STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Einige Fragen der Theorie der Gleichverteilung

von

Dr. J. Cigler

Januar 1964

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Einige Fragen der Theorie der Gleichverteilung.

Von Johann Cigler, Wien.

Die folgenden Bemerkungen bilden eine sehr unvollständige und einseitige Skizze einiger Aspekte der Theorie der Gleichverteilung. Der Hauptzweck besteht darin, einige wohlgekannte Sätze von einem neuen Gesichtspunkt aus zu behandeln und auf eine Reihe von Untersuchungen hinzuweisen, die für die Theorie der Gleichverteilung von Interesse sein könnten. Die meisten Resultate, über die ich sprechen werde, sind wohlbekannt, wenn auch manche üblicherweise anders formuliert und bewiesen werden. Definitionen und Sätze, die in [1] vorkommen, werden als bekannt vorausgesetzt. Auf Arbeiten, die bereits in [1] zitiert sind, wird nicht ausdrücklich hingewiesen.

I. Bezeichnungen:

$N = \{1,2,3,\ldots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen in der diskreten Topologie.

$C(S)$ = Algebra aller beschränkten stetigen komplex-wertigen Funktionen f auf einem Hausdorff-Raum S mit der Norm $\|f\| = \sup\limits_{s\in S} |f(s)|$.

$C^r(S)$ = Menge aller reellen Funktionen in $C(S)$.

$C^+(S)$ = Menge aller nicht-negativen Funktionen in $C(S)$.

K: Menge der komplexen Zahlen. Ist $z \in K$, dann bedeute $\bar{z}$ die konjugiertkomplexe Zahl zu z.

$A(S)$ heisst C-Teilalgebra von $C(S)$, wenn

$f_1, f_2 \in A(S) \Longrightarrow f_1+f_2$ und $f_1 f_2 \in A(S)$

$f \in A(S)$, $\lambda \in K \Longrightarrow \lambda f \in A(S)$

$1 \in A(S)$; $f \in A(S) \Longrightarrow \bar{f} \in A(S)$

$\|f\| = \sup\limits_{s\in S} |f(s)|$

$f_n \in A(S)$, $\|f_n - f\| \to 0 \Longrightarrow f \in A(S)$.

Ein kompakter Hausdorff-Raum X, in dem ein stetiges Bild $\phi(N)$ von N dicht liegt, heisst eine Kompaktifizierung von N.

$C(N)$ ist die menge aller beschränkten komplex-wertigen Funktionen $f = \{f(n)\}$ auf N. Ist $f = \{f(n)\}$ dann sei $Tf = \{f(n+1)\}$.
Eine C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$ heisst invariant, wenn mit $f \in A(N)$ auch $Tf \in A(N)$ gilt.
$C(N)$ ist invariant.
$M(X)$ bedeute die Menge aller komplex-wertigen regulären Masse μ auf einem kompakten Raum X, also die Menge aller beschränkten stetigen Funktionale μ auf $C(X)$.
$M^{+}(X)$ bedeute die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse, d.h. die Menge aller Masse $\mu \in M(X)$ mit $\mu(f) \geq 0$ für $f \geq 0$ und $\mu(1)=1$.
Für jedes $x \in X$ bedeute $\varepsilon_x(f)$ das im Punkt x konzentrierte Mass, für das also $\varepsilon_x(f) = f(x)$ für jedes $f \in C(X)$ gilt.
Ein Mass μ ist konzentriert auf einer Menge E, wenn für jede Borel-Menge A gilt $\mu(A)=\mu(A \cap E)$.
$\mathcal{T}$ = Torusgruppe = Gruppe der reellen Zahlen mod 1, repräsentiert durch das Intervall $[0,1)$, bei dem die Endpunkte identifiziert werden.
$\mathcal{T}^k$ = k-dimensionale Torusgruppe.

II. Hilfssätze aus der Theorie der kommutativen Banach-Algebren

Jede C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$ ist isometrisch isomorph zur Algebra $C(X)$ aller stetigen komplex-wertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X, in dem ein stetiges Bild $\phi(N)$ von N dicht liegt. Ist umgekehrt X eine Kompaktifizierung von N, dann ist die Algebra $C(X)$ isometrisch isomorph zu einer C-Teilalgebra $A(N)$ von $C(N)$. Dieser Isomorphismus wird durch die Zuordnung

$$\hat{f}(x) \in C(X) \longleftrightarrow \hat{f}(\phi(n)) \in A(N), \quad \hat{f}(\phi(n)) = f(n),$$

gegeben.

Die Funktion $\hat{f}(x)$ ist die stetige Fortsetzung von $\hat{f}(\phi(n))$ auf X.

Die Kompaktifizierung von N, die der Algebra $C(N)$ selbst entspricht, werde mit Ω bezeichnet. Ω heisst Stone - Čech - Kompaktifizierung von N. Es ist $C(N) \cong C(\Omega)$. Jede Kompaktifizierung X von N ist als

stetiges Bild von Ω darstellbar. Rein mengentheoretisch ist Ω isomorph zur Menge aller Ultrafilter auf N.
Jedem $f \in C(N)$ ist umkehrbar eindeutig eine stetige Funktion $\hat{f}=\hat{f}(\omega) \in C(\Omega)$ zugeordnet, so dass für $n \in N$ $\hat{f}(n) = \rho(n)$ gilt.
Für $\omega \notin N$ und jedes $f \in C^r(N)$ gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(n) \leq \hat{f}(\omega) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} f(n)$.

Literatur: [2], [3], [4].

III. Der Problemkreis der Theorie der Gleichverteilung.

Die Theorie der Gleichverteilung kann aufgefasst werden als die explizite und konkrete Realisierung der Isomorphismen zwischen den C-Teilalgebren A(N) von C(N) und den entsprechenden Algebren C(X). Das Hauptinteresse liegt dabei an der Zuordnung der einander entsprechenden linearen Funktionale.
Die beschränkten linearen Funktionale auf C(X) sind genau die Masse $\mu \in M(X)$. Die beschränkten linearen Funktionale L auf A(N) werden durch Limitierungsverfahren gegeben. Der wichtigste Fall ist der, wo ein Matrix-Limitierungsverfahren $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ zugrunde liegt. Es ist dann

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} f(k),$$

wobei sowohl jedes einzelne $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(k)$ als auch der Grenzwert für jedes $f \in A(N)$ exstieren sollen.
Nun definiert $\sum_k a_{nk} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \hat{f}(\phi(k)) = \mu_n(\hat{f})$

ein Mass $\mu_n \in M(X)$, das auf der Menge $\phi(N)$ konzentriert ist.
Die Theorie der Gleichverteilung beschäftigt sich also vor allem mit dem Grenzverhalten von Folgen von Massen auf X, die auf einer abzählbaren Menge $\phi(N)$ konzentriert sind.
Eine Folge von Massen $\mu_n \in M(X)$ konvergiert genau dann (in der w^*-Topologie) gegen ein Mass μ, wenn $\mu_n(\hat{f}) \to \mu(\hat{f})$ für jedes $\hat{f} \in C(X)$ gilt.

Die bedeutung der kompakten Räume für die Theorie der Gleichverteilung beruht wesentlich darauf, dass die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse kompakt ist.
Alle Fragen der Theorie der Gleichverteilung können in dem dargelegten allgemeinen Rahmen behandelt werden. Im Folgenden wird auf einige Spezialfälle näher eingegangen, die entweder zur Vertiefung des Verständnisses dienen oder Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen sein könnten.

Lit.: [1], [5].

IV. Die Einpunkt-Kompaktifizierung

Sei X die Einpunkt-Kompaktifizierung von N mit dem Punkt ∞. C(X) ist dann isomorph mit der C-Teilalgebra $A_\infty(N)$ aller Funktionen $f \in C(N)$, für die $\lim_{n\to\infty} f(n)$ existiert. Dieser Isomorphismus wird gegeben durch die Zuordnung

$$f = f(n) \in A_\infty(N) \longleftrightarrow \hat{f} = \hat{f}(x) \in C(X)$$

mit $\hat{f}(\phi(n)) = f(N)$, $n \in N$

$$\hat{f}(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Wir nehmen im Folgenden $\phi(n) = n$ an.

Wir interessieren uns für die Frage: Welche Limitierungsverfahren $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ definieren das Funktional ε_∞ auf X? M.a.W. Für welche Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} f(k) = \varepsilon_\infty(\hat{f}) = \hat{f}(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Das ist aber genau die Frage, welche limitierungsverfahren permanent sind, d.h. jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnen.
Die Antwort ist durch den wohlbekannten Satz von Toeplitz gegeben:
IV.1. Notwendig und hinreichend für die Permanenz von $\mathfrak{A}$ ist

(1) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

(2) $\lim_n a_{nk} = 0$

(3) $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} a_{nk} = 1$.

Der Beweis verläuft genau so, wie der übliche funktionalanalytische. Nur ist hier die Terminologie masstheoretisch. Wir skizzieren nur den notwendigen Teil:

Für jedes $\hat{f} \in C(X)$ existiert $\mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_{k} a_{nk} \hat{f}(k) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k\leq N} a_{nk} \hat{f}(k)$

$\Longrightarrow$(Banach-Steinhaus) $\|\mu_n\| = \sup\limits_{|f|\leq 1} \mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_{k} |a_{nk}| < \infty.$

Für jedes $\hat{f} \in C(X)$ gilt $\mu_n(\hat{f}) \to \varepsilon_\infty(\hat{f}) \Longrightarrow$

$\sup\limits_{n} \|\mu_n\| = \sup\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{nk}| < \infty$

$f = 1 \Longrightarrow \mu_n(1) \to \varepsilon_\infty(1) = 1 \Longrightarrow \sum\limits_{k} a_{nk} \to 1.$

$f = \varepsilon_k \Longrightarrow \mu_n(\varepsilon_k) \to \varepsilon_\infty(\varepsilon_k) = 0 \Longrightarrow a_{nk} \to 0.$

"Gleichverteilungstheoretische Interpretation" dieses Satzes:
Die Menge der natürlichen Zahlen ist bezüglich jedes permanenten Summationsverfahrens in X ε_∞-gleichverteilt.
Mehrere weitere Fragen der Theorie der Limitierungsverfahren können unter ähnlichen Gesichtspunkten betrachtet werden.

Lit.: [6], [7].

V. Klassische Definition der Gleichverteilung

Die übliche Definition der Gleichverteilung bekommt man, wenn man von einer Folge $\phi(n)$ ausgeht, die in einem kompakten Hausdorff-Raum S liegt. Als Kompaktifizierung von N wähle man in diesem Fall die kleinste abgeschlossene Teilmenge X von S, die all Punkte $\phi(n)$ enthält.

Da das der übliche Gesichtspunkt ist, wollen wir nicht näher darauf eingehen.

Lit.: [1], [8].

VI. Die Stone - Čech - Kompaktifizierung

Die Stone - Čech - Kompaktifizierung Ω entspricht der Algebra $A(N) = C(N)$. Jedes $f \in C(N)$ kann zu einer eindeutig bestimmten stetigen Funktion $\hat{f}$ auf Ω erweitert werden.
Jedes beschränkte lineare Funktional auf $C(N)$ definiert ein Mass μ auf Ω. Ein Matrix-Limitierungsverfahren liefert genau dann ein Mass auf Ω, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk} f(k)$ ex. für jedes $f \in C(N)$, wenn

(1) $\sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

(2) $\sup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk}$ ex.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k a_{nk} = a_k$ ex.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_k |a_{nk} - a_k| = 0$.

Der Beweis verläuft genau so wie bei der Einpunkt-Kompaktifizierung und kann daher weggelassen werden.
Ist jedes μ_n, definiert durch $\mu_n(\hat{f}) = \sum\limits_k a_{nk} f(k)$, ein Wahrscheinlichkeitsmass, dann folgt, dass $\sum\limits_k a_k = \lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = 1$ gilt d.h. dass $\mu = \lim \mu_n$ ebenfalls auf N konzentriert ist.
Die Matrix-Limitierungsverfahren liefern daher keine nicht-trivialen Masse μ auf Ω. Auf Ω kann daher keine im üblichen Sinne vernünftige Theorie der Gleichverteilung betrieben werden.

Lit.: [6].

VII. Banach-Limiten und Fast-Konvergenz

Unter einem Banach-Limes versteht man ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf Ω, das invariant bezüglich T ist:

$\hat{f} \geq 0 \Longrightarrow \mu(\hat{f}) \geq 0$

$\mu(1) = 1$

$\mu(T\hat{f}) = \mu(\hat{f})$.

Es gilt dann für $\hat{f} \in C^r(\Omega)$: $\underline{\lim} f(n) \leq \mu(f) \leq \overline{\lim}\, f(n)$.
Insbesondere ist $\mu(n) = 0$, $n \in N$.
Die Menge aller Banach-Limiten werde mit M_T bezeichet. Sei B_T der Teilraum von $C(\Omega)$, auf dem alle Banach-Limiten übereinstimmen. Der gemeinsame Wert werde mit $L(\hat{f})$ bezeichnet.

VII.1. Die Funktion $\hat{f}$ liegt genau dann in P_T, wenn für jedes $\omega \in \Omega$

$$(*) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) = L(\hat{f})$$

existiert, wobei $L(\hat{f})$ unabhängig von ω ist.

Bew.: Hinr. Sei $\mu \in M_T$ und $(*)$ erfüllt.

$$\Longrightarrow \mu(\hat{f}) = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega)\right) d\mu(\omega) = \int_\Omega \left(\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega)\right) d\mu(\omega)$$

$$= \int_\Omega L(\hat{f})\, d\mu(\omega) = L(\hat{f}),$$

d.h. $\mu(\hat{f})$ ist unabhängig von $\mu \in M_T \Longrightarrow \hat{f} \in B_T$.

Notw. Sie $\hat{f} \in B_T$ und $\omega_0 \in \Omega$. Dann existiert eine Folge N_n, so dass

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k \hat{f}(\omega_0) = \alpha.$$

Wir ordnen nun jeder Funktion $\hat{g} \in C(\Omega)$ eine Funktion $S\hat{g} \in C(\Omega)$ zu, deren Einschränkung auf N gegeben ist durch

$$S\hat{g} = \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k \hat{g}(\omega_0).$$

Dann ist für beliebiges $\omega \in \Omega-N$ durch $\mu(\hat{g}) = S\hat{g}(\omega)$ ein Banach-Limes definiert. Denn:

$\hat{g} \geq 0 \Longrightarrow S\hat{g}(n) \geq 0 \Longrightarrow \mu(\hat{g}) = S\hat{g}(\omega) \geq 0$

$\hat{g} = 1 \Longrightarrow S\hat{g}(n) = 1 \Longrightarrow \mu(1) = S\hat{g}(\omega) = 1.$

$$ST\hat{g}(n) = \frac{1}{N_n} \sum_{k\leq N_n} T^k T\hat{g}(\omega_0) = TS\hat{g}(n)$$

$\Longrightarrow ST\hat{g}(\omega) = TS\hat{g}(\omega)$

Nun ist $TS\hat{g}(\omega) = S\hat{g}(\omega)$, weil $\lim\limits_{n\to\infty} (TS\hat{g}(n) - S\hat{g}(n)) = 0$ ist.

$\mu(T\hat{g}) = ST\hat{g}(\omega) = TS\hat{g}(\omega) = S\hat{g}(\omega) = \mu(\hat{g})$.

Ausserdem ist $\mu(\hat{f}) = S\hat{f}(\omega) = \alpha$ wegen (1).

Nun ist $\hat{f} \in B_T$, $\mu \in M_T \Rightarrow \mu(\hat{\rho}) = L(\hat{\rho})$ unabhängig von $\mu \Rightarrow \alpha = L(\hat{\rho})$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{\rho}(\omega_0) = L(\hat{\rho})$$

existiert. Das gilt für jedes $\omega_0 \Rightarrow (*)$.

VII.2. Es ist $f \in B_T$ genau dann, wenn

$$(**) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n+k) = L(\hat{f})$$

gleichmässig in k existiert, d.h. wenn die Folge $\{f(n)\}$ fastkonvergent ist.

<u>Bew.:</u> Hinr. Sei (**) erfüllt, $\omega \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ bel. Es ex. N_0, so dass für alle $N \geq N_0$

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n+k) - L(\hat{f})\right| < \varepsilon/2$$

für alle $k=1,2,3,\ldots$ gilt. Das kann auch geschrieben werden:

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(k) - L(\hat{\rho})\right| < \varepsilon/2.$$

Ausserdem gibt es zu jedem N und vorgegebenem $\omega \in \Omega$ eine natürliche Zahl $k_N = k_N(\omega)$, so dass

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) - \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(k_N)\right| < \varepsilon/2$$

gilt, weil $T^i f$ für jedes i eine stetige Funktion ist und N dicht in Ω liegt

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} T^n \hat{f}(\omega) - L(\hat{\rho})\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow (*).$$

Nctw. Sei (*) erfüllt. Dann gilt für jedes $\nu \in M(\Omega)$: $\nu(\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} T^n f) \to L(\hat{\rho})$. Die Folge $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} T^n \hat{f}$ strebt daher schwach gegen $L(\hat{f})$ und daher nach dem "mean ergodic theorem" auch stark. $\Rightarrow$ (**).

Lit.: [9], [10], [11], [12]

VIII. Strikte Ergodizität

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Eine stetige Transformation T auf X heisst strikt ergodisch, wenn es nur ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf X gibt, das invariant bezüglich T ist, d.h. $\int f(Tx)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$ für alle $f \in C(X)$ erfüllt.

VIII.1. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) T ist strikt ergodisch

(2) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) = \mu(f)$ existiert für jedes $f \in C(X)$ und jedes $x \in X$.

(3) $\lim_{N\to\infty} \| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) - \mu(f) \| = 0$ für jedes $f \in C(X)$.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2):

Sei ν ein beliebiges Häufungsmass der Folge μ_N, definiert durch $\mu_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x)$, $f \in C(X)$. Dann ist ν invariant bezüglich T.

Daraus folgt $\nu = \mu$, d.h. $\lim \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) = \mu(f)$ für jedes $f \in C(X)$.

(1) $\Rightarrow$ (3):

Ang. (3) wäre nicht erfüllt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem N Elemente x_N mit

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x_N) - \mu(f)\right| > \varepsilon$$

für mindestens ein $f \in C(X)$. Sei $\mu_N(g) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} g(T^n x_N)$ für jedes $g \in C(X)$.

Sei ν ein Häufungsmass der Folge $\mu_N \Rightarrow \nu(\rho) \neq \mu(f)$, $\nu(T\rho) = \nu(f)$, d.h. es existieren mindestens zwei invariante Masse, was der Voraussetzung widerspricht.

(3)$\Longrightarrow$(2): trivial

(2)$\Longrightarrow$(1):

Sei ν invariant $\Longrightarrow \nu(f) = \int(\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f(T^n x))\, d\nu(x) =$

$= \int(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f(T^n x))d\nu(x) = \int\mu(\rho)d\nu(x) = \mu(f) \Longrightarrow \mu = \nu.$

Literatur: [10], [13], [14].

IX. Verschiedene Probleme.

IX.1. Sei $A(N)$ eine separable invariante C-Teilalgebra von $C(N)$. Dann existiert eine stetige Transformation T auf der zugehörigen Kompaktifizierung X derart, dass $Tf(x) = f(Tx)$ für alle $f \in C(X)$ gilt.

Bew. Da $A(N)$ separabel ist, ist X ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Eine Folge $x_n \in X$ konvergiert genau dann, wenn $f(x_n)$ für jedes $f \in C(X)$ konvergiert. In der einen Richtung folgt das aus der Stetigkeit der Funktionen f. Wenn x_n nicht konvergiert, dann existieren mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte x,y. Dann würden aber $f(x)$ und $f(y)$ verschiedene Häufungspunkte der Folge $f(x_n)$ sein. Das ist ein Widerspruch zur Konvergenz der Folge $f(x_n)$.

Sei $\phi(N)$ das Bild von N, das in X dicht liegt. Wir zetzen $T\phi(n) = \phi(n+1)$, $n=1,2,3,\ldots$

Sei $x \in X$. Da $\{\phi(n)\}$ dicht in X ist, existiert eine Teilfolge $\phi(n_i)$, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert $\hat{f}(\phi(n_i))$ für jedes $\hat{f} \in C(X)$. Da $A(N)$ invariant ist, konvergiert auch $T\hat{f}(\phi(n_i)) = \hat{f}(T\phi(n_i))$. Das bedeutet aber, dass auch die Folge $T\phi(n_i)$ konvergiert. Wir definieren $Tx = \lim T\phi(n_i)$. Man zeigt leicht, dass Tx eindeutig festgelegt und unabhängig von der Wahl der Folge, die gegen x konvergiert, ist. Ebenso zeigt man die Stetigkeit von T.

IX.2. Sei $A(N)$ eine invariante C-Teilalgebra von $C(N)$, die ganz in B_T liegt. Dann ist die durch IX.1. definierte Transformation T strikt ergodisch.

Bew. Da $A(N) \subseteq B_T$ gilt, ist für jedes $f \in A(N)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \hat{f}(T^n\phi(k)) = L(\hat{\rho})$$

gleichmässig in k. Nun folgt mit demselben Schluss wie in VII.2, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \hat{f}(T^n x) = L(\hat{\rho})$$

für jedes $x \in X$ gilt. Das bedeutet aber, dass T strikt ergodisch ist.

IX.3. Ein Beispiel für eine strikt ergodische Transformation ist $Tx = x+\vartheta$ auf $\mathcal{T}$, ϑ irrational. Denn $T^n x = x+n\vartheta$ ist für jedes $x \in \mathcal{T}$ gleichverteilt. Daraus folgt nach VIII.1(3) schon die gleichmässige Gleichverteilung.

IX.4. Die Folge $\{n^2\vartheta\}$ kann nicht in der Gestalt $n^2\vartheta = T^n x$, $x \in \mathcal{T}$, dargestellt werden, wobei T eine stetige Transformation auf $\mathcal{T}$ bedeutet. Sonst müsste mit jeder Folge $n_i^{\,2}\vartheta \to x_0$ auf $\mathcal{T}$ auch $T\, n_i^2\vartheta = (n_i+1)^2\vartheta$ auf $\mathcal{T}$ konvergieren, was offenbar nicht der Fall ist.

Sei jedoch auf $\mathcal{T}^2$ die Transformation T durch $T(x_1,x_2) = (x_1+\vartheta,\ x_2+2x_1+\vartheta)$ definiert. Dann ist T stetig auf $\mathcal{T}^2$, und es gilt $T^n(x_1,x_2) = (x_1+n\vartheta,\ x_2+2nx_1+n^2\vartheta)$. Also speziell für $x_1=x_2=0$ ergibt sich $T^n(0,0) = (n\vartheta, n^2\vartheta)$. Man kann direkt beweisen, dass T strikt ergodisch ist. Es folgt aber schon daraus, dass $T^n(x_1,x_2)$ für jedes x_1,x_2 gleichverteilt ist. Daraus folgt dann wieder die gleichmässige Gleichverteilung.

IX.4a. Ganz analog kann gezeigt werden, dass jede Folge $\phi(n) = \alpha_0 n^k+\alpha_1 n^{k-1}+\ldots+\alpha_k$ mit irrationalem α_0 auf $\mathcal{T}$ als Projektion einer Folge $T^n(x_1,\ldots,x_k)$ dargestellt werden kann, wobei T strikt ergodisch auf $\mathcal{T}^k$ ist.

<u>Lit.:</u> [14],[15].

IX.5. Jede Folge $\{\phi(n)\} \in X$ lässt sich als Projektion einer Folge $\{T^n x\}$, wobei x in einem kompakten Hausdorff-Raum $\tilde{X}$ liegt, auffassen. Sei nämlich $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n=X$, das kartesische Produkt von abzählbar

vielen Exemplaren X mit der überlichen Produkt-Topologie.

Sei $x = (\phi(1),\ \phi(2),\ldots,\phi(n),\ldots)\ \Pi X_n$

$Tx = (\phi(2),\ \phi(3),\ldots,\phi(n+1),\ldots,)$.

Dann ist $\phi(n) = P_1 T^{n-1}x$ wobei P_1 die Projektion von $\prod\limits_n X_n$ auf X_1 bedeutet. Setzt man $\tilde{X} = \overline{\{x,\ Tx,\ldots,T^n x,\ldots\}}$, gleich dem Abschluss der Folge $\{T^n x\}$ in $\prod\limits_n X_n$, dann ist $\tilde{X}$ ein kompakter Hausdorff-Raum, in dem die Folge $\{T^n x\}$ dicht liegt.

IX.6. Wenn $\{\phi(n)\}\in X$ gleichmässig gleichverteilt zum Mass μ auf X ist, dann muss für jedes $\hat{f}\in C_1(\tilde{X})$ gelten

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\hat{f}(T^n\tilde{x}) = \mu(\hat{f})$$

für jedes $\tilde{x}\in\tilde{X}$. Hiet bedeutet $C_1(\tilde{X})$ die Menge aller stetigen Funktionen der Gestalt $\hat{f}(P_1\tilde{x})$ mit $\hat{f}\in C(\tilde{X})$.

Bew. Wörtlich wie in VII.2.

IX.7. Sei $\{\phi(n)\}$eine bel. Folge auf $\mathfrak{T}$ und sei $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(n+k)-\phi(n) = 0$ auf $\mathfrak{T}$ für jedes k=1,2,3,... . Dann ist die Folge $\{\phi(n)\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt.

Bew. Sei $\tilde{X} = \overline{\{x,Tx,\ldots,T^n x,\ldots\}}$, wobei

$$x= (\phi(1),\ \phi(2),\ldots,\phi(n),\ldots\}\in\Pi X_n,\ X_n\equiv\mathfrak{T},$$

gilt. Sei α eine bel. Zahl $\in\mathfrak{T}$. Dann gibt es eine Folge $\phi(n_i)\to\alpha$. Dann ist aber auch $\lim\limits_i \phi(n_i+k) = \alpha$ für jedes k=1,2,3,... M.a.W. $\tilde{X}$ enthält den Punkt $(\alpha,\alpha,\alpha,\ldots)$.

Wenn $\{\phi(n)\}$ gleichmässig gleichverteilt wäre, würde folgen

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f(\alpha) = \int_0^1 \rho(x)dx$$

für alle $f\in C(\mathfrak{T})$, was offenkundig falsch ist.

Beispiele: $\alpha n^\sigma,\ 0<\alpha<1;\ \alpha(\log n)^\tau,\ \tau>1$.

Lit. [16],[17].

IX.8. Die Folge $\{a^n x\}$ ist bei ganzzahligem $a > 1$ für kein x gleichmässig gleichverteilt.

Wäre $\{a^n x\}$ für ein $x \in \mathcal{T}$ gleichmässig gleichverteilt, dann wäre nach IX.6 $\lim\limits_{N} \frac{1}{N} \sum\limits_{n \leq N} f(a^n x_0) = \int_0^1 f(x)dx$ für jedes $x_0 \in \mathcal{T}$, weil $Tx=ax$ eine stetige Transformation auf $\mathcal{T}$ darstellt.

Das ist aber für $x_0=0$ sicher falsch.

IX.9. Sei $a > 1$ eine ganz-algebraische Zahl vom Grad k. Wenn die Folge $(a^{n+k-1}x, a^{n+k-2}x, \ldots, a^n x)$ in $\mathcal{T}^k$ den Punkt $(0,0,\ldots,0)$ als Häufungspunkt enthält, ist die Folge $\{a^n x\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt.

<u>Bew.</u> Sie $a^k = h_1 a^{k-1} + \ldots + h_k$, h_i ganz. Sei T die stetige Transformation auf $\mathcal{T}^k$, die durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 h_2 & \ldots & h_k \\ 1\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0\ 0 & \ldots 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dann ist

$$T^n(a^{k-1}x, \ldots, x) = (a^{n+k-1}x, \ldots, a^n x).$$

Wenn also $\{a^n x\}$ gleichmässig gleichverteilt wäre unf $(0,0,..0)$ Häufungspunkt der Folge $(a^{n+k-1}, \ldots, a^n x)$, würde nach IX.6 folgen, dass auch die Folge $T^n(0,\ldots,0) = (0,\ldots,0)$ gleichverteilt wäre, was einen Widerspruch darstellt.

<u>Korollar.</u> Für fast alle x ist die Folge $\{a^n x\}$ nicht gleichmässig gleichverteilt, da für fast alle $x \in \mathcal{T}$ $(a^{n+k-1}, \ldots, a^n x)$ gleichverteilt in $\mathcal{T}^k$ ist und daher $(0,\ldots,0)$ als Häufungspunkt besitzt.

IX.10. Die Menge der x, für die bei transzendentem $a > 1$ die Folge $\{a^n x\}$ gleichmässig gleichverteilt ist, besitzt das Mass Null.

Bew. Für fast all x ist die Folge $\{a^n x\}$ vollständig gleichverteilt. Die Folge $T^n(x,ax,\ldots,a^k x, \ldots)$ im Produktraum besitzt also den Punkt $(0,\ldots,0)$ als Häufungspunkt.

Lit. [18].

X. Weitere Fragestellungen.

Sei G eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe, $\mathcal{P}$ eine Menge von Charakteren auf G und $C_{\mathcal{P}}(G)$ die kleinste C-Teilalgebra von C(G), die $\mathcal{P}$ enthält. Die zugehörige Kompaktifizierung $X_{\mathcal{P}}$ nennt man eine fastperiodische Kompaktifizierung von G.

Eine Folge $\{\phi(n)\} \in G$ heisst gleichverteilt auf $X_{\mathcal{P}}$, wenn

$$(*) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \hat{f}(\phi(n)) = \lambda(\hat{f}) \text{ für jedes } \hat{f} \in C(X_{\mathcal{P}}) \text{ gilt.}$$

Dabei bedeutet λ das Haar'sche Mass auf $X_{\mathcal{P}}$.

Für den Fall $G = R_1$, $\mathcal{P} = \{e^{2\pi ikx}\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots$, bekommt man die übliche Definition der Gleichverteilung mod 1. Für den Fall G = Z = Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathcal{P} = \{e^{2\pi irn}\}$, r rational, den Gleichverteilungsbegriff von I. Niven. Für $G = Z$, $\phi(n) = n$, $\mathcal{P}$ eine beliebige Menge von Charakteren, bedeutet (*), dass der Mittelwert M(f) einer fastperiodischen Funktion f auf Z durch $\lambda(\hat{f})$ gegeben ist. Da der Mittelwert eindeutig bestimmt ist, liegt jede fastperiodische Funktion in B_T.

Man kann nun nach der Menge aller Limitierungsverfahren fragen, die den Mittelwert einer fastperiodischen Funktion f auf Z liefern, usw.

Die vorangegangenen Sätze lassen sich zum Grossteil auch auf andere Gleichverteilungsbegriffe übertragen, z.B. bekommt man den Begriff der C-Gleichverteilung, wenn man statt N die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen nimmt, usw.

Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Lit. [5], [19], [20], [21], [22].

Literaturverzeichnis

[1] J. CIGLER, G. HELMBERG, Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresbericht DMV 64 (1961), 1-50.

[2] I.M. GELFAND, D.A. RAIKOW, G.E. SCHILOW, Kommutative normierte Ringe. Moskau 1960.

[3] CH. RICKART, General Theory of Banach Algebras. Van Nostrand, Princeton 1960.

[4] W. RUDIN, Homogeneity Problems in the Theory of Čech-Compactifications. Duke Math. J. 23 (1956), 409-419.

[5] E. HEWITT, K. ROSS, Abstract Harmonic Analysis I. Springer-Verlag 1963.

[6] K. ZELLER, Theorie der Limitierungsverfahren. Springer-Verlag 1958.

[7] A. RÉNYI, Summation Methods and Probability Theory. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 4 (1959), 389-397.

[8] E. HLAWKA, Folgen auf kompakten Räumen. Abh. Math. Sem. Hamburg 20 (1956), 223-241.

[9] M. JERISON, The Set of all Generalized Limits of Bounded Sequences. Canad. J. Math. 9 (1957), 79-89.

[10] K. JACOBS, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Springer-Verlag 1960.

[11] G. LORENTZ, A contribution to the theory of divergent series. Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[12] M. HENRIKSEN, Multiplicative Summability Methods and the Stone-Čech-Compactification. Math. Z. 71 (1959), 427-435.

[13] J.C. OXTOBY, Ergodic sets. Bull. AMS 58 (1952), 116-136.

[14] H. FURSTENBERG, Strict ergodicity and transformation of the torus. Amer. J. Math. 83 (1961), 573-601.

[15] N.M. AKULINITSCHEW, Über ein dynamisches System, das mit der Verteilung der Bruchteile eines Polynomes zweiten Grades zusammenhängt. Dokl. Akad. Nauk, 143 (1962), 503-505.

[16] L. KUIPERS, Continuous distribution modulo 1. Nieuw Archief X (1962), 78-82.

[17] G.M. PETERSEN, M.T. MC GREGOR, On the structure of well distributed sequences. Nieuw Archief XI (1963), 64-67.

[18] J. CIGLER, Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung. J. reine angw. Math. 205 (1960), 91-100.

[19] I.D. BERG, The Algebra of Semiperiodic Sequences. Michigan Math. J. 10 (1963), 237-239.

[20] J. CIGLER, Einige Bermerkungen zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Archiv der Mathematik.

[21] G. HELMBERG, Ein Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und Werteverteilungen fastperiodischer Funktionen. Math. Z. 81 (1963), 300-307.

[22] I. NIVEN, Uniform Distribution of Sequences of Integers. Trans. AMS 98 (1961), 52-61.