STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963-001

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

P.C. Baayen

26 januari 1963

Commutatieve transformatie-halfgroepen

MC
1963

ZW 1963-001.

Voordracht in de serie „Actualiteiten"
door
P.C. BAAYEN.
26 januari 1963

Commutatieve transformatie-halfgroepen.

1. Inleiding.

Zij X een niet-lege verzameling. In de verzameling X^X van alle afbeeldingen van X in zichzelf is een associatieve binaire operatie gedefinieerd , nl. de compositie van functies:

$$(f,g) \longrightarrow f \circ g;$$

daarbij is $f \circ g$ de afbeelding $X \rightarrow X$ die aan $x \in X$ toevoegt $f(g(x))$. Anders gezegd: X^X is een halfgroep t.o.v. compositie.

Zodra X ten minste twee punten bevat, is deze halfgroep X^X niet commutatief. Want als $a \in X$, $b \in X$, $a \neq b$, dan commuteert de afbeelding f die aan iedere $x \in X$ het punt a toevoegt, niet met de afbeelding g , die zodanig is dat $g(x)=b$ voor alle x.

Maar natuurlijk bevat X^X wel verschillende commutatieve deel-halfgroepen. Als bijv. f een willekeurige afbeelding $X \rightarrow X$ is, dan vormen de geïtereerde functies f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$,.. zo'n commutatieve deelhalfgroep; en algemeen brengt ieder stelsel van twee aan twee commuterende afbeeldingen van X in zichzelf een commutatieve deelhalfgroep van X^X voort.

Dergelijke commutatieve transformatie-halfgroepen zijn de laatste tijd bestudeerd door Z. HEDRLÍN en P.C. BAAYEN. Een deel van de resultaten is vastgelegd in [1], [2], [3] . Het blijkt dat de aanname dat een transformatie-halfgroep commutatief is, verschillende onverwachte consequenties heeft.

Maar eerlijkheidshalve moet opgemerkt worden dat wij de draagwijdte van deze aanname nog lang niet overzien. Dit blijkt wel uit de moeilijkheden, die een schijnbaar zo eenvoudig probleem als het zgn. "Isbell-problem" in zich bergt. Dit probleem is het volgende: "Hebben twee commuterende continue afbeeldingen van het eenheidssegment [0,1] in zichzelf altijd een gemeenschappelijk dekpunt?" (cf. Prijsvraag 1961.6 van het Wiskundig Genootschap, in [5]). Dit probleem is nog steeds onopgelost.

In deze voordracht wordt een overzicht gegeven van de inhoud van [1] en [2]. In het volgende wordt steeds aangenomen dat X een niet-lege verzameling is, dat F een <u>commutatieve halfgroep</u> is van afbeeldingen $X \to X$, <u>en dat de identieke afbeelding i tot F behoort.</u>

2. <u>Enige algemene resultaten.</u>

De kracht van de aanname van commutativiteit wordt geïllustreerd door de volgende eenvoudige stelling:

<u>Stelling 1.</u> Als F "transitief" is, dan is F een groep. (Een transformatie F heet <u>transitief</u> indien er bij iedere $x,y \in X$ een $f \in F$ bestaat met $f(x)=y$).

Stelling 1 is een gevolg van het feit dat $f(x)=g(x)$ impliceert dat $f \mid F(x) = g \mid F(x)$. Hierbij is $F(x)=\{f(x):f\in F\}$ (de <u>baan</u> van x onder F). Algemener:

<u>Stelling 2.</u> Als er een $e \in X$ bestaat zodat $F(e)=X$, dan is de toevoeging $f \to f(e)$ een 1-1-afbeelding van F op X; i.h.b. zijn dan F en X gelijkmachtig, terwijl F een <u>maximale</u> commutatieve halfgroep van transformaties $X \to X$ is.

Uit stelling 2 leidt men zonder meer generalisaties af als de volgende: als Y een deelverzameling van X is zodanig dat $F(Y)=X$, dan is er een 1-1-afbeelding van F in X^Y.

Een en ander kan"getopologiseerd" worden: Stel X is een topologische ruimte, stel F bestaat uit continue afbeeldingen en voorzie F van de zwakke topologie (de topologie geinduceerd door de producttopologie in X^X). Onder deze veronderstellingen geldt:

Stelling 3. Als $F(e)=X$ voor een $e \in X$, dan is de 1-1-afbeelding $f \to f(e)$ van F op X een topologische afbeelding.

Algemener: Als $F(Y)=X$ $(Y \subset X)$ dan is er een nette topologische afbeelding van F in X^Y.
Dit laatste maakt het aannemelijk dat het cardinaalgetal

$$p(F) = \inf \{ \text{card } Y : Y \subset X \text{ en } F(Y)=X \}$$

van belang is voor de studie van F. Deze constante is één van de zaken die in [1], hoofdstuk 2 behandeld worden.

3. Lussen.

De relatie $\leqslant$ in X, gedefinieerd door

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow (\exists f \in F)\ (x=f(y))$$

is een zwakke partiële ordening. De bijbehorende aequivalentierelatie zij aangeduid met $\mathcal{C}$:

$$x \mathcal{C} y \Longleftrightarrow x \leqslant y \text{ en } y \leqslant x.$$

De aequivalentie klasse van x geven we weer met $\mathbb{C}(x)$; hij wordt de bij x behorende lus genoemd. De lussen vormen een partieel geordende verzameling als we stellen

$$\mathbb{C}(x) \leqslant \mathbb{C}(y) \Longleftrightarrow x \leqslant y.$$

Stelling 4. $f\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(f(x))$, voor iedere $x \in X$ en $f \in F$.

Gevolg: Voor iedere lus C en iedere $f \in F$ geldt:
òf $fC \subset \mathbb{C}$, òf $C \cap fC = \emptyset$.

Voor willekeurige $A \subset X$ zij $F|A = \{ f|A : f \in F \}$, en $F \| A = F|A \cap A^A$. Uit de stellingen 1 en 4 volgt eenvoudig:

Stelling 5. $F \| C$ is een groep, voor iedere lus C.

Algemener: $F \| fC$ is een groep, voor iedere lus C en iedere $f \in F$.

Voorts geldt:

Stelling 6. De groep $F \| fgC$ is een homomorph beeld van de groep $F \| gC$.

De stellingen 5 en 6 geven vooral informatie in het geval van halfgroepen F met de eigenschap dat steeds $fC(x) = C(fx)$.

In [1] wordt bijzondere aandacht besteed aan een iets grotere klasse van halfgroepen, nl. zulke die de eigenschap $fC(x) = C(fx)$ hebben voor alle x en f zodanig dat $C(fx)$ niet minimaal is (in de partiëel geordende verzameling van alle lussen in X).

De resultaten in deze paragraaf, genomen uit hoofdstuk 3 van [1], komen voort uit gemeenschappelijke arbeid van P.C. BAAYEN en Z. HEDRLÍN; het is de bedoeling dat zij in een latere publicatie nog uitvoeriger worden behandeld.

4. Realisatie van graphen.

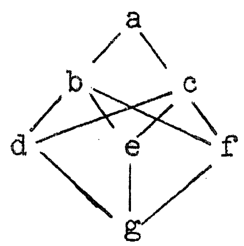
De halfgroep F induceert, zoals we zagen, een zwakke partiele ordening in X. Omgekeerd kan men de vraag stellen welke partiele ordeningen in X door halfgroepen geinduceerd kunnen worden, of, om de taal van [1] te gebruiken, door transformatie-halfgroepen gerealiseerd kunnen worden.

Een nodige voorwaarde daartoe is de volgende:

"Voor iedere x_1, $x_2 \in X$ met de eigenschap dat er een $y \in X$ bestaat met $y \geq x$ en $y \geq x_2$, bestaat er ook een $z \in X$ zodanig dat $z \leq x_1$, en $z \leq x_2$."

Maar deze voorwaarde is niet voldoende; het volgende voorbeeld (afkomstig van P.C. BAAYEN) is hiervan een illustratie.

Zij X een verzameling bestaande uit de zeven punten a, b, c, d, e, f, g, en zij de partiele ordening van X gedefinieerd als aangegeven in onderstaand diagram:



($x > y$ dan en slechts dan als x hoger dan y getekend is in het diagram.)
Dan is $(X, \leq)$ niet realiseerbaar door een commutatieve halfgroep $F \subset X^X$.

Een tegelijk nodige en voldoende voorwaarde voor realiseerbaarheid van een partiele ordening is niet bekend. Een aardige voldoende voorwaarde is de volgende verscherping van bovengenoemde voorwaarde.

"Voor iedere x_1, $x_2 \in X$ is er een $z \in X$ met
$$z = \inf(x_1, x_2)"$$

5. Dekpuntstellingen.

Een punt $x \in X$ heet een dekpunt van $f : X \to X$ indien $f(x)=x$.

Het is van belang niet-triviale voorwaarden te vinden voor een commutatieve transformatie-halfgroep $F \subset X^X$ opdat alle afbeeldingen uit F een gemeenschappelijk dekpunt hebben. Het blijkt i.h.a. dat dergelijke voorwaarden het eenvoudigst te vinden zijn indien F aan zekere maximaliteitsvoorwaarden voldoet.

De volgende stelling (van P.C.BAAYEN) geeft een nodige, en voldoende voorwaarde ingeval F een maximale groep is.

Stelling 7. Zij $F \subset X^X$ een groep, en stel F is als commutatieve groep maximaal (d.w.z. F is niet bevat in een grotere commutatieve transformatiegroep $G \subset X^X$). Dan en slechts dan hebben de afbeeldingen $f \in F$ een gemeenschappelijk dekpunt, indien F niet een maximale commutatieve halfgroep is.

De volgende stelling van Z.HEDRLÍN (zie [2]) ligt veel dieper.

Stelling 8. Zij X een topologische ruimte en zij F een commutatieve halfgroep van continue afbeeldingen $X \to X$.

De afbeeldingen $f \in F$ hebben dan en slechts dan een gemeenschappelijk dekpunt, indien er een $e \in X$ bestaat, zodanig dat $F(e)$ een compacte verzameling is die de dekpuntseigenschap heeft.

(Men zegt dat een topologische ruimte Y de dekpuntseigenschap heeft, indien iedere continue afbeelding $f: Y \to Y$ een dekpunt heeft in Y).

De voorwaarde in stelling 8 kan nog iets verzwakt worden: het is voldoende als er een $e \in X$ bestaat zodanig dat $F(e)$ compact is, terwijl iedere $f \in F$ een dekpunt heeft in $F(e)$.

Een bijzonder geval is het volgende (cf. [1])

Gevolg. Zij F een commutatieve halfgroep van continue afbeeldingen van het eenheidselement $I = [0,1]$ in zichzelf, die de identieke afbeelding i bevat. Stel er is een $e \in I$ zodanig dat $F(e)$ weer een interval is. Dan hebben alle $f \in F$ een gemeenschappelijk dekpunt.

Als toepassing moge vermeld worden dat het onderstaande resultaat van A.D. Wallace (zie [4]) ook onmiddellijk uit stelling 8 volgt:

Stelling 9. Zij G een commutatieve semitopologische halfgroep met een eenheid. Stel de topologische ruimte G is compact en heeft de dekpuntseigenschap. Dan heeft G een nulelement.

Ter toelichting: een halfgroep G heet <u>semitopologisch</u> als in G een topologie gedefinieerd is zodanig dat de afbeelding $(a,b) \to a.b$ van $G \times G$ in G continu is in elk der variabelen afzonderlijk.

[1] Z. HEDRLÍN, On commutativity of transformations. Rapport ZW 1962-015 van het Math. Centrum.

[2] " On a common fixed point of a commutative transformation semigroup of continuous mapping S. Rapport ZW . 1962-024 van het Math.Centrum.

[3] P.C.BAAYEN en Z.HEDRLÍN, Composition of transformation semigroups. To appear in CMUC 4,1 (1963).

[4] A.D. WALLACE, The structure of topological semigroups. Bulletin of the Am.Math.Society 61,2 (1955).

[5] Nieuw Archief voor wiskunde, Derde Serie, 9 (1961).