

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1949-02 *4*

Introduction to Topology

door S. Lefschetz

"Actualiteiten"

J. de Groot



1949

Rapport ZW 1949-002

VOORDRACHT ACTUALITEITEN 26 Maart 1949

door  
J. DE GROOT

Bespreking van  
INTRODUCTION TO TOPOLOGY

door  
S. LEFSCHETZ.

(Princeton University Press, 1949)  
(Princeton Mathematical Series no. 11)

INHOUD

Preface	v
Introduction, a Survey of Some Topological Concepts	3
1. Theory of Sets. Topological Spaces.	3
2. Questions Related to Curves.	5
3. Polyhedra.	8
4. Coincidences and Fixed Points.	14
5. Vector Fields.	17
6. Integration and Topology.	19
Chapter I. Basic Information about Sets, Spaces, Vectors, Groups.	
1. Questions of Notation and Terminology.	26
2. Euclidean Spaces, Metric Spaces, Topological Spaces.	28
3. Compact Spaces.	34
4. Vector Spaces.	38
5. Products of Sets, Spaces and Groups. Homotopy. Problems.	40 43
Chapter II. Two-dimensional Polyhedral Topology	
1. Elements of the Theory of Complexes. Geometric Consideration	45
2. Elements of the Theory of Complexes. Modulo Two Theory.	50
3. The Jordan Curve Theorem.	61
4. Proof of the Jordan Curve Theorem.	65
5. Some Additional Properties of Complexes.	68
6. Closed Surfaces. Generalities.	72
7. Closed Surfaces. Reduction to a Normal Form. Problems.	73 84
Chapter III. Theory of Complexes	
1. Intuitive Approach.	86
2. Simplexes and Simplicial Complexes.	87
3. Chains, Cycles, Homology Groups.	89
4. Geometric Complexes.	95
5. Calculation of the Betti Numbers. The Euler- Poincaré Characteristic.	99
6. Relation between Connectedness and Homology.	105
7. Circuits. Problems.	105 107

## Chapter IV. Transformations of Complexes. Simplicial Approximations and Related Questions

1. Set-transformations. Chain-mappings.	110
2. Derivation.	112
3. The Brouwer Fixed Point Theorem.	117
4. Simplicial Approximation.	119
5. The Brouwer Degree.	124
6. Hopf's Classification of Mappings of n-spheres on n-spheres.	132
7. Some Theorems on the Sphere.	134
Problems.	140

## Chapter V. Further Properties of Homotopy. Fixed Points. Fundamental Group. Homotopy Groups

1. Homotopy of Chain-mappings.	142
2. Homology in Polyhedra. Relation to Homotopy.	148
3. The Lefschetz Fixed Point Theorem for Polyhedra.	153
4. The Fundamental Group.	157
5. The Homotopy Groups.	170
Problems.	180

## Chapter VI. Introduction to Manifolds. Duality Theorems

1. Differentiable and Other Manifolds.	183
2. The Poincaré Duality Theorem.	188
3. Relative Homology Theory.	195
4. Relative Manifolds and Related Duality Theory (Elementary Theory). Alexander's Duality Theorem.	202
Problems.	206

Bibliography	208
--------------	-----

List of Symbols	211
-----------------	-----

Index	213
-------	-----

compactum = begrensde gesloten verzameling.  
Bij iedere collectie van eindig vele compacte  $A_1, A_2, \dots$   
 $A_n$  is een  $\epsilon > 0$  te vinden, afhankelijk van de gekozen  
collectie (het Lebesgue - getal van de collectie),  
zodat geldt : heeft een verzameling B met diameter  $< \epsilon$   
punten gemeen met een aantal verzamelingen uit de collec-  
tie, dan bezitten deze verzamelingen een niet lege  
doorsnede.

Beschouw een vierkant, octaëder of de n-dimensionale  
generalisatie K hiervan (dus topologisch een n-sfeer  $S^n$ ).  
Beschouw een barycentrische onderverdeling  $K_1$  van K.  
Lemma. Zij gegeven een barycentrische (lees : simpliciale)  
afbeelding van het complex  $K_1$  in het complex K, waarbij  
diametrale hoekpunten van  $K_1$  of diametrale hoekpunten  
van K worden afgebeeld. Dan is ieder n- simplex van K  
het beeld van een oneven aantal n-simplices uit  $K_1$  (de  
graad van de afbeelding is oneven).

Hieruit volgen de volgende antipodenstellingen.

I. Zij gegeven op de  $n$ -dim. sfeer  $S^n$   $n + 1$  gesloten verzamelingen, die ieder voor zich geen diametriaal puntenpaar bevatten, en te zamen met de bijbehorende  $n + 1$  bijbehorende diametrale verzamelingen  $S^n$  overdekken. Dan is de doorsnede der  $n + 1$  verzamelingen niet leeg.

II. (Lusternik - Schnirelmann 1930).

Wordt  $S^n$  overdekt door  $n + 1$  gesloten verzamelingen, dan bezit minstens één der verzamelingen een diametraal-puntenpaar.

III. Er bestaat geen continue afbeelding van  $S^n$  in  $S^{n-1}$ , die zonder uitzondering diametrale punten uit  $S^n$  op diametrale punten uit  $S^{n-1}$  afbeeldt.

IV. (Borsuk - Ulam 1933).

Een continue afbeelding van  $S^n$  in de  $n$ - dimensionale Euclidische ruimte beeldt minstens één paar diametraal-punten af op één enkel punt.

Zie voor dit alles : genoemd werk blz. 37, 134 - 140 en A.W. Tucker, Proceedings, Canadian Math. Congress (Montreal 1945 ), pp 285 - 309.

-----

II' Indien  $n$  gesloten verzamelingen de  $n$ -dimensionale diametrale verzamelingen de  $S^n$  overdekken, dan bezit minstens één der verzamelingen een diametraal puntenpaar.