STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZD 12

Enkele voordrachten over getallentheorie geinspireerd door het werk van E.Hecke.incompl.

F.van der Blij.

1960

Enkele voordrachten over getaltheorie, geïnspireerd door het werk van E. Hecke

door

Prof.Dr F. van der Blij

februari - maart 1960

Inleiding

Erich Hecke werd in 1887 geboren. Hij stierf in 1947, en in 1959 verschenen zijn "Mathematische Werke". Afgezien van zijn bekende boek "Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen", 1954^2 bestaan zijn werken uit 42 artikelen.

We citeren enkele regels van C.L. Siegel over dit werk: "Der überwiegende Teil dieses Werkes steht in Zusammenhang mit tiefen Probleme der analytische Zahlentheorie und reiht sich nach Sinn und Bedeutung an klassische Leistungen von Dirichlet, Riemann und Kronecker."

Aan deze typering zullen we niets toevoegen. Model voor deze voordrachten stond Hardy's boek over Ramanujan, al willen we in geen enkel opzicht pretenderen de omvang en de qualiteit van dit werk te benaderen. Het werk van Hecke is voortgezet o.a. door Petersson, Eichler en Maasz, maar ook Godement besteedt veel aandacht aan deze problemen (zie Seminaire Bourbaki 1951 - 1953).

Onze keuze is niet representatief, vooral omdat we speciaal onderwerpen kozen, die zich voor voordrachten in dit kader lenen. Hoewel het belangrijkste werk van Hecke in de diepere theorieën ligt, geloven we toch op dit eenvoudige niveau iets van de stijl te laten zien.

Litteratuur

E. Hecke:	Mathematische Werke, Göttingen 1959.
W. Maak:	Erich Hecke als Lehrer. Abh. Math.Sem. Hamburg 16^{I} (1949) p.1-6.
H. Petersson:	Das wissenschaftliche Werk von E. Hecke, Abh.M.S. Hamb. 16^{I} (1949) p.7-31.
R. Godement:	Séminaire Bourbaki 1951/52/53, No 51,59,74,80.
R. Godement:	Mathématiques approfondies 1958/9(verschijnt t.z.t. bij Secrétariat Mathématique, Paris).

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government trough the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

I. De Limietformule van Kronecker

1.0 Litteratuur:

L. Kronecker: Zur Theorie der EllliptischenFunctionen. Ges.Abh. IV, p.495.

H. Weber: Ellipt. Funktionen und alg. Zahlen, 1908^2 = Lehrbuch der Algebra III, p.531.

P. Epstein: Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math.Ann. 56, 1903, p.615-644.

E. Hecke: Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-abelscher Körper. Verh. Naturf.Gesell. Basel 28, 1917, p.363-372. Math. Werke (10), p.198-207.

C.L. Siegel: A generalization of the Epstein zeta function. Journ. Indian Math. Soc. 20, 1956, 1-10.

1.1. De zeta functie ζ, gedefinieerd voor Re $s > 1$ door
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, is, zoals bekend is, een in het gehele z vlak voortzetbare meromorfe functie. In $s=1$ ligt een pool van de eerste orde. Nauwkeuriger:

(1.1.1) $\underline{\zeta(s) - \frac{1}{s-1}}$ is een gehele functie, $\lim_{s\to 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = C$ (constante van Euler).

Bewijs.
Er zijn vele bewijzen mogelijk. We kiezen er maar één uit.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right\} = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}$$

$$= s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx.$$

We vinden dus

(1.1.2) $$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^{s+1}} dx .$$

Door de integraal in het rechterlid wordt ζ voortgezet voor $s \neq 1$, Re $s > 0$.

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1+s \int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^{s+1}} dx,$$

$$\lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = 1 + \int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^2} dx.$$

Nu is

$$\int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^2} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{[x]-x}{x^2} dx = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} - \int_1^N \frac{dx}{x} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} - \log N \right) = C-1.$$

1.2. We beschouwen nu de functie Z, voor Re $s > 1$ gedefinieerd door

$$Z(s) = \sum_{n,m}{}' \frac{1}{(n^2+m^2)^s}, \qquad (n,m) \neq (0,0).$$

Op grond van elementaire eigenschappen van de getallen van Gausz volgt direct

$$Z(s) = 4\zeta(s)\, L(s)\ , \qquad L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}\ .$$

We vinden hieruit

(1.2.1) $\underline{\lim_{s\to 1} \left\{ Z(s) - \frac{\pi}{s-1} \right\} = \pi C + 4L'(1).}$

<u>Bewijs.</u> In het vervolg stelt o steeds een functie voor met $\lim_{s\to 1} o(s)=0$. We vonden reeds

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + o(s).$$ Verder geldt

$$L(s) = \frac{\pi}{4} + (s-1)\, L'(1) + o(s).$$ Zo dat

$$\zeta(s) \cdot L(s) = \frac{\pi}{4(s-1)} + \frac{\pi C}{4} + L'(1) + o(s).$$

Hierbij is

$$L'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \log(2n+1)}{2n+1}\ .$$

1.3. We beschouwen nu een binaire positieve kwadratische vorm, die we gemakshalve schrijven als $(n+\omega m)(n+\bar{\omega} m)$, Im $\omega > 0$. Met deze vorm construeren we

$$Z(s) = \sum_{n,m} \left[(n+\omega m)(n+\bar{\omega} m)\right]^{-s} \quad ; \qquad (n,m) \neq (0,0).$$

(1.3.1) <u>De reeks convergeert voor Re $s > 1$. De functie Z is voortzetbaar over deze lijn. In $s=1$ heeft Z een enkelvoudige pool met residu</u> $\underline{\dfrac{2\pi}{\sqrt{-(\omega-\bar{\omega})^2}}}$.

<u>Bewijs.</u>

De waarden van $Q(n,m) = (n+\omega m)(n+\bar{\omega} m)$ liggen discreet. We noemen ze gerangschikt naar opklimmende grootte $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Laten er ν_k paren (n,m) zijn met $Q(n,m)= \lambda_k$. We kunnen dan schrijven:

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{\lambda_k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k - N_{k-1}}{\lambda_k^s}\ , \qquad N_k = \sum_{l=1}^{k} \nu_l .$$

En dus

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left\{ \frac{1}{\lambda_k^s} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^s} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} sN_k \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{dx}{x^{s+1}}\ .$$

$$Z(s) = s \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{N(x)dx}{x^{s+1}}\ .$$

Hierin stelt $N(x)+1$ het aantal roosterpunten binnen de ellips $Q(t_1,t_2) = x$ voor.
Elementaire meetkundige overwegingen leren ons direct dat
$N(x) = I(x) + O(\sqrt{x})$, waarin $I(x)$ de oppervlakte van de ellips voorstelt, dus $I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{d}}\, x$, $\quad d = -\frac{1}{4}(\omega-\bar{\omega})^2$.
Dus

$$Z(s) = \frac{\pi s}{\sqrt{d}} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}}\, dx + s \int_{1}^{\infty} \frac{O(\sqrt{x})}{x^{s+1}}\, dx,$$

$$Z(s) = \frac{\pi s}{(s-1)\sqrt{d}}\ \lambda_1^{\,1-s} + s \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{O(\sqrt{x})}{x^{s+1}}\, dx,$$

$$Z(s) = \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}}\,(s\lambda_1^{\,1-s}-1) + s \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{O(\sqrt{x})}{x^{s+1}}\, dx.$$

We vinden zo dus

$$\lim_{s\to 1} \left(Z(s) - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{d}}\,(1-\log \lambda_1) + \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{N(x)-I(x)}{x^2}\, dx .$$

Na nog wat omschrijven vinden we tenslotte

$$\lim_{s\to 1}\ Z(s) - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} = \frac{\pi}{\sqrt{d}} + \lim_{T\to\infty} \left\{ \sum_{0<Q(n)\leq T} \frac{1}{Q(n)} - \frac{\pi}{\sqrt{d}} \log T \right\}.$$

1.4. We beschouwen nu het gedrag van Z in de omgeving van $s=1$ nader, d.w.z. we proberen een andere uitdrukking voor het rechterlid van bovenstaande formule te vinden.

$$Z(s) = 2\,\zeta(2s) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(n+\omega m)(n+\bar{\omega} m)\right]^{-s} .$$

Nu is voor alle τ met $\operatorname{Im} \tau > 0$:

$$\text{(1.4.1)} \qquad \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i\tau)^s} = \int_0^{\infty} e^{2\pi i\tau x}\, x^{s-1}\, dx.$$

We passen deze formule toe met $\tau = n+m\omega$ en $\tau = -n-m\bar{\omega}$, $m>0$.

$$\text{(1.4.2)} \qquad \frac{\Gamma^2(s)}{(2\pi)^{2s}\left[(n+\omega m)(n+\bar{\omega} m)\right]^s} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{2\pi i[n(x-y)+m(x\omega-y\bar{\omega})]}\,(xy)^{s-1}dx\, dy.$$

In deze dubbelintegraal voeren we nieuwe variabelen in en wel $u = |x-y|$, $v = x+y$. Wanneer we invoeren

$$\varphi_{\pm}(u) = \int_u^{\infty} e^{\pi i m\left[\pm u(\omega+\bar{\omega})+v(\omega-\bar{\omega})\right]}\left(\frac{v^2-u^2}{4}\right)^{s-1} dv,$$

dan vinden we voor (1.4.2)

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{2\pi inu}\,\varphi_+(u)du + \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\pi inu}\,\varphi_-(u)du.$$

Nu is een bekende formule uit de Fourier theorie:

$$(1.4.3)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} e^{2\pi inu}\,\lambda(u)du = \tfrac{1}{2}\lambda(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(k).$$

Zodoende vinden we:

$$Z(s) = 2\,\zeta(2s) + \frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)}\sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

$$A_m = \left\{\tfrac{1}{2}\,\varphi_+(0) + \varphi_-(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_+(k) + \varphi_-(k)\right]\right\}\frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma^2(s)}\ .$$

Nu is $\varphi_+(0) = \varphi_-(0) = \varphi(0)$ en

$$\sum_{m=1}^{\infty}\varphi(0) = \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{\pi imv(\omega-\bar\omega)}\left(\frac{v^2}{4}\right)^{s-1}dv$$

$$= \frac{1}{4^{s-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2s-1)}{\left[-\pi i(\omega-\bar\omega)m\right]^{2s-1}} = \frac{2\Gamma(2s-1)}{\left[-2\pi i(\omega-\bar\omega)\right]^{2s-1}}\ \zeta(2s-1).$$

Voor $k\neq 0$ vinden we direct

$$\lim_{s\to 1}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_+(k) = \sum_{m=1}^{\infty}\int_k^{\infty} e^{\pi im\left[k(\omega+\bar\omega)+v(\omega-\bar\omega)\right.}dv$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{\pi i(\omega-\bar\omega)m}\,e^{2\pi imk\omega}$$

$$= \frac{1}{\pi i(\omega-\bar\omega)}\log(1-e^{2\pi ik\omega}).$$

Geheel analoog vinden we

$$\lim_{s\to 1}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_-(k) = \frac{1}{\pi i(\omega-\bar\omega)}\log(1-e^{-2\pi ik\bar\omega}).$$

Er moet nu nog het gedrag bij s=1 onderzocht worden van

$$\frac{2.(2\pi)^s\,\Gamma(2s-1)\zeta(2s-1)}{\Gamma^2(s)\left[-2\pi i(\omega-\bar\omega)\right]^{2s-1}}\ ,$$

een directe berekening geeft hiervoor, we schrijven $-i(\omega-\bar\omega)=2\sqrt{d}$,

$$\frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{2\pi}{\sqrt{d}}\left\{C - \log 2\sqrt{d}\right\}.$$

Tenslotte hebben we de beroemde "Grenzformel" van Kronecker gevonden:

(1.4.4) $$Z(s) = \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{2\pi}{\sqrt{d}}\left\{C - \log 2\eta(\omega)\,\eta(-\bar{\omega})\sqrt{d}\right\} + o(s) ,$$

$$\text{met } \eta(\omega) = e^{\frac{1}{12}\pi i\omega}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\omega}) .$$

Wat is deze formule meer dan een merkwaardige rariteit? Ons verbaast het optreden van de functie η , een bekende functie uit de theorie van de elliptische functies.
We geven eerst een iets andere vorm aan (1.4.4). Laten a,b,c reëel zijn, $a > 0$, $b^2-ac=-d^2$, met reële d.

(1.4.5) $$\sum_{n,m}{}' \frac{1}{(an^2+2bnm+cm^2)^s} = \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{2\pi}{\sqrt{d}}\left\{C - \log \frac{2\eta(\omega)\eta(-\bar{\omega})\sqrt{d}}{\sqrt{a}}\right\} + o(s).$$

We geven nu dit geheel, in navolging van Kronecker nog een beetje andere vorm.
Laat f gedefinieerd worden door

$$f(\omega) = e^{-\frac{1}{24}\pi i}\,\eta\left(\frac{\omega+1}{2}\right)\eta^{-1}(\omega).$$

We merken nog even op dat $\eta(\omega)f^2(\omega)=\vartheta_{00}(\omega)$.

Laat verder $a'=2a$, $b'=a+b$, $c'=\frac{1}{2}(a+2b+c)$ dan zal $d'=d$ en

(1.4.6) $$\sum_{n,m}{}' \frac{1}{(an^2+2bnm+cm^2)^s} - \sum_{n,m}{}' \frac{1}{(a'n^2+2b'nm+c'm^2)^s} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \log \frac{f(\omega)\ f(-\bar{\omega})}{\sqrt{2}} .$$

Het lijkt nu zinvol over allerlei kwadratische vormen met gehele a,b en c en dezelfde d te sommeren. Wanneer twee vormen equivalent zijn, d.w.z. met een gehele unimodulaire transformatie uit elkaar af te leiden zijn, zullen de bijbehorende reeksen identiek zijn, we moeten ons dus beperken tot representanten van de equivalentieklassen van kwadratische vormen.
We zien nu direct al dat in het geval dat er slechts één klasse van kwadratische vormen met discriminant d is zal gelden

$$f(\omega)\ f(-\bar{\omega}) = \sqrt{2}.$$

Dit is een voorbeeld van een reeks zeer merkwaardige relaties voor de waarden van de functie f in bepaalde punten ω .
We noemen het hoofdresultaat:

Als ω een wortel is van een representant van een equivalentie klasse van gehele kwadratische vormen dan is er een τ, die slechts van de discriminant afhangt zodat

<u>$f(\omega) \cdot 2^{\tau}$ een geheel algebraïsch getal, ja zelfs een eenheid is.</u>

Een numeriek voorbeeld, ontleend aan Weber is:

$$f(i\sqrt{105}) \cdot 2^{\frac{13}{12}} = (1+\sqrt{5})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{3}+\sqrt{7})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{5}+\sqrt{7})^{\frac{1}{6}} (1+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}.$$

Het wezenlijk belangrijke is dat de graad van het getal rechts gelijk is aan het aantal equivalentie klassen in $Q(i\sqrt{105})$. We moeten echter om een duidelijker beeld te krijgen van de binaire kwadratische vormen naar de idealen in kwadratische lichamen overstappen.

1.5. We beschouwen nu het kwadratische lichaam $Q(i\sqrt{d}) = L$. Het is bekend [zie b.v. E. Hecke: Algebraische Zahlen pag.210-217 of E. Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie III pag.190-196] dat de klassen van de idealen in dit lichaam één-éénduidig corresponderen met de klassen van binaire kwadratische vormen met zelfde discriminant als het lichaam. Laat w het aantal eenheden in $k(i\sqrt{d})$ zijn, dus $w=4$ voor $d=1$, $w=6$ voor $d=3$ en $w=2$ voor alle andere kwadraatvrije d.
Verder is

$$\frac{1}{w} \sum \frac{1}{(an^2+bnm+cm^2)^s} = \sum_{\alpha \in K} \frac{1}{N\alpha^s} = \zeta(s,K).$$

Hierbij doorloopt α alle idealen uit de klasse K, waarbij K de ideaalklasse is die met de vorm $an^2+bnm+cm^2$ correspondeert. Door de, in de vorige afdeling bestudeerde, functie Z nu te sommeren over alle klassen van binaire kwadratische vormen met vaste discriminant, verkrijgen we de Dedekindse ζ functie voor het kwadratische lichaam. We vinden dus

$$\zeta(s,K) = \frac{\pi}{w(s-1)\sqrt{d}} + \ldots$$

en na optellen over alle klassen K

$$\zeta_L(s) = \frac{\pi h}{w(s-1)\sqrt{d}} + \ldots .$$

Nu volgt uit de algebraïsche theorie

$$\zeta_L(s) = \zeta(s)\, L_d(s),$$

waarin L_d een z.g. L-reeks is gebouwd met een kwadratisch karakter modulo 4d. We vinden dus

$$\zeta_L(s) = \frac{L_d(1)}{s-1} + C\, L_d(1) + L_d'(1) + o(s).$$

Vergelijken we nu deze formule met de limietformule van Kronecker, dan vinden we allereerst een formule voor het klasse aantal h

(1.5.1) $\underline{h = \frac{w\sqrt{d}}{\pi} L_d(1).}$

Verder geven ook de constante termen in de Laurent reeks ontwikkeling naar s-1 merkwaardige resultaten.
Maar het meest belangrijke is toch dat de elementen van het lichaam van de h-de graad, dit is het z.g. <u>klasselichaam</u> verkregen kunnen worden als waarden van de functie f voor elementen van het kwadratische lichaam.
Een van de moeilijkste vragen door Kronecker gesteld is de vraag naar de generalisatie van deze theorie, buiten de imaginair kwadratische lichamen. Hier beginnen nu enkele onderzoekingen van Hecke.

1.6.. Hecke geeft nu generalisaties naar twee kanten van deze formule van Kronecker. Volledigheidshalve moeten we nog een generalisatie van P. Epstein vermelden. We noemen uit zijn uitvoerige studie enkele punten.
Laat

$$Z_{h_1,h_2}(s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(mh_1+nh_2)}}{Q(m,n)^s},$$ Q is binaire, positieve kwadratische vorm.

Als h_1 en h_2 niet beide geheel zijn is deze functie holomorf in s=1. We vinden in dit geval $Q(m,n) = am^2+2bmn+cn^2$,

(1.6.1) $$Z_{h_1,h_2}(1) = \frac{2\pi^2}{a} h_1^2 - \frac{\pi}{\sqrt{d}} \log \frac{\vartheta(u_1,\omega)\vartheta(u_2,-\omega)}{\eta(\omega)\quad \eta(-\bar{\omega})},$$

$$u_i = h_2+h_1\,\omega_i.$$

Epstein behandelt nog meer generalisaties, n.l. voor functies als

$$Z^{g_1g_2\ldots}_{h_1h_2\ldots}(s) = \sum_{m_1,m_2,\ldots}{}' \frac{e^{2\pi i\sum m_ih_i}}{Q((m_i+g_i))^s},$$ Q is willekeurige positieve kwadratische vorm.

We gaan hier niet verder op in.

De eerste generalisatie van Hecke gaat uit van de interpretatie van de Z reeks met een kwadratisch getallichaam. Hecke vraagt zich af of voor reële kwadratische lichamen een analogon bestaat, d.w.z. in hoeverre kunnen we ook indefiniete kwadratische vormen gebruiken bij de constructie van de Z reeks. En wat valt er in dit geval te zeggen van het gedrag van de Z functie in een omgeving van s=1?
De tweede generalisatie van Hecke gaat naar getallichamen van hoger graad. De zeta functie bij deze getallichamen is in verband te brengen met de bovengenoemde generalisatie van Epstein. Langs deze weg is iets te vinden over het klasse aantal van bepaalde algebraïsche lichamen.

1.7. Laat $\mathfrak{a}$ een ideaal zijn uit een reëel kwadratisch lichaam L. Zo'n lichaam bezit oneindig veel eenheden, die alle te schrijven zijn als gehele machten van een grondeenheid ε, we veronderstellen $\varepsilon > 1$.
Als $\mu = m\,\alpha_1 + n\,\alpha_2$, waarbij (α_1, α_2) een basis van $\mathfrak{a}$ is, vormen we

(1.7.1) $\zeta_L(s) = \sum\limits_{m,n}^{*} \dfrac{1}{|\mu\mu'|^s}$, μ' is de geconjugeerde μ.

Hierbij moeten we echter niet alle paren (m,n) toelaten. Van een verzameling getallen $\pm\,\varepsilon^n\mu$ kiezen we slechts één representant. Hierdoor bereiken we dat de reeks voor Re s > 1 convergeert. Het is immers dan in wezen weer de Dedekindse zeta functie van het kwadratische lichaam geworden.

Nu is

$$\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)|\mu|^{-s} = \int_0^\infty e^{-\mu^2 x}\, x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx \text{ en}$$

$$\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}s\right)|\mu\mu'|^{-s} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu^2 x + \mu'^2 y)}(xy)^{\frac{1}{2}s-1}dx\, dy.$$

We introduceren nu $x = ue^v$, $y = ue^{-v}$ dan

$$\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}s\right)|\mu\mu'|^{-s} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^\infty du\cdot e^{-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})}\, u^{s-1} .$$

Door de integraal naar u te berekenen en iets verder te herleiden vinden we

$$\zeta_L(s) = \frac{2\Gamma(s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m,n}{}^{*} \frac{1}{(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^s}\, dv\ ,$$

en hiervoor schrijven we nog

$$\zeta_L(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}s)} \int_{-\log\varepsilon}^{\log\varepsilon} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^s}\, dv; \qquad (m,n) \neq (0,0).$$

Nu is $\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v} = Am^2 + 2Bmn + Cn^2$ met

$$A = \alpha_1^2 e^v + \alpha_1'^2 e^{-v}$$

$$B = \alpha_1 \alpha_2 e^v + \alpha_1' \alpha_2' e^{-v}$$

$$C = \alpha_2^2 e^v + \alpha_2'^2 e^{-v}$$

en deze vorm is positief.

Om de limiet formule van Kronecker toe te kunnen passen bereken- en we nog even ω. We vinden, als we veronderstellen $\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' > 0$

$$\omega = \frac{\alpha_2 e^v + i\alpha_2'}{\alpha_1 e^v + i\alpha_1'} \quad \text{en} \quad d = \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1'\ .$$

$$\zeta_L(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}s)} \int_{-\log\varepsilon}^{\log\varepsilon} \left\{ \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{2\pi C}{\sqrt{d}} - \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \log \frac{2\eta(\omega)\eta(-\bar{\omega})\sqrt{d}}{\sqrt{\alpha_1^2 e^v + \alpha_1'^2 e^{-v}}} + \dots \right\} dv$$

$$\begin{aligned} (1.7.2) \qquad &= \frac{2\log\varepsilon}{(s-1)\sqrt{d}} + \frac{4C\log\varepsilon}{\sqrt{d}} - \frac{2\log\varepsilon}{\sqrt{d}} \left[C + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma'(\tfrac{1}{2}) \right] - \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{d}} \int_{-\log\varepsilon}^{\log\varepsilon} \log \left\{ \frac{2\eta(\omega)\eta(-\bar{\omega})\sqrt{d}}{\sqrt{\alpha_1^2 e^v + \alpha_1'^2 e^{-v}}} \right\} dv + \dots\dots \end{aligned}$$

Ook hier kunnen we sommeren over alle klassen van binaire vormen met vaste discriminant. We zien hier als formule voor het klasse aantal terecht komen:

$$(1.7.3) \quad h = \frac{L_d(1)\cdot\sqrt{d}}{2\log\varepsilon}\ .$$

De diepere resultaten, waar Hecke op uit is, komen tevoorschijn bij de generalisatie tot willekeurige algebraïsche uitbreidingen van het rationale lichaam. Een resultaat van Kummer was dat de klasse aantallen van cirkeldelingslichamen voor te stellen waren met goniometrische functies. Hecke vindt nu dat de klasse aantallen van oplosbare lichamen, waarvan discriminant en graad onderling ondeelbaar zijn voor te stellen door integralen over logarithmen van functies van het boven in een bizonder geval aangegeven type.

1.8. Daar de functie η samenhangt met ϑ functies en de Epsteinse Zetafunctie met ϑ reeksen gebouwd met een positief definiete kwadratische vorm, kan men vragen naar generalisaties naar indefiniete kwadratische vormen. Siegel introduceerde (zie lit.lijst) een generalisatie

$$\sum_{n,m} \frac{G(n,m)}{(n+\omega m)^{\frac{s-a}{2}}(n+\bar{\omega}m)^{\frac{s-b}{2}}} \;. \tag{1.8.1}$$

Hierin zijn a en b de signaturen van een kwadratische vorm in a+b variabelen, waarmee de (genormaliseerde) som van Gausz G(n,m) gebouwd is. Van deze zetafunctie bewijst Siegel dat hij meromorf is, en aan een functionaal vergelijking voldoet. Het lijkt interessant van deze een analogon van de limiet formule van Kronecker te construeren. Men zou kunnen vermoeden dat de producten $\eta(\omega)\eta(-\bar{\omega})$ dan vervangen zouden moeten worden door niet analytische modulaire vormen van een type zoals Maasz bestudeerd heeft. In plaats van de som over logarithmen schijnen nu sommen over bepaalde hypergeometrische functies te komen. Het kan de moeite waard zijn, dit met expliciete berekeningen eens na te gaan.

Enkele voordrachten over getaltheorie geïnspireerd door het werk van E. Hecke

door

Prof.Dr F. van der Blij

2e voordracht: Klasse-aantal relaties van Hurwitz

2.0. Litteratuur:

1. L. Kronecker: Uber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante Crelle's J.57 (1860), p.253 e.v.
2. A. Hurwitz: Uber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärerquadratischer Formen von negativer Determinante. Ges.Abh.II, no XLVI, pg.8-50 (zie ook XLIV, XLVII).
3. C.F. Gausz: Disquisitiones Arithmeticae, art.291.
4. P. Bachmann: Die Arithmetik der quadratischen Formen, I, pg.133 e.v.
5. E. Hecke: Neue Herleitung der Klassenzahlrelationen von Hurwitz und Kronecker. Ges.Abh.26 (pg.499-504).
6. M. Eichler: On the class number of imaginary quadratic fields and the sums of divisors of natural numbers. J.of the Indian Math.Soc.XIX (1955), p.153-180.

2.1. Inleiding

In de vorige voordracht merkten we op dat er een nauw verband bestaat tussen klassen van binaire kwadratische vormen enerzijds en ideaalklassen anderzijds. De equivalentieklassen van binaire vormen zijn gedefinieerd met unimodulaire substituties en de klassen van idealen door de equivalentie $A \sim B$ als er hoofdidealen (ongelijk 0) bestaan zodat $(\beta).A=(\alpha).B$ (pas op enge en ruime definities!)

Het klasseaantal (bij gegeven determinant resp. in een gegeven lichaam) is eindig. In de vorige voordracht vonden we voor dit aantal een formule, zowel voor reële als imaginaire kwadratische lichamen.

In deze voordracht beperken we ons tot imaginaire lichamen.

2.2. Modulaire functies en vormen

We beschouwen de groep van de modulaire transformaties

$z \to \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geheel; $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

We zoeken nu invariante functies, dus functies f, die we steeds meromorf veronderstellen, zodat

$$f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = f(z).$$

Daarnaast zullen we soms nog regulariteitseisen stellen.

Nu ligt het voor de hand reeksen

(2.2.1) $\quad G_{2k}(z) = \sum_{m,n}' (mz+n)^{-2k} \qquad (k > 1)$

te beschouwen. Hiervoor geldt:

(2.2.2) $\quad G_{2k}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = (\gamma z+\delta)^{2k}\, G_{2k}(z).$

Quotienten van zulke reeksen zouden ons modulaire invarianten kunnen leveren.

Een gehele modulaire <u>vorm</u> is een functie f zodat

1. $f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = (\gamma z+\delta)^{\nu}\, f(z)$

2. f begrensd is in het fundamentaal gebied D.

Het getal $-\nu$ heet de dimensie van de vorm. We beschouwen alleen even waarden van ν. Het fundamentaal gebied D (= het boven halfvlak modulo de modulaire groep) is beschreven door $|z| \geq 1$, $|\mathrm{Re}\ z| \leq \frac{1}{2}$ met geschikte restricties op de rand.

Er zijn drie hoeken aan dit gebied $z=i$, $z=\varepsilon=e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $z=i\infty$. In deze hoeken werkt men met locale uniformiserenden, van de orde 2 en 3 in i en ε en $q=e^{2\pi i z}$ in $i\infty$.

Dit is wat ouderwets, beter kan men op het quotient van boven halfvlak en modulaire groep een geschikte analytische structuur invoeren. Men krijgt dan een Riemanns oppervlak, namelijk de complexe bol.

Uit de transformatieregel volgt voor modulaire vormen $f(z+1)=f(z)$. Dus is f in een Fourier reeks te ontwikkelen.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{2\pi i n z} .$$

Omdat f begrensd is in de omgeving van $i\infty$ volgt $a_n=0$ voor $n<0$. We weten dus voor een gehele vorm:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n z} .$$

Laten nu $N_{i\infty}$, N_i en N_ε de aantallen nulpunten (in de locale uniformiserenden geteld) in $i\infty$, i en ε resp. zijn. Laat N het aantal andere nulpunten zijn.

Wanneer we d log f langs de rand met D (met boogjes om de hoekpunten) integreren vinden we zonder moeite voor een gehele vorm van dimensie $-k$

(2.2.3) $$\frac{1}{12} k = N + N_{i\infty} + \tfrac{1}{2}N_i + \tfrac{1}{3}N_\varepsilon .$$

We zoeken nu bij gegeven k mogelijke verdelingen. We vinden dan:

$k=2$	onmogelijk	
$k=4$	$N=N_{i\infty} = N_i = 0$	$N_\varepsilon = 1$
$k=6$	$N=N_{i\infty} = N = 0$	$N_i = 1$
$k=8$	$N=N_{i\infty} = N_i = 0$	$N_\varepsilon = 2$
$k=10$	$N=N_{i\infty} = 0$	$N_i = N_\varepsilon = 1$
$k=12$	verschillende mogelijkheden.	

Dat er in de gevallen k=4,6,8 etc. ook werkelijk gehele modulaire vormen bestaan, zien we aan de functies G, die we boven construeerden. We merken nog op dat

$$G_{2k}^{l}$$

een gehele modulaire vorm van de dimensie -2kl is.

Wanneer we k=8 beschouwen vinden we dus zowel G_4^2 als G_8 als gehele vormen. Ze hebben echter hetzelfde dubbele nulpunt en moeten dus een constant quotient hebben, daar een holomorfe functie op de bol constant is.

We merken nog op:

(2.2.4) $$\lim_{z \to i\infty} G_{2k}(z) = 2\,\zeta(2k).$$

En dus vinden we b.v.

$$\{2\,\zeta(4)\}^2\, G_8(z) = 2\,\zeta(8)\, G_4^2(z)$$

of ook

$$G_8(z) = \frac{3}{7}\, G_4^2(z).$$

Zo zijn ook G_4G_6 en G_{10} evenredig.

Om een niet constante modulaire functie te vinden kunnen we twee modulaire vormen van dezelfde dimensie op elkaar delen. We zien dat we moeten beginnen bij k=12. We proberen G_4^3 en G_6^2. De ligging van hun nulpunten bewijst dat deze geen constant quotient hebben. We kunnen ze zo combineren dat een functie ontstaat,die in $i\infty$ een enkelvoudig nulpunt heeft. Deze is:

(2.2.5) $$\Delta = 20\, G_4^3 - 49\, G_6^2 .$$

We construeren nu een modulaire functie die een drievoudig nulpunt in ε heeft en een pool van de eerste orde (met residue 1) in q=0 (d.w.z. $z=i\infty$).

Deze is, met constante k,

(2.2.6) $$j = k\,\frac{G_4^3}{\Delta} .$$

2.3. De formules van Kronecker en Hurwitz

We beschouwen de transformaties $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met gehele a,b,c,d en $ad-bc=n$. We noemen deze transformaties wel van de orde n. Linksvermenigvuldiging met modulaire matrices voert $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ over in een gehele $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ met $a'd'-b'c'=n$. We proberen nu representanten te vinden modulo deze linksvermenigvuldiging. Uit de vermenigvuldiging $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

zien we dat we $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zo kunnen kiezen dat $c'=0$ en a', d' positief zijn, $a'd'=n$. Verder is b', door keuze van α en β, te reduceren modulo d', dus b.v. $0 \leq b' < d'$. Op deze wijze hebben we bij voorgeschreven n eindig veel representanten modulo linksvermenigvuldiging met eenheden, dat zijn unimodulaire factoren, gekregen. Men ziet eenvoudig dat dit juist een volledig systeem is.

Laat nu j de in 2.2 ingevoerde modulaire functie zijn. Als A een transformatie van de orde n is zal $j(Az)$ slechts van A modulo links-eenheden afhangen. Laat nu $A_1, A_2, \ldots A_N$ het boven aangegeven stelsel representanten zijn.

Rechtsvermenigvuldiging met eenheden permuteert de klassen, dus bij iedere modulaire S en iedere i is een l met $j(A_i Sz) = j(A_l z)$.
Zo zien we dat

$$(2.3.1) \qquad F(z) = \prod_{i=1}^{N}{}' \{j(z) - j(A_i z)\}$$

een modulaire functie is. Het accent geeft aan dat we voor de A_i's in het geval $n=m^2$ de matrix $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ uitsluiten.
Voor deze, in het eindige reguliere, functie tellen we de multipliciteit van de pool in $q=0$ $(z=i\infty)$ en het aantal nulpunten elders.

Op grond van bekende resultaten uit de functietheorie zullen deze aantallen (mits in i en ε met goede multipliciteiten geteld) gelijk zijn. Dit zal ons een niet triviaal, zuiver arithmetisch resultaat opleveren.
Stel A_i dus geschreven in de vorm $\begin{pmatrix} nd^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ met $d|n$ en $0 \leq b < d$.
De ontwikkeling van $j(z)$ begint met q^{-1}, die van $j(A_i z)$ met $q^{nd^{-2}}$. De orde van de pool van zo'n factor is dus

$$\max\{1, nd^{-2}\}.$$

De totale orde van de pool is

$$(2.3.2) \qquad \sum_{d|n} d.\max\left\{1, nd^{-2}\right\} - \delta_n$$

met $\delta_n=0$ als n geen kwadraat en $\delta_n=1$ als n een kwadraat is.

Nu gaan we nulpunten tellen. Deze treden op als z en $\frac{nd^{-1}z+b}{d}$ door een modulaire transformatie uit elkaar ontstaan. Of anders gezegd als $z=\frac{az+b}{cz+d}$ met $ad-bc=n$, dus $cz^2+(d-a)z-b=0$. De discriminant van deze vorm is $(a+d)^2-4n$. We zoeken echter alleen maar z-waarden in het fundamentaal gebied. Dit komt er op neer dat we de kwadratische vormen $cz^2+(d-a)zt-bt^2$ slechts in equivalentieklassen behoeven te verdelen en dit aantal klassen moeten tellen. Op deze wijze kunnen we het aantal nulpunten tellen door het aantal klassen te tellen met determinant $-4n+x^2$, $x=0,\pm1,\ldots\pm[2\sqrt{n}]$.

Er zijn echter nog allerlei details te regelen. Is ieder nulpunt van F enkelvoudig? Hoe zit het met de nulpunten in i en ε, deze moeten we met goede multipliciteiten tellen. Bovendien moeten we rekening houden met de bizondere positie van de matrix $\begin{pmatrix}\sqrt{n} & 0\\ 0 & \sqrt{n}\end{pmatrix}$ in het geval n een kwadraat is.

Als dit alles naar goede orde en zorgvuldigheid gebeurd is vinden we:

$$(2.3.3) \qquad \sum_{d|n} d.\max\left\{1, nd^{-2}\right\} = \sum_{x=0,\pm1,\ldots} H(4n-x^2),$$

waarin H(N) het aantal klassen van binaire vormen met det -N voorstelt; is N echter een kwadraat dan slechts de helft van dit aantal, is N drie maal een kwadraat dan slechts een derde van dit aantal. (Dit komt weer neer op de grootheid $H=\frac{2h}{w}$ die in de eerste voordracht optrad.)

2.4. Enkele opmerkingen

Het werk van Kronecker en Hurwitz gaat veel verder. Naast de modulaire groep worden ook ondergroepen bestudeerd bestaande uit matrices $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mod q voor een priemgetal q. We kunnen dan veel van deze theorie behouden en vinden in bepaalde gevallen ook relaties voor de klasse aantallen. Niet steeds van de eenvoudige boven aangegeven vorm. De gevallen q=7 en 11 worden nog speciaal onderzocht. Het resultaat laat zich als volgt formuleren:

Laat q een oneven priemgetal zijn. Laat r een getal zijn zodat r-4 niet rest en r niet-niet rest is. Laat $\varepsilon_n=1$ als $(n,q)=1$ en $\varepsilon_n=0$ als $(n,q)=q$. Voor iedere positieve rest n geldt dan:

(2.4.1) $\varepsilon_r(q+1).\sum_{x} H(4n-x^2) = 2\sum_{d|n} d + c_n$;

Som over $0<x\leq 2\sqrt{n}$ en $x^2\equiv rn \pmod q$. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{q}z}$ is een gehele modulaire vorm van de dimensie -2 behorende bij de ondergroep van de matrices congruent I mod q, die in de rationale punten nul wordt, een z.g. "spitzen" vorm.

2.5. De methode van Hecke

Hecke pakt deze problemen nu op een geheel andere wijze aan en krijgt op overzichtelijke wijze deze klasse-aantal formules.

Hij merkt namelijk op dat Gauss reeds gevonden heeft dat de representatie aantallen van getallen door ternaire vormen samenhangen met klasse aantallen van binaire vormen.

Deze fraaie arithmetische resultaten van Gausz kunnen we hier niet behandelen. We geven in een speciaal geval de resultaten. Laat $a_k(n)$ het aantal oplossingen van $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=n$ voorstellen. Dan geldt

$a_3(4n) = a_3(n)$

$a_3(n) = 0$, als $n\equiv 7 \pmod 8$

$a_3(n) = 12H(4n)$, als $n\equiv 1,2 \pmod 4$

$a_3(n) = 6H(4n)$, als $n\equiv 3 \pmod 8$

Nu is het direct duidelijk dat

(2.5.1) $a_4(n) = \sum_{u^2\leq n} a_3(n-u^2)$.

Het getal $a_4(n)$ kan b.v. uit de rekenkunde van de quaternionen (of uit de theorie van de thetareeksen) zonder veel moeite bepaald worden.

In algemener verband is nu door de vergelijking

$$q(x^2+y^2+z^2) + u^2 = N$$

als uitgangspunt te nemen en hierbij nog congruentie-eisen mod q voor u op te leggen een formule als in het linkerlid van (2.4.1) voorkomt in verband te brengen met een thetafunctie met een quaternaire vorm. Deze is te splitsen in een Eisensteinreeks (bij deze trap q) en een spitzenvorm. Op deze manier komt men tot (2.4.1).

Hecke noemt nog andere mogelijkheden, o.a. door uit te gaan van de triviale formule

$$(2.5.2) \qquad \sum_{m=0}^{N} a_3(m)\, a_3(N-m) = a_6(N)$$

en de bekende waarde voor $a_6(N)$ in te vullen, kan men kwadratische klasse aantal relaties verkrijgen.

Ook de formule

$$(2.5.3) \qquad a_3(N) = \sum_{0 \leq t < \sqrt{N}} \quad \sum_{d \mid N-t^2} \left(\frac{-4}{d} \right)$$

is een wel zeer triviaal af te leiden resultaat voor een klasse aantal.

In het latere werk voor de quaternionenalgebra's etc. zijn deze formules plots weer opgedoken. We verwijzen naar de in 6 (Eichler) opgegeven litteratuur.

Enkele voordrachten over getaltheorie geïnspireerd door het werk van E. Hecke

door

Prof.Dr F. van der Blij

3e voordracht: De operatoren T_n van Hecke

3.0. Litteratuur

1. E. Hecke: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II. Math. Ann. 114, 1-28, 316-351 (1937).
2. .... Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Kgl. Danske Vid.S.Math.M 17, 12 (1940).
3. H. Petersson: Konstruktion sämtlicher Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung...I,II,III. Math.Ann. 116, 401-412 (1939) 117, 39-64, 277-300 (1940).
4. M. Eichler: Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren. Crelle 195, 127-151 (1956).
5. .... Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale. Math. Zeitschr. 67, 267-298 (1957).
6. .... Modular Correspondences and their representations, J.of Indian Math.Soc.20, 163-206 (1956).
7. .... Quadratische Formen und Modulfunktionen. Acta Arithmetica 4 (1958).
8. A. Selberg Harmonic Analysis and discontinuous groups... J. of Indian Math. Soc. 20, 47-87 (1956).

3.1. Inleiding

We beschouwen weer de unimodulaire groep $\Gamma : \left\{ \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right\}$, met a,b,c,d geheel en $ad-bc=1$. We zagen in de vorige voordracht dat de verzameling van alle gehele transformaties met determinant n modulo linksvermenigvuldiging met unimodulaire matrices in een eindig aantal klassen verdeeld wordt. Representanten waren

$$(3.1.1) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad a>0,\ d>0,\ ad=n,\ 0 \leq b < d.$$

Het aantal representanten is dus $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$. Voor $n=p$, een priemgetal dus $p+1$ representanten n.l.

$$(3.1.2) \qquad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \qquad 0 \leq b < p.$$

Voor een modulaire functie f definiëren we nu de operator T_n door $(T_n f)(z) = \sum_V f(Vz)$, waarin V de repr. (3.1.1) doorloopt. Omdat rechtsvermenigvuldiging met een unimodulaire matrix het systeem van de klassen permuteert is $T_n f$ weer een modulaire functie.

Voor een modulaire vorm met dimensie $-k$ definiëren we

$$(3.1.3) \qquad (T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_V d(V)^{-k} f(Vz).$$

$d(V)$ is het element d van de representant $V\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ uit (3.1.1). Men verifieert eenvoudig dat $T_n f$ een modulaire vorm met dimensie $-k$ is.

$$(3.1.4) \qquad T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mnd^{-2}}.$$

<u>Bewijs</u>: We gaan uit van een ontwikkeling van f in een Fourier reeks $f(z)=\sum a_k e^{2\pi ikz}$. Duidelijk is dat $T_n f(z)=\sum b_l e^{2\pi ilz}$ met $b_l = \sum_{d|(l,n)} d^{k-1} a_s$ en $sd^2=mn$. Dus $T_m T_n f(z)=\sum_g c_g e^{2\pi igz}$ met $c_g = \sum_{d|(g,m)} d^{k-1} \sum_{\delta|(\frac{gm}{d^2},n)} \delta^{k-1} a_t$ met $t = \frac{gmn}{d^2\delta^2}$.

De formule (3.1.4) impliceert een multiplicatief gedrag van T_n, duidelijk is $T_m \cdot T_n = T_{mn}$ als $(m,n)=1$. We kunnen de preciese structuur formeel mooi uitdrukken door:

$$(3.1.5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{n^s} = \prod_p (1-T_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}.$$

3.2. Fourier reeksen en Dirichlet reeksen

Naast de Fourier ontwikkeling van een modulaire vorm introduceren we een Dirichlet reeks. Als de Fourier reeks luidt

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} ,$$

voeren we in:

$$\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} .$$

Voorbeeld:

$$G_{2k}(z) = \sum_{n,m}{}' \frac{1}{(nz+m)^{2k}} .$$

Een directe berekening leert

$$(3.2.1) \qquad G_{2k}(z) = 2\,\zeta(2k) + 2\,\frac{(2\pi i)^{2k}}{\Gamma(2k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

$$= 2 \cdot \frac{(2\pi i)^{2k}}{\Gamma(2k)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

met $\sigma_t(n) = \sum_{d|n} d^t$ en $\sigma_{2k-1}(0) = \dfrac{\zeta(2k)\Gamma(2k)}{(2\pi i)^{2k}}$.

Hierbij vinden we dus als Dirichlet reeks

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s} = \zeta(s)\,\zeta(s-2k+1).$$

In dit geval vinden we dus een Euler-product voor deze Dirichlet reeks. En dus multiplicatieve eigenschappen van de coefficienten van deze reeks en dus ook van de Fourier reeks.

In de vorige voordracht is het aantal lineaire onafhankelijke gehele modulaire vormen van de dimensie $-2k$ voor kleine waarden van k expliciet bepaald door gebruik te maken van de formule $\frac{k}{12} = N + N_{i\infty} + \frac{1}{2}N_i + \frac{1}{3}N_\varepsilon$. Algemeen geldt

(3.2.2) <u>De ruimte</u> F_{2k} <u>van de gehele modulaire vormen met dimensie k heeft de dimensie</u> $\left[\frac{k}{12}\right] + 1$ <u>als</u> $k \not\equiv 2 \pmod{12}$ <u>en</u> $\left[\frac{k}{12}\right]$ <u>als</u> $k \equiv 2\ (12)$<u>.</u>

<u>Bewijs</u>: We gebruiken G_{2k} en Δ (zie (2.2.5)). Iedere vorm van dim $-2k$ is eenduidig te schrijven als een som van termen $G_{2k-12n}\,\Delta^n$, $2k-12n \geqslant 4$.

De operatoren T_n werken op deze ruimte F_{2k}.
Nu geldt een merkwaardige stelling:

(3.2.3) De eigenfuncties van T_n zijn op additieve constanten en constante factoren na, die Fourier reeksen, die de eigenschap hebben dat de corresponderende Dirichlet reeksen product ontwikkelingen van de vorm

$$\sum a_n n^{-s} = \prod_p (1-a_p p^{-s}+p^{2k-1-2s})^{-1}$$

bezitten. Hierbij geldt

$$T_n f = a_n f \text{ , voor alle natuurlijke } n.$$

Het bewijs volgt direct wanneer men in $T_n f = \lambda_n f$ de Fourier coefficienten rechts en links vergelijkt. De relatie $\lambda_p a_n = a_{n|p} + p^{-2k+1} a_{np}$, die voor de coefficienten volgt levert immers direct de mogelijkheid van een ontwikkeling in een Euler product.
We zien in het bijzonder dat als de dimensie van F_{2k} gelijk aan 1 is, er dus steeds een Euler product is. Dit hoort bij de Eisenstein reeks G_{2k} en is de functie $\zeta(s)\,\zeta(s-2k+1)$.

Voor $2k=12$ is de dimensie van de ruimte F_{2k} gelijk aan 2. De Eisenstein reeks is één eigenfunctie. Welke is de andere? Een gehele modulaire vorm, die in $i\infty$ verdwijnt, heet een spitsvorm. Daar we voor iedere modulaire vorm f een getal λ kunnen vinden zodat $f-\lambda G_{2k}$ een spitsvorm is volgt dat deze spitsvormen een ruimte met dimensie één lager vormen. Uit de werking van de operator T_n op de Fourier coefficienten ziet men dat deze deelruimte invariant onder T_n is. Naast de Eisenstein reeks kan dus ook een spitsvorm eigenfunctie zijn.

In het boven aangehaalde geval $2k=12$ is Δ (zie 2.2.5) de spitsvorm. Dus Δ is een eigenfunctie. De coefficienten van $\Delta(z)$ zijn de getallen $\tau(n)$ van Ramanujan. Naast $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$ beschouwen we dus

$$(3.2.4) \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{p^{11}}{p^{2s}}\right)^{-1} .$$

Talrijke problemen doen zich nu voor. We noemen slechts het analogon van het vermoeden van Riemann en de vraag of de wortels van $\left(1-\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{p^{11}}{p^{2s}}\right) = 0$ reëel of complex zijn, m.a.w. het vermoeden

$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$ moet bewezen of weerlegd worden.

Het wordt nog gecompliceerder voor $2k=24$. Dan zijn er twee spitsvormen eigenfuncties. De spitsvormen zijn lineaire combinaties van $\Delta . G_{12}$ en Δ^2. Het zijn, zoals Hecke door numericke berekeningen verifieerde de vormen $(\lambda G_{12}+\mu \Delta)\Delta$ met $\lambda,\mu \in Q(\sqrt{144169})$.

We merken nog enkele relaties tussen de Fourier en Dirichlet reeksen op. Via de bekende transformatie volgt uit de eigenschap van de Fourier reeks als modulaire vorm met dimensie $-k$ de functionaal vergelijking voor de Dirichlet reeks.

(3.2.5) $\qquad i^k R(k-s) = R(s)$, <u>als</u> $R(s) = \dfrac{\Gamma(s)\varphi(s)}{(2\pi)^s}$.

Verder $(s-k)\ \varphi(s)$ een gehele functie, als φ behoort bij een Fourier reeks, die een spitsvorm is geldt dat φ geheel is. Tenslotte merken we op:

(3.2.6) <u>Als φ behoort bij een spitsvorm, dan convergeert de reeks voor $\mathrm{Re}\ s > \frac{k}{2} + 1$. Voor de coefficienten van een spitsvorm geldt $a_n = O(n^{\frac{1}{2}k})$.</u>

<u>Bewijs</u>: Laat $f(z)$ de Fourier reeks zijn, in een omgeving van $z=i\infty$ geldt omdat f een spitsvorm is $f(z)=O(|e^{2\pi i z}|)$. Stel $z=x+iy$ dan $y^{\frac{1}{2}k}f(z)=O(y^{\frac{1}{2}k}e^{-2\pi y})$. Nu is $y^{\frac{1}{2}k}f(z)$ invariant bij unimodulaire substituties. Dus geldt in het gehele bovenhalfvlak $|f(z)| \leq M.y^{-\frac{1}{2}k}$. De formule voor de Fourier coefficienten geeft dus $a_n=O(n^{\frac{1}{2}k})$. (We gebruiken dan $a_n= \int_0^1 f(x+\frac{i}{n})e^{-2\pi i n(x+\frac{i}{n})}dx$).

Hierin ligt veel van het belang van de theorie van de modulaire vormen voor de getaltheorie. Verschillende arithmetische functies (b.v. representatie aantallen door kwadratische vormen, partities etc.) zijn op te vatten als Fourier coefficienten van modulaire vormen. We bewezen reeds bij dimensie $-2k$, dat deze vormen steeds te schrijven zijn als een Eisensteinreeks plus een spitsvorm. De coefficient van de Eisensteinreeks is een bekende arithmetische functie (n.l. de som over de $(k-1)$-ste machten van de delers). Nu kunnen we de coefficient van de spitsvorm schatten. Terwijl $\sigma_{k-1}(n)=O(n^{k-1})$ geldt voor de coefficient van de spitsvorm $O(n^{\frac{1}{2}k})$.

Er bestaat het vermoeden dat voor deze coefficienten zelfs geldt $O(n^{\frac{1}{2}(k-1)+\varepsilon})$. Met zeer gecompliceerde methode is nu bewezen dat men in ieder geval heeft $O(n^{\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}})$. In het geval $k=2$, is de schatting $a_n=O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ door Eichler bewezen.

3.3. Nadere informatie over de operatoren T_n.

De operatoren T_n vormen op duidelijke wijze een commutatieve algebra. Een van de door Hecke gestelde problemen is de vraag of deze algebra halfenkelvoudig is. Het bewijs niet door Hecke gevonden. Petersson heeft dit bewijs gegeven met behulp van een scalair product in de ruimte van de spitsvormen (met codimensie in de ruimte van de gehele modulaire gelijk aan 1). Hij definieert (bij vaste dimensie $-2k$)

$$(3.3.1) \qquad (f,g) = \iint_D f(z)\overline{g(z)}\, y^{2k-2}\, dx\, dy.$$

De integraal over het fundamenteel gebied D, z=x+iy.
De factor y^{k-2} dient om een uitdrukking te krijgen, die onafhankelijk van de keuze van het fundamentaal gebied is.
We kunnen nu "direct" verifiëren dat de operatoren T_n hermitisch zijn, we behoeven dit alleen voor n=p te contrôleren.
Uit de hermiticiteit van de operatoren volgt dat een basis van eigenfuncties gevonden kan worden, zodat $T_n f = \lambda(n) f$ voor alle n. Dit betekent dat de Dirichlet reeksen bij deze eigenfuncties een Euler product-ontwikkeling bezitten:

$$(3.3.2) \quad \sum \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

De theorie van de operatoren T_n is naar vele zijden gegeneraliseerd. We noemen slechts de uitbreiding voor ondergroepen (van trap q) van de modulaire groep, generalisaties voor modulaire vormen (b.v. met gebroken dimensie) met multiplicatoren; Hilbertse en Siegelse modulaire vormen. In de laatste jaren is men zich meer met de algebraïsche (of algebraïsche meetkundige) achtergrond van de zaak gaan bezighouden.

We willen, zonder evenwel in details te treden, nog enkele verdere opmerkingen maken. Laten we uitgaan van een (nog nader vast te leggen) kwadratische vorm gedefinieerd in een 4k-dimensionale ruimte. We kiezen nu in deze ruimte een rooster, waarop de quadratische vorm even is en dat determinant 1 heeft. (Zo'n rooster kan alleen bestaan als k even is). Met zo'n rooster M bouwen we met vectoren x uit M de som:

$$(3.3.3) \qquad \vartheta(M,z) = \sum_{x \in M} e^{\pi i z Q(x)}, \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0).$$

Dit is een modulaire vorm met dimensie $-2k$. Voor $k=2$ is deze ϑ functie op een constante factor na gelijk aan G_4, voor $k=4$ aan G_8 en voor $k=6$ is de ϑ functie een lineaire combinatie van G_{12} en Δ.

We kunnen nu voor vaste k alle equivalentieklassen van roosters bezien, we nummeren deze klassen $1,2,3,\ldots N$. Laat n een natuurlijk getal zijn dan kunnen we vragen naar het aantal roosters met norm n in de klasse nummers i, die equivalent zijn onder gelijkvormigheidstransformaties met de roosters uit de klasse j; dit aantal zij $\pi_{ij}(n)$. Met deze getallen vormen we een matrix $P(n)=\{\pi_{ij}(n)\}$.

Op deze wijze ontstaat bij ieder natuurlijk getal n een matrix $P(n)$. Voor deze matrices gelden nu analoge vermenigvuldigregels als voor de operatoren T_n.

Laten we nu de lineaire ruimte bezien opgespannen door de reeksen gebouwd met representanten van de verschillende klassen kwadratische vormen (alle even en met determinant 1 en vaste k). Op eenvoudige wijze zien we dat niet alleen de T_n op deze ruimte werken, maar ook de $P(n)$. Na wat eenvoudige omvormingen van de matrices $P(n)$ kunnen we komen tot een stel operatoren, die dezelfde werking als de operatoren T_n hebben. Op deze wijze kunnen we dus transformaties van de variabele z in verband brengen met transformaties van de roosters. Dit opent een weg naar een analytische behandeling van de theorie van de roosters, waarop een gegeven kwadratische vorm in een gegeven ruimte geheel is.

Aan de andere kant kan men het gedrag van de modulaire vormen speciaal onder de operatoren T_n op deze wijze meer algebraïsch gaan behandelen. In het geval dat in de vectorruimte een structuur van een algebra, met de kwadratische vorm als norm vorm, gegeven is levert dit resultaten. Na de tweedimensionale ruimte met hun analogie in de kwadratische lichamen komen de vierdimensionale ruimten met relaties tot quaternionen algebra's en (nog niet onderzocht) de achtdimensionale ruimten met de octaven (Cayley-Dickson) algebra.

§4. Het geval k=2, de quaterionen

Hecke heeft zich ook nog in het bijzonder bezig gehouden met $k=2$, de quaternaire vormen, dan is bij even vormen de determinant $\neq 1$, hij bestudeerde speciaal het geval van een kwadratische determinant. De quaternaire vorm is dan norm vorm van een quaternionen algebra. Uit de arithmetiek van de quaternionen (gegeneraliseerde quaternionen behorende bij de beschouwde norm vorm) is extra informatie te putten. Op deze theorie, in eerste instantie door Brandt ontwikkeld en door Eichler e.a. verder voortgezet gaan we niet te veel in.

We noemen slechts een resultaat, hoewel niet in zijn exacte vorm, om een indruk te geven van de lijn waarin het werk van Hecke zich in de laatste tijd heeft ontwikkeld. Het gaat om het spoor van de operator $P(n)$. In het geval van de quaternionen kan men van de deelroosters op idealen in de ringen van de gehele quaternionen overstappen en zo een verfijnde theorie verkrijgen. Voor n is geen kwadraat komt er een formule van het type

$$(3.4.1)\quad Sp\,(P(n)) = \tfrac{1}{2} \sum_{s,f} \left(1 - \left\{\tfrac{g}{p}\right\}\right) \frac{h(g)}{w(g)}\ ; |s| < 2\sqrt{n},\ f>0,$$

$$g = \frac{s^2-4n}{f^2} \equiv 0,1\ (4).$$

Hierin komen de klasse aantallen van imaginair kwadratische lichamen voor. Men kan hieruit opnieuw de klasse aantal relaties van Kronecker en Hurwitz afleiden.

Er is echter nog een geheel andere weg om tot formules van het type (3.4.1) te geraken. De T_n operatoren laten zich interpreteren als correspondenties op het quotient van een Riemann oppervlak modulo een discrete groep. Correspondenties op dit quotient geconstrueerd via een overdekking behorende bij een ondergroep van de discrete groep. Bij voorbeeld als Γ de modulaire groep is en ν een matrix met determinant n, dan beschouwen we de ondergroep $\Gamma \cap \nu^{-1}\Gamma\nu$ in Γ (mits deze een eindige index in Γ en in $\nu^{-1}\Gamma\nu$ heeft). Het is nu mogelijk de sporen van deze correspondenties met analytische middelen, gebruikmakende van de theorie van de modulaire vormen, te bepalen.

Enkele correcties: (regels steeds van boven geteld)

pg 4 regel 7 $L(s) = \frac{\pi}{4} + (s-1)\left[L'(1)+o(s)\right]$.

4 (1.3.1) i.p.v. "deze lijn" lezen "de lijn Re s = 1".

5 regel 12 i.p.v. "Q(n)" lezen "Q(n,m)". (twee keer)

6 regel 7 $A_m = \frac{1}{2}(\varphi_+(0)+\varphi_-(0)) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_+(k)+\varphi_-(k)\right]$.

7 (1.4.6) i.p.v. " = " lezen " $\longrightarrow$ " .

8 regel 9 i.p.v. "gelijk is aan het aantal" lezen "een deler is van het aantal" .

8 regel 19 i.p.v. "dus w=u voor" lezen "dus w=4 voor"

9 regel 11 i.p.v. "dat de elementen van" lezen "dat elementen van" .

10 (1.7.1) en verder op deze pag. i.p.v. $\zeta_L(s)$ lezen $\zeta_L(s,K)$.

15 regel 18,19 i.p.v. "(in de locale" lezen "(N_{100} in de locale",

22 regel 12 de formule luidt: $(T_n f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{V} f(Vz)$.

25 regel 18 i.p.v. "Nu is $y^{\frac{1}{2}k}f(z)$ invariant" lezen "Nu is $y^{\frac{1}{2}k}|f(z)|$ invariant".

26 regel 10 i.p.v." y^{k-2}" lezen "y^{2k-2}".