STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 001

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Mej. dra. A.B. de Miranda

24 februari 1962

Een klasse van topologische halfgroepen in de E^n.

1962

Een klasse van topologische halfgroepen in de E^n.

§ 1 Inleiding

Een topologische halfgroep is een ruimte S, tezamen met een continue afbeelding f van $S \times S$ in S, met

1°. S is een Hausdorff-ruimte

2°. f is associatief d.w.z. als $xy=f(x,y)$ dan $(xy)z=x(yz)$.

Uit de theorie van de topologische groepen is bekend dat als G een locaal compacte samenhangende 1-dimensionale groep is, die niet compact is, dan is G topologisch isomorf met de additieve groep van de reële getallen. Is G compact, dan is G de cirkelgroep of de inverse limiet van cirkelgroepen.
In analogie hiermee kunnen we ons nu de vraag stellen de structuur van alle locaal compacte samenhangende 1-dimensionale halfgroepen te bepalen.
Het probleem is, zoals hier boven gesteld, zelfs als we locaal compact door compact vervangen, veel te gecompliceerd en er zijn nog maar enkele stappen gedaan tot de oplossing hiervan.
We zullen ons dus maar eerst bepalen tot de eenvoudigste samenhangende compacte 1-dimensionale ruimte, het gesloten eenheidsinterval.
We zullen thans enige resultaten vermelden uit de theorie van de topologische halfgroepen, waarvan we in het nu volgende gebruik zullen maken.

1°) De verzameling van alle idempotente elementen $E = \{x \mid x^2=x,\ x \in S\}$ in een topologische halfgroep S is gesloten. Is S compact, dan is $E \neq \emptyset$.

2°) Een ideaal A van S is een niet lege verzameling van S met $AS \subset A$ en $SA \subset A$.
Als S compact is en J(A) is de vereniging van alle idealen van S bevat in A, dan is J(A) open als A open is.

3°) Zij e een idempotent uit S, dan zullen we met H(e) de maximale ondergroep van S aangeven, die e bevat.
Als S compact is, dan is H(e) gesloten en een topologische

groep.

4°) Als S samenhangend is en S bevat een linkseenheid, dan is ieder ideaal van S samenhangend.

5°) Stel S is compact, dan bevat S een kleinste ideaal K. K heet de kern van S.
K is gesloten en $K = \bigcup_{e} \{H(e) \mid e \in E \cap K\}$.

6°) Zij S compact en $\Gamma(x) = \overline{\{x, x^2, x^3, \ldots\}}$, dan bevat $\Gamma(x)$ precies één idempotent e en $\bigcap_{n=1}^{\infty} S\, x^n = Se$ met $e \in \Gamma(x)$.

§ 2 I-halfgroepen

Definitie: Een I-halfgroep is een halfgroep op een gesloten interval $[a,b]$, waarbij a optreedt als nulelement van de halfgroep en b als éénheidselement.
Voorbeelden van I-halfgroepen:

1° $J_1 = [0,1]$ met de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen.

2° $J_2 = [-\frac{1}{2}, 1]$ met de vermenigvuldiging $x \circ y = \max(\frac{1}{2}, x\, y)$.

3° $J_3 = [0,1]$ met de vermenigvuldiging $x \circ y = \min(x,y)$.

Lemma 1: Als J een I-halfgroep is, $J = [0,1]$ dan is
$Jx = xJ = [0,x]$ voor alle $x \in J$.

Bewijs:
Daar J samenhangend is en 0 en x bevat zijn in xJ en Jx, geldt $[0,x] \subset Jx$ $[0,x] \subset xJ$.
Zij nu A_x de vereniging van alle idealen bevat in $[0,x)$, dan is A_x open en $x \in \bar{A}_x$, $\bar{A}_x$ een ideaal.
Dus $J\,x \subset J\bar{A}_x \subset \bar{A}_x \subset [0,x]$ Evenzo $xJ \subset [0,x]$.
Dus $Jx = xJ = [0,x]$.

Stelling 1:
Stel dat J een I-halfgroep is en dat J geen andere idempotenten bevat dan 0 en 1. Als J geen nilpotent elementen bezit, dan is J iseomorf met J_1.

Bewijs:

Zij $f_n: S \to S$. $f_n(x)=x^n$ $(n=1,2,\ldots)$.

Daar f_n continu is en $0,1 \in f_n(S)$, is f_n een afbeelding op.

Iedere $x \in S$ heeft dus een n^{de} machtswortel.

Als $x \neq 0$, dan heeft x een éénduidig bepaalde vierkantswortel.

Stel n.l. dat $c^2=d^2=x$ en $c < d$.

Dan is volgens lemma 1 $c=ad=db$, $a,b \neq 1,0$. Daar $a(xb)=ad^2b=c^2=x$, is $x \leq xb$. Volgens lemma 1 is $xb \leq x$, dus $x=xb \Longrightarrow x=xb^n$ $(n=1,2,\ldots)$ $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Sb^n=Se$ met $e \in \Gamma(b)$.

Daar $b \neq 1$ en J geen andere idempotenten bevat dan 0 en 1, is $e=0$ en dus $x=0$, tegenspraak.

Verder geldt als $xy=xz \neq 0$, dan $y=z$. Immers stel $y < z$, dan is er een w met $y=zw$.

$xy=xzw=xyw \Longrightarrow xy=(xy)w^n$ $(n=1,2,\ldots)$ Hieruit volgt dat $xy=0$, hetgeen een tegenspraak is.

Definieer nu $$x^{\frac{p}{2^q}}=\left(x^{\frac{1}{2^q}}\right)^p$$

en stel voor vaste $x \neq 0,1$,

$$D=\{x^r \mid r \text{ positief diadisch rationaal}\}.$$

We zullen nu bewijzen dat $x^r < x^s$ als $r > s$. Uit lemma 1 volgt dat $x^r \leq x^s$ als $r > s$. Stel $x^r=x^s$, dan $x^{r-s}=1$, tegenspraak.

D is een abelse deelhalfgroep van J en $\bar{D}=J$. Stel n.l. $\bar{D} \neq J$, dan is er een open interval $P \subset J \setminus \bar{D}$, $P=(a,b)$ en $b \in \bar{D}$.

Nu geldt, daar $x^{\frac{1}{2^n}} \to 1$, $x^{\frac{1}{2^n}}b \to b$ en $x^{\frac{1}{2^n}}b \leq b$. Als $x^{\frac{1}{2^n}}b=b$, dan is $x^{\frac{1}{2^n}}=1$, tegenspraak. Als $x^{\frac{1}{2^n}}b<b$, dan voor voldoend grote n_o $x^{\frac{1}{2^{n_o}}}b \in P$. Daar $x^{\frac{1}{2^{n_o}}} \in D$ en $b \in \bar{D}$, ligt ook $x^{\frac{1}{2^{n_o}}}b \in \bar{D}$, hetgeen een tegenspraak is. Dus $\bar{D}=J$

Definieer nu $g: D \to J_1$ door $g(x^r)=(\frac{1}{2})^r$. $g(D)$ is dicht in J_1, g is 1-1 duidig en continu, en laat de orde invariant, dus kan g voortgezet worden tot een isomorfie van J op J_1.

Stelling 2

Als J een I-halfgroep is, met geen andere idempotenten dan 0 en 1, en minstens één nilpotent element, dan J iseomorf met J_2.

Bewijs:

Zij $d=\sup\{x \mid x^2=0\}$. Dan $d \neq 0$.
Immers stel y nilpotent, $y^n=0$ en $y^{n-1} \neq 0$, $n > 1$ dan $(y^{n-1})^2=0$ dus $d \geq y^{n-1}$.
Als $r < s$ positief diadisch rationaal, en $d^r \neq 0$, dan $d^r > d^s$. (zie stelling 1).
Stel nu $D=\{d^r \mid r \text{ positief diadisch rationaal}\}$. Dan $\overline{D} = J$.
We definieren nu $f: D \to J_2$, door $f(d^r)=(\sqrt{\tfrac{1}{2}})^r$. Dan is $f(D)$ dicht in J_2, f is 1-1 duidig, continu en laat de orde invariant. f kan dus voortgezet worden tot een iseomorfie van J op J_2.

Stelling 3

Zij J een I-halfgroep, $J=[0,1]$. Dan is E gesloten en als $x,y \in E$, dan $x \circ y=\min(x,y)$.
Het complement van E is de vereniging van disjuncte intervallen. Zij P de afsluiting van één van deze intervallen, dan is P iseomorf met J_1 of J_2
Als $x \in P$, $y \notin P$, dan $x \circ y=y \circ x=\min(x,y)$.

Bewijs:

Zij $e,f \in E$ en $x,y \in [e,f]$. Dan is volgens lemma 1
$e^2=e \leq xy \leq f^2=f$. $[e,f]$ is dus een deelhalfgroep van J.
Als $x > e$, dan is $e \geq e\,x \geq e^2=e$. Dus e is een nulelement voor de deelhalfgroep $[e,1]$.
Daar $fJ=[0,f]$, geldt voor $z \in [0,f]$, $z=fa$.
Dus $fz=f.fa=fa=z$. f is dus een eenheidselement voor $[0,f]$.
$[e,f]$ is dus een I-halfgroep. Als e een idempotent is en $x \leq e \leq y$, dan geldt $xy=(xe)y=x(ey)=xe=x$.

§ 3 Lineaire uitbreidingen

Zij S een I-halfgroep $[0,1]$ en S' een halfgroep op het interval $[a,b]$ met a en b idempotent.
Zij φ een continue homomorfe afbeelding van S in S' met $\varphi(0)=b$
$T=S' \cup S$ wordt tot een topologische halfgroep als we de elementen 0 en b identificeren en als we definieren voor $x,y \in S$ en $x',y' \in S'$.

$$x \circ y = xy$$
$$x \circ y' = \varphi(x)y'$$
$$x' \circ y = x'\varphi(y)$$
$$x' \circ y' = x'y' \quad .$$

T heet een rechts lineaire uitbreiding van S' met S. Zonder bewijs vermelden wij de volgende stellingen.

Stelling 1

Zij T een commutatieve halfgroep $[a,b]$ met een nulelement en idempotente eindpunten. Stel $a\ b \geqslant 0$. Dan is $T=S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

$S_1 = [a,o]$ is een halfgroep met eenheidselement a en nulelement

$S_2 = [o,ab]$ is een halfgroep met eenheidselement ab en nulelement o

$S_3 = [ab,b]$ is een halfgroep met eenheidselement b en nulelement ab.

T kan nu verkregen worden door eerst S_1 met S_2 uit te breiden tot een halfgroep T', door de afbeelding $\varphi(x)=ax=\lambda a$, $x \in S_2$. (Als $o=ab$ dan $T'=S_1$).
Hierna wordt T' met S_3 uitgebreid door de afbeelding $\varphi(x)=ab$ voor alle $x \in S_3$. (Als $ab=b_3$ dan $T'=T$).

We zullen nu een voorbeeld geven van een niet commutatieve halfgroep op een interval $[a,b]$.
Als S een halfgroep op $[a,b]$, met idempotente eindpunten;dan is S dan en slechts dan abels als S een nulelement heeft en $ab=ba$.

Voorbeeld:

Zij S een I-halfgroep $[o,1]$ en stel $S'=[-1,o]$. $T=[-1,1]$ kan tot een topologische halfgroep gemaakt worden als we definieren

$$(\pm x)(+y) = +(xy)$$
$$(\pm x)(-y) = -(xy)$$

T heet de Janus halfgroep ("January thread") behorend bij S.

Stelling 2

Iedere niet commutatieve halfgroep $T=[a,b]$ met idempotente eindpunten en een nulelement is een 2-zijdige lineaire uitbreiding van een Janus halfgroep met 2 I-halfgroepen.

Behalve de halfgroepen op $[a,b]$ met idempotente eindpunten en een nulelement zijn door A.H. Clifford ook nog willekeurige halfgroepen op $[a,b]$ met idempotente eindpunten geclassificeerd.
Cohen en Wade hebben halfgroepen op $[a,b]$ onderzocht, waarbij b een eenheidselement is.
Wallace bewees de volgende stellingen:

A) Zij S een compacte samenhangende topologische halfgroep met eenheid en S 1-dimensionaal en homogeen, dan is S een groep.

B) Als S een compacte samenhangende, locaal samenhangende, 1-dimensionale halfgroep is met een eenheid, dan is S een "boom" of S bevat precies één topologische cirkel.

§ 4 Halfgroepen met eenheidselement op een variëteit

We zullen in deze paragraaf o.a. bewijzen dat als S een halfgroep met eenheid is op een compacte variëteit, dan is S een topologische groep. Hieruit volgt dus dat als een n-sfeer een topologische halfgroep is, dan is n=0,1 of 3.

Lemma 1 Zij Q de volle eenheidsbol in E^n en f een continue afbeelding van Q in zichzelf met $|x-f(x)| < \frac{1}{2}$ voor alle $x \in Q$. Dan is $0 \in f(Q)$.

Bewijs: zie Hurewiez-Wallman, Dimension theory.

Stelling 1

Zij S een halfgroep met eenheid u, waarbij u een Euclidische omgeving U bezit. Dan is H(u) een open deelverzameling van S en een topologische groep.

Bewijs

Identificeer U met de E^n en zij $F_\varepsilon = \{x \mid |u-x| \leq \varepsilon\}$ $F_\varepsilon \subset U$. Daar de vermenigvuldiging uniform continu is op F_ε is er een δ met

$$|x-xy| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x-yx| < \varepsilon/2 \quad \text{als} \quad |u-y| < \delta.$$

Hieruit volgt met lemma 1 dat $u \in F_\varepsilon y$ en $u \in y F_\varepsilon$, dus y heeft een inverse in F_ε. De afbeelding $y \rightarrow y^{-1}$ is dus continu en $H(u)$ een topologische groep.
Daar $H(u)$ een open verzameling bevat is $H(u)$ open in S.

Stelling 2

Als S een halfgroep met eenheid is op een compacte variëteit, dan is S een topologische groep.

Bewijs

$H(u)$ is open volgens stelling 1. Daar S compact is, is $H(u)$ gesloten en dus $H(u)=S$.

Stelling 3

Zij S een halfgroep op de E' met eenheid u en geen andere idempotenten, dan is S iseomorf met de additieve groep van de reële getallen.

Bewijs

Zij G de component van de eenheid in $H(u)$. Dan is G een open interval volgens stelling 1. G is dus iseomorf met de additieve groep van de reële getallen. Dus als $x \neq u$, dan ligt x altijd tussen u en $2x$, $x \in G$.
Stel nu $G \neq S$ en zij e een eindpunt van G. Dan is er een rij $\{x_n\}$, $x_n \in G$, met $x_n \rightarrow e$. Dan ook $2x_n \rightarrow e \Rightarrow 2e=e$, tegenspraak.

Zonder bewijs vermelden wij:

Stelling 4

Als het vlak een halfgroep S is met eenheid en geen andere idempotenten, dan is S een groep.
Het is niet bekend of S een topologische groep is als S de E^n is, $n > 2$ en S een halfgroep met eenheid, zonder andere idempotenten.

Lemma 2.

Zij S een topologische halfgroep met eenheid u, zo dat $(S \setminus H(u))^-$ compact is, dan is $S \setminus H(u)$ een ideaal.

Bewijs

Daar $H(u)$ een groep is, volgt uit $x \in H(u)$, $y \notin H(u)$, dat $xy \notin H(u)$. Stel nu $x,y \notin H(u)$ en $xy = g \in H(u)$.
Dan is $z = yg^{-1} \notin H(u)$ en $xz = u$.
Daar $z^n, x^n \notin H(u)$. Zijn $\Gamma(x)$ en $\Gamma(z)$ compact. Uit $xz=u$ volgt $x^n z^n = u$. Stel e idempotent uit $\Gamma(x)$, dan is er een deelrij $x^{n_i} \to e$ en $z^{n_i} \to w \in \Gamma(z)$. Dan $ew=u$ en $e^2 w = ew = e = u$, tegenspraak.

Stelling 5

Zij $S = [0, \infty)$ S een halfgroep met nulelement 0 en eenheid 1. Dan geldt:

1° Als S geen andere idempotente elementen bevat, dan is de vermenigvuldiging in S de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen

2° Als S een idempotent element bevat $\neq 0$, $\neq 1$, dan bevat S een idempotent e met $e < 1$, $[e,\infty)$ is een deelhalfgroep iseomorf met $[0,\infty)$ onder de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen en $[0,e]$ is een I-halfgroep.

Bewijs

1) Zij G de component van 1 in $H(1)$, dan is G een open interval. Zij e een eindpunt van G, dan is $e^2=e$, dus $e=0$. S is dus iseomorf met $[0,\infty)$ onder de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen.

2) Stel $G=(e,f)$, dan volgt uit $x_n \to e$, $x_n \in G$, dat $x_n^{-1} \to f$. Dan zou $[e,f]$ een compacte topologische groep zijn, wat onmogelijk is, dus $G=(e,\infty)$.

Daar $H(1)$ geen andere intervallen (a,b) kan bevatten met $a,b \notin H(1)$ is $G=H(1)=(e,\infty)$.

Volgens Lemma 2 is $[0,e] = S \setminus H(1)$ een ideaal, en dus is $[0,e]$ een deelhalfgroep.

Daar $[0,e]e = e[0,e] = [0,e]$ is e een eenheid voor $[0,e]$ en is $[0,e]$ een I-halfgroep.

Stelling 6

Als S een compacte samenhangende halfgroep is met eenheid en $S \subset E^n$, dan $H(u) \subset$ rand S, of S een topologische groep.

Bewijs

Zij $g \in H(u)$ en $g \notin$ rand S. Dan had g een Euclidische omgeving V. $g^{-1}V$ was dan een Euclidische omgeving van u en $H(u)$ dus zowel open als gesloten. Dus $H(u)=S$.

Stelling 7

Als een compacte samenhangende halfgroep S met een eenheid een onsplitsbaar continuum is, dan is S een groep.

Bewijs

Zij $K \neq S$, dan is er een open verzameling U met $K \subset U \subset \overline{U}$, $U \neq S$. Stel J het maximale ideaal bevat in U. Dan $K \subset J$ en J open. Als $S \setminus J=A$ samenhangend is, dan is $S=\overline{J} \cup \overline{A}$ en is S dus de vereniging van 2 echte deelcontinua. Als $S \setminus J=A \cup B$, $A \cap B= \emptyset$, A, B open, dan is $S=(A \cup \overline{J}) \cup (B \cup \overline{J})$ en S dus wederom de vereniging van 2 deelcontinua. Dus $S = K \Longrightarrow S$ een groep.

[1] A.H. Clifford Trans.Amer.Math.Soc 88 1958
[2] H.Cohen en I.Wade " " " " 88 1958
[3] W.M. Faucett Proc. Amer.Math.Soc. 6 1955
[4] P.S. Mostert en A.Shields Annals of Math. 65 1957