STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-001

Afleiding van een formule

voor

Dr. A. van Wijngaarden

1948

Mathematisch Centrum

Rapport ZW 1948 - 001
9 Januari 1948

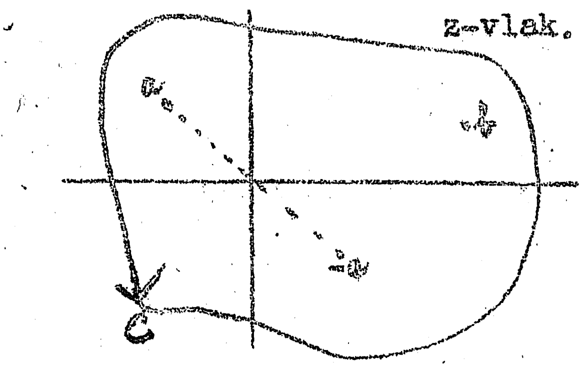
Betreft: Afleiding van een formule
voor Dr. A. van Wijngaarden.

De volgende formule werd door van Wijngaarden geponeerd en door Korevaar bewezen:

$$a^{-p}b^{-p} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(p+j-1)!}{(p-1)!\,j!}\,(a^{-p+j} + b^{-p+j})(a+b)^{-p-j} \qquad (1)$$

$(p \geq 1,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a+b \neq 0)$.

Bewijs. We integreren de functie



z-vlak.

$$f(z) = \frac{1}{(a+z)^p\,(b-z)^p\,z} \qquad (2)$$

over een contour C, die eenmaal in positieve zin om de punten 0, -a en b loopt.

Aangezien $f(z) = O(|z|^{-2p-1})$ $(|z| \to \infty)$ moet $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Aan de andere kant is deze integraal gelijk aan $2\pi i$ (de som der residuen van f(z) in de punten z = 0, z = -a en z = b).

residu in z = 0: $a^{-p}b^{-p}$. (3)

residu in z = -a: coeff. van $\frac{1}{z+a}$ in de ontwikkeling van f(z) naar (z+a)

$$f(z) = (z+a)^{-p}\left\{b+a-(z+a)\right\}^{-p}(z+a-a)^{-1}$$

$$= (z+a)^{-p}(b+a)^{-p}\left\{1-\frac{z+a}{b+a}\right\}^{-p}(-a^{-1})\left(1-\frac{z+a}{a}\right)^{-1}$$

$$= (z+a)^{-p}(b+a)^{-p}(-a^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-p}{j}\left(\frac{z+a}{b+a}\right)^j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+a}{a}\right)^k$$

coëfficiënt van $\frac{1}{z+a}$:

$$\sum_{j+k=p-1}(b+a)^{-p}(-a)^{-1}(-1)^j\binom{-p}{j}(b+a)^{-j}a^{-k}$$

$$= -\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\binom{-p}{j}a^{j-p}(a+b)^{-p-j} \qquad (4)$$

$$= -\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(p+j-1)!}{(p-1)!\,j!}\,a^{-p+j}(a+b)^{-p-j}$$

residu in z = b: vervang in (4) a door -b, b door -a (daardoor verandert f(z) niet):

$$-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(p+j-1)!}{(p-1)!\,j!}\,b^{-p+j}(a+b)^{-p-j} \qquad (5)$$

Optelling van (3), (4) en (5) moet 0 opleveren. Hieruit volgt het gewenste resultaat (1).

J. Korevaar.