaling van f uit $L(s)$ effectief door te zetten zullen we $L(s)$ wat nader moeten bestuderen.
Aangezien alle op $[-1,\infty)$ constante funkties aan

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(u)\,du\,, \quad (x \geq 0),$$

voldoen mogen we zonder beperking der algemeenheid veronderstellen dat $f(0) = 0$.
Dus:

$$\psi(s) = -\int_0^1 e^{-sx} f(x-1)\,dx =$$

$$= -\left\{\frac{e^{-sx}}{-s} f(x-1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-sx}}{-s} f'(x-1)\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{f(-1) + \int_0^1 e^{-sx} f'(x-1)\,dx\right\}.$$

Beperken we σ tot een begrensd interval $[a,b] \subset R$ dan is

$$|\psi(s)| \leq \frac{1}{|s|}\{|f(-1)| + \int_0^1 e^{-\sigma x} |f'(x-1)|dx\}$$
$$\leq \frac{C}{|s|} \leq \frac{C}{|t|}, \quad (s = \sigma+it),$$

waarbij C een constante is; bijvoorbeeld

$$C = |f(-1)| + \int_0^1 e^{-ax} |f'(x-1)|dx.$$

Met behulp van de Landau-Bachman notatie kunnen we dus schrijven

$$|\psi(s)| = O(\tfrac{1}{t}), (a \leq \sigma \leq b; |t| \to \infty).$$

Beperken we σ nogmaals tot $[a,b]$ dan is voor grote waarden van t

$$e^{-s} + s-1 \neq 0$$

wegens $|e^{-s} + s-1| \geqq |s| - |e^{-s}| -1 =$

$$= |s| - e^{-\sigma}-1 \geqq |s| - e^{-a} - 1.$$

Dus

$$\left|\frac{1}{e^{-s}+s-1}\right| \leqq \frac{1}{|s|-e^{-a}-1} \leqq \frac{1}{|t|-e^{-a}-1} = O(\tfrac{1}{t}), \; (a \leqq \sigma \leqq b; |t| \to \infty).$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen:

$$L(s) = O(\tfrac{1}{t^2}), \; (a \leqq \sigma \leqq b; |t| \to \infty).$$

Vervolgens bestuderen we de singulariteiten van $L(s)$. Aangezien $\psi(s)$ een gehele funktie is kan $L(s)$ alleen maar singulariteiten hebben in de nulpunten van $e^{-s} + s-1$.
We weten reeds dat $e^{-s} + s-1$ op $\sigma > 0$ geen nulpunten heeft.
Op $\sigma = 0$ heeft $e^{-s} + s-1$ het enige nulpunt $s = 0$.
Immers, uit

$$0 = e^{-s} + s-1 = e^{-it} + it-1 =$$
$$= \cos t - i \sin t + it-1$$

volgt $\cos t = 1$ èn $\sin t = t$, $(t \in R)$
met als enige oplossing $t = 0$.
Het zal blijken dat $e^{-s} + s-1$ op $\sigma < 0$ oneindig veel nulpunten heeft.
Uit $0 = e^{-s} + s-1 = e^{-(\sigma+it)}+(\sigma+it) -1 =$

$$= e^{-\sigma}(\cos t - i \sin t) + \sigma + it - 1$$

volgt: $\begin{cases} e^{-\sigma} \cos t = 1 - \sigma \\ e^{-\sigma} \sin t = t. \end{cases}$

Uit de eerste van deze vergelijkingen volgt, wegens $\sigma < 0$, dat $\cos t > 0$ moet zijn.

Dus: $-\frac{\pi}{2} + k.2\pi < t < \frac{\pi}{2} + k.2\pi$, $(k = 0,1,2,3,\ldots\ldots)$.

Verder is met (σ,t) ook $(\sigma,-t)$ een oplossing, zodat we ons kunnen beperken tot $t > 0$ ($t = 0$ is geen oplossing).
Dan moet ook $\sin t > 0$ zijn, zodat

$k.2\pi < t < \pi + k.2\pi$, $(k = 0,1,2,3,\ldots.)$.

Gevolg: $k.2\pi < t < \frac{\pi}{2} + k.2\pi$, $(k = 0,1,2,3,\ldots\ldots)$.

Uit het stelsel vergelijkingen leidt men gemakkelijk af dat

$$\sigma = 1 - \frac{t}{\operatorname{tg} t}$$

$$t = \sqrt{e^{-2\sigma}-(1-\sigma)^2}.$$

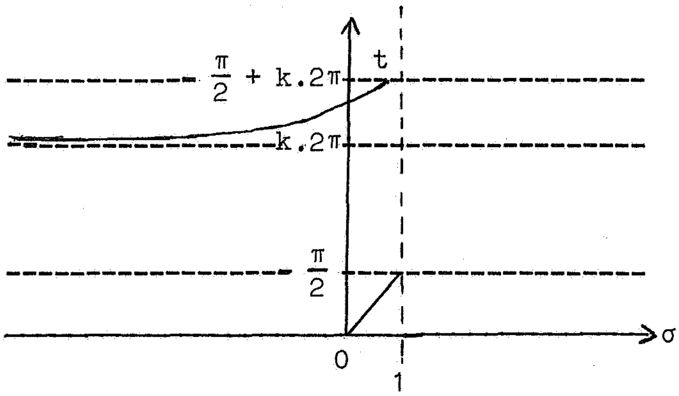
De afgeleide van $1 - \frac{t}{\operatorname{tg} t}$ is

$$-\frac{\operatorname{tg} t - \frac{t}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{2 \sin^2 t}(2t - \sin 2t)$$

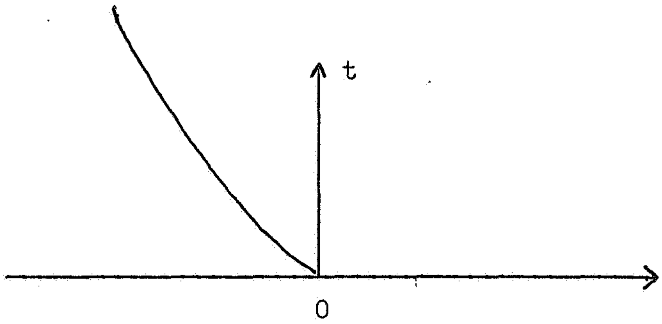
en deze vorm is positief, wegens $\sin 2t < 2t$ op $t > 0$, zodat $1 - \frac{t}{\operatorname{tg} t}$ stijgend is op b.v. $k.2\pi < t < \frac{\pi}{2} + k.2\pi$.

De kromme $\sigma = 1 - \frac{t}{\operatorname{tg} t}$ met $k.2\pi < t < \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ en $k = 0,1,2,3,\ldots$,

verloopt als volgt:



De kromme $t = \sqrt{e^{-2\sigma} - (1-\sigma)^2}$ op $\sigma < 0$ verloopt als volgt:



Aangezien $t \to \infty$ als $\sigma \to -\infty$ leest men uit beide figuren af dat $e^{-s} + s - 1$ in elke strook $k.2\pi < t < \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ met $k = 1,2,3,\ldots$ precies één nulpunt s_k heeft.

Al deze nulpunten s_k zijn enkelvoudig want

$$\frac{d}{ds}(e^{-s} + s - 1) = -e^{-s} + 1$$

heeft haar nulpunten uitsluitend op de imaginaire as.

Het nulpunt $s = 0$ is van de orde 2, want voor s in de buurt van 0 geldt:

$$e^{-s} + s - 1 = \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \ldots\ldots .$$

Betreffende $L(s) = \dfrac{\psi(s)}{e^{-s}+s-1}$ kunnen we dus zeggen dat $L(s)$ in $s = s_k$ en in $s = \bar{s}_k$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ hoogstens een pool van de eerste orde heeft met residu

$$\rho(s_k) = \lim_{s\to s_k} (s-s_k)\, L(s) =$$

$$= \lim_{s\to s_k} \frac{\psi(s)}{\dfrac{(e^{-s}+s-1)-(e^{-s_k}+s_k-1)}{s-s_k}} = \frac{\psi(s_k)}{-e^{-s_k}+1} =$$

$$= \frac{\psi(s_k)}{s_k} \text{ en } \rho(\bar{s}_k) = \frac{\psi(\bar{s}_k)}{\bar{s}_k}$$

In het punt $s = 0$ heeft $L(s)$, wegens $\psi(0) = 0$, ook hoogstens een pool van de eerste orde; het residu van deze pool is

$$\lim_{s\to 0} \frac{s\,\psi(s)}{e^{-s}+s-1} = \lim_{s\to 0} \frac{\dfrac{\psi(s)-\psi(0)}{s}}{\dfrac{e^{-s}+s-1}{s^2}} = 2\psi'(0).$$

Nu is $\psi'(s) = \displaystyle\int_0^1 e^{-sx}\, xf(x-1)dx$

zodat

$$\psi'(0) = \int_0^1 xf(x-1)dx.$$

Hiermee zijn alle singulariteiten van $L(s)$ voor ons doel voldoende bestudeerd.

We gaan nu over tot de berekening van f:

Voor $x > 0$ geldt (x willekeurig doch constant)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} e^{sx}\, L(s)\, ds, \quad (\sigma > 0).$$

Voor een σ_0^* tussen 0 en $\sigma_1 = \operatorname{Re} s_1$ geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} + \int_{\sigma+Ai}^{\sigma_0^*+Ai} + \int_{\sigma_0^*+Ai}^{\sigma_0^*-Ai} + \int_{\sigma_0^*-Ai}^{\sigma-Ai}\right\} e^{sx_0}\, L(s)ds = 2\psi'(0)$$

of

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-Ai}^{\sigma+Ai} e^{sx_0}\, L(s)ds = 2\psi'(0) - \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\sigma+Ai}^{\sigma_0^*+Ai} + \int_{\sigma_0^*+Ai}^{\sigma_0^*-Ai} + \int_{\sigma_0^*-Ai}^{\sigma-Ai}\right\} e^{sx_0}\, L(s)ds.$$

Wegens $L(s) = 0(\frac{1}{t^2})$, $(\sigma_0^* \leqq \text{Re } s \leqq \sigma;\ |t| \to \infty)$ is

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma+Ai}^{\sigma_0^*+Ai} e^{sx_0}\, L(s)ds = \lim_{A\to\infty}\int_{\sigma_0^*-Ai}^{\sigma-Ai} e^{sx_0}\, L(s)ds = 0$$

zodat we vinden dat

$$f(x) = 2\psi'(0) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma_0^*-Ai}^{\sigma_0^*+Ai} e^{sx}\, L(s)ds,\ (x > 0).$$

Herhalen we deze procedure een aantal malen dan vinden we dat

$$f(x) = 2\psi'(0) + \sum_{k=1}^{n} \{e^{s_k x}\,\rho(s_k) + e^{\bar{s}_k x}\,\rho(\bar{s}_k)\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma_n^*-Ai}^{\sigma_n^*+Ai} e^{sx}\, L(s)ds,\ (x > 0)$$

waarbij σ_n^* een constante is tussen $\sigma_n \overset{def}{=} \mathrm{Re}\, s_n$ en $\sigma_{n+1} = \mathrm{Re}\, s_{n+1}$.

Voor de restintegraal

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{\sigma_n^*-Ai}^{\sigma_n^*+Ai} e^{sx}\, L(s)ds$$

kunnen we, wegens $L(s) = 0(\frac{1}{t^2})$ als $|t| \to \infty$,

$$\text{schrijven } \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_n^*-\infty i}^{\sigma_n^*+\infty i} e^{sx}\, L(s)ds$$

en deze integraal is absoluut convergent.

In absolute waarde is deze integraal

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_n^* x}\, |L(s)|\, dt =$$

$$= \frac{e^{\sigma_n^* x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(s)|dt, \; (s = \sigma_n^*+it)$$

en aangezien $\sigma_n^* < 0$ is, gaat deze vorm voor $x \to \infty$ exponentieel naar nul.

Daar $\mathrm{Re}\, s_k = \mathrm{Re}\, \bar{s}_k < 0$ vinden we als bijzonder gevolg van het bovenstaande:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \int_0^1 x\, f(x-1)dx.$$

De sommatieformule van Poisson

Omtrent de functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ veronderstellen we

1) ϕ is integreerbaar op elk interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

2) ϕ is absoluut integreerbaar op $\mathbb{R}$; d.w.z.

$$\int_{\infty}^{\infty} |\phi(x)|dx \text{ is een convergente oneigenlijke integraal}$$

3) de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n+\frac{t}{2\pi})$ is op $-\pi \leq t \leq \pi$ uniform convergent.

4) de functie $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n+\frac{t}{2\pi})$

is continu en van begrensde variatie op $[-\pi,\pi]$.

Onder deze veronderstellingen geldt:

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kti} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k2\pi ui} \phi(u)du, \quad (t \in \mathbb{R})$$

waarbij we $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ hier definiëren als $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N}$.

Substitutie van $t = 0$ in deze formule levert

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{\phi}(2k\pi)$$

waarbij $\check{\phi}$ de Fourier-transformatie van ϕ is.
Deze laatste formule heet wel de sommatieformule van Poisson.

Bewijs: Uit de gemaakte veronderstellingen volgt dat Φ periodiek is met periode 2π en dat Φ over $[-\pi,\pi]$ integreerbaar is.
We kunnen dan de Fourier-reeks van Φ beschouwen. Daar Φ van begrensde variatie en bovendien continue is kunnen we concluderen dat Φ door haar Fourier-reeks wordt voorgesteld op geheel $\mathbb{R}$:

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\, t + b_k \sin k\, t).$$

De Fourier-constanten van Φ berekenen we als volgt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \cos k\, t\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \phi(r + \frac{t}{2\pi})\} \cos k\, t\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \phi(r + \frac{t}{2\pi}) \,.\, \cos k\, t\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r + \frac{t}{2\pi}) \cos k\, t\, dt =$$

(verwisseling van sommatie en integratie is toegestaan wegens de uniforme convergentie van de te integreren reeks)

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \phi(u) \cos(k\; 2\pi(u-r))du = \text{(substitutie } r + \frac{t}{2\pi} = u)$$

$$= 2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \phi(u) \cos 2k\pi u\, du =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \cos 2k\pi u\, du \text{ (wegens de convergentie van } \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| dx).$$

Analoog is $b_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \sin 2k\pi u\, du$

Dus:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{\cos k\, t \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \cos 2k\pi u\, du +$$

$$+ \sin k\, t \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \sin 2k\pi u\, du\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du + \sum_{k=1}^{\infty} \{(e^{kti} + e^{-kti}) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \cos 2k\pi u\, du +$$

$$+ \frac{e^{kti} - e^{-kti}}{i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \sin 2k\pi u\, du\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du + \sum_{k=1}^{\infty} \{e^{kti} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)(\cos 2k\pi u - i \sin 2k\pi u)du +$$

$$+ e^{-kti} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)(\cos 2k\pi u + i \sin 2k\pi u)du\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du + \sum_{k=1}^{\infty} \{ e^{kti} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)e^{-2k\pi u} du + e^{-kti} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)e^{2k\pi u} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \{.....\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} e^{kti} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)e^{-2k\pi u} du =$$

$$\underset{=}{\mathrm{def}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kti}\, \check{\phi}(2k\pi).$$ Q.E.D.

Een toepassing van de sommatieformule van Poisson.
Voor de functie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemen we

$$\phi(x) = e^{-\pi x^2 w} \quad , \ (x \in \mathbb{R})$$

waarbij w een positieve constante is.

Men gaat gemakkelijk na dat aan de gestelde voorwaarden betreffende Φ inderdaad voldaan is ($\Phi(t)$ is in dit geval continu differentieerbaar).

We berekenen de Fourier-transformatie van ϕ in de punten $2k\pi$ als volgt:

$$\check{\phi}(2k\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k\pi xi}\ \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k\pi xi\ -\ \pi x^2 w}\ dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w(x^2 + \frac{2kx}{w}i)}\ dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w\{(x + \frac{k}{w}i)^2 + \frac{k^2}{w^2}\}}\ dx =$$

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w(x + \frac{k}{w}i)^2}\ dx$$

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\pi w(x + \frac{k}{w}i)^2}\ dx =$$

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A+\frac{k}{w}i}^{A+\frac{k}{w}i} e^{-\pi w\ z^2}\ dz =$$

(ga dit na met de contour-integratie stelling van Cauchy)

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\pi w\ z^2} dz = e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w x^2} dx =$$

$$= e^{-\frac{\pi k^2}{w}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi w}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

Dus: $\check{\phi}(2k\pi) = c.\dfrac{e^{-\frac{\pi k^2}{w}}}{\sqrt{w}}$ met $c = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Substitutie van dit resultaat in de formule van Poisson levert dan:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 w} = \frac{c}{\sqrt{w}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{w}}$$

Schrijven we

$$\theta(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 w} \quad , \ (w > 0)$$

dan geldt dus

$$\theta(w) = \frac{c}{\sqrt{w}} \ \theta(\tfrac{1}{w}).$$

Stellen we hierin $w = 1$ dan blijkt $c = 1$ te zijn.

Dus: $\theta(w) = \frac{1}{\sqrt{w}} \ \theta(\frac{1}{w}) \ , \quad (w > 0)$

een betrekking die zowel in de zuivere - als in de toegepaste wiskunde een belangrijke rol speelt.