MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

ZW 1956-001

Het principe van de methode van G. Kron t.b.v. het oplossen van randwaardeproblemen

door

Ir. A.J.W. Duijvestijn

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

28 januari 1956

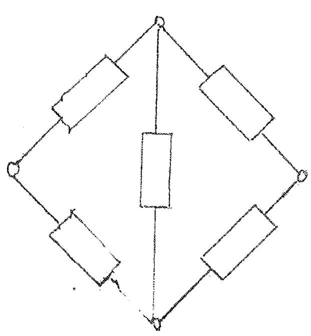
Een netwerk is een systeem van electrische componenten (weerstanden, capaciteiten, zelfinducties, enz.) Aan zo'n systeem kan men begrippen toekennen zoals knooppunten, takken en mazen. Onder een tak verstaan we de begrenzing van twee knooppunten. Een maas is een gesloten keten van takken.
We voeren eerst een aantal letters in om de aantallen van deze objecten aan te duiden.

B = aantal takken
N = aantal knooppunten
M = aantal mazen
S = aantal afzonderlijke netwerken.

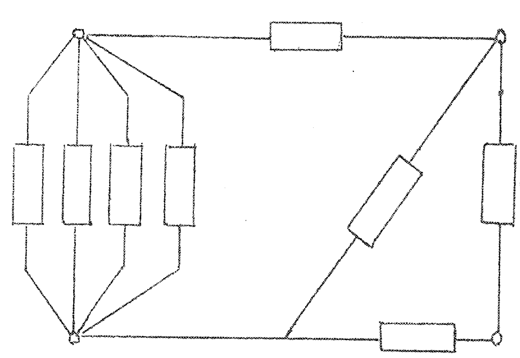
Men gaat dan gemakkelijk na dat

P = N - S = aantal onafhankelijke spanningen
M = B - P = aantal mazenvergelijkingen dat nodig is om het systeem te beschrijven.

Voorbeelden:



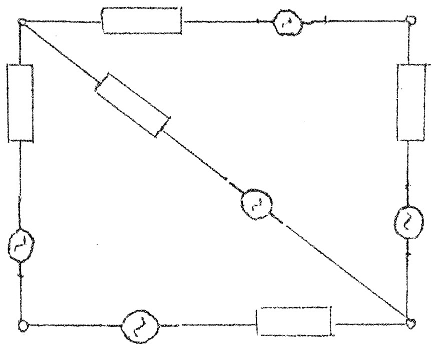
B = 5
N = 4
S = 1
P = 3
M = 2



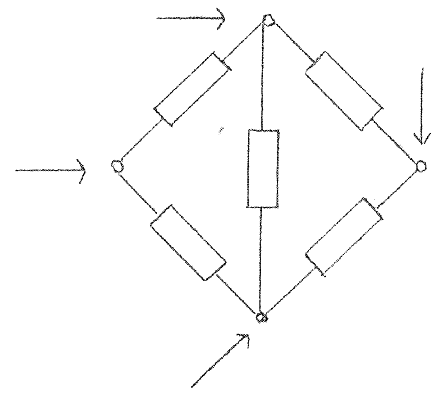
B = 8
N = 4
S = 1
P = N - S = 3
M = 8 - 3 = 5

In het eerste geval zal men met de mazenvergelijkingen werken, terwijl in het tweede voorbeeld de knooppuntenverge-

lijking de meeste voordelen biedt.
We zullen nu nog een voorbeeld geven van een mazennetwerk en van een knooppuntennetwerk, waarin ook de spanningsbronnen resp. de stroombronnen getekend zijn.



Mazennetwerk



Knooppuntennetwerk

Men bespeurt direct een zekere dualiteit, die we in het volgende lijstje weergeven.

maas	knooppuntenpaar
maasstroom	knooppuntenspanning
impedantie	admittantie
spanningsbron	stroombron

We zullen nu nader ingaan op een mazennetwerk.
Bij een mazennetwerk moet men M onafhankelijke maasstromen aannemen. Het totaal aantal mazen is echter in het algemeen groter dan M. We kunnen dus overgaan op een ander basissysteem.
Als we aannemen dat de onafhankelijke stromen $i_1 \ldots . i_n$ zijn terwijl de bijbehorende spanningen $e_1 \ldots . e_n$ en de impedanties $z_{11} \ldots , z_{1n} \ldots . z_{n1} \ldots . z_{nn}$ zijn, dan geldt dus:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} : \bar{e} = \bar{z}.\bar{i} \quad \text{of } e_m = z_{mn} i^n$$

Als we overgaan van het stelsel n op het stelsel n' transformeren zich de i^n's in de $i^{n'}$-en.
Laten wij dit weergeven door:

$$i^m = C^m_{m'} i^{m'}$$

De grootheid $e_m i^m$ stelt het vermogen voor dat in het netwerk wordt gedissipeerd. Het vermogen is invariant voor deze transformatie. Men rekent gemakkelijk na dat geldt:

$$e_m i^m = C^m_{m'} i^{m'} e_m = e_{m'} i^{m'}$$

$$\text{of: } i^{m'} (e_{m'} - C^m_{m'} e_m) = 0$$

Blijkbaar transformeren de spanningen zich op dezelfde wijze

$$e_{m'} = C^{m}_{m'}e_{m}$$

De transformatie van de impedantiematrix is dus:

$$Z_{m'n'} = C^{m\,n}_{m'n'}Z_{mn}$$

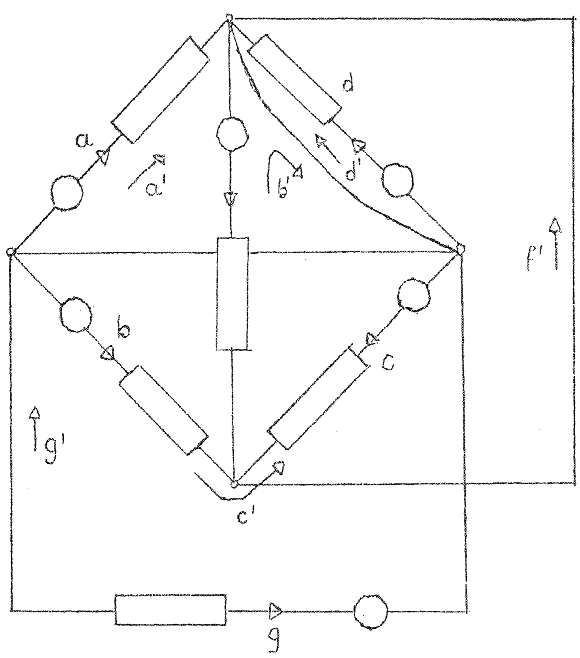
In matrixtaal is dit:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{i} = \bar{c}\bar{i}' \\ \bar{e}' = \bar{c}_t\bar{e}\end{array}\right\} \quad \bar{z}' = \bar{c}_t\bar{z}\bar{c}$$

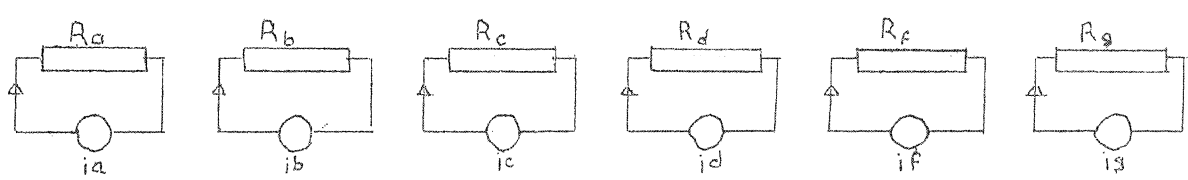
Voor knooppuntennetwerken geldt duaal iets dergelijks:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{I}' = \bar{A}_t\bar{I} \\ \bar{E} = \bar{A}\bar{E}'\end{array}\right\} \quad \bar{Y}' = \bar{A}_t\bar{Y}\bar{A}$$

De vraag rijst nu of het mogelijk is gedeelten van netwerken afzonderlijk te beschouwen en daarna met een transformatie de netwerken tot één netwerk te verenigen.
Ieder netwerk is te beschrijven als de som van een aantal primitieve netwerken. Aan de hand van een voorbeeld zullen we dit verder uitwerken.
We beschouwen nl. het volgende netwerk.



Blijkbaar valt dit netwerk uiteen in zijn primitieve netwerken.



We definieren:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_a \\ \vdots \\ e_g \end{bmatrix} \qquad \bar{z} = \left\| \begin{matrix} R_a & & \\ & \ddots & \\ & & R_g \end{matrix} \right\| \text{ en } <\bar{i}> = \begin{bmatrix} i^a \\ \vdots \\ i^g \end{bmatrix}$$

We willen nu op een ander basissysteem overgaan. Dit stelsel zij $i^{a'}$. Het verband tussen i^a en $i^{a'}$ wordt weergegeven door:

$$<\bar{i}> = \begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ i^c \\ i^d \\ i^f \\ i^g \end{bmatrix} = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & -1 & & -1 & & \\ 1 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & & & -1 \end{matrix} \right\| \begin{bmatrix} i^{a'} \\ i^{b'} \\ i^{c'} \\ i^{d'} \\ i^{f'} \\ i^{g'} \end{bmatrix} = \bar{M}<\bar{i}'>$$

We kunnen nu de kortsluitingen eenvoudig wegwerken door $i^{d'} = i^{f'} = i^{g'} = 0$ te nemen.

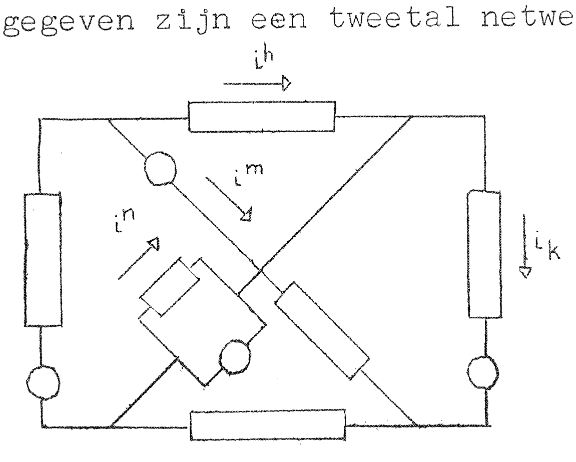
De matrix $\bar{M}$ ontaardt dan in een singuliere matrix $\bar{C}$ en het verband tussen de tak-en maasstromen wordt derhalve:

$$\begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ i^c \\ i^f \\ i^g \end{bmatrix} = \bar{C} \begin{bmatrix} i^{a'} \\ i^{b'} \\ i^{c'} \end{bmatrix} \quad \text{of } <\bar{i}> = \bar{C}<\bar{i}'> \quad \text{met } \bar{C} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|$$

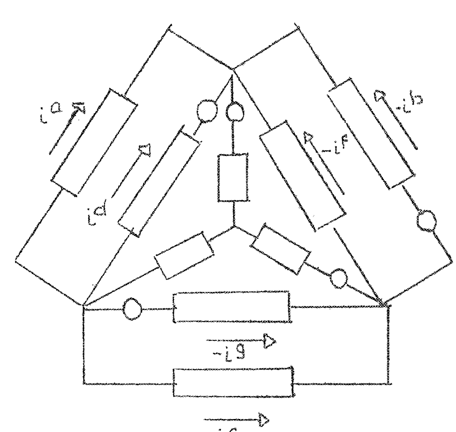
Via het vermogen kan men direct afleiden dat:

$$\bar{e}' = \bar{c}_t \bar{e}$$

Op een wijze analoog aan het gegeven voorbeeld kan men twee willekeurige netwerken tot één netwerk samenvoegen. Laat b.v. gegeven zijn een tweetal netwerken.



I



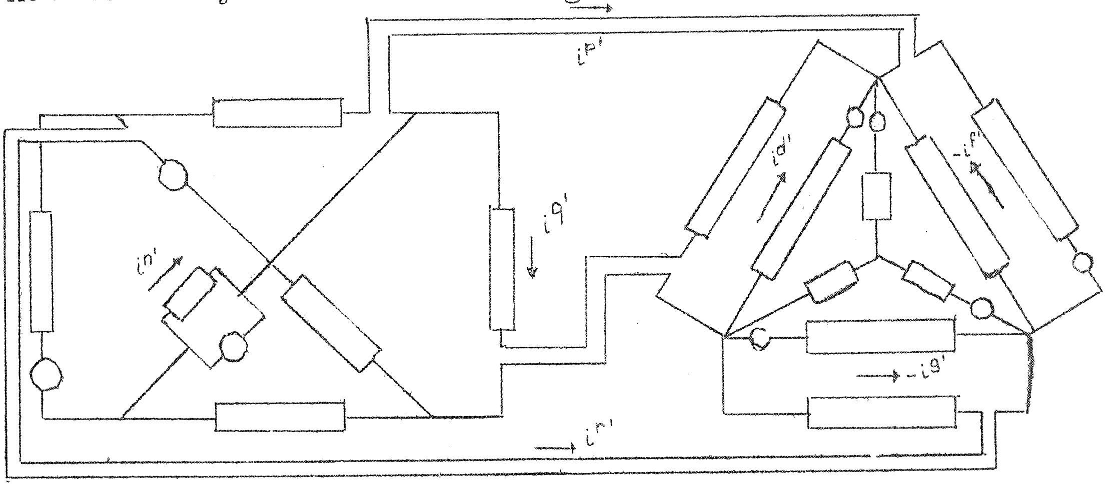
II

We hebben dus: $Z_I = \left\| \begin{matrix} Z_{mn} \ldots Z_{mk} \\ \\ Z_{km} \ldots Z_{mm} \end{matrix} \right\|$ en $Z_{II} = \left\| \begin{matrix} Z_{aa} \ldots Z_{ag} \\ \\ Z_{ga} \ldots Z_{gg} \end{matrix} \right\|$

Deze twee netwerken beschouwen we als het primitieve systeem van een netwerk, waarvan de impedantiematrix gelijk is aan:

$$Z = \left\| \begin{matrix} Z_I & 0 \\ & \\ 0 & Z_{II} \end{matrix} \right\|$$

Het te analyseren netwerk volgt hieronder



Om van het primitieve netwerk af te komen voeren we een transformatie uit. De transformatiematrix C wordt weer bepaald uit het verband wat er bestaat tussen de oude en nieuwe stromen.

$$\begin{aligned} i^m &= -i^{r'} \\ i^n &= i^{n'} \\ i^h &= i^{p'} \\ i^k &= i^{q'} \\ i^a &= i^{q'} \\ i^b &= i^{p'} \\ i^c &= -i^{r'} \\ i^d &= i^{d'} \\ i^f &= i^{f'} \\ i^g &= i^{g'} \end{aligned} \qquad \text{Dit geeft voor } C = \left\| \begin{matrix} & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

De nieuwe impedantiematrix wordt dan:

$$\bar{Z}' = \bar{C}_t \bar{Z} \bar{C}$$

Hoe kan dit principe gebruikt worden om randwaardeproblemen op te lossen? De gang van zaken is deze: men vervangt de partiele of gewone diff. vergelijking door een netwerk, terwijl de randwaarden worden weergegeven door opgedrukte spannings- of stroombronnen.

Gesteld dat we een mazennetwerk hebben verkregen dan geldt

$$\bar{e} = \bar{Z}\,\bar{i}$$

De spanningsvector en de impedantiematrix zijn gegeven, terwijl de stroomvector bepaald moet worden. Het netwerk wordt in een aantal stukken geknipt.
Dat wil dus zeggen dat voor de kleine netwerken een aantal lineaire vergelijkingen opgelost moet worden. Met behulp van de transformatiematrix worden de stukken weer verenigd.
Als voorbeeld beschouwen we de eenvoudige gewone differentiaalvergelijking

$y = y''$ met als randvoorwaarden $y(0) = e_0$, $y(1,1) = e_9$

e_0 en e_9 zijn gegeven grootheden.
Gevraagd de oplossing van de diff.verg. die aan de randvoorwaarden voldoet in een bepaalde numerieke precisie
We verdelen $[0,1]$ in een aantal aequidistante intervallen van de lengte w. Allereerst grijpen we terug op een formule uit de numerieke wiskunde nl.:

$$y = \iint y'' = \delta^{-2} Q + \frac{1}{12} Q - \frac{1}{240} \delta^2 Q + \ldots\ldots$$

waarin $Q = w^2 y''$ en w = intervallengte en bovendien nog δ de differentie-operator.
Indien $\delta^4 Q$ klein is, is in eerste numerieke benadering

$$y = \delta^{-2} Q + \frac{1}{12} Q - \frac{1}{240} \delta^2 Q$$

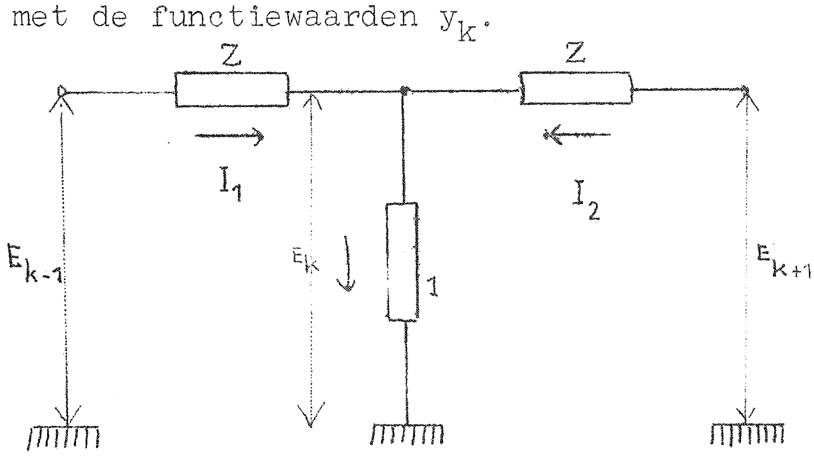
We passen op beide leden de operator δ^2 toe en vinden:

$$\delta^2 y = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q - \frac{1}{240} \delta^4 Q$$

Na uitschrijving vinden we:

$$y_{k+1} - y_k \left[2 + w^2 + \frac{1}{12} w^4\right] + y_{k-1} = 0$$

Stellen we nog $Z = w^2 + \frac{1}{12} w^4$ dan is eenvoudig na te gaan dat de spanningen ter plaatse k in het volgende netwerk overeenkomen met de functiewaarden y_k.



Immers voor deze sectie geldt:

$$E_{k-1} = I_1 Z + E_k \qquad \text{en} \quad I_1 + I_2 = E_k$$
$$E_{k+1} = I_2 Z + E_k$$

Eliminatie van I_1 en I_2 levert

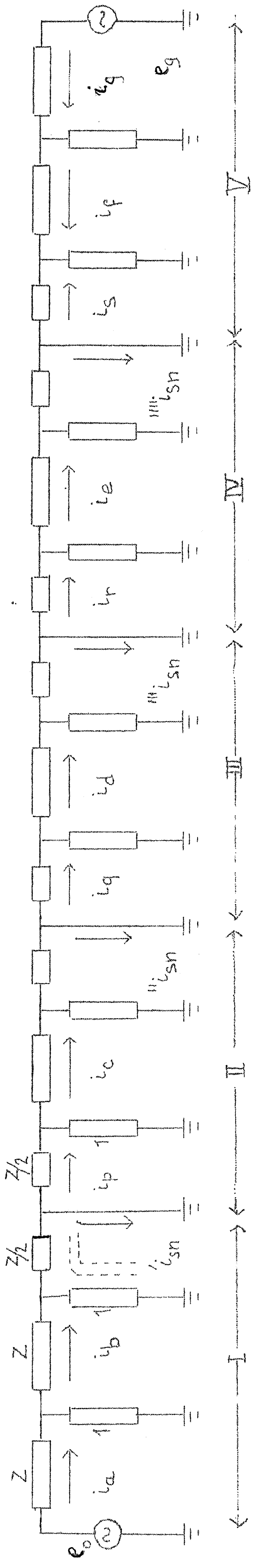
$$E_{k+1} - E_k\,[2 + Z] + E_{k-1} = 0.$$

Indien we w = 0,1 kiezen hebben we voor het gehele randwaardenprobleem het volgende netwerk:

De spanningsbronnen in het netwerk zijn dus gegeven t.w. e_0 en e_9 evenals de impedanties. De stromen in de verschillende takken zijn onbekend.

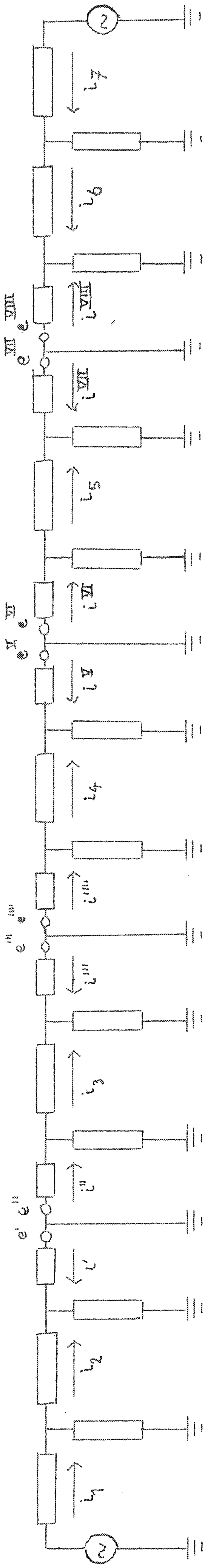
<u>Oplossing met behulp van „KRON".</u>

We tekenen dit netwerk met stroomrichtingen en brengen een aantal extra verbindingen aan, bovendien geven we de toestand weer voor en na de transformatie. (fig. p en q).



e₀
Z
Z
Z/2
Z/2
i a
i b
'i sn
i p
i c
''i sn
i q
i d
'''i sn
i r
i e
''''i sn
i s
i f
i g
e g
I
II
III
IV
V

fig. Q



i 1
i 2
i'
e' e''
i''
i 3
i'''
e''' e''''
i''''
i 4
i V
e V e VI
i VI
i 5
i VII
e VII e VIII
i VIII
i 6
i 7

fig. P

We merken op dat wanneer $'i_{sn} = \ldots ''''i_{sn} = 0$ het oude netwerk weer verkregen wordt. We voegen dan nog de spanningsbronnen e,'e'' enz. in en constateren dat we 5 afzonderlijke netwerken hebben verkregen door de kortsluitingen die we aangebracht hebben.

De secties I en V zijn aequivalent evenals II, III en IV.

Voor Sectie I geldt:

$$\begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ e' \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+z & -1 & 0 \\ -1 & 2+z & 1 \\ 0 & 1 & 1+\frac{z}{2} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i' \end{bmatrix}$$

Voor de inverse vergelijking stellen we

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i' \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ e' \end{bmatrix}$$

Voor Sectie II geldt:

$$\begin{bmatrix} e'' \\ 0 \\ e''' \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\frac{z}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2+z & 1 \\ 0 & 1 & 1+\frac{z}{2} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} i'' \\ i_3 \\ i''' \end{bmatrix}$$

en voor de oplossing hiervan:

$$\begin{bmatrix} i'' \\ i_3 \\ i''' \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 'y_{11} & 'y_{12} & 'y_{13} \\ 'y_{21} & 'y_{22} & 'y_{23} \\ 'y_{31} & 'y_{32} & 'y_{33} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} e'' \\ 0 \\ e''' \end{bmatrix}$$

De matrix C die de transformatie van P naar Q beschrijft wordt gevonden uit

$$I_p = CI_Q \quad \text{en} \quad I_Q = C^{-1}I_p$$

We zien direct dat een en ander wordt weergegeven door het volgende:

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			i_a	i_b	i_p	i_c	i_q	i_d	i_r	i_e	i_s	i_f	i_g	$'i_{sn}$	$''i_{sn}$	$'''i_{sn}$	$''''i_{sn}$
1	i_1		1														
2	i_2			1													
3	i'				-1									-1			
4	i''				1												
5	i_3					1											
6	i'''						-1								-1		
7	i''''	=					1										
8	i_4							1									
9	i^{V}								-1							-1	
10	i^{VI}								1								
11	i_5									1							
12	i^{VII}										-1						-1
13	i_7												1				
14	i_6											1					
15	i^{VIII}										1						

	i_1	i_2	i'_3	i''	i_3	i'''	i''''	i_4	i^{V}	i^{VI}	i_5	i^{VII}	i_7	i_6	i^{VIII}
i_a =	1														
i_b		1													
i_p				1											
i_c					1										
i_q							1								
i_d								1							
i_r										1					
i_e											1				
i_s															1
i_f														1	
i_g													1		
i'_{sn}			-1	-1											
i''_{sn}						-1	-1								
i'''_{sn}									-1	-1					
i''''_{sn}												-1			-1

De admittantiematrix van het primitieve systeem: (P) is

$$Z = \begin{Vmatrix} y & & & & & \\ & 'y & & & 0 & \\ & & 'y & & & \\ & & & 'y & & \\ & 0 & & & 'y & \\ & & & & & y \end{Vmatrix}$$

De rest volgt door eenvoudigweg de formules toe te passen

$$C_t \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ e' \\ e'' \\ 0 \\ e''' \\ e'''' \\ 0 \\ e^{V} \\ e^{VI} \\ 0 \\ e^{VII} \\ e^{9} \\ 0 \\ e^{VIII} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ e' - e'' \\ 0 \\ e''' - e'''' \\ 0 \\ e^{V} - e^{VI} \\ 0 \\ e^{VII} - e^{VIII} \\ 0 \\ e_9 \\ e' \\ e''' \\ e^{V} \\ e^{VII} \end{bmatrix}$$

De nieuwe admittantiematrix is derhalve

$$y' = c^{-1} y c_t^{-1}$$

terwijl $i' = y'e'$

Stellen we bovendien nog $'i_{sn} = 0 = \ldots = {''''}i_{sn}$ en $e' = e'', \ldots e^{VII} = e^{VIII}$
dan volgt tenslotte

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \hline \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ \vdots \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\| \begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{21} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array} \right\| \begin{bmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_9 \\ \hline e' \\ e''' \\ e^{V} \\ e^{VII} \end{bmatrix}$$

vervolgens stellen we nog

$$E_1 = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_9 \end{bmatrix} \qquad \text{en } E_2 = \begin{bmatrix} e' \\ e''' \\ e^{V} \\ e^{VII} \end{bmatrix}$$

We kunnen hieruit 2 vergelijkingen destilleren:

$$I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{21} E_2$$

en $$I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2$$

De eerste vergelijking is met behulp van de tweede direct anders te schrijven:

$$I_1 = [\,Y_{11} - Y_{21} \cdot Y_{22}^{-1} Y_{21}\,] E_1$$

en daarmee is het probleem opgelost

Literatuur:

KRON, G — Tensor Analysis of Networks

LE CORBEILLER, P — Matrix Analysis of electric networks

KRON, G — Numerical solution of Ordinary and partial differential equations by means of equivalent circuits

KRON, G — Network analyzer solution of the equivalent circuits for elastic structures

KRON, G — Numerical and network-analyzer solution of the equivalent circuits for the elastic field

KRON, G — Equivalent circuits for the hunting of electrical machinery

KRON, G Equivalent circuits for oscillating systems and the Riemann-Christoffel curvature tensor

KRON, G A set of principles to interconnect the solutions of physical systems.