STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-002

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Voetpuntsdriehoeken met dezelfde hoek van Brocard

G.W. Decnop

15 februari 1950

1950

Rapport Z.W., 1950-002.
15 Februari 1950.

Voordracht door G.W. Decnop in de serie

Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

Voetpuntsdriehoeken met dezelfde hoek van Brocard.

Zij ABC een gegeven driehoek. De cirkel door A en B, rakend aan BC, de cirkel door B en C rakend aan CA en de cirkel door C en A rakend aan AB gaan door één punt Ω. Voor dit punt Ω (punt van Brocard) geldt:

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega .$$

ω heet de hoek van Brocard van driehoek ABC. Toepassing van de sinusregel in de driehoeken $A\Omega B$ en $B\Omega C$ levert resp. $\Omega B = \frac{c \sin\omega}{\sin B}$ en $\Omega B = \frac{a \sin(C-\omega)}{\sin C}$, waaruit volgt: $\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$.

Op analoge wijze is een tweede punt van Brocard, Ω' te construeren waarvoor geldt:

$$\angle \Omega' AC = \angle \Omega' BA = \angle \Omega' CB = \omega.$$

De punten van Brocard zijn isogonaal verwant.
Door optelling van de drie cosinusregels

$$- a^2 + b^2 + c^2 = 2\ bc \cos A = 4\ O \operatorname{cotg} A,$$ enz. verkrijgt men nog de formule: $\operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\ O}$.

De raaklijnen, in A, B, C aan de omgeschreven cirkel (M,R) van driehoek ABC getrokken, snijden elkaar in A', B', C' en de overstaande zijden in O_a, O_b, O_c. Volgens de stelling van Pascal liggen O_a, O_b, O_c op een rechte lijn (rechte van Lemoine), zodat de driehoeken ABC en A'B'C' perspectivisch liggen. De drie lijnen AA', BB', CC' (symmedianen) gaan blijkbaar door één punt K, dat symmediaanpunt of punt van Lemoine genoemd wordt. K is isogonaal verwant met het zwaartepunt. De lijn AA' is de poollijn van O_a ten opzichte van de omgeschreven cirkel, waaruit volgt dat K de pool is van de rechte van Lemoine die de omgeschreven cirkel dus niet snijdt. De afstanden van A' tot AB en AC verhouden zich als sin C : sin B. Het symmediaanpunt K is dus het punt binnen driehoek ABC, waarvan de afstanden tot de zijden evenredig zijn met die zijden. De evenredigheidsfactor $\frac{1}{2}$ tg ω kan gevonden worden door de oppervlakten van de driehoeken ABK, BCK, CAK op te tellen.

De cirkel op MK als middellijn beschreven draagt de naam cirkel van Brocard. De middelloodlijnen van de zijden snijden deze cirkel behalve in M nog in de hoekpunten van een driehoek $A_1B_1C_1$ (eerste

driehoek van Brocard). De lijn AC_1, die door Ω moet gaan, snijdt de cirkel van Brocard nog in een punt X , zodanig gelegen dat bg KX= 2ω. Daar ditzelfde geldt voor BA_1 en CB_1 hebben we hiermee bewezen: De punten van Brocard liggen op de cirkel van Brocard en wel zodanig dat $\angle \Omega MK = \angle KM\Omega' = \omega$.
De projecties van M op de drie symmedianen vormen een driehoek $A_2B_2C_2$ (tweede driehoek van Brocard), eveneens beschreven in de cirkel van Brocard.

De meetkundige plaats der punten, waarvan de verhouding van de afstanden tot twee gegeven punten P en Q constant is, is een cirkel, ten opzichte waarvan P en Q invers liggen (cirkel van Apollonius op PQ). Onder de cirkel van Apollonius, behorende bij de zijde a, van driehoek ABC, verstaan we die cirkel van Apollonius op BC, die door A gaat. Daar bij inversie ten opzichte van deze cirkel de omgeschreven cirkel invariant is, snijdt deze de inversiecirkel rechthoekig en is O_a het middelpunt hiervan. De drie Apollonische cirkels van driehoek ABC, die hun middelpunten op de rechte van Lemoine hebben en de omgeschreven cirkel rechthoekig snijden, zijn blijkbaar coaxaal en hebben dus twee punten S_1 en S_2 (de isodynamische centra) gemeen. De bundel van alle cirkels, die de drie Apollonische cirkels rechthoekig snijden, heet de <u>cirkelbundel van Schoute</u> van driehoek ABC. S_1 en S_2 zijn de puntcirkels hiervan, de rechte van Lemoine is de machtlijn; de omgeschreven cirkel en de cirkel van Brocard behoren er toe.

De (loodrechte) projecties van een punt P op de zijden van driehoek ABC zijn de hoekpunten van de voetpuntsdriehoek van P, die met $P_aP_bP_c$ aangeduid zal worden.

Snijden PA, PB, PC de omgeschreven cirkel in de punten P'_a, P'_b, P'_c, dan is $\Delta P'_a P'_b P'_c \sim \Delta P_aP_bP_c$. De voetpuntsdriehoek van P is dus gelijkvormig met elke driehoek, die ontstaat door de hoekpunten van driehoek ABC t.o.v. P als centrum te inverteren. Ligt P op de omgeschreven cirkel, dan is de voetpuntsdriehoek van P ontaard (Simson- of Wallace-lijn van P).

Het oppervlak van de voetpuntsdriehoek van een punt P is gelijk aan $-\frac{O}{4R^2}$ m, waarin m de macht van P ten opzichte van de omgeschreven cirkel voorstelt.

Bewijs: Opp. $\Delta P_aP_bP_c = \frac{1}{2} P_cP_b . P_cP_a \sin\angle P_bP_cP_a =$

$$= \tfrac{1}{2} PA. \sin A. PB \sin B. \sin\angle PBP'_a =$$

$$= \tfrac{1}{2} PA \sin A \sin B. PP'_a \sin C =$$

$$= -\tfrac{1}{2} m. \frac{O}{2R^2} .$$

De voetpuntsdriehoek van het symmediaanpunt heeft ω tot hoek van Brocard.

Bewijs: Opp. $\Delta KK_bK_c = \frac{1}{2}. \frac{1}{4} tg^2\omega$. bc sin A = $\frac{1}{4}$ 0 $tg^2\omega$ dus

Opp. $\Delta K_aK_bK_c = \frac{3}{4}$ 0 $tg^2\omega$.

$K_bK_c{}^2 = \frac{1}{4} tg^2\omega (b^2 + c^2 + 2\ bc \cos A) = \frac{1}{4} tg^2\omega (b^2 + c^2 + 4\ 0 \cot g A)$

dus $K_bK_c{}^2 + K_cK_a{}^2 + K_aK_b{}^2 = 3\ 0\ tg\omega$.

De macht van het symmediaanpunt t.o.v. de omgeschreven cirkel is blijkbaar $m = -3R^2 tg^2\omega$, zodat $MK^2 = R^2 (1-3 tg^2\omega)$. Voor elke driehoek is dus $\omega \leqslant 30^o$; $\omega = 30^o$ alleen als de driehoek gelijkzijdig is.

Twee punten P en Q, die invers liggen ten opzichte van de omgeschreven cirkel, hebben gelijkvormige voetpuntsdriehoeken. Immers, uit

$P_bP_c : P_cP_a : P_aP_b$ = a. PA : b.PB : c.PC en

$Q_bQ_c : Q_cQ_a : Q_aQ_b$ = a. QA : b.QB : c.QC

volgt door deling het gestelde, als we opmerken dat de omgeschreven cirkel Apollonische cirkel op PQ is.

Daar voor elk punt S van de cirkel O_a van Apollonius geldt: SB : SC = AB : AC en dus $S_cS_a = S_aS_b$, hebben de isodynamische centra gelijkzijdige voetpuntsdriehoeken.

De voetpuntsdriehoek van O_a is gelijkvormig met driehoek ACB; daar A_2 en O_a invers liggen t.o.v. de omgeschreven cirkel, geldt dit ook voor de voetpuntsdriehoek van A_2.

De voetpuntsdriehoek van Ω is gelijkvormig met driehoek BCA; die van Ω' met CAB.

Stelling: Elke cirkel uit de bundel van Schoute is de meetkundige plaats van de punten, waarvan de voetpuntsdriehoek een constante hoek van Brocard φ heeft.

Er bestaat een ééneénduidige verwantschap tussen de reële punten (x,y) van het Cartesische vlak, het lichaam der complece getallen z = x + i y en de complexe punten van de affiene rechte. Door toevoeging van een punt ∞ wordt de affiene rechte tot de projectieve rechte aangevuld; ook het reële Euclidische vlak wordt nu met een punt ∞ afgesloten, waarbij het Möbius-vlak ontstaat.

Definitie dubbelverhouding van 4 punten:

$$(ABCD) = \frac{(A-C)(B-D)}{(A-D)(B-C)} .$$

Bij permutatie der 4 punten ontstaan 6 waarden

$$\eta \ , \ \frac{1}{\eta} \ , \ 1-\eta \ , \ \frac{1}{1-\eta}, \ \frac{\eta}{\eta-1} \ , \ \frac{\eta-1}{\eta} \ .$$

De groep der projectieve transformaties op de (complexe) projectieve rechte bestaat uit alle ééneenduidige transformaties, die de dubbelverhouding van 4 punten invariant laten. Het is de groep der gebroken lineaire transformaties $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, met $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. De corresponderende groep van Möbius bestaat uit alle ééneenduidige transformaties van het Möbius-vlak, die dubbelverhoudingen invariant laten en die dus analytisch worden voorgesteld door gebroken lineaire functies.

De Möbius-groep bevat alle directe gelijkvormigheidstransformaties.

Bewijs: Translatie over de vector a is de transformatie

$z' = z + a.$

Draaiing om de oorsprong over de hoek α is de transformatie $z' = z\ e^{i\alpha}$.

De vermenigvuldigingstransformatie met de oorsprong als centrum en (reële)factor k, wordt voorgesteld door

$z' = k\ z.$

De groep van Möbius wordt nu uitgebreid met alle ééneenduidige transformaties van het Möbiusvlak, die de dubbelverhouding in het toegevoegd complexe overvoeren.

De uitgebreide Möbius-groep bevat ook alle indirecte gelijkvormigheidstransformaties (want $z' = \bar{z}$ is de spiegeling in de x-as) en alle inversies (want $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ is de inversie in de eenheidscirkel).

Voor het punt $z = x + i\ y$ voeren we 4 homogene overtallige coördinaten in:

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda \\ x_1 &= \lambda x \\ x_2 &= \lambda y \\ x_3 &= \lambda(x^2+y^2), \end{aligned}$$

waartussen de relatie $x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_3 = 0$ bestaat. Een homogene lineaire vergelijking in (x_0, x_1, x_2, x_3) stelt een cirkel voor; een cirkel door het punt ∞ (0,0,0,1) is een rechte lijn en omgekeerd. Stellen wij $(x,y) = 2\ x_1 y_1 + 2\ x_2 y_2 - x_0 y_3 - x_3 y_0$ dan is

$$\overline{XY}^{\,2} = -\frac{(x,y)}{x_0\ y_0}\ .$$

Voor de dubbelverhouding η van 4 punten A,B,C,D vindt men uit $\eta = \frac{(A-C)(B-D)}{(A-D)(B-C)}$ eenvoudig:

$$|\eta|^2 = \frac{(a,c)(b,d)}{(a,d)(b,c)}$$

$$\Re(\eta) = \frac{(a,c)(b,d)+(a,d)(b,c)-(a,b)(c,d)}{2\,(a,d)(b,c)}$$

$$\Im(\eta) = \frac{-\,\det.(abcd)}{(a,d)(b,c)}\,.$$

De uitdrukking $\beta = \dfrac{2\,\det.\,(abcd)}{(a,b)(c,d)+(a,c)(b,d)+(a,d)(b,c)} = \dfrac{-\Im(\eta)}{|\eta|^2-\Re(\eta)+1}$

is een (uitgebreide) Möbius-invariant van de 4 punten A,B,C,D, alternerend in de coördinaten van de 4 punten en homogeen van de graad nul, zodat β meetkundige betekenis heeft.

Onderzoek naar de betekenis van β .

Geval I: $D=\infty$. Voer een Möbius-transformatie uit, zodat $B \to 1$, $C \to 0$, $\infty \to \infty$. (Dit is een gelijkvormigheidstransformatie, daar rechte lijnen in rechte lijnen worden overgevoerd en elke Möbius-transformatie een conforme afbeelding is). De dubbelverhouding η en de uitdrukking β zijn hierbij invariant; daar $(z\ 1\ 0\,\infty)= z$, wordt het punt A in η overgevoerd. Voor driehoek $\eta\ 1\ 0$ vindt men eenvoudig: $\mathrm{tg}\,\omega = \beta$. Dus: $\beta\,(A,B,C,\ \ ) = \mathrm{tg}\,\omega\,(\triangle ABC)$.

Geval II. $D \neq \infty$. Voer een inversie I uit met D als centrum. Dan geldt: $I(\beta) = -\beta$, $I(D)=\infty$. Stel $I(A)= D'_a$, $I(B)= D'_b$, $I(C)= D'_c$, dan is blijkbaar $\beta\,(A,B,C,D) = -\beta\,(D'_a, D'_b, D'_c\,\infty) =$
$= -\,\mathrm{tg}\,\omega\,(\triangle D'_a\, D'_b\, D'_c) = -\,\mathrm{tg}\,\omega\,(\triangle D_a\, D_b\, D_c)$.

Beschouwen we ABC als de fundamentaaldriehoek, dan is β gelijk aan het tegengestelde van de tangens van de hoek van Brocard van de voetpuntsdriehoek van D.

De meetkundige plaats van de punten, waarvan de voetpuntsdriehoek een constante hoek van Brocard φ heeft is blijkbaar de cirkel

$$2\,\det\,(abcx) + \mathrm{tg}\varphi\left\{(a,b)(c,x)+(b,c)(a,x)+(c,a)(b,x)\right\} = 0;$$

al deze cirkels vormen een bundel. Dit is de cirkelbundel van Schoute.

De 12 punten P_i, waarvan de dubbelverhouding $(ABCP_i)$ één der volgende waarden aanneemt:

$$\eta\ ,\ \frac{1}{1-\eta},\ \frac{\eta-1}{\eta},\ 1-\bar\eta\ \ \frac{1}{\bar\eta}\ ,\ \frac{\bar\eta}{\bar\eta-1} \qquad \text{(I)}$$

$$1-\eta\ ,\ \frac{1}{\eta},\ \frac{\eta}{\eta-1},\ \bar\eta\ ,\ \frac{1}{1-\bar\eta}\ ,\ \frac{\bar\eta-1}{\bar\eta} \qquad \text{(II)}$$

hebben gelijkvormige voetpuntsdriehoeken. De 2 cirkels, waarvan de één de 6 punten uit groep I en de ander de 6 punten uit groep II bevat behoren beide tot de cirkelbundel van Schoute en liggen invers ten opzichte van de omgeschreven cirkel.

Is N het middelpunt van de cirkel uit de bundel van Schoute, behorende bij de hoek van Brocard φ , dan is $\angle M\,\Omega\,N = \varphi$.