STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZD 10

Serie voordrachten gewijd aan de herdenking van het feit dat 100 jaar geleden K.F.Gauss overleed.

S.C.van Veen.

1955

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Serie voordrachten gewijd aan de herdenking van het feit dat honderd jaar geleden Karl Friedrich Gauss overleed.

Eerste voordracht: Woensdag, 9 Februari 1955

door

Prof.Dr S.C. van Veen

De betekenis van Gauss voor de algebra en de getallentheorie

§1. C.F. Gauss werd geboren op 30 April 1777 in Braunschweig, als zoon uit het tweede huwelijk van Gebhard Dietrich Gauss, gehuwd met Dorothea Bentze. In 1784 werd hij leerling van de Katherinen Volksschule. Reeds in zijn eerste schooljaren toonde hij buitengewone begaafdheid, waardoor hij de aandacht van zijn leermeesters op zich vestigde. Reeds in 1786 kwam hij daar in contact met Johann Martin Christian Bartels (1769-1838) die zelf grote begaafdheid voor de wiskunde aan de dag legde, en later hoogleraar in Kuzun en Dorput werd (leermeester van Lobatschewsky). Gezamenlijk bestudeerden zij wiskunde en oude talen. Iets later kwam hij door Bartels in contact met Eberhard August Wilhelm Zimmermann (1743-1815), docent aan het Kollegium Carolinum te Braunschweig (tegenwoordig Techn. Hochschule). De ouders van Gauss leefden in behoeftige omstandigheden. Op aandrang van Bartels werd hem vergund de gymnasiale studie te volgen. In 1790 was Gauss reeds "Primaner". Door Zimmermann werd de aandacht van Hertog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig in 1791 op de begaafde leerling gevestigd. Deze besloot Gauss op staatskosten te laten studeren. In 1792 werd Gauss leerling van het Carolinum (een 3-jarige voorbereidende cursus voor de Universiteit). Reeds in dit tijdperk begon Gauss zich bezig te houden met diepzinnige problemen (frequentie der priemgetallen, arithmetisch-geometrisch gemiddelde, methode der kleinste kwadraten, getallentheorie, parallelen-axioma). Verder beoefende hij met grote voorliefde de studie der klassieke en moderne talen, zodat hij in 1795 na het beeindigen van zijn studie aan het Carolinum ernstig overwoog om aan de universiteit philologie te gaan studeren. De hertog von Braunschweig had gaarne gezien,dat Gauss zijn studie zou voltooien aan de landelijke universiteit te Helmstedt, maar Gauss gaf met klem de voorkeur aan de buiten het hertogdom gelegen universiteit te Göttingen, niet vanwege de daaraan verbonden docenten, maar wegens de rijkvoorziene bibliotheek.

§2. Op 10 October 1795 werd Gauss ingeschreven als student in Göttingen. Hij volgde voornamelijk philologische, historische en astronomische colleges. Met de wiskunde-colleges was het pover gesteld (hoogleraar Abraham Gottlieb Kästner (1719-1806)). De meeste tijd bracht hij echter door in de bibliotheek, met studie van de werken van Euler, Newton en de Franse mathematici. Begin van de vriendschap met Wolfgang

von Bolyai (1775-1856). Nu begint een tijdperk van geweldige productiviteit en grote ontdekkingen. Een zeer belangrijke datum in zijn leven is 29 Maart 1796, toen Gauss met vacantie thuis te Braunschweig was. Op die dag ontdekte Gauss de construeerbaarheid van de regelmatige zeventienhoek met behulp van passer en liheaal, en hij zag zelf zo duidelijk de grote betekenis van deze ontdekking in, dat hij besloot verder zijn leven aan de wiskunde te wijden. Op die datum begint hij zijn beroemde in 1898 door Stäckel teruggevonden "Tagebuch", waarin hij tot 1814 met enkele korte zinnen zijn ontdekkingen met de data heeft aangetekend. (Zie facsimilé-uitgave in "Gauss, Werke X^1", tegenover pag.482).
De eerste mededeling luidt:
"Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc."
1796. Mart.30. Brunsvigae.

De omvang en de betekenis van zijn ontdekkingen op het gebied der getallentheorie is spoedig zo groot, dat hij reeds op 12 Maart 1797 aan v. Zimmermann schrijft over zijn plan, om hieraan een groot werk te wijden. Na een worsteling van meer dan een jaar, gelukte het hem op 8 April 1796 het eerste strenge bewijs van de reciprociteitswet van de kwadraatresten te vinden, nl.

$$\left(\frac{p}{q}\right).\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \qquad (\text{ p en q priem}).$$

Het manuscript van zijn grote werk over getallentheorie was eigenlijk reeds in 1798 gereed, maar daar het drukken niet snel genoeg opschoot, was Gauss in de gelegenheid verschillende hoofdstukken nog volledig om te werken, i.h.b. hoofdstuk V over de kwadratische vormen, dat niet minder dan 5 maal omgewerkt werd, waarbij telkens belangrijke uitbreidingen ontstonden. Inmiddels was zijn studie in Göttingen voltooid. Op 28 September 1798 verliet hij Göttingen om zich te Braunschweig te vestigen.
Op dringend verzoek van de hertog zocht hij contact met de universiteit van Helmstedt (hoogleraar Johann Friedrich Pfaff (1765-1825)), met de bedoeling om daar te promoveren.
Op 26 Juni 1799 richtte hij het verzoek tot de faculteit der wis- en natuurkunde te Helmstedt om te promoveren, en daarbij verder vrijgesteld te worden van alle verdere verplichtingen, als mondeling examen, verdedigen van stellingen, enz. Het verzoek werd ingewilligd, en na inlevering van zijn dissertatie ontving hij op 16 Juli 1799 zijn doctorsdiploma. (promotie "in absentia"). De titel van zijn dissertatie luidt: "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse".

§3. De inhoud van deze dissertatie vormt, niet geheel in overeenstemming met de titel, het eerste strenge bewijs van de grondstelling der algebra, voorafgegaan door een diepgaande kritiek van de voorafgaande bewijspogingen van d'Alembert, Euler, de Foncenex, la Grange.
De grondgedachte van het bewijs van Gauss is zeer eenvoudig. Wij geven die in het kort weer met behulp van complexe getallen, in tegenstelling met Gauss.
Beschouw:

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+..+a_n \quad (a_k \text{ reeel}).$$

$f(re^{i\varphi})=X+iY$ met:

$$X=r^n \cos n\varphi+a_1r^{n-1} \cos(n-1)\varphi+...+a_n.$$
$$Y=r^n \sin n\varphi+a_1r^{n-1} \sin(n-1)\varphi+...+a_{n-1}r \sin\varphi.$$

Voor zeer grote r is dus:

$$X \Leftrightarrow r^n \cos n\varphi.$$
$$Y \Leftrightarrow r^n \sin n\varphi.$$

m.a.w. op de omtrek van de cirkel met straal r om O zal X in teken met cos $n\varphi$, en Y in teken met sin $n\varphi$ overeenstemmen.
Wij markeren op de cirkelomtrek de punten $\varphi=0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, .. \frac{(2n-1)\pi}{n}$, welke punten door 0,1,2,...,2n-1 worden aangegeven.
De cirkelomtrek wordt dan verdeeld in 2n intervallen

(01), (12),.. (2n-1,0)

waarin sin $n\varphi$ afwisselend positief en negatief is. Met uitsluiting van kleine intervallen in de buurt van de deelpunten is dan voor grote r ook Y in deze intervallen afwisselend + en -.
Evenzo is X in de buurt van de even deelpunten 0,2,4,.. 2n-2 positief, in de oneven deelpunten 1,3,5,...,2n-1 negatief.
Vanuit een interval (2h,2h+1) van de cirkelomtrek, waar $Y>0$ is, strekt zich nu een gebied uit, in het inwendige van de cirkel, waar Y eveneens >0 is. Noem dit gebied H.
(Dit gebied kan in het inwendige der cirkel eindigen, en heeft dan behalve (2h,2h+1) geen ander deel met de cirkelomtrek gemeen; òf het strekt zich uit tot een ander interval (2k,2k+1); òf het verdeelt zich in 2 of meer vertakkingen, die ieder op een interval (2l,2l+1) eindigen). Wij beginnen nu in een punt dichtbij een even punt 2h op de cirkelomtrek, waar Y=0 en $X>0$. Wij volgen nu de grenslijn Y=0 in het binnengebied, het positieve gebied $Y>0$ aan onze rechterhand latende.
Tenslotte komen wij dan weer op de cirkelomtrek terug in een oneven punt 2k+1, waar Y=0 en $X<0$.

Bij onze reis langs de rand van H is de continue reële functie X van positieve waarde in negatieve waarde overgegaan, dus langs deze rand, waar permanent Y=0 is, is ten minste éénmaal X=0 geweest. In dat punt is dus $X+iY=f(z)=0$ q.e.d.

(Zie Gauss: Werke III p.4. Duitse vertaling van Netto: Ostwald's Klassiker No.14. Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reellen Factoren ersten oder zweiten Grades.(1799-1849).

§4. Na vele strubbelingen was tenslotte in 1801 de druk van het grote werk over getallentheorie voltooid, en zo verscheen in September 1801 in Leipzig het klassieke werk:
Disquisitiones Arithmeticae
dat onmiddellijk, vooral in het buitenland (Frankrijk) onder de geleerden grote opgang maakte, zodat "de jonge auteur zich in één slag een plaats verwierf onder de grootste mathematici van alle tijden" (Legendre). Over de inhoud van dit vermaarde werk, opgedragen aan zijn beschermheer de hertog von Braunschweig, vermelden wij in het kort het volgende (het aantal pagina's is gerekend volgens de Duitse vertaling van Maser,1889). De eerste vier hoofdstukken geven de beginselen der getallentheorie, i.h.b. de multiplicatieve getallentheorie:

Hoofdstuk	I	Congruentie der getallen in het algemeen	(5 pag.)
" "	II	Congruenties van de eerste graad	(24 pag.)
" "	III	Machtresten	(35 pag.)
" "	IV	Congruenties van de tweede graad (hierbij o.a. het eerste strenge bewijs van de reciprociteits-stelling).	(46 pag.)
" "	V	Theorie der kwadratische vormen en van de onbepaalde vergelijkingen van de tweede graad	(253 pag.)

Dit hoofdstuk, na veelvuldige omwerkingen gegroeid tot meer dan de helft der D.A. (zie boven) is het belangrijkste en het diepzinnigste van het hele werk. De transformatie van binaire kwadratische vormen

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

door lineaire substituties $x=\alpha x^1+\beta y^1, y=\gamma x^1+\delta y^1$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geheel) worden onderzocht.
Wanneer, en alleen wanneer $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$, blijft bij deze transformatie de "determinant" $D=b^2-ac$ invariant.
Met behulp van zogenaamde gereduceerde vormen kunnen nu de kwadratische vormen worden geklassificeerd, waarbij vormen, die door de transformatie met $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$ in elkaar overgaan, tot dezelfde klasse worden gerekend. Gauss bewijst nu, dat het aantal klassen bij gegeven determinant D eindig is.

(Het juiste aantal is eerst later door Lejeune-Dirichlet bepaald (1839), althans gepubliceerd, howel ook Gauss hiervan op de hoogte was, zoals blijkt uit zijn nalatenschap, Werke II).
Hoofdstuk VI geeft verschillende toepassingen (33 pag.)
Hoofdstuk VII <u>Over de cirkelverdeling</u> (54 pag.)

Dit laatste hoofdstuk is het meest spectaculaire hoofdstuk uit het hele werk. Het is eigenlijk van algebraïsche aard, en het geeft de theorie van de cirkelverdeling, dus de constructie van alle regelmatige veelhoeken, waarvan het aantal zijden is p(priem)=$2^{2^k}+1$, en alle andere daaruit verder samen te stellen.
Het beginsel berust op een doeltreffende rangschikking van de p-1 eenheidswortels van $\frac{x^p-1}{x-1}$ in de volgorde

$$\omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \ldots\ldots \omega^{g^{p-2}}$$

waarin g een primitieve wortel van $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ voorstelt.
Iedere wortel is dan dus de g ^{de} macht van de voorafgaande.
Gauss had oorspronkelijk het plan gekoesterd om aan zijn werk nog een achtste hoofdstuk toe te voegen, dat als directe voortzetting van het 7e zou moeten gelden, maar om de toch al zo gestagneerde druk van de D.A. niet nog meer te vertragen, en om het werk niet al te omvangrijk te doen worden, maar vooral omdat de uitwerking nog niet voldoende geslaagd was naar de zin van Gauss, is dit plan achterwege gebleven. Enkele fragmenten van dit bedoelde hoofdstuk zijn teruggevonden in de nalatenschap van Gauss (Werke II).

§5. Na de verschijning van de D.A. werd Gauss in beslag genomen door wetenschappelijke werkzaamheden van heel andere aard, zoals wij in het vervolg zullen zien, zodat hem de tijd ontbrak om nog zoveel aandacht te besteden aan zijn arithmetische onderzoekingen, die hij steeds als de "hoogste" uit de hele wiskunde beschouwde.
Sporadisch komen nog enige overigens hoogst belangrijke verhandelingen van zijn hand op dit gebied. De meeste hebben betrekking op nieuwe bewijzen van de wederkerigheidswet. Het ontbreekt ons aan tijd, hierop nader in te gaan. Wij vermelden slechts

1808. Derde bewijs van de reciprociteitswet (met behulp van het "Lemma" van Gauss).
1811. Vierde bewijs van de reciprociteitswet (met behulp van de <u>sommen</u> van Gauss).
1818. Vijfde en zesde bewijs.
1863. (nalatenschap) zevende en achtste bewijs.

In een nog later tijdperk ((1828) en (1832)) vallen zijn belangrijke publicaties over de bikwadraatresten, en de daarbij behorende reciprociteitswet.

Het is bij deze gelegenheid, dat het "getallenlichaam van Gauss" voor het eerst te voorschijn treedt.
Hoewel met de voorafgaande korte beschouwingen het werk van Gauss op arithmetisch gebied nog lang niet uitgeput is, moeten wij het hierbij laten, om de volgende maal te spreken over zijn niet minder belangrijk werk op het gebied der analyse.

Litteratuur:

P. Bachmann: Uber Gauss' zahlentheoretische Arbeiten. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Heft I, 1911).

A. Fraenkel: Zahlbegriff und Algebra bei Gauss. Mit einem Anhang von, A. Ostrowski in Göttingen: Zum ersten und vierten Gauss-schen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. (Materialien Heft VIII. 1920).

F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert. I. Berlin, Springer. 1926.

Serie voordrachten gewijd aan de herdenking van het feit dat honderd jaar geleden Karl Friedrich Gauss overleed.

Tweede voordracht: Woensdag 23 Februari 1955

door

Prof. Dr S.C. van Veen

De betekenis van Gauss voor de analyse.

§6. In de voorafgaande lezing kon nog in hoofdzaak worden gesproken over onderzoekingen, welke door Gauss waren gepubliceerd. Wanneer wij nu over zijn werk op analytisch gebied wensen te spreken, dan is er slechts zeer weinig, dat tijdens het leven van Gauss is gepubliceerd. De hoofdzaak is eerst bekend geworden uit zijn nalatenschap (gepubliceerd sedert 1876, Werke III, X').

Als eerste onderwerp van zijn onderzoek treffen wij aan:

"Het arithmetisch-geometrisch gemiddelde" (sedert 1791).

Uitgaande van 2 getallen a_1 en b_1 wordt het arithmetisch gemiddelde $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ en het geometrisch gemiddelde $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$ berekend. Door iteratie van dit proces ziet men gemakkelijk, dat de rijen $a_1, a_2 \ldots$ en $b_1, b_2 \ldots$ convergeren naar een gemeenschappelijke limiet $\mu(a_1,b_1) \equiv$ het agm (arithm.geom.gemiddelde) van a_1 en b_1. De nog open blijvende vraag, hoe $\mu(a_1,b_1)$ analytisch met a_1 en b_1 samenhangt, zou eerst later langs een omweg worden ontdekt (1799, zie §7).

§7. Op 8 Januari 1797 begint Gauss zich bezig te houden met de lemniscaat-integraal $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, als booglengte van de lemniscaat $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$. De berekening van de booglengte van $\frac{1}{4}$ lemniscaat $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ in reeksontwikkeling wordt in een groot aantal decimalen uitgevoerd. De analogie van deze integraal met $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ voerde tot het verband tussen lemniscaatverdeling en cirkelverdeling, waaruit hij op 19 Maart 1797 afleidde, dat de verdeling van de omtrek van de lemniscaat in n delen afhing van de oplossing van een algebraïsche vergelijking van de graad n^2. Hiermede was de dubbele periodiciteit van de lemniscaat-integraal gevonden (een reële en een zuiver imaginaire periode).

Een uiterst belangrijke ontdekking deed Gauss op 30 Mei 1799, toen hij door numerieke berekening van het agm tussen 1 en $\sqrt{2}$ tot in elf decimalen overeenstemming ontdekte tussen de reciproke waarde van dit bedrag en $\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Het gelukte hem deze uitkomst analytisch te bewijzen en te generaliseren. Op 23 December 1799 bewees hij algemeen, dat de reciproke waarde van $\mu(a,b)$ kon worden uitgedrukt door de integraal

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

waardoor de vroeger gezochte analytische samenhang was ontdekt. Van dit belangrijke onderzoek is door Gauss niets gepubliceerd behalve enkele schaarse opmerkingen in de later te bespreken verhandeling "Determinatio attractionis etc." uit 1818 (zie derde lezing). Het bewijs kan in het kort als volgt worden geschetst.

Op de integraal $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{a^2\cos^2\varphi_1+b^2\sin^2\varphi_1}$ wordt de transformatie

$\sin\varphi_1 = \frac{2a\sin\varphi_2}{a+b+(a-b)\sin^2\varphi_2}$ toegepast met het resultaat:

$$\cos\varphi_1\, d\varphi_1 = 2a\cos\varphi_2\,\frac{a+b-(a-b)\sin^2\varphi_2}{\left[a+b+(a-b)\sin^2\varphi_2\right]^2}\,d\varphi_2;$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\varphi_2}}{a+b+(a-b)\sin^2\varphi_2}\cos\varphi_2 .$$

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi_1+b^2\sin^2\varphi_1} = a.\,\frac{a+b-(a-b)\sin^2\varphi_2}{a+b+(a-b)\sin^2\varphi_2}$$

$$\text{dus: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi_1+b^2\sin^2\varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\varphi_2+(\sqrt{ab})^2\sin^2\varphi_2}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a_2^2\cos^2\varphi_2+b_2^2\sin^2\varphi_2}}$$

met $a_2 = \frac{a+b}{2}$, $b_2 = \sqrt{ab}$

Zo doorgaande vindt men voor de zelfde uitkomst $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi_n+b_n^2\sin^2\varphi_n}}$

Wegens a_n en $b_n \longrightarrow \mu(a,b)$ is de uitkomst dus

$$\frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2\mu} \qquad \text{w.t.b.w.}$$

De nu ontdekte samenhang tussen agm en elliptische integralen is door Gauss tot midden 1800 in allerlei richtingen uitgebreid, zodat mag worden gezegd, dat hij op dat tijdstip in het bezit was van een uitgewerkte theorie der elliptische functies. In zijn Disquisitiones Arithmeticae vermeldt hij dit in enkele bewoordingen in § 335, begin van hoofdstuk VII (cirkelverdeling), waarbij hij terloops mededeelt, dat hij "over die transcendente functies (die van de integraal $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ afhangen) een omvangrijk werk in voorbereiding heeft".

Van de publicatie hiervan is, zoals wij zullen zien, helaas niets gekomen. Wel is het juist deze opmerking geweest, welke ruim een kwart eeuw later de jonge wiskundigen Abel en Jacobi de impuls heeft gegeven tot hun grote ontdekkingen op dit gebied.

§ 8. De talrijke machtreeksontwikkelingen uit de theorie der elliptische integralen waren voor Gauss aanleiding tot het onderzoek van een algemene functie, die deze ontwikkelingen als bijzondere gevallen omvatte. Als resultaat hiervan verscheen in 1812 de belangrijke verhandeling "Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{1.2\ \ \gamma(\gamma+1)}\, x^2 + \ldots\ldots\ldots \quad \text{Pars prior."}$$

waarin de eigenschappen van de hypergeometrische reeks worden bestudeerd. In samenhang daarmede vonden wij daarin uitvoerige beschouwingen over de gamma-functie ($\Pi(x)$ van Gauss $= \Gamma(x+1)$).

Het is bij de publicatie van dit eerste gedeelte gebleven. In zijn nalatenschap is nog een tamelijk compleet handschrift gevonden van het tweede gedeelte van deze verhandeling, dat gepubliceerd is in Werke III (p.207-229) in 1876 onder de titel:

"Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis",

waarin Gauss afleidt, dat de hypergeometrische reeks $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ een particuliere integraal is van de differentiaalvergelijking:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Door de bestudering van de volledige oplossing, en de talrijke transformaties daarvan, worden tal van nieuwe ontwikkelingen afgeleid. Hierbij dient te worden opgemerkt, dat reeds in 1836 Kummer zelfstandig op analoge wijze het merendeel dezer resultaten had afgeleid en gepubliceerd (Crelle XV p.39-83).

Uit tal van argumenten heeft Schlesinger in 1912 de conclusie getrokken, dat we in de verhandeling "circa seriem" het eerste deel van het geprojecteerde grote werk over de transcendente functies moeten zien, welk werk dan ook de theorie der elliptische functies zou moeten bevatten (Litt.2, pag.92). De voornaamste reden, dat Gauss dit derde deel niet heeft voltooid, schijnt te zijn, dat hij nog niet over de middelen beschikte om de uitkomsten der verschillende methoden met elkaar in overeenstemming te brengen. In het bijzonder schijnt hij niet over de theorie van de integralen van meerwaardige functies te hebben beschikt. Wel blijkt het, dat hij reeds in 1811 de volledige beschikking had over de klassieke resultaten tussen 1825 en 1840 door Cauchy gepubliceerd over eenwaardige complexe functies. In een brief van 18 December 1811 aan Bessel schrijft hij:

"dat de integraal $\int \varphi(x)dx$ genomen langs twee verschillende wegen steeds dezelfde waarde verkrijgt, wanneer in het gebied tussen beide wegen nergens $\varphi(x)=\infty$ wordt, als nog wordt aangenomen, dat $\varphi(x)$ zelf een éénwaardige functie van x is, of terminste voor die waarden van x binnen dat gebied slechts één systeem van waarden, zonder onderbreking der continuïteit wordt aangenomen".

Van het verdere werk van Gauss op analytisch gebied vermelden wij nog in het kort: een verhandeling over attractie door een homogene ellipsoïde (1813), de bekende benaderde integratiemethode (nulpunten van de Legendre-polynomen (1814). Ook heeft hij zich nog bezig gehouden met het logarithmisch potentiaal, en het "principe van Dirichlet", klaarblijkelijk op een wijze die sterk verwant is met die van Riemann in diens dissertatie.

De aantekeningen van Gauss met betrekking tot de elliptische functies strekken zich uit tot 1843. Zij bestrijken dus een tijdruimte van meer dan 50 jaar. Zij zijn zo volledig mogelijk verzameld in Werke III, VIII en X'.

Als besluit van deze lezing willen wij nog vermelden, dat Gauss in 1826 en 1827 met grote belangstelling kennis nam van de baanbrekende onderzoekingen op het gebied van de elliptische functies door de jeugdige geleerden Abel en Jacobi. Op 23 Maart 1928 schrijft hij aan Bessel: "zoals ik zie, is Abel mij nu voor geweest, en dat ontlast mij met betrekking tot ongeveer een derde deel van deze dingen van de moeite, temeer, omdat hij alle ontwikkelingen zeer elegant en kort heeft uitgevoerd. Hij heeft juist dezelfde weg gekozen, die ik in 1798 insloeg, zodat de grote overeenkomst van de resultaten niet te verwonderen is".

Litteratuur:

L. Schlesinger: C.F. Gauss: Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1797-1799.

" " Uber Gauss'Arbeiten zur Funktionentheorie (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Heft II und Heft III, Leipzig 1912).

Serie voordrachten gewijd aan de herdenking van het feit dat honderd jaar geleden Karl Friedrich Gauss overleed.

Derde voordracht: Woensdag 9 Maart 1955

door

Prof. Dr S.C.van Veen

De betekenis van Gauss voor de astronomie, geodesie, meetkunde en physica.

§9. In de eerste lezing is reeds opgemerkt, dat Gauss na de publicatie der Disquisitiones Arithmeticae (Sept.1801) geen gelegenheid meer heeft kunnen vinden om zijn verdere diepgaande onderzoekingen op arithmetisch gebied volledig te kunnen publiceren. In het bijzonder werd in het tijdvak 1801-1816 zijn tijd en aandacht bijna uitsluitend in beslag genomen door zijn werk op astronomisch gebied.

De directe aanleiding daartoe was de volgende. Op 1 Januari 1801 was door Guiseppe Piazzi in Palermo een nieuwe planeet ontdekt, de eerste van de talrijke groep van asteroïden, voor het merendeel zich bewegend tussen Mars en Jupiter. Hij was slechts in de gelegenheid deze asteroïde, die later de naam Ceres verkreeg, gedurende ± 6 weken waar te nemen, waarbij Ceres slechts een kleine boog van 9° had doorlopen. Daarna verdween zij in de zonnestraling en het was voorlopig onmogelijk om haar daarna aan de morgenhemel terug te vinden. De wetenschap beschikte nog niet over de middelen om uit de schaarse waarnemingsgegevens over zo'n kort tijdsverloop met redelijkheid een voldoend nauwkeurige baan te bepalen. Hier lag voor Gauss een waardevol probleem klaar. Het moest theoretisch mogelijk zijn, uit 8 gegevens, n.l. de rechte klimming en declinatie in 3 waargenomen posities, benevens de 2 tijdsverschillen tussen de 3 waarnemingen, de 8 elementen voor de bepaling van de Kepler-ellips te berekenen. Het mathematisch probleem was dus: een ellips te vinden met de zon als brandpunt, die 3 gegeven rechten (verbindingslijnen aarde-asteroïde) moest snijden, op zodanige wijze, dat de bogen van de ellips tussen de snijpunten volgens de perkenwet zou worden doorlopen.

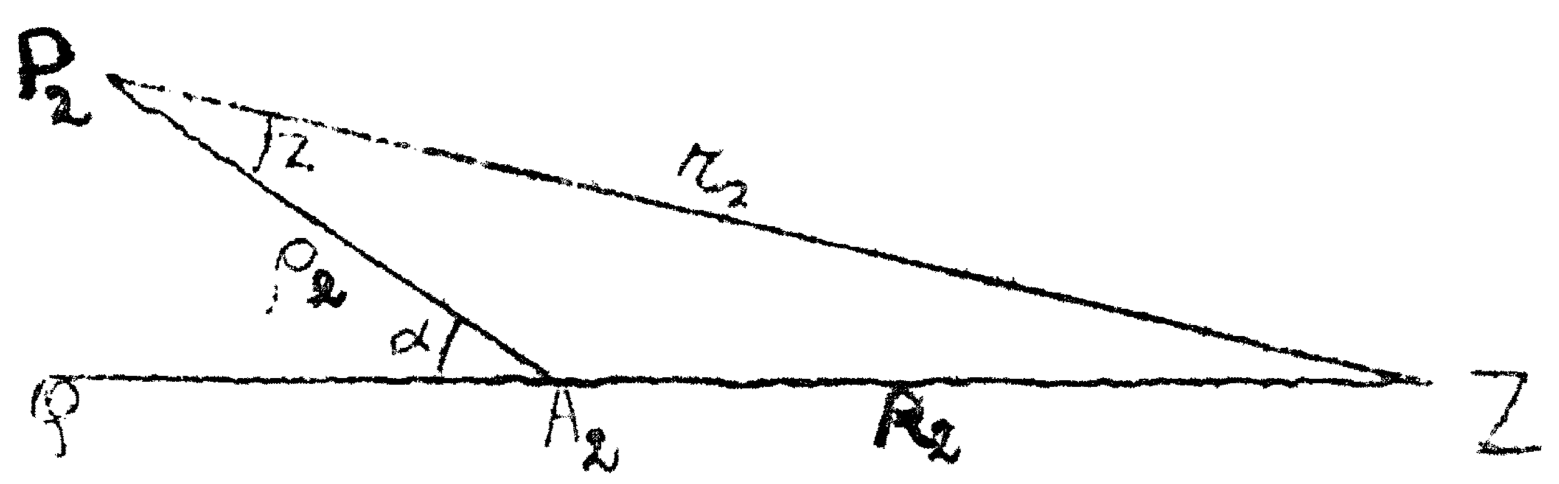
Gauss kwam in September 1801 in het bezit van de waarnemingsresultaten van Piazzi en ging aan het werk. Uit zijn aantekeningen in zijn dagboek uit September en October 1801 valt op te maken, dat hij nieuwe en buitengewoon efficiënte methoden voor de baanbepaling had ontdekt.

In het December-nummer van von Zach's Monatliche Korrespondenz kon reeds de ephemeride van 25 November 1801 tot 31 December 1801 op grond van de berekeningen van Gauss worden gepubliceerd. Met behulp van deze berekende plaatsen kon inderdaad von Zach op 31 December 1801 en Olbers op 1 Januari 1802 Ceres terugvinden, vrijwel precies op de door Gauss voorspelde plaats. Deze gebeurtenis was de aanleiding tot de eerste kennismaking van Gauss met Olbers, de inleiding tot een vriendschap, die tot aan de dood van Olbers heeft geduurd. De spoedig volgende ontdekkingen van andere asteroïden (Pallas door Olbers op 28 Maart 1803, Juno door Harding in 1804 en Vesta door Olbers in 1807) gaven Gauss volop gelegenheid zijn methoden te verbeteren en uit te breiden, in het bijzonder door rekening te houden met de storingen die i.h.b. bij Pallas door Jupiter zeer groot waren. De reden hiervan zal straks nader worden besproken.

Olbers en anderen hadden reeds lang bij Gauss erop aangedrongen zijn berekeningsmethoden te publiceren. Gauss was hiertoe wel bereid, maar hij wenste eerst zijn methoden nog in velerlei opzichten te perfectionneren. Tenslotte verschenen de baanbepalingsmethoden in de meest geperfectionneerde vorm in 1809 onder de titel:

"Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem abientium".

Het kernpunt van de baanbepalingsmethode berust in het feit, dat Gauss door uiterst geraffineerde transformaties erin slaagt, een vrij eenvoudige vergelijking af te leiden, waaruit de hoek z (zie figuur) kan worden bepaald.



A_2 en P_2 stelt aarde en planeet op het tweede waarnemingstijdstip voor. $A_2Z=R_2=$ zonsafstand en $\angle PA_2Q=\alpha$ zijn uit de aard der zaak uit de waarnemingen en zonnetafels bekend.

Gauss leidt voor $\angle A_2P_2Z=z$ de volgende vergelijking af:

$$m \sin^4 z = \sin(z-q)$$

waarin m en q grootheden zijn, die met zeer grote benadering uit de waarnemingsresultaten bijzonder eenvoudig zijn te berekenen. De benadering is des te groter, naarmate de tijdsintervallen tussen de waarnemingen kleiner zijn en minder van elkaar verschillen. Door iteratie vindt men z (men gebruikt alleen de kleine oplossing $z \approx q$, omdat alle waarnemingen in de buurt van de oppositie plaats vinden). Van $\triangle A_2P_2Z$ zijn dan 1 zijde en 2 hoeken bekend, dus ρ_2 en r_2 zijn te vinden. Het is daarna "vrij eenvoudig" om ρ_1, ρ_3 en de elementen te bepalen.

§10. Met de baanbepaling uit 3 volledige waarnemingen was het werk niet af. Wij vermelden terloops, dat Gauss in boek II, derde hoofdstuk voor het eerst een behandeling geeft van zijn reeds in 1795 ontdekte "methode der kleinste kwadraten", die daarbij wordt toegepast bij baanbepaling,

als men over meerdere waarnemingen beschikt. Het was Gauss echter reeds gebleken, dat de gewone Kepler-ellips nooit volkomen aan de waarnemingen kon aansluiten, wegens de grote storingen, die speciaal bij Pallas merkbaar waren door de invloed van Jupiter.
Aan de berekening van die storingen heeft Gauss tussen 1802 en 1816 ontzaglijk veel tijd en moeite besteed, daarin vaak bijgestaan door Bessel en Nicolai. Ook van deze uitvoerige, zenuwslopende berekeningen is tijdens het leven van Gauss niets gepubliceerd. Onder leiding van Brendel zijn deze resultaten met buitengewone zorg en pieteit uit de nalatenschap van Gauss verzameld, en in Band VII der verzamelde werken in 1906 gepubliceerd.
De moeilijkheid van de storingsberekening bij Pallas werd veroorzaakt door de grote excentriciteit ($e=\frac{1}{5}$), de grote helling ($i=34^{o}$)(waardoor door convergentie der reeksen, opklimmende volgens machten van e en tg i,slecht was) en door een zeer merkwaardige oorzaak, die Gauss in April 1812 had ontdekt. Het was hem gebleken, dat de verhouding van de omloopstijden van Pallas en Jupiter met zeer grote benadering door vrij eenvoudige gehele getallen kon worden uitgedrukt, n.l. 7:18. Gauss hechtte bijzondere waarde aan dit resultaat, dat tot speciale hemelsmechanische problemen (libratie) aanleiding gaf. Hij deelde dit onder geheimhouding aan Olbers en Bessel mede, en hij volstond met publicatie in de Göttinger Gelehrten Anzeigen van 25 April 1812 in de vorm van een onontwarbaar anagram:

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1

De moeizame berekeningen van de Pallas-storingen, die vele jaren van het kostbare leven van Gauss hadden geroofd, zonder tot het gewenste resultaat te voeren, hebben ongetwijfeld, mede met de moeilijke huiselijke omstandigheden en de politieke toestand in die jaren, geleid tot de toestand van hypochondrie en zenuwoverspanning, waaraan Gauss in de jaren om 1812 ten prooi was. In deze toestand kwam eerst definitieve verbetering toen hij in verband met zijn in § 12 te bespreken geodetisch werk geregeld gedurende lange tijd in de buitenlucht moest vertoeven.

§ 11. Na 1816 worden deze berekeningen onvoltooid afgebroken en nimmer hervat. Wel is er nog een positief resultaat van grote betekenis gevolgd in 1818, n.l. de toen gepubliceerde methode der seculaire storingen, onder de titel: "Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita" (Werke III, p.331).
Het oorspronkelijke idee van Gauss is, dat hij de massa der storende planeet verdeeld denkt over de gehele baan, en wel omgekeerd evenredig met de in ieder punt geldende omtreksnelheid. De (seculaire) storing

van de bewegende stoorder op de gestoorde planeet wordt daardoor gereduceerd tot de invloed van een vaste ring op de gestoorde planeet. Deze methode is illusoir in het geval van een rationale verhouding der omloopstijden. In deze verhandeling wordt door Gauss voor de eerste en enige maal een overzicht gegeven van de theorie van het arithmetisch-geometrisch gemiddelde (§ 6).

§ 12. Gauss was in 1807 zijn werkzaamheden in Göttingen begonnen als directeur van de sterrewacht en als hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit. Reeds het volgende jaar kreeg hij als privé-leerling de drie jaar jongere Schumacher, die tot 1809 onder leiding van Gauss aan de sterrewacht werkte. In 1810 werd Schumacher buitengewoon hoogleraar in de astronomie aan de universiteit van Kopenhagen, en in 1813 directeur van de sterrewacht te Mannheim, om in 1815 weer naar Kopenhagen terug te keren als gewoon hoogleraar. Hij heeft grote invloed uitgeoefend op de geodetische werkzaamheden van Gauss. Op 8 Juni 1816 schreef hij aan Gauss, dat hij van de koning van Denemarken opdracht had ontvangen tot het uitvoeren van een breedtegraadmeting van Skagen tot Lauenburg ($4\frac{1}{2}$ breedtegraad) en een lengtegraadmeting van Kopenhagen tot de Westkust van Jutland (4 lengtegraden). Hij richtte de dringende uitnodiging aan Gauss om deze breedtemeting voort te zetten naar het zuiden door Hannover tot Gotha, of tot aan het Beierse driehoeksnet, en verder om gezamenlijk een basis te meten in de buurt van Hamburg.
Gauss accepteerde deze uitnodiging op 5 Juli 1816 met enthousiasme. Deze belangstelling van Gauss ontstond zowel uit practische, als theoretische oorzaken. Hij zag in de practische triangulatieberekeningen een prachtig werkobject voor zijn reeds in 1795 geconcipieerde methode der kleinste kwadraten. Hij voelde behoefte, uit dankbaarheid voor de genoten steun bij zijn studie, om zich verdienstelijk te maken voor zijn land. Maar bovenal wenste hij de juiste gedaante van de aarde, i.h.b. de afplatting nauwkeurig te bepalen. De vroegere metingen hadden nog niet een voldoende nauwkeurig resultaat geleverd. Tenslotte wenste hij de theoretische geodesie, de driehoeksmeting op een omwentelingsellipsoïde, op een hoger niveau te brengen. In de herfst van 1816 was Schumacher met zijn triangulatie begonnen. Voor Gauss was dit tijdstip minder geschikt, omdat hij juist met de vele beslommeringen van de inrichting van de nieuwe sterrewacht had te kampen, terwijl hij juist verdiept was in theoretisch onderzoek (reciprociteitswet, seculaire storingen (§ 11), niet-Euclidische meetkunde). Eerst in 1818 kon Gauss op hernieuwde uitnodiging van Schumacher aan het geodetische werk beginnen. Er werden hoekmetingen verricht te Lüneburg. Bij deze waarnemingen had Gauss last van de weerspiegeling van de zon in een raam van de Michaels-

toren in Hamburg. Dit feit was de directe aanleiding tot de uitvinding van de heliotroop in herfst 1820.
Schumacher, man van de wereld, met tact en diplomatieke capaciteiten, vulde Gauss uitstekend aan bij onderhandelingen met autoriteiten. Door zijn medewerking verkreeg Gauss in 1820 de toestemming tot het voortzetten van de metingen in het koninkrijk Hannover.
Einde 1820 begon Gauss met de voorbereidingen en de keuze van de hoekpunten, waarbij hij op grote moeilijkheden stuitte. Gauss wenste zijn metingen via de Lünenburger heide naar het westen voort te zetten tot dat aansluiting was verkregen met het Nederlandse driehoeksnet, opgemeten door Krayenhoff (1815); welk net op zijn beurt in het zuiden weer grensde aan het Franse driehoeksnet. Speciaal de metingen van Krayenhoff mochten zich verheugen in een schitterende reputatie, met betrekking tot hun nauwkeurigheid. Toen Gauss echter meer in bijzonderheden met deze resultaten kennis maakte, kwam hij tot een vrijwel tegengestelde conclusie.
Tussen 1821 en 1823 vonden de eigenlijke hoekmetingen plaats. Dit ging met grote moeilijkheden gepaard, i.h.b. op de onherbergzame Lüneburger heide. De grootste driehoek was de driehoek Hohehagen, Inselsberg, Brochen, met zijden van de orde van 80 K.M. Op 5 September 1824 waren deze metingen beëindigd. Hoewel ook in latere tijden (1828) de triangulatie in Hannover nog verder is voortgezet, heeft Gauss na 1824 vrijwel niet meer persoonlijk aan de metingen in de buitenlucht deelgenomen.
Ondanks de buitengewone zorg waarmede de graadmetingen hadden plaatsgevonden, waren de resultaten niet in elk opzicht van practisch standpunt bezien bevredigend. De vorm van de door Gauss gekozen driehoeken was vaak ongunstig en ingewikkeld. De organisatie liet verder door geldgebrek en door de moeilijkheid om geschikte waarnemingspunten in het bosrijke gebied veel te wensen over. Als afsluiting van de practische metingen is te beschouwen het in 1828 gepubliceerde geschrift: "Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altena"(Werke IX, p.1).

§13. Van grote betekenis voor de wetenschap waren de theoretische onderzoekingen, waartoe het geodetisch werk de stoot heeft gegeven.
De onderzoekingen over de afbeelding van het oppervlak van een ellipsoïde op een plat vlak (in verband met karteringskwesties) voerde reeds in 1816 Gauss tot het algemene probleem "een gegeven oppervlak zodanig op een ander gegeven oppervlak af te beelden, dat het beeld met het origineel in de kleinste delen gelijkvormig is". Op aansporen van Gauss werd dit probleem in 1820 door de Academie van Wetenschappen te Kopenhagen als prijsvraag voor 1821 uitgeschreven, in 1822 herhaald, omdat er geen oplossing was binnengekomen. Gauss vond met veel moeite tussen

zijn andere werk door op 11 December 1822 gelegenheid zijn eigen op lossing in te zenden, welke op 23 Juli 1823 werd bekroond en in 18? werd gepubliceerd. Voor deze afbeelding is door Gauss in 1843 de ?- naming "conforme afbeelding" gelanceerd.
In de direct daaropvolgende jaren heeft Gauss deze onderzoeking? voortgezet en de grondslagen gelegd voor de differentiaal-geometrie; de grote verhandeling, aan dit onderzoek gewijd, verscheen in 1827 onder de titel: Disquisitiones circa superficies curvas. In h? bijzonder wordt hierin behandeld: het begrip kromtemaat en haar invariantie bij verbuiging; verder vermoedelijk onder sterke invloed van de geodetische werkzaamheden onderzoekingen over de geodetische krommen en de daardoor gevormde driehoeken. Als laatste herinnering aan zijn geodetische onderzoek verscheen in 1843: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodesie. Dit was het eerste gedeelte van een groot opgezet werk, waarvan in 1846 nog een tweede gedeelte verscheen. In het eerste gedeelte worden de geodetische problemen op een bol behandeld, in het tweede gedeelte die op een ellipsoïde. De zijden van de driehoeken zijn dan geodetische krommen.

§ 14. Wij kunnen de bespreking van het meetkundige werk niet besluiten zonder enkele woorden te wijden aan het meetkundige onderzoek, dat Gauss gedurende zijn gehele leven heeft beziggehouden, maar waarvan tijdens zijn leven niets is gepubliceerd. Wij bedoelen de niet-Euclidische meetkunde. Uit de brieven aan Schumacher en Bessel is op te maken, dat Gauss zich reeds sedert 1795 ernstig bezighield met het parallelen-axioma. Reeds in een vroeg stadium (± 1817 is Gauss tot de overtuiging gekomen, dat er een andere meetkunde kon worden ontwikkeld, onafhankelijk van het parallelen-axioma, waarin o.a. de som van de hoeken van een $\Delta \neq 180^\circ$ is. Het lag niet in de aard van de schuchtere Gauss, sterk gevoelig voor onaangename indrukken, met dergelijke revolutionnaire denkbeelden voor het daglicht te treden. Zelfs bij zijn beste vrienden als Schumacher moest hij in dit opzicht op gebrek aan het juiste begrip stuiten, en hoewel van andere zijde, o.a. van Bessel sterk werd aangedrongen op de publicatie van deze onderzoekingen, schreef hij hem op 27 Januari 1829: "Vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte". Toch is Gauss in April 1831 begonnen, iets van zijn onderzoekingen op te schrijven. "Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge" (Brief aan Schumacher 17 Mei 1831). Deze notities beslaan slechts drie blaadjes, die later teruggevonden zijn (Werke VIII, p.202-209).
Het was intussen een grote vreugde voor Gauss te ervaren, dat een ander in 1831 tot dezelfde gedachten was gekomen en bovendien de moed had kunnen vinden dit werk te publiceren. Het was een dubbele vreugd,

dat deze pionier de zoon van zijn jeugdvriend Wolfgang Bolyai, Johann Bolyai was. Bovendien maakte Gauss in 1840 kennis met het analoge onderzoek van de Russische mathematicus Lobatschefsky.

§15. Intussen had het wetenschappelijke werk van Gauss, na de geodetische periode, een totaal andere richting genomen. In 1828 had Gauss in Berlijn ten huize van Alexander von Humboldt kennis gemaakt met de jonge geniale physicus Wilhelm Weber (1804-1891). Op voorstel van Gauss werd Weber in 1831 in Göttingen benoemd, waar hij tot zijn dood werkzaam bleef, met een onderbreking om politieke redenen van 1843-1849. Van dit moment dateert een periode van intense samenwerking op physisch gebied, welke geduurd heeft tot aan de dood van Gauss. De tijd ontbreekt ons om hier van deze samenwerking meer te vermelden dan enkele hoogtepunten. Reeds vóór de periode van samenwerking had Gauss zich enkele malen met theoretisch-physische problemen beziggehouden. In 1829 met de principes der mechanica (Uber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (het principe der kleinste dwang)), in 1830 met de theorie der capillariteit (Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii). Als vrucht van de samenwerking ontstond het eerst in 1832 de verhandeling over de absolute maat bij magnetische metingen (invoering van het C.G.S.-stelsel). In 1838/39 volgde de "Algemene theorie van het aardmagnetisme, in 1839/40 onderzoekingen over aantrekkings-en afstotingskrachten, die omgekeerd evenredig zijn met het kwadraat van de afstand,(hier vindt men de bekende stellingen van Gauss, die tegenwoordig i.h.a. in de vectoranalyse ter sprake komen).
Als nevenproduct van de samenwerking noemen wij een practische uitvinding, de electrische telegraaf (1833).
In 1840 verdiepte Gauss zich in de studie van de gang der stralen in optische instrumenten. Het resultaat was de "Dioptrische Untersuchungen".

§16. De laatste levensjaren van Gauss waren niet in alle opzichten de gelukkigste. In 1840 stierf Olbers, in 1846 Bessel en in 1850 Schumacher. De gezondheidstoestand van Gauss ging achteruit. Een belangrijk hoogtepunt was nog het met grote luister gevierde gouden doctorsjubileum op 16 Juli 1849.
Op 16 Juni 1854 kon Gauss nog de bijna gereedgekomen spoorweg van Kassel naar Göttingen gaan bezichtigen. Hij woonde ook de opening van deze spoorweg op 31 Juli van het zelfde jaar bij. Het volgende jaar begon Gauss ernstig te lijden aan hartvergroting. Op 23 Februari 1855 om 1 uur 5 min. 's-morgens overleed hij rustig en kalm.

LITTERATUUR

M. Brendel: Über die astronomischen Arbeiten von Gauss. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. VII 1919) (ook Werke XI.2.)

A. Galle: Über die geodätischen Arbeiten von Gauss. (Werke XI.2.)

P. Stäckel: Gauss als Geometer. (Materialien wiss.Biographie V.1918)

C. Schaefer: Über Gauss'physikalische Arbeiten . (Werke XI.2.)

L. Bieberbach: Carl Friedrich Gauss. Ein deutsches Gelehrtenleben.1938.