

stichting
mathematisch
centrum



AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZD 1/76

DECEMBER

J. DE VRIES
DYNAMISCHE SYSTEMEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
—AMSTERDAM—

DYNAMISCHE SYSTEMEN⁾¹

door

J. de Vries

⁾¹ Tekst van een voordracht, gehouden op 5 februari 1976 voor leden van de studentenvereniging "Abacus" (TH, Twente) t.g.v. hun bezoek aan het MC.

Dynamische systemen

1. Het deel der wiskunde dat zich bezig houdt met de bestudering van *dynamische systemen* is ontstaan door abstractie uit fysische studies zoals aerodynamica, hydrodynamica, electrodynamica, dynamica van systemen van n deeltjes, etc.

De *toestand* van een gegeven (fysisch) systeem wordt in bovengenoemde gebieden veelal beschreven door een punt in een zekere ruimte, die we X zullen noemen. Bijvoorbeeld: bij een probleem met n deeltjes wordt de toestand beschreven door $3n$ plaatscoördinaten en $3n$ impulscomponenten; in totaal dus $6n$ getallen. Het "beeldpunt" van een gegeven toestand is dan een punt in \mathbb{R}^{6n} .

Men spreekt pas van *dynamica* als onder invloed van "krachten" (al of niet van buiten het systeem afkomstig) de toestand van het systeem verandert in de loop van de tijd. Zonder nu verder op de natuur van het onderhavige proces in te gaan - daarvan zullen we "abstraheren" - kan wiskundig zo'n verandering als volgt worden beschreven: als de toestand van het systeem op tijdstip $t_0 = 0$ wordt beschreven door het punt x van de ruimte X , dan wordt het na verloop van een tijd t weergegeven door het punt $\phi(t, x)$ van X . Als de studie in concreto de aerodynamica zou zijn, dan zouden in de "formule" ϕ allerlei fysische grootheden zoals samendrukbaarheid, spanningsgradient, traagheid, etc. opgenomen kunnen zijn, en dan zou ϕ de weerspiegeling vormen van allerlei fysische wetten. Met andere woorden, de fysica legt allerlei beperkingen op wat betreft de mogelijke keus van een formule ϕ die de toestandsverandering zou kunnen beschrijven. In de abstracte theorie vervangen we al zulke fysische beschouwingen en wetten door wiskundige overwegingen. De voornaamste beperkingen die wij van de functie $\phi: (t, x) \mapsto \phi(t, x)$ zullen opleggen zijn de volgende:

$$(1) \quad \phi(0, x) = x$$

$$(2) \quad \phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \phi(t_1 + t_2, x)$$

($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; $x \in X$). Hierin zegt regel (1) dat na verloop van tijd 0 het systeem, als dat in punt $x \in X$ afgebeeld was, nog steeds in x is afgebeeld: fysisch vanzelfsprekend, maar wiskundig - waar we zelfs gaan vergeten dat

elk punt x van X de toestand van een systeem beschrijft en ϕ de verandering ervan - moet dit expliciet vastgelegd worden. Regel (2) drukt uit dat het gedrag in een willekeurig punt van X niet verandert in de loop van de tijd (in de fysica noemt men zulke processen veelal *stationnair*). Anders gezegd: ieder punt $x \in X$ doorloopt een "baan" $C_\phi(x) := \{\phi(t,x) \mid -\infty < t < \infty\}$, en uit (2) volgt dat voor verschillende punten x en y van X hetzij $C_\phi(x) = C_\phi(y)$, hetzij $C_\phi(x) \cap C_\phi(y) = \emptyset$. Deze banen veranderen niet in de loop van de tijd: als op twee verschillende tijdstippen de toestand van het systeem wordt weergegeven door éénzelfde punt, dan zal in beide gevallen het verloop van het proces hetzelfde zijn (vandaar de naam "stationnair" voor dit soort processen).

2. Behalve de "algebraïsche" eisen (1) en (2) worden vaak extra beperkingen aan ϕ opgelegd. Wij zullen er ons toe beperken dat X een deelverzameling van \mathbb{R}^n is en dat $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ continu is.¹⁾ De theorie die hiervoor ontwikkeld is (en waar men, algemener, voor X vaak een min of meer willekeurige topologische ruimte neemt) wordt *Topologische Dynamica* genoemd. Hier zal ik me nog verder beperken: ik zal aannemen dat in elk punt x van X de volgende limiet bestaat²⁾:

$$(3) \quad \dot{\phi}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t,x) - x}{t} .$$

Het is niet zo moeilijk om nu, gebruik makend van (1) en (2), aan te tonen dat voor elke $x \in X$ de functie $t \mapsto \phi(t,x) : \mathbb{R} \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^n$ oplossing is van de differentiaalvergelijking

1) In feite hebben we dus te maken met een n -tal functies $(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \phi_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$, waar $i = 1, 2, \dots, n$.

2) In feite staat hier een n -tal limieten:

$$\dot{\phi}_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n) - \xi_i}{t} ,$$

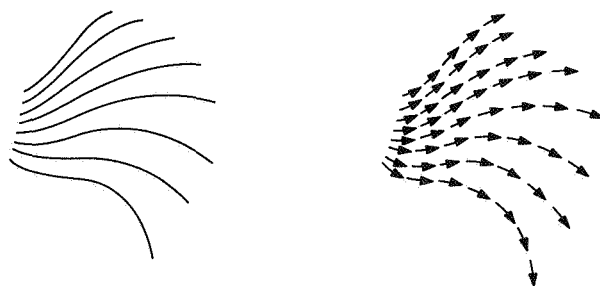
voor elke coördinaat één ($i=1, 2, \dots, n$).

$$(4) \quad \dot{x} = f(x)$$

met $f(x) = \dot{\phi}(x)$ ¹⁾. D.w.z. de functie $t \mapsto \phi(t, x)$ is in elke punt t_0 differentieerbaar (en niet alleen in het punt 0, zoals door (3) uitgedrukt wordt), en de afgeleide voldoet aan

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) \right|_{t=t_0} = f(\phi(t_0, x))$$

In de praktijk is de situatie meestal net andersom: in de regel leiden de fysische wetten voor het systeem tot een stel differentiaalvergelijkingen die, als het proces stationnair is, geschreven kunnen worden in de gedaante (4) (waar de t niet expliciet in het rechterlid voorkomt). Dan is het de kunst om (4) op te lossen: vindt alle functies $t \mapsto x(t)$ die differentieerbaar zijn en waarvoor geldt: $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Dus: in elk punt $x \in X$ is een "snelheidsvector" \dot{x} gegeven; construeer nu banen $\{x(t) \mid -\infty < t < \infty\}$ die in elk punt de daar gegeven snelheidsvector tot raaklijn hebben.



De theorie der differentiaalvergelijkingen leert nu, dat *als* f voldoende "netjes" is, er bij iedere keus van t_0 en van $x_0 \in X$ er één en niet meer dan één functie $t \mapsto x(t)$ is die oplossing is van (4) en aan de extra beginconditie $x(t_0) = x_0$ voldoet.

Als we nu de oplossing van (4) die voor $t = 0$ door het punt x gaat aanduiden met $t \mapsto \phi(t, x)$ - dus $\phi(0, x) = x$ - dan blijkt ϕ aan (2) te voldoen! Voorts is $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ dan continu. Kortom: de eerder beschreven eisen, opgelegd aan ϕ zijn vrij "natuurlijk".

1) In feite staan hier n differentiaalvergelijkingen

$$\dot{\xi}_i = f_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

voor $i = 1, \dots, n$.

3. Nu is een wiskundige niet altijd geneigd zich aan de natuur te houden. In het bijzonder kan hij zich afvragen wat er gebeurt als f in (4) niet zo erg netjes is, maar niet zo wild dat er geen oplossingen zouden bestaan: zeg, f *continu*.

Het was al lang bekend dat er dan door één punt meerdere oplossingen kunnen gaan, maar onder al die oplossingen was er altijd slechts één die aan (2) voldoet. Pas vrij kort geleden, in 1972, is er door Anatole BECK een voorbeeld gevonden van een differentiaalvergelijking in \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x,y) \\ \dot{y} &= f_2(x,y),\end{aligned}$$

waarvoor er bij *ieder* punt (x,y) twee verschillende oplossingen $t \mapsto \phi(t, (x,y))$ en $t \mapsto \psi(t, (x,y))$ zijn met

$$\phi(0, (x,y)) = (x,y) = \psi(0, (x,y)),$$

en die beide voldoen aan (2). Zie literatuurverwijzing [1]. Dit is nogal moeilijk voorstelbaar: twee families curven zo dat iedere curve uit de ene familie elke curve uit de andere familie in precies één punt snijdt - terwijl in zo'n snijpunt de beide curven aan elkaar raken. Dit voorbeeld houdt verband met het volgende: er zijn twee continue afbeeldingen $\phi_A, \phi_S: \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ die beide aan (1), (2) en (3) voldoen, en zó, dat er voor de snelheden in elk punt x geldt:

$$\dot{\phi}_A(x) = 100 \cdot \dot{\phi}_S(x) > 0$$

(zeg: Achilles loopt met snelheid $\dot{\phi}_A$ en de schildpad met snelheid $\dot{\phi}_S$), terwijl toch voor zekere t_0 geldt:

$$\phi_S(t_0, 0) = 1 \text{ en } \phi_A(t_0, 0) < 1$$

(na verloop van tijd t_0 na het vertrek uit 0 in de schildpad gearriveerd in het punt 1, en Achilles nog niet!).

4. Terug naar de "nette" differentiaalvergelijkingen. In de theorie der dynamische systemen is het er (onder meer) om te doen het globale "stroomlijnenbeeld" - het plaatje van alle banen met hun orientatie, d.i. de richting waarin $\phi(t,x)$ loopt als t van $-\infty$ naar $+\infty$ loopt - te vinden. Voor heel eenvoudige systemen is dat uitgezocht, als volgt:

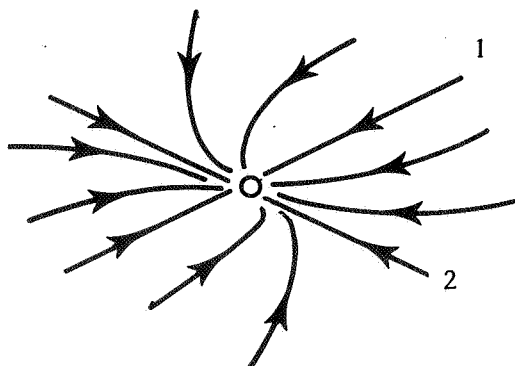
Bekijk de vergelijkingen

$$\dot{x} = ax + by$$

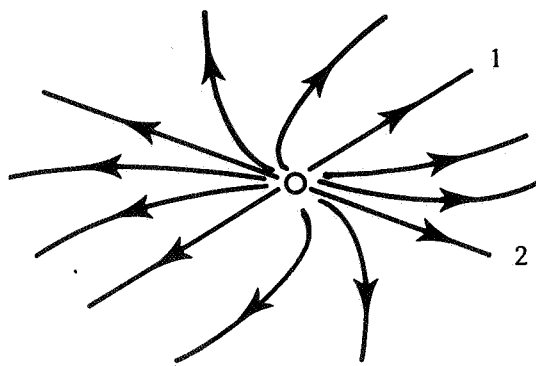
$$\dot{y} = cx + dy$$

(a , b , c en d reële constanten). Afhankelijk van wat de *eigenwaarden* en *eigenvectoren* van de matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zijn krijgen we de volgende plaatjes:

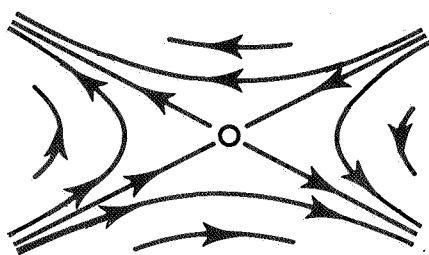
1°. De eigenwaarden λ_1 en λ_2 zijn reëel en verschillend



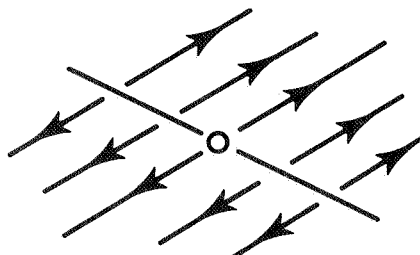
$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$



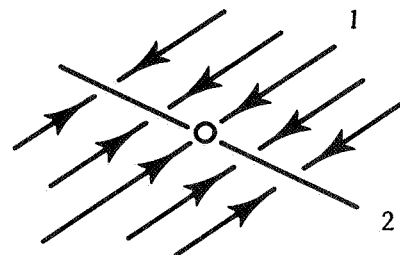
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$



$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$



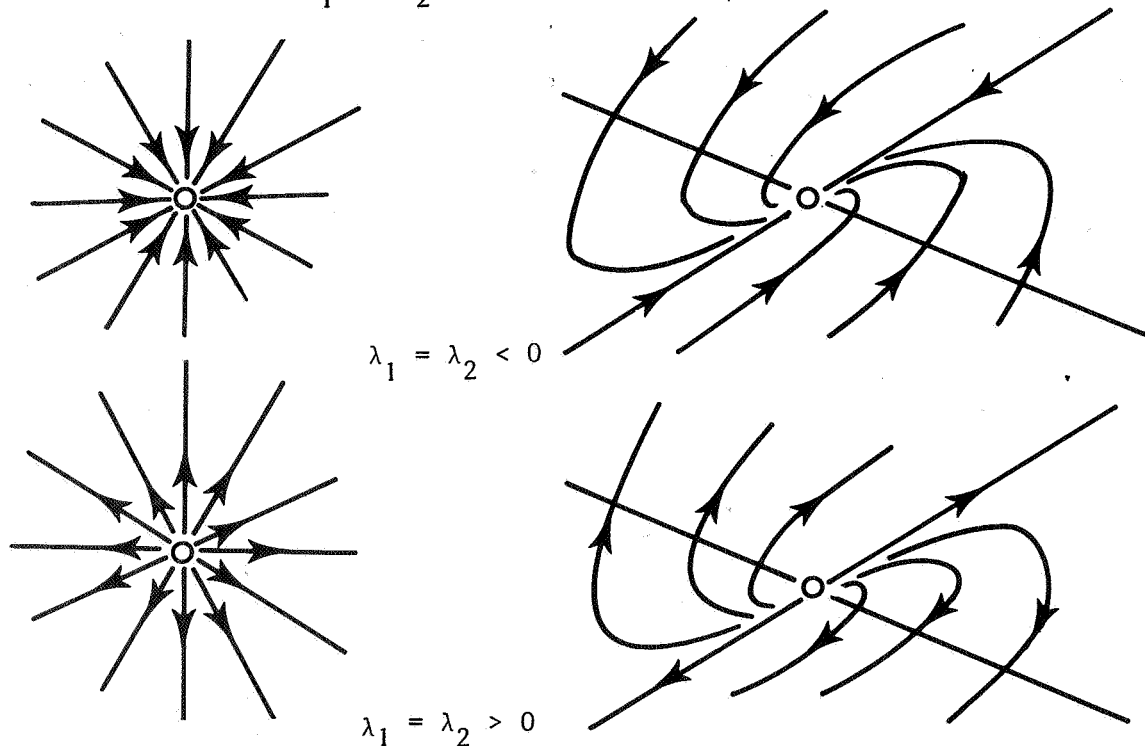
$$0 = \lambda_2 < \lambda_1$$



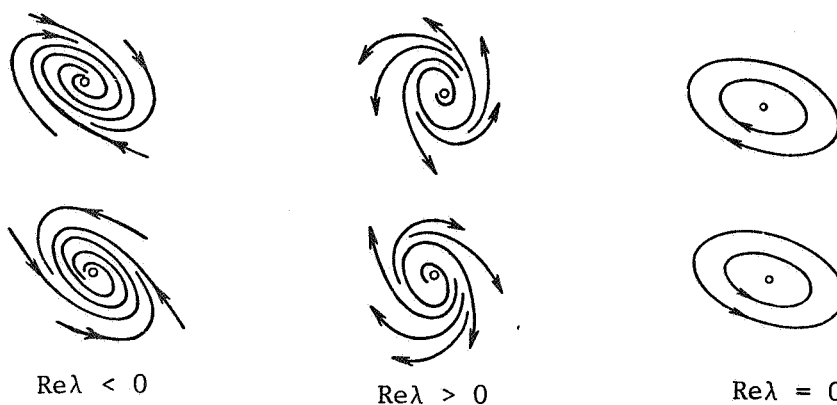
$$\lambda_1 < 0 = \lambda_2$$

Hierin stellen ① en ② resp. de *eigenruimten* (= veelvouden van eigenvectoren) voor, horend bij de eigenwaarden λ_1 resp. λ_2 . Op ① is de snelheid overal $|\lambda_1|$; dus: grote eigenwaarde \Rightarrow grote snelheid.

2°. De eigenwaarden λ_1 en λ_2 zijn beide reëel, en aan elkaar gelijk.



3°. De eigenwaarden λ_1 en λ_2 zijn beide complex:



In alle gevallen is de oorsprong $(0,0)$ een *evenwichtspunt*: $\phi(t, (0,0)) = (0,0)$ voor alle t . Dus de baan van $(0,0)$ bestaat uit $(0,0)$ zelf, en meer niet. Merk op, dat in alle gevallen waarbij *allebei* de eigenwaarden een negatief reëel deel hebben (evt. allebei zelf negatief zijn) alle banen *naar* $(0,0)$ "convergeren" voor $t \rightarrow +\infty$. Men noemt $(0,0)$ dan een *stabiel* evenwichtspunt. In alle andere gevallen heet $(0,0)$ een *instabiel* evenwichtspunt.

Ook als we twee differentiaalvergelijkingen hebben,

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

waar f en g niet lineair zijn, kunnen we, mits f en g voldoende netjes zijn, schrijven

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x-x_0) + b(y-y_0) + \text{hogere machten van } (x-x_0) \text{ en } (y-y_0) \\ \dot{y} &= c(x-x_0) + d(y-y_0) + \text{ " " " " " " } \end{aligned}$$

wanneer (x_0, y_0) een *invariant punt* is ($f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$). Zolang $x-x_0$ en $y-y_0$ klein zijn kunnen we de hogere machten ervan "verwaarlozen", en in de buurt van het punt (x_0, y_0) gedraagt het systeem zich dus als één der stromingen uit 1°, 2° of 3°, al naar gelang de waarden van a , b , c en d . (N.B.: de a , b , c en d hierboven hangen af van de keus van (x_0, y_0) .) Dus "lokaal" gelden bovenstaande plaatjes ook voor meer algemene stromingen - althans in de buurt van een invariant punt. In de buurt van een *niet-invariant* punt is de situatie wel heel eenvoudig: men kan aantonen dat daar het beeld altijd als volgt is:



op topologische equivalentie na - op een beetje buigen en wringen na, zonder scheuren of plakken - een eenparige, parallelle beweging. Hoe het plaatje er *globaal* uit ziet - of liever: in principe uit *kan* zien - is het onderwerp van studie van het kwalitatieve gedrag der differentiaalvergelijkingen en, abstracter, de theorie der dynamische systemen. Zie hiervoor o.a. [2] en [3].

5. Als eenvoudig voorbeeld zal ik één en ander illustreren met de differentiaalvergelijkingen voor de *hartslag* en de *zenuwimpulsen*, zoals die door ZEEMAN in een artikel in 1970 beschreven zijn (zie [4]).

Hij gaat daarbij uit van het *dynamische gedrag* van de te onderzoeken objecten - dus niet van het gecompliceerde en nog niet geheel begrepen biochemische gedrag. Hij stelt zich ten doel een dynamisch systeem (i.e. differentiaalvergelijkingen) te construeren dat zo eenvoudig mogelijk is - biologen moeten het kunnen begrijpen - en dat dit gedrag vertoont. De eigenschappen van het systeem moeten zijn

- (i) Er is een *stabiel evenwicht*.
- (ii) Er is een *drempel* die overschreden moet worden met behulp van een "trekker (voor een spiervezel in het hart: een zenuw-impuls; voor een zenuwcel: impuls van orgaan of andere zenuwcel), *waarna* er pas actie kan optreden.
- (iii) Er is een *terugkeer* naar de evenwichtstoestand
 - (a) met een sprong, snel (hart);
 - (b) langzaam (zenuw).

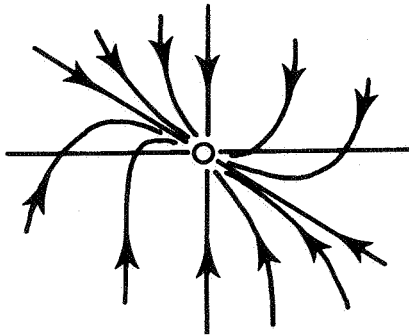
Op de experimentele biologische achtergrond kan ik hier niet ingaan. Welke grootheden als variabelen dienst doen laat ik, in navolging van ZEEMAN, in het midden: dat kan achteraf wel vastgesteld worden (om in overeenstemming met de experimenten te komen).

6. We proberen eerst in \mathbb{R}^2 een systeem te vinden dat aan bovenstaande eisen voldoet (de reden waarom het in \mathbb{R}^1 niet lukt, laat ik hier achterwege). We nemen dus aan, dat er twee relevante grootheden x en b zijn, waarvan het gedrag door differentiaalvergelijkingen wordt beschreven. Laten deze vergelijkingen zijn

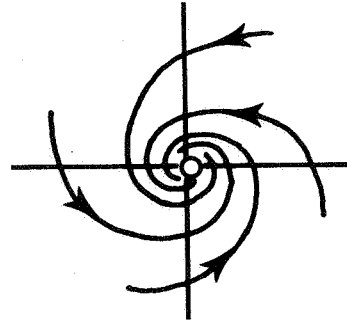
$$\dot{x} = f(x,b)$$

$$\dot{b} = g(x,b)$$

Op grond van (i) nemen we aan, dat $(0,0)$ een stabiel evenwichtspunt is. We krijgen in de buurt van $(0,0)$ dus het volgende gedrag (evt. na geschikte rotatie van het coördinatenstelsel):

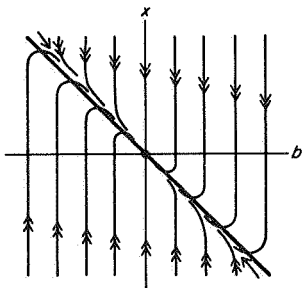


of:

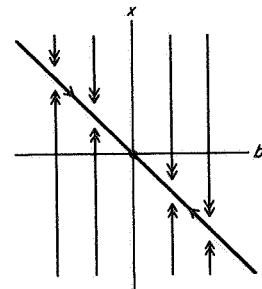


In ons 2-dimensionale model zullen we kiezen voor het *eerste* "stroomlijnen" beeld, en wel op grond van de volgende overwegingen (deze overwegingen sluiten tevens het geval van gelijke eigenwaarden uit):

In (ii) wordt gesproken van *actie*. Wat dit verder ook moge zijn, actie heeft te maken met een *snelle* verandering van één der grootheden (of van beide). Maar er moet, bij wijze van contrast, ook een "richting" van *langzame* verandering zijn. Deze eisen zijn het gemakkelijkst te vervullen als er twee, onderling verschillende, negatieve eigenwaarden zijn, waarvan de één zeer veel groter is dan de ander (immers: de snelheid in de richting der eigenvector bij de eigenwaarde λ_i is in absolute waarde gelijk aan $|\lambda_i|$). We kiezen dus voor



of, in gestyleerde vorm:



Als het systeem uit de evenwichtstoestand gebracht is zal het eerst een *snelle* verticale verandering ondergaan, waarna het langzaam in de richting van de rechte $x = -b$ naar het evenwicht $(0,0)$ terugkeert. De eenvoudigste vergelijkingen hiervoor zijn:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(x+b) \\ \dot{b} &= b \end{aligned}$$

Toch zullen we deze vergelijkingen niet kiezen: de variabele b verandert hier onafhankelijk van x , en in biologische systemen is het te verwachten dat \dot{b} van x zal moeten afhangen (en \dot{x} van b : een soort terugkoppeling dus). Het gewenste stroomlijnenbeeld blijkt ook op te treden bij

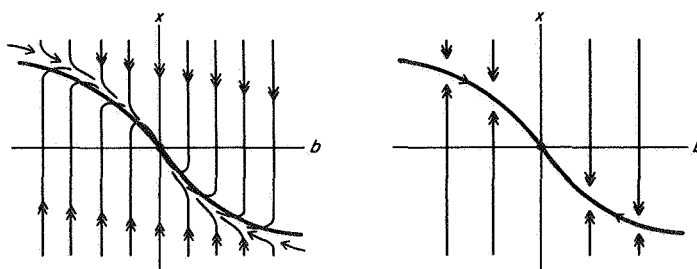
$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -(x+b) \\ \dot{b} &= x\end{aligned}$$

(althans, in de buurt van $(0,0)$ en $\varepsilon < \frac{1}{4}$ - wat dat laatste betreft: het is de bedoeling dat ε echt heel veel kleiner is dan 1).

Merk op, dat ons stroomlijnenbeeld in de buurt van $(0,0)$ ook door niet-lineaire vergelijkingen verkregen kan worden, zoals

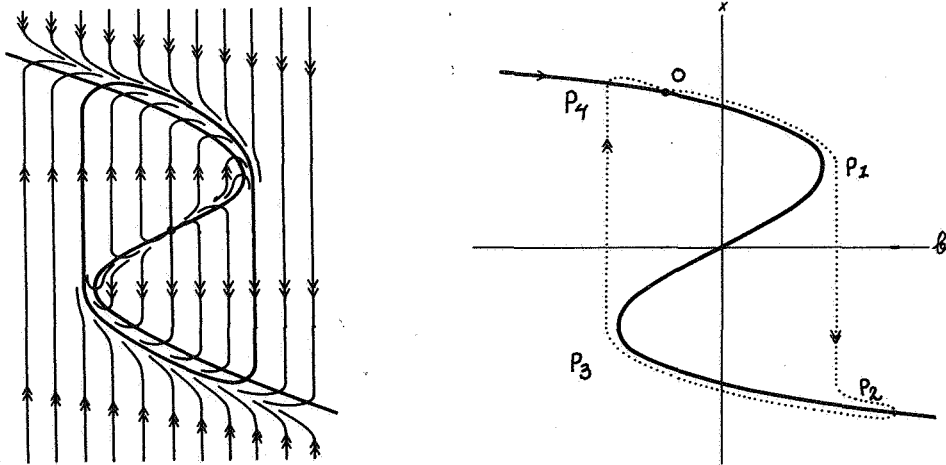
$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -(x^3+x+b) \\ \dot{b} &= x\end{aligned}$$

De langzame terugkeer naar $(0,0)$ vindt nu, bij benadering, plaats langs de kromme waar $\dot{x} = 0$ (alle punten waar de raaklijnen aan de banen horizontaal verlopen liggen "vlak bij" de zgn. limietbaan; de punten



waar die raaklijnen horizontaal lopen voldoen aan $\dot{x} = 0$, dus die vormen de kromme, gedefinieerd door $x^3 + x + b = 0$).

Nu de "drempel" waar het systeem d.m.v. een "trekker" overheen gehaald moet worden om de actie te krijgen. Let wel, het is de bedoeling dat die actie heel wat groter effect moet hebben dan de trekker. We zouden ons dus iets van de volgende gedaante kunnen voorstellen.



Als het systeem in de positieve b -richting uit de evenwichtstoestand wordt gebracht zal een snelle, grote actie plaats vinden (van P_1 naar P_2 in de figuur). Dan zal een langzame overgang naar toestand P_3 plaats vinden, waarna een snelle variatie naar P_4 , en tenslotte een langzame terugkeer naar het evenwichtspunt O . Conclusie: het dynamisch gedrag van een hart-spiervezel is hiermee beschreven. Voor wie formules wel zien: bijv.¹⁾

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= -(x^3 - x + b) \\ \dot{b} &= x - x_0 \end{aligned}$$

(het evenwichtspunt is nu niet $(0,0)$, maar $(x_0, x_0 - x_0^3)$).

Het zal duidelijk zijn dat in \mathbb{R}^2 nooit een geheel langzame terugkeer mogelijk zal zijn: uit continuïteitsoverwegingen volgt, dat men de *kromme waarlangs de langzame beweging plaatsvindt* nooit zo kan buigen dat er niet een traject is dat "afstotend" werkt i.p.v. "aantrekkelijk". Komt het systeem in zo'n punt, dan zal er weer *snelle* verandering gaan plaatsvinden.

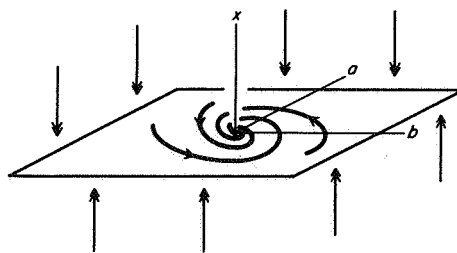
Voor een *langzame terugkeer* naar dat evenwicht moeten we dus in \mathbb{R}^3 gaan werken, waar dan, om voldoende bewegingsvrijheid te hebben, een "oppervlak van langzame beweging" moet zijn. Om een idee te geven van wat er aan de hand zou kunnen zijn:

1) Experimenteel klopt één en ander heel aardig als men voor x de lengte van een spiervezel neemt en voor b de één of andere electrochemische grootte (ionenconcentratie).

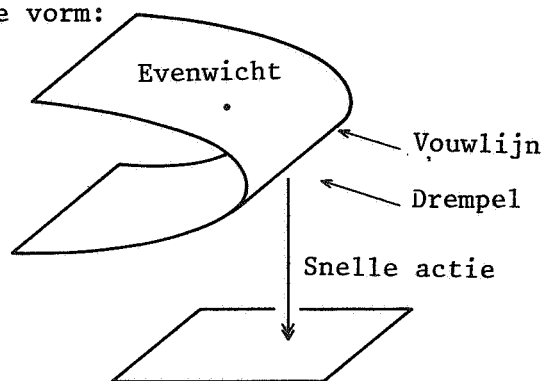
Bij de vergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{a} &= -a+b \\ \dot{b} &= -a-b\end{aligned}$$

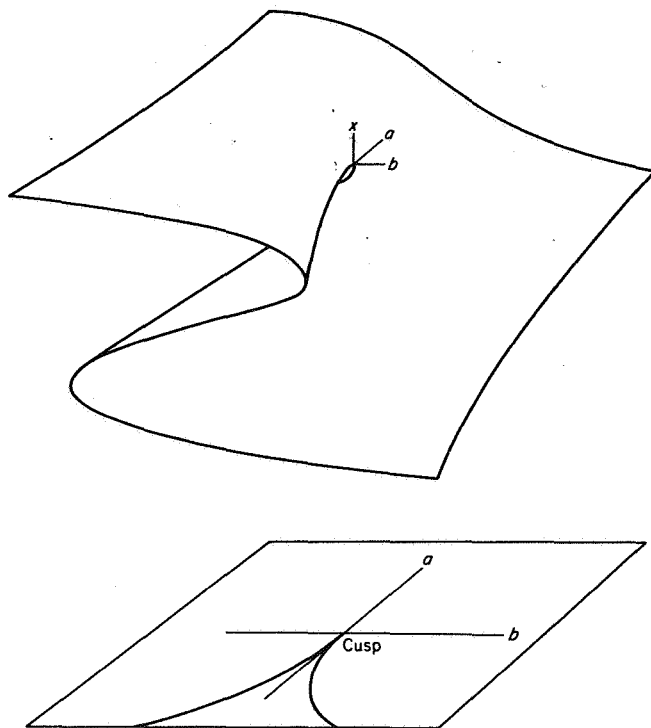
hoort het diagram:



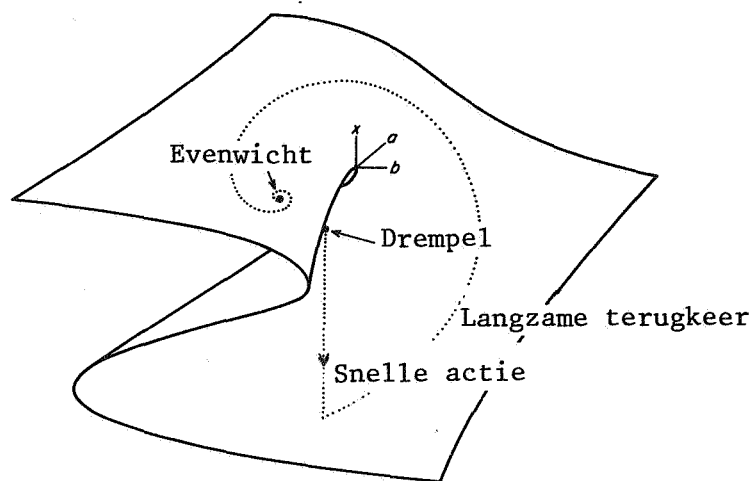
Het vlak van langzame beweging (met $\dot{x} = 0$) is $x = 0$, en in dat vlak (2-dimensionaal) vindt een spiraalstroming plaats (twee complex geconjugeerde eigenwaarden). De noodzaak van een drempel plus de noodzaak om de snelle actie op te vangen door een stuk van het oppervlak van langzame beweging doet ons nu zoeken naar iets van de vorm:



Er is een essentieel en moeilijk stuk wiskunde nodig om de volgende overwegingen exact aan te tonen. Ieder "net" oppervlak in \mathbb{R}^3 kan willekeurig dicht benaderd worden met een nog veel netter (en veel eenvoudiger) oppervlak, waarvan de enige singulariteiten, lokaal gezien, zijn: een "vouwlijn" of een "kreukel" (de zgn. Whitney-cusp.).



Een samenstel van twee vouwlijnen kan uiteraard niet plaats vinden zonder dat een gedeelte van de terugkeer naar het evenwicht *snel* zal gebeuren. Een mogelijkheid om de "cusp" singulariteit te benutten geeft het volgende diagram:



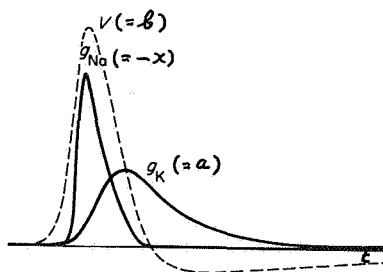
Een dergelijk gedrag wordt beschreven door de vergelijkingen:

$$\epsilon \dot{x} = -(x^3 + ax + b)$$

$$\dot{a} = -2a - 2x$$

$$\dot{b} = -a - 1$$

Hierin zou, om overeenstemming met de experimenten te krijgen, voor b het potentiaalverschil tussen binnen en buitenkant van de wand der zenuwvezel genomen kunnen worden, voor $-x$ het geleidingsvermogen voor Na^+ ionen, en voor a het geleidingsvermogen voor K^+ ionen. Experimenteel klopt het in ieder geval dat, bij deze keus van x , a en b , een actie ingeleid wordt door een toename van b , waarna de actie - een snelle verandering van x - optreedt; daarna komt pas een toename van a (het begin van de spiraalbeweging naar het evenwicht).



LITERATUUR

- [1] BECK, A., Uniqueness of flow solutions of differential equations, in: *Recent Advances in Topological Dynamics*. Lecture Notes in Mathematics 318, p. 30-50. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [2] HIRSCH, M.W. & SMALE, S., *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [3] SYBIRSKY, K.S., *Introduction to topological dynamics*, Noordhoff, Leyden, 1975.
- [4] ZEEMAN, E.C., Differential equations for the Heartbeat and Nerve Impulse, in: M.M. PEIXOTO (ed.), *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, p. 683-741.