STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 002

Voordracht in de serie Actualiteiten

C. Schogt

27 januari 1951

Quaternionen en getallen van Cayley

J.V. Linnik

1951

Voordracht door C.Schogt in de serie
Actualiteiten op 27 Januari 1951.

Quaternionen en getallen van Cayley.

J.V.Linnik.

Inleiding.

De quaternionen algebra in het gebied van de reële getallen is ontdekt door de Ierse mathematicus Hamilton in October 1843.

Deze wordt gevormd door de elementen $X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ (quaternionen), waarin x_0, x_1, x_2, x_3 reële getallen zijn en de symbolen 1, i, j, k de basis van de algebra vormen. Optelling en aftrekking van twee quaternionen X en Y, vermenigvuldiging van een quaternion met een scalar argument worden uitgevoerd als bij vectoren van n componenten; vermenigvuldiging van twee quaternionen X, Y gaat volgens de gewone wetten en de volgende regels voor vermenigvuldiging van de basiseenheden:

(1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j.$

Een middel om dit te onthouden is, dat de vijfde en zesde regel uit de vierde worden verkregen door cyclische verschuiving van de symbolen. Uit (1) blijkt, dat de vermenigvuldiging van quaternionen niet commutatief is. Uit die formules is gemakkelijk de associativiteit van de vermenigvuldiging van de basiseenheden af te leiden. B.v., $(ij)k = kk = -1$; $i(jk) = ii = -1 = (ij)k$, enz. Hieruit volgt, dat in het algemeen vermenigvuldiging van quaternionen associatief is voor willekeurige quaternionen A, B, C geldt $(AB)C = A(BC)$.

Dit volgt uit de vermenigvuldigingsregels en de associativiteit van de vermenigvuldiging van de basiseenheden.

1. In de quaternionen algebra is het mogelijk een operatie uit te voeren, die aan ieder quaternion

$$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

toevoegt een quaternion

$$\bar{X} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k,$$

geconjugeerde van X genaamd.

Hiervoor is $\overline{(\bar{X})} = X$, zodat, als deze operatie op een willekeurig element tweemaal wordt toegepast, het uitgangselement weer verkregen wordt. Zo'n operatie noemt men daarom soms involutie, welke benaming is ontleend aan de projectieve meetkunde.

Het is van belang enige eigenschappen van deze involutie aan te geven:

I $\quad \overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$

Het is voldoende te bewijzen, dat dit geldt voor basiseenheden. Dit volgt nu uit (1). Analoog bewijzen we:

II $\quad X\bar{X} = \bar{X}X = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$

De quadratische vorm $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ wordt genoemd norm van van quaternion X en aangeduid Norm (X) of N(X). Klaarblijkelijk is $N(X) = 0$ dan en slechts dan, als $X = 0$. In een quaternion $X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ wordt de component x_0 genoemd reëel deel en aangeduid $\mathfrak{R}(X)$ en $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ genoemd vector deel en aangeduid $\mathcal{V}(X)$. Als bij een quaternion α, $\mathfrak{R}(\alpha) = 0$, wordt het een vector genoemd. Klaarblijkelijk geldt voor iedere vector: $\bar{\alpha} = -\alpha$, en dus:

$$\alpha^2 = -\alpha\bar{\alpha} = -\operatorname{Norm}(\alpha) \qquad (1,1)$$

We zullen veel gebruik maken van deze belangrijke gelijkheid in de quaternionen-rekening.

Als α en α_1 vectoren zijn, dan is:

$$\alpha\alpha_1 = -(\alpha\alpha_1) + [\alpha, \alpha_1] \qquad (1,2)$$

waarin (α, α_1) scalair product en $[\alpha, \alpha_1]$ vectorproduct van de vectoren α en α_1, in de zin van de gewone vectoralgebra.

2. De vergelijkingen $AX = B$ en $XA = B$ hebben steeds een eenduidige oplossing in de quaternionenalgebra, als $A \neq 0$. Voor de eerste vergelijking is de oplossing $X = \frac{\bar{A}B}{N(A)}$, voor de tweede $X = \frac{B\bar{A}}{N(A)}$.

Inderdaad, we hebben b.v. $\frac{A(\bar{A}B)}{N(A)} = \frac{(A\bar{A})B}{N(A)} = B$. Voor $B = 1$ zien we, dat bij iedere $A \neq 0$ het inverse element $\frac{\bar{A}}{N(A)}$ verkregen wordt.

We bewijzen nu een belangrijke eigenschap van de norm: voor willekeurige X en Y is:

$$N(XY) = N(X)N(Y) \qquad (2,1)$$

Inderdaad

$$N(XY) = (XY)\overline{(XY)} = XY(\bar{Y}\bar{X}) = X(Y\bar{Y})\bar{X} = N(Y)X\bar{X} = N(X)N(Y).$$

Deze eigenschap, zo eenvoudig bewezen met behulp van quaternionen houdt een belangrijke gelijkheid in, door Euler ontdekt in de 18e eeuw.

We nemen aan

$$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k; \quad Y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k,$$

en berekenen X.Y; we krijgen uit (2,1)

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) =$$

$$= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 + (x_1y_0 + x_0y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 +$$
$$+ (x_2y_0 + x_0y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_3y_0 + x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)^2 \quad (2,2)$$

Binnen de haakjes staan bilineaire vormen in x_α, y_β. Het bestaan van een dergelijke gelijkheid voor sommen van vier quadraten wordt gebruikt bij de compositie van deze vormen.

Daar iedere positieve vorm in vier veranderlijken door een substitutie met reële coëfficiënten in een som van vier quadraten getransformeerd wordt, kan men zeggen, dat in het algemeen positieve quadratische vormen in vier veranderlijke compositie toelaten. Als we in (2,2) aannemen $x_2=x_3=y_3=0$, krijgen we een nieuwe compositie-regel voor sommen van twee quadraten en dus voor positieve binaire quadratische vormen.

Natuurlijk ontstaat de vraag. hoeveel veranderlijke de quadratische vorm moet hebben om compositie toe te laten.

Hiermee stemt overeen de vraag: voor welke gehele n treedt op de gelijkheid:

$$(2,3) \qquad (x_1^2+x_2^2+ \dots +x_n^2)(y_1^2+ \dots +y_n^2) = \sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ijm} x_i x_j\Big)^2$$

met vaste reële α_{ijm}?

Deze vraag wordt beantwoord noch met behulp van quaternionen algebra, noch met de getallen van Cayley.

3. Ieder quaternion X voldoet aan de vergelijking:

$$X^2 - X(X+\bar{X}) + X\bar{X} = 0.$$

Zetten we hier

$$X + \bar{X} = 2\mathcal{R}(X) = 2x_0; \quad X\bar{X} = N(X) = n,$$

dan zien we, dat X voldoet aan de quadratische vergelijking met reële coëfficiënten

$$X^2 - 2x_0X + n = 0 \qquad (3,1)$$

In het gebied van de gewone complexe getallen heeft deze vergelijking niet meer dan twee verschillende wortels, in het gebied van de quaternionen kan ze er oneindig veel hebben. B.v. iedere vector $X = \xi i+\eta j+\zeta k$, waarin $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$, is op grond van (1,1) of (3,1) wortel van de vergelijking $X^2=-1$. Deze complicatie treedt op in het niet-commutatieve gebied.

4. Met behulp van quaternionenalgebra kunnen zeer gemakkelijk orthogonale lineaire transformaties van de 4-dim. en 3-dim. Euclidische ruimte uitgedrukt worden, zoals Cayley dit in 1854 bewees. Laat $X=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ een veranderlijk quaternion zijn, dat we zullen opvatten als vector van de 4-dim. ruimte en $P=p_0+p_1i+p_2j+p_3k$ en $Q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ twee quaternionen van de norm 1: $N(P) = N(Q) = 1$. We beschouwen

quaternion $Y=PXQ$. Zijn componenten zijn lineaire combinaties van x_0, x_1, x_2, x_3, zodat onze vergelijking een lineaire transformatie in de 4-dim. ruimte geeft, het begin van het verlaten van vaste coördinaten. Zetten wij verder

$$Y= y_0+y_1i+y_2j+y_3k,$$

dan is

$$\text{Norm }(Y) = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = N(P)N(X)N(Q) = N(X) = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Dit is dus een orthogonale transformatie. Deze bevat, zoals gemakkelijk is te zien, zes vrije parameters en verschijnt, zoals Cayley bewees, in hetzelfde algemene type bij zo'n tranformatie van de 4-dim. Euclidische ruimte. De formule

$$Y = PXQ \tag{4,1}$$

wordt toegepast in de speciale relativiteitstheorie van Einstein.

We beschouwen nu een orthogonale transformatie van de 3-dim. ruimte. Laat $\alpha=xi+yj+zk$ en $\alpha'=x'i+y'j+z'k$ 3-dim. vectoren zijn en $Q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ een willekeurige quaternion $\neq 0$. Laat α veranderlijk zijn en α' er mee verbonden door de vergelijking

$$\alpha'= Q\alpha Q^{-1} \tag{4,2}$$

voor gegeven Q. Het is gemakkelijk te zien, dat α' een reële 3-dim. vector is, want

$$\alpha' = \frac{Q\alpha\bar{Q}}{N(Q)}; \quad \bar{\alpha'} = \frac{\overline{Q\alpha\bar{Q}}}{N(Q)} = - \frac{Q\alpha\bar{Q}}{N(Q)} = - \alpha' .$$

Verder bepaalt (4,2) een lineaire transformatie van de 3-dim. ruimte, het begin van het verlaten van vaste coördinaten en is

$$N(\alpha') = x'^2+ y'^2+ z'^2 = N(\alpha) = x^2+y^2+z^2,$$

zodat dit een orthogonale transformatie is; hierin zijn 3 vrije parameters en men kan bewijzen, dat ze de algemene gedaante heeft. We zullen veel gebruik maken van (4,2) bij toepassing van de quaternionen rekening en in de theorie van de ternaire quadratische vormen.

<u>5.</u> Een quaternion $X = x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ kan geschreven worden als $X = Z_1+Z_2j$, waarin $Z_1 = x_0+x_1i$, $Z_2 = x_2+x_3i$; Z_1 en Z_2 hebben de gedaante van gewone complexe getallen en j is hieraan toegevoegd als nieuwe basiseenheid. Hiervoor is op grond van (1,1)

$$(Z_1+Z_2j)(Z_3+Z_4j) = Z_1Z_3 - Z_2\bar{Z}_4 + (Z_1Z_4 + Z_2\bar{Z}_3)j. \tag{5,1}$$

Gemakkelijk ziet men in, dat men de quaternionen kan invoeren als complexe grootheden van de vorm Z_1+Z_2j in het gebied van de complexe getallen, met de vermenigvuldigingsregel (5,1).

Met i.p.v. j een andere eenheid, b.v. i, krijgen we een analoge constructie.

Formule (5,1) kan met vrucht gebruikt worden in de quaternionen rekening.

<u>6.</u> Als een generalisatie van deze constructie beschouwen we nu complexe grootheden $Y = q+Qe$, waarin q en Q quaternionen zijn en e een

nieuwe hieraan toegevoegde eenheid en waarin we voor optelling en aftrekking en vermenigvuldiging met een scalar α de gewone regels aannemen en als vermenigvuldigingsregel

(6,1) $\quad (q+Qe)(r+Re) = qr-\bar{R}Q + (Rq + Q\bar{r})e.$

De verkregen complexe grootheden vormen een algebra met 8 eenheden:

$$1,\ e_1=i,\ e_2=j,\ e_3=k,\ e_4=e,\ e_5=ie,\ e_6=je,\ e_7=ke.$$

Deze algebra werd gevonden door Cayley in 1845. (zie L.E.Dickson, Linear Algebras, 14. Cambridge Tracts, no. 16 (1914).)

De complexe grootheden q+Qe worden getallen van Cayley genoemd. Zoals we verder zullen zien, is de algebra van Cayley niet associatief.

7. Dat de algebra van Cayley niet associatief is, kan men opmerken, als men met behulp van de regel (6,1) de producten $(e_1e_2)e_4$ en $e_1(e_2e_4)$ uitrekent. Hiervoor krijgt men:

$$(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = e_7; \quad e_1(e_2e_4) = e_1e_6 = -e_7.$$

In de algebra van Cayley is het mogelijk een involutie te bepalen door aan $X = q+Qe$ toe te voegen $\bar{X} = \bar{q}-Qe$, zodat we voor $X=\sum_{a=0}^{7} x_a e_a$ krijgen $\bar{X} = x_0 - \sum_{a=1}^{7} x_a e_a$. Hiervoor bestaan eigenschappen, geheel analoog met die, welke onder 1 voor de quaternionenalgebra aangetoond zijn:

I $\quad \overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$

II $\quad X\bar{X} = \bar{X}X = \sum_{a=0}^{7} x_a^2 = q\bar{q} + Q\bar{Q}$

We zullen ze niet uitvoerig bewijzen; ze worden gemakkelijk afgeleid uit (6,1). De uitdrukking $\sum_{a=0}^{7} x_a^2$ wordt genoemd norm van X en aangeduid door N(X) of Norm(X); x_a wordt genoemd reëel deel van X en aangeduid door $\Re(X)$, zodat $X + \bar{X} = 2\Re(X)$. Ieder getal X uit de algebra van Cayley voldoet aan de vergelijking

$$X^2 - X(X + \bar{X}) + X\bar{X} = 0 \text{ of } X^2 - 2x_0X + N(X) = 0.$$

8. We hebben gezien, dat de algebra van Cayley niet associatief is, d.w.z. in het algemeen gesproken is $(AB)C \neq A(BC)$. Er treedt echter "zwakke associativiteit" op, uitgedrukt in de formules:

$$(AB)\bar{B} = A(B\bar{B}) = A \text{ Norm } (B) \tag{8,1}$$

$$\bar{B}(BA) = (\bar{B}B)A = A \text{ Norm } (B) \tag{8,2}$$

$$(XY)(\overline{XY}) = (XY)(\bar{Y}\bar{X}) = X(Y\bar{Y})\bar{X} = (X\bar{X})(Y\bar{Y}) = N(X)N(Y)$$

of

$$N(XY) = N(X)N(Y) \tag{8,3}$$

Deze voor de algebra van Cayley belangrijke formules worden bewezen door directe toepassing van de vermenigvuldigingsregels (6,1). We bewijzen als voorbeeld (8,1). Nemen we aan, dat

$$A = q + Qe, \quad B = r + Re,$$

dan krijgen we

$$(AB)\bar{B} = [(q+Qe)(r+Re)](\bar{r}-Re) = [(qr-\bar{R}Q) + (Rq+Q\bar{r})e](\bar{r}-Re) =$$
$$= qr\bar{r}-\bar{R}Q\bar{r}+\bar{R}(Rq+Q\bar{r}) + [(-R)(qr-\bar{R}Q) + (Rq+Q\bar{r})r]e =$$
$$= (q+Qe)(\bar{r}r+R\bar{R}) = A \text{ Norm } (B).$$

We richten ons tot formule (8,3): $N(XY) = N(X)N(Y)$. Zetten we

$$X = \sum_{a=0}^{7} x_a e_a \quad ; \quad Y = \sum_{a=0}^{7} y_a e_a$$

en berekenen we met (6,1)

$$XY = \sum_{m=0}^{7} e_m \sum_{j,k=0}^{7} \alpha_{jkm} x_j y_k,$$

waarin α_{jkm} constante reële getallen zijn, dan krijgen we de gelijkheid

$$\left(\sum_{i=0}^{7} x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{7} y_i^2\right) = \sum_{m=0}^{7}\left(\sum_{j,k=0}^{7} \alpha_{jkm} x_j y_k\right)^2 \tag{8,4}$$

die de compositie van quadratische vormen met acht veranderlijken realiseert. Tenslotte zien we uit (8,1) en (8,2) dat de vergelijkingen $AX=B$ en $XA=B$ steeds oplosbaar zijn als $A \neq 0$ en als oplossing hebben $X = \frac{\bar{A}B}{N(A)}$, resp. $X = \frac{B\bar{A}}{N(A)}$. In het bijzonder heeft iedere $A \neq 0$ een invers element

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{N(A)}.$$

9. De vraag, onder 2 gesteld, hoeveel veranderlijke een quadratische vorm moet hebben om compositie toe te laten, is voor het eerst onderzocht door Hurwitz in 1898 (A.Hurwitz, Göttinger Nachrichten (1898), 309). Hij stelde vast, dat er slechts zulke quadratische vormen kunnen zijn met 1, 2, 4 en 8 veranderlijke, zodat formule (8,4) in zekere zin de laatste van de formules van een dergelijk type is. Het bewijs van Hurwitz berustte op de theorie van de matrices en stelde niet het verband vast van formules van het type (2,3) met het bestaan van hypercomplexe getallen, die zekere associatieve eigenschappen bezitten. Voor het eerst is dit verband in 1937 vastgesteld door Linnik, die de stelling van Hurwitz met behulp van niet-associative algebra's bewees[1].

(Generalisatie van een stelling van Frobenius en vaststelling van het verband met een stelling van Hurwitz over compositie van quadratische vormen; I AN, ser.Mathem. (1938) 41-52).

Hij bewees, dat de stelling van Hurwitz als resultaat optreedt van generalisatie van een stelling van Frobenius voor het speciale gebied van de quaternionen (G.Frobenius, Journ. für die reine und angew. Math. 84 (1878), 59). De stelling van Frobenius luidt: De enige associatieve algebra's over het gebied van de reële getallen, die een invers element bij ieder element, ongelijk aan nul, bezitten, zijn de quater-

---

1) In 1942 en 1946 verschenen werken van A.Albert en R.Dubish in Ann. of Math. 43 en 47, die de resultaten van Linnik opnieuw gevonden en enigszins gegeneraliseerd hebben en blijkbaar niet bekend waren met zijn werk, gepubliceerd in Izwestia AN SSSR, seria mathem. (1938), 41-52.

nionen algebra en de deelagebra's daarvan, het gebied van de complexe getallen en het gebied van de reële getallen.

In het werk van Linnik is bewezen de stelling: Van alle algebra's over het gebied van de reële getallen, waarvan ieder element aan een quadratische vergelijking met reële coëfficiënten voldoet, hebben slechts in de algebra van Cayley en de deelalgebra's daarvan betekenis en geldigheid de gelijkheden

$$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$$

voor alle elementen uit de algebra. mits $b \neq 0$. We zullen zien, dat de stellingen van Frobenius en Hurwitz uit deze stelling volgen.

10. We geven het bewijs van de zojuist geformuleerde stelling

De algebra met de voorwaarden

$$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a, \tag{10,1}$$

zullen we onbekend noemen. Met Griekse letter zullen we slechts reële getallen aanduiden. Klaarblijkelijk zijn er in de onbekende algebra geen nuldelers, daar uit $ab = 0$ volgt, als $b \neq 0$: $(ab)b^{-1} = a = 0$. We bewijzen een lemma.

Lemma 1. Als in de onbekende algebra getallen E en F bestaan, zodat E, F en 1 lineair onafhankelijk zijn en $E^2 = -\lambda^2$; $F^2 = -\mu^2$, dan is voor willekeurige ρ en τ

$$(\rho E + \tau F)^2 = -\nu^2.$$

Bewijs. We hebben:

$$(E+F)^2 = \alpha(E+F)+\beta = -\lambda^2 - \mu^2 + EF + FE,$$
$$(E-F)^2 = \alpha'(E-F)+\beta' = -\lambda^2 - \mu^2 - EF - FE.$$

Door optelling krijgen we: $\alpha + \alpha' = 0$; $\alpha - \alpha' = 0$. Dus: $\alpha = \alpha' = 0$ en $EF+FE = \beta + \lambda^2 + \mu^2$ is een reëel getal. Dan is echter ook $(\rho E + \tau F)^2$ voor willekeurige ρ, τ reëel. Als $(\rho E+\tau F)^2 = \lambda^2 > 0$, dan zouden er nuldelers optreden. Dus: $(\rho E+\tau F)^2 = -\nu^2$, negatief.

Lemma 2. Laat er in de onbekende algebra m+1 getallen 1, e_1, ..., e_{m-1}, E_m zijn, zodat .

1°. $e_1^2 = e_2^2 = \dots = e_{m-1}^2 = E_m^2 = -1$; $(e_i e_j)^2 = -\lambda_{ij}^2$ ($i \neq j$; $i,j = 1, \dots, m-1$).

2°. 1, e_1, ..., e_{m-1}, E_m, e_1E_m, ..., $e_{m-1}E_m$ onafhankelijk zijn. Dan kan men een zodanige e_m vinden, onafhankelijk van 1, e_1, ..., e_{m-1}, dat $e_m^2 = -1$ en $(e_i e_m)^2 = -\sigma_{im}^2$, reëel ($i=1, 2, \dots, m-1$).

Bewijs: Daar ieder getal van de algebra wortel van een quadratische vergelijking met reële coëfficiënten is, vindt men een reële α, zodat $(e_1E_m - \alpha)^2 = -\lambda^2$. We hebben

$$e_1E_m - \alpha = e_1(E_m + \alpha e_1).$$

De getallen e_1, E_m, 1 zijn onafhankelijk krachtens 2° en $e_1^2 = E_m^2 = -1$ krachtens 1°. Dus volgens lemma 1 kan men α_1 en α_2 vinden, zodat men, als

$$\alpha_1 E_m + \alpha_2 e_1 = E'_m,$$

krijgt

$$E'^2_m = -1 \;; \quad (e_1 E'_m)^2 = -\lambda'^2_1$$

(krachtens de voorafgaande gelijkheden).

Verder vinden we β, zodat

$$(e_2 E'_m - \beta)^2 = -\lambda'^2; \quad e_2 E'_m - \beta = e_2(E'_m + \beta e_2),$$

waarin E'_m, e_2, 1 onafhankelijk krachtens 2° en $E'^2_m = e_2^2 = -1$. Dus, volgens lemma 1 vindt men zodanige β_1 en β_2, dat men, als

$$E''_m = \beta_1 E'_m + \beta_2 e_2,$$

vindt

$$E''^2_m = -1; \quad (e_2 E''_m)^2 = -\lambda''^2_2.$$

We bewijzen, dat ook

$$(e_1 E''_m)^2 = -\lambda''^2_1$$

reëel is. We hebben

$$e_1 E''_m = \beta_1 e_1 E'_m + \beta_2 e_1 e_2$$

We bewijzen dat $e_1 E'_m$, $e_1 \cdot e_2$, 1 onafhankelijk zijn. We onderstellen

$$\nu_1 e_1 E'_m + \nu_2 e_1 e_2 + \nu_3 = e_1 Q + \nu_3 = 0, \text{ waarin } Q = \nu_1 E'_m + \nu_2 e_2.$$

In de onbekende algebra is $e_1^2 = -1$; dus $-e_1 = e_1^{-1}$; dus

$$e_1(e_1 Q + \nu_3) = (e_1 e_1)Q + \nu_3 e_1 = -Q + \nu_3 e_1 = 0,$$

of

$$-\nu_1 E'_m - \nu_2 e_2 + \nu_3 e_1 = 0; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,$$

zoals gemakkelijk blijkt uit 2°. Daar

$$(e_1 E'_m)^2 = -\lambda'^2_1; \quad (e_1 e_2)^2 = -\lambda^2_{12},$$

is nu op grond van lemma 1,

$$(e_1 E''_m)^2 = - \;\; ''^2_2.$$

Nu kiezen we, analoog met het voorafgaande, γ_1 en γ_2, zodat

$$E'''_m = \gamma_1 E''_m + \gamma_2 e_3 \;; \quad E'''^2_m = -1; \; (e_3 E'''_m)^2 = -\lambda'''^2_3,$$ en zetten deze redenering voort. Stel, we krijgen na $\nu-1$ stappen:

$$(E_m^{(\nu-1)})^2 = -1; \; (e_i E_m^{(\nu-1)})^2 = -(\lambda_i^{(\nu-1)})^2 \quad (i=1, 2, \ldots, \nu-1; \; \nu < m).$$

Dan is $E_m^{(\nu-1)}$ onafhankelijk van e_ν en 1, en volgens lemma 1 kan men ρ_1 en ρ_2 zodanig aannemen, dat men, als

$$E_m^{(\nu)} = \rho_1 E_m^{(\nu-1)} + \rho_2 e_\nu,$$

krijgt

$$(E_m^{(\nu)})^2 = -1; \quad (e_\nu E_m^{(\nu)})^2 = -(\lambda_\nu^{(\nu)})^2.$$

Voor willekeurige $i \leqslant \nu - 1$ hebben we

$$e_i E_m^{(\nu)} = \rho_1 e_i E_m^{(\nu-1)} + \rho_2 e_i e_\nu ;$$

$$(e_i e_\nu)^2 = -\lambda_{i\nu}^2 \text{ en } (e_i E_m^{(\nu-1)})^2 = -(\lambda_i^{(\nu-1)})^2.$$

Verder zijn de getallen $e_i E_m^{(\nu-1)}$, $e_i e_\nu$ en 1 onafhankelijk, wat we bewijzen als boven. Dus volgens lemma 1:
$(e_i E_m^{(\nu)})^2 = -(\lambda_i^{(\nu)})^2$ voor $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ en, volgens de keuze van $E_m^{(\nu)}$, eveneens voor $i = \nu$.

Op deze wijze vinden we na m-1 stappen $E_m^{(m-1)} = e_m$, zodat

$$e_m^2 = -1; \quad (e_i e_m)^2 = -\sigma_{im}^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1),$$

wat te bewijzen was.

<u>11.</u> <u>Lemma 3.</u> Als onder de voorwaarden van lemma 2 de getallen $1, e, \ldots, e_{m-1}$ een deelalgebra van de onbekende algebra voortbrengen, dan geldt het volgende:
<u>1°.</u> De getallen $1, e, \ldots, e_{m-1}, 1e_m, e_1 e_m, \ldots, e_{m-1} e_m$ zijn lineair onafhankelijk.
<u>2°.</u> Als $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq b$, a en b verder twee willekeurige getallen uit de 2m bovengenoemde, dan is $ab+ba = \tau_{ab}$ reëel.

<u>Bewijs:</u> Zou 1° niet gelden, dan zou $q+Qe_m = 0$ zijn, waarin q en Q getallen uit de deelalgebra, $\neq 0$. Dan zou $q = -Qe_m$, dus $Q^{-1}q = -Q^{-1}(Qe_m) = -e_m$ zijn; e_m behoort echter niet tot de deelalgebra. Dus 1° geldt. Hierna volgt 2° direct uit lemma 1.

<u>Lemma 4.</u> Onder de voorwaarden van lemma 3 hebben we:

$$e_i e_m = -e_m e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

<u>Bewijs:</u> We hebben

$$(e_i e_m)^2 = -\lambda_i^2; \quad e_m^2 = -1.$$

$1, e_m, e_i e_m$ zijn onafhankelijk volgens lemma 3. Volgens lemma 1 is dan

$$(e_i e_m + e_m)^2 = -\mu_i^2.$$

Anderzijds is

$$(e_i e_m + e_m)^2 = -\lambda_i^2 - 1 + (e_i e_m) e_m + e_m (e_i e_m).$$

Daar $e_m^{-1} = -e_m$ en volgens lemma 3, $e_i e_m = \chi_{im} - e_m e_i$, is $(e_i e_m) e_m = e_i (e_m e_m) = -e_i$; $e_m (e_i e_m) = e_m (\chi_{im} - e_m e_i) = \chi_{im} e_m + e_i$.
Door dit te substitueren in de voorafgaande gelijkheid, vinden we:

$$(e_i e_m + e_m)^2 = -\mu_i^2 = -\lambda_i^2 - 1 - e_i + e_i + \chi_{im} e_m,$$

waaruit volgt $\chi_{im} = 0$, zodat het lemma bewezen is.

<u>12.</u> <u>Lemma 5.</u> Voor willekeurige $i \leqslant m-1$ brengen de getallen 1, e_i, e_m, $e_i e_m = e_{i+m}$ een quaternionen algebra voort.

<u>Bewijs:</u> Het is gemakkelijk te verifiëren, dat deze getallen een deel-

algebra voortbrengen, b.v. $e_m(e_ie_m) = -e_m(e_me_i) = -(e_me_m)e_i = e_i$, enz. We bewijzen nu, dat $e^2_{i+m} = -1$. Volgens lemma 2 is $e^2_{i+m} = -\nu^2$. We hebben in de onbekende algebra $e^{-1}_{i+m} = -\frac{e_{i+m}}{\nu^2}$. Dan is $e_{i+m}(e_{i+m}e_i) = e^2_{i+m}e_i =$ $= -\nu^2 e_i$.

Maar

$$e_{i+m}(e_{i+m}e_i) = e_{i+m}\left[(e_ie_m)e_i\right] = -e_{i+m}\left[(e_me_i)e_i\right] =$$

$$= -e_{i+m}\left[e_m(e_ie_i)\right] = e_{i+m}e_m = -e_i.$$

Dus

$$\nu^2 = 1; \quad e^2_{i+m} = -1$$

Hierna is de associativiteit gemakkelijk te verifiëren, b.v.

$$(e_ie_m)e_{i+m} = e^2_{i+m} = -1;$$

$$e_i(e_me_{i+m}) = -e_i(e_m(e_me_i)) = e_ie_i = -1, \text{ enz.}$$

We hebben quaternionen gekregen.

13. Als de onbekende algebra een basis van n elementen bezit en $n > 2$, dan zijn er drie lineair onafhankelijke getallen 1, e_1, E_2, waarbij $e_1^2 = -1$. De getallen 1, e_1 bepalen een deelalgebra en hierbij zijn alle onderstellingen van de lemma's 2, 3, 4, 5 vervuld. Dus onze algebra bevat het getal e_2, zodat de eenheden 1, e_1, e_2, $e_1e_2 = e_3$ onafhankelijk zijn en $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$; $e_ie_j = -e_je_i$ $(i \neq j)$; $e_1e_3 = -e_2$ enz., d.w.z. bevat een deelalgebra van quaternionen. Als $n > 4$ dan is, daar de eenheden 1, e_1, e_2, e_3 een deelalgebra bepalen, volgens de lemma's 2, 3, 4, 5 een zodanige e_4 te vinden, dat 1, e_1, e_2, e_3, $1e_4$, e_1e_4, ..., e_3e_4 lineair onafhankelijk zijn en

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = (e_1e_4)^2 = \ldots = (e_3e_4)^2 = -1 \qquad (13,1)$$
$$e_ie_j = -e_je_i \quad (i,j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j).$$

We zullen bewijzen, dat het systeem, opgebouwd uit genoemde acht eenheden, algebra van Cayley is, en wel, als q, Q, r, R getallen zijn uit de quaternionenalgebra, bepaald door de eenheden 1, e_1, e_2, e_3, dat dan

$$(q+Qe_4)(r+Re_4) = qr-\bar{R}Q+(Rq+Q\bar{r})e_4 \qquad (13,2)$$

Lemma 6. We hebben $(e_ie_j)e_4 = -e_i(e_je_4)$;

$$e_4(e_ie_j) = -(e_4e_i)e_j \text{ voor } i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j.$$

Bewijs: We stellen op de lineaire vorm:

$$\mu = x_ie_i + x_je_j \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Dan is

$$\mu^2 = -x_i^2 - x_j^2,$$

waaruit volgt

$$\mu^{-1} = -\frac{\mu}{x_i^2+x_j^2}$$

Dus in de onbekende algebra hebben we voor een willekeurig getal Y van de algebra

$$(x_ie_i + x_je_j)\ [(x_ie_i + x_je_j)Y] = [Y(x_ie_i + x_je_j)]\ (x_ie_i + x_je_j) =$$
$$= -(x_i^2 + x_j^2)Y,$$

hieruit volgt door gelijkstelling van de coëfficiënten van x_ix_j:

$$e_i(e_jY) = -\ e_j(e_iY) \text{ en } (Ye_i)e_j = -(Ye_j)e_i.$$

Door in de eerste gelijkheid te zetten $i = 4$, $Y = e_u$,

$u = 1, 2, 3$, krijgen we

$$e_4(e_je_u) = -\ e_j(e_4e_u).$$

Voor $j \neq u$, $j, u = 1, 2, 3$ vinden we uit (13,1) en de eigenschappen van e_1, e_2, e_3:

$$(e_je_u)e_4 = -e_j(e_ue_4).$$

Zetten we in de tweede gelijkheid $Y=e_u$, $j=4$, dan krijgen we

$$(e_ue_i)e_4 = -(e_ue_4)e_i,$$

waaruit volgt

$$e_4(e_ue_i) = -(e_4e_u)e_i.$$

Bovendien bewijzen we, dat

$$e_i(e_je_4) = -(e_je_4)e_i \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3)$$

We hebben

$$e_i(e_je_4) = -(e_ie_j)e_4 = (e_je_i)e_4 = -(e_je_4)e_i,$$

want $1, e_1, e_2, e_3$ bepalen een deelalgebra van quaternionen. Hiermee zijn onze gelijkheden bewezen.

In het geheel krijgen we de volgende regels:

$$(13,3)\quad \begin{cases} e_i(e_je_4) = -(e_ie_j)e_4; & e_4(e_ie_j) = -(e_4e_i)e_j, \\ e_i(e_ie_4) = (e_4e_i)e_i = -e_4, & \\ e_i(e_je_4) = -(e_je_4)e_i; & e_4(e_ie_4) = e_i, \end{cases}$$
$$i \neq j;\quad i, j = 1, 2, 3.$$

We voegen hier nog 9 gelijkheden aan toe:

$$(e_ie_4)(e_je_4) = e_je_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (13,4)$$

Voor het bewijs daarvan nemen we

$$u = x_1e_4 + x_2e_ie_4;\quad i = 1, 2, 3.$$

Dan is $u^2 = -x_1^2 - x_2^2$ op grond van (13,1) en (13,3); we krijgen als in het bewijs van lemma 6, voor een willekeurige Y uit onze algebra

$$(e_ie_4)(e_4Y) = -e_4\ [(e_ie_4)Y]\ .$$

Nemen we $Y = e_j$; $j = 1, 2, 3$, $j \neq i$, dan is

$$(e_ie_4)(e_4e_j) = -e_4\ [(e_ie_4)e_j] = e_4\ [(e_4e_i)e_j] = -e_4\ [e_4(e_ie_j)] =$$
$$= e_ie_j = -e_je_i;$$

$$(e_ie_4)(e_4e_j) = -(e_ie_4)(e_je_4),$$

waaruit we (13,4) krijgen (voor $i=j$ volgt (13,4) uit(13,1)).

14. De regels (13,1), (13,3) en (13,4) zijn geheel voldoende om (13,2) te verifiëren. We rekenen b.v. uit, dat $(Qe_4)(Re_4) = -\bar{R}.Q$. We hebben

$$\left.\begin{array}{l}(e_ie_4)(e_je_4) = e_je_i = -(-e_j)e_i, \\ (1.e_4)(e_je_4) = e_j = -(-e_j).1\end{array}\right\} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Dus $(Qe_4)(e_je_4) = -(-e_j)Q$. Verder is

$$(Qe_4)(1.e_4) = -Q = (-1)Q,$$

zodat

$$(Qe_4)(Re_4) = -\bar{R}Q.$$

Analoog vinden we

$$(Qe_4)r = (Q\bar{r})e_4; \quad q(Re_4) = (Rq)e_4.$$

Op deze wijze is het genoemde systeem een algebra van Cayley. Duiden we zijn acht eenheden door 1, e_1, ..., e_7 aan, dan krijgen we

$$(14,1) \qquad \left\{\begin{array}{l} e_i^2 = -1;\ e_ie_j = -e_je_i \quad (i \neq j;\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7) \\ A(B\bar{B}) = (AB)\bar{B} = \bar{B}(BA) = A.N(B)\end{array}\right.$$

15. Laat de onbekende algebra nog een getal E bevatten, onafhankelijk van 1, e_1, ..., e_7. Op grond van de lemma's 2, 3, 4, 5, 6 en de gelijkheden (14,1), vinden we, dat er een zodanige e_8 bestaat, dat

$$e_8^2 = -1;\ e_ie_8 = -e_8e_i;\ (e_ie_8)^2 = -1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7);$$

e_8 onafhankelijk van 1, e_1, ..., e_7.
Vervangen we in lemma 6 e_4 door e_8, nemen we i.p.v. de indices 1, 2, 3 de indices 1, 2, ..., 7 en passen we (14,1) toe, dan krijgen we een stelsel formules, geheel analoog met (13,3) en (13,4), die een algebra met 16 eenheden definiëren, bestaande uit de complexe grootheden $q+Qe_8$, waarin q en Q getallen van Cayley zijn en opgebouwd uit de getallen van Cayley, zoals deze uit de quaternionen en de laatste weer uit de complexe getallen opgebouwd zijn:

$$(q+Qe_8)(r+Re_8) = qr-\bar{R}Q+(Rq+Q\bar{r})e_8 \qquad (15,1)$$

Nu kunnen we de stelling bewijzen, geformuleerd onder 9. We nemen A en B in de gevonden algebra met 16 eenheden:

$$A = q+Qe_8; \quad B = r+Re_8; \quad \bar{B} = \bar{r}-Re_8 = B^{-1}N(B);\ N(B) = r\bar{r}+R\bar{R}.$$

Dan moet wegens het onderstelde $(AB)\bar{B}$ gelijk zijn aan

$$A.N(B) = q(r\bar{r}+R\bar{R}) + Qe_8(r\bar{r}+R\bar{R}).$$

Vergelijken we de gedeelten, vrij van e_8, bij $(AB)\bar{B}$ eb $A(B\bar{B})$, dan krijgen we

$$(qr-\bar{R}Q)\bar{r} + \bar{R}(Rq+Q\bar{r}) = q(r\bar{r}+R\bar{R}).$$

Maar met het oog op (14,1) is $(qr)\bar{r} = q(r\bar{r})$; $\bar{R}(Rq) = (R\bar{R})q$. We krijgen dus:

$$q(r\bar{r}) - (\bar{R}Q)\bar{r} + (\bar{R}R)q + \bar{R}(Q\bar{r}) = q(r\bar{r}) + q(R\bar{R}),$$

waaruit volgt

$$(\bar{R}Q)\bar{r} = \bar{R}(Q\bar{r}),$$

wat onmogelijk is, daar $\bar{R}$, Q, $\bar{r}$ willkeurige getallen van Cayley kunnen zijn, terwijl de algebra van Cayley niet associatief is.

Dus kunnen de in de formulering van de stelling genoemde eigenschappen :

$$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a \text{ voor } b \neq 0;$$

$a^2 + \alpha a + \beta = 0$ voor willekeurige a (α, β reëel) slechts voorkomen in de algebra van Cayley met 8 eenheden en de deelalgebra's daarvan: met 4 eenheden de quaternionen en met 2 eenheden de gewone complexe getallen.

16. Een directe gevolgtrekking uit deze stelling is de onder 9 geformuleerde stelling van Frobenius. Als immers de algebra associatief is en elk element b, ongelijk aan nul, een invers element bezit, dan is zeker $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$, waaruit ook direct het ontbreken van nuldelers volgt.

Verder voldoet ieder element x aan een quadratische vergelijking met reële coëfficiënten. Inderdaad, als de basis van de algebra n elementen bezit, dan zijn de $n+1$ getallen x^n, x^{n-1}, ..., x, 1 lineair afhankelijk, zodat x voldoet aan een algebraïsche vergelijking van graad $\leqslant n$ met reële coëfficiënten. We ontbinden het eerste lid in lineaire em quadratische factoren met reële coëfficiënten. Wegens het ontbreken van nuldelers moet x een van deze factoren nul maken.

Dus onze algebra is algebra van Cayley of deelalgebra daarvan en wegens de associativiteit moet het zijn hetzij de deelalgebra (met 4 eenheden) van de quaternionen, hetzij (met 2 eenheden) van de complexe getallen, hetzij van de reële getallen.

17. De stelling van Hurwitz, genoemd onder 9, kan nu ook bewezen worden met behulp van niet associatieve algebra's en de verkregen stelling.

Slechts quadratische vormen met als aantal veranderlijken $n = 1, 2, 4, 8$ laten compositie toe. Zoals we weten, is dit gelijkwaardig met de volgende stelling:

Stelling. Zet men

$$N(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2; \quad N(X) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2,$$

dan kan men beweren, dat een gelijkheid

$$N(A)N(X) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j,k=0}^{n-1} \alpha_{ijk}a_jx_k\right)^2 \tag{17,1}$$

waarin α_{ijk} reële constanten, slechts mogelijk is voor $n = 1, 2, 4, 8$.

We beginnen met het bewijs van deze stelling.

We zetten

$$l_{ik} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ijk} a_j,$$

en stellen op de matrix

$$L = \left\| \begin{array}{c:cccc} l_{oo} & l_{o1} & \cdot & \cdot & \cdot \; l_{o\ n-1} \\ \hdashline l_{1o} & l_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \; l_{1\ n-1} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ l_{n-1o} & l_{n-11} & \cdots & & l_{n-1\ n-1} \end{array} \right\|$$

(de stippellijn zal later verklaard worden)

We krijgen uit (17,1)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} l_{ik} x_k \Big)^2 = N(A)N(X),$$

waaruit volgt

(17,2) $$\sum_{i=0}^{n-1} l_{ik}^2 = N(A); \qquad \sum_{i=0}^{n-1} l_{ik} l_{ij} = 0 \qquad (j \neq k)$$

Zo krijgen we, als L' de t.o.v. L getransponeerde matrix, E de eenheidsmatrix aanduidt:

$$L'L = LL' = N(A)E,$$

zodat de matrix $\frac{L}{\sqrt{N(A)}}$ orthogonaal is.

Als we verder alle elementen opschrijven van een kolom van de matrix L, laat ons zeggen de k-de:

$$l_{ik} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ijk} a_j \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

en de hiermee corresponderende matrix.

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{ook} & \alpha_{o1k} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \alpha_{o\ n-1\ k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n-1ok} & \alpha_{n-1\ 1\ k} & & \alpha_{n-1\ n-1\ k} \end{matrix} \right\|$$

opstellen, dan blijkt uit (17,2), dat deze orthogonaal is.

18. We bewijzen nu, dat we zonder de algemeenheid te verstoren L van de volgende gedaante kunnen onderstellen:

$$L = a_o E + L_1,$$

waarin L_1 niet van a_o afhangt en L_1 scheefsymmetrisch is, d.w.z.

$$L_1' = -L_1 \tag{18,1}$$

Inderdaad we hebben

$$L = P_o a_o + P_1 a_1 + \ldots + P_{n-1} a_{n-1},$$

waarin de P_m's de corresponderende matrices uit de coëfficiënten α_{ijk} zijn. Uit

$$LL' = N(A)E$$

vinden we $P_oP_o' = E$. Hieruit volgt

$$LL' = LP_o'P_oL' = N(A).E$$

of

$$(LP_o')(LP_o')' = N(A)E \qquad (18,2)$$

Met het oog hierop heeft de matrix LP_o' juist dezelfde eigenschappen, die ook L heeft, de gelijkheden van de gedaante (17,2) en (17,1). Niets verhindert ons dus de matrix L van het begin af hierdoor te vervangen. Als we verder zetten

$$M_i = P_iP_o' \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

vinden we

$$LP_o' = a_oE + a_1M_1 + \ldots + a_{n-1}M_{n-1} = a_oE + L_1,$$

waarin

$$L_1 = a_1M_1 + a_2M_2 + \ldots + a_{n-1}M_{n-1}$$

een matrix, niet afhankelijk van a_o. Verder vinden we uit (18,2)

$$(a_oE + L_1)(a_oE + L_1') = N(A)E,$$

waaruit volgt

$$L_1 + L_1' = 0; \quad L_1' = -L_1;$$

L_1 is scheefsymmetrisch. We zullen dus van het begin af aannemen, dat L de volgende gedaante heeft:

$$L = a_oE + L_1,$$

waarin L_1 de genoemde eigenschappen heeft.

We nemen nu de uiterst linkse kolom van de matrix L en stellen op de vergelijkingen:

$$l_{oo} = a_o',$$
$$l_{1o} = a_1',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$l_{n-1o} = a_{n-1}'$$

Op grond van het onder 17 gezegde zijn dit vergelijkingen in a_o, a_1, ..., a_{n-1}, waarvan de matrix orthogonaal is. Verder is $l_{oo}=a_o$ en hangen l_{1o}, l_{2o}, ..., $l_{n-1\,o}$ niet van a_o af, zodat a_1, a_2, ..., a_{n-1} slechts door a_1', a_2', ..., a_{n-1}' uitgedrukt worden, Hierna zetten we de verkregen uitdrukkingen in de minor van matrix L, omgeven door de stippellijn. Als we er aan herinneren, dat $L = a_oE + L_1$, waarin L_1 scheefsymmetrisch is en niet van a_o afhangt, zodat $l_{io} = -l_{oi}$ (i=1,2, ..., n-1), dan krijgen we met weglating van het accent bij a_i' de matrix

$$M = \left\| \begin{matrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & l_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{1\ n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n-1} & l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & & & & l_{n-1\ n-1} \end{matrix} \right\|$$

waarin de elementen buiten de hoofddiagonaal niet van a_o afhangen en hiervoor geldt:

$$l_{ij} = -l_{ji} \qquad (i \neq j).$$

Deze matrix heeft dezelfde eigenschappen als wanneer men uitgaat van $MM' = N(A)E$, omdat de veranderlijken a_i' met de oude veranderlijken door een orthogonale substitutie verbonden waren. We voeren nog in de matrix Ξ, als volgt verkregen: de eerste kolom van M wordt vermenigvuldigd met x_o, de tweede met x_1, ..., de laatste met x_{n-1}:

$$\Xi = \left\| \begin{matrix} a_o x_o & -a_1 x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} x_{n-1} \\ a_1 x_o & a_o x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & l_{1\ n-1} x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n-1} x_o & l_{n-1\ 1} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & l_{n-1\ n-1} x_{n-1} \end{matrix} \right\|$$

19. We definiëren nu een algebra op de basis $1, e_1, \dots, e_{n-1}$ door de symbolische formule

$$(a_o + a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1})(x_o + x_1 e_1 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & e_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{n-1} \end{matrix} \right\| . \Xi$$

in die zin, dat de som van de elementen van een regel van de verkregen matrix de corresponderende component van het product aanduidt. Hieruit zien we gemakkelijk, dat

$$1 e_i = e_i;$$
$$e_i 1 = e_i;$$
$$1^2 = 1.$$

We bewijzen direct, dat

$$e_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$
$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j) \qquad (19,1)$$

We duiden door $\Xi_i(a_1 x)$ de som aan van de elementen van de i-de regel van matrix Ξ. We krijgen

$$N(A)N(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \Xi_i^2(a,x).$$

Zetten we nu

$$a_o = x_o,\ a_1 = -x_1,\ \ldots,\ a_{n-1} = -x_{n-1};$$

dan krijgen we

$$(N(X))^2 = (N(X))^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \Xi_i^2 (a,x)$$

Hieruit volgt, dat voor deze a_i's

$$\Xi_i(a,x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

We zetten verder

$$a_o = x_o, \quad a_i = -x_i,$$

en voor alle overige indices:

$$a_j = -x_j = 0.$$

Dan is, op grond van het bovenvermelde

$$(x_o - x_i e_i)(x_o + x_i e_i) = x_o^2 + x_i^2.$$

Maken we dan de haakjes weg, dan komt er:

$$x_o^2.1^2 - x_o x_i e_i.1 + x_o x_i.1e_i - x_i^2 e_i^2 = x_o^2 + x_i^2.$$

Maar

$$e_i 1 = 1e_i = e_i; \quad 1^2 = 1,$$

waaruit volgt

$$x_o^2 - x_i^2 e_i^2 = x_o^2 + x_i^2; \quad e_i^2 = -1$$

Zetten we verder

$$a_i = -x_i;\ a_j = -x_j \quad (i \neq j;\ i, j \neq 0);\ a_m = x_m = 0$$

voor alle overige indices, dan vinden we

$$(-x_i e_i - x_j e_j)(x_i e_i + x_j e_j) = x_i^2 + x_j^2$$

Maken we de haakjes weg

$$-x_i^2 e_i^2 - x_i x_j e_i e_j - x_i x_j e_j e_i - x_j^2 e_j^2 = x_i^2 + x_j^2,$$

dan krijgen we, daar

$$e_i^2 = e_j^2 = -1,$$

de gelijkheid

$$-x_i x_j (e_i e_j + e_j e_i) = 0,$$

waaruit volgt

$$e_i e_j = -e_j e_i,$$

wat te bewijzen was.

20. Zij

$$X = x_o + x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1}$$

een element van onze algebra. We zetten

$$\overline{X} = x_o - x_1 e_1 - \ldots - x_{n-1} e_{n-1}$$

Dan hebben we

$$X + \bar{X} = 2x_0; \quad X\bar{X} = N(X).$$

op grond van (19,1). Dus X voldoet aan een quadratische vergelijking met reële coëfficiënten

$$X^2 - X(X+\bar{X}) + N(X) = 0$$

of

$$X^2 - 2x_0X + N(X) = 0 \qquad (20,1)$$

Verder zien we op grond van (19,1), dat

$$\overline{(AB)} = \bar{B}.\bar{A}. \qquad (20,2)$$

Als $X \neq 0$, merken we op, dat

$$X^{-1} = \frac{\bar{X}}{N(X)} \qquad (20,3)$$

We bewijzen nu, dat als $b \neq 0$ een element van deze algebra is

$$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a \qquad (20,4)$$

Hiertoe lossen we in deze algebra op de vergelijking:

$$AX = Y \qquad (A \neq 0)$$

Deze komt overeen met de lineaire vergelijkingen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_{ik}x_k = y_i$$

met de matrix

$$L = a_0E + L_1,$$

waarin L_1 scheefsymmetrisch is en niet afhangt van a_0. Hiervoor geldt:

$$LL' = N(A)E.$$

Hieruit vinden we

$$x_j = \frac{y_0l_{0j} + y_1l_{1j} + \dots + y_{n-1}l_{n-1\,j}}{N(A)}$$

Anderzijds berekenen wij de uitdrukking $\bar{A}Y$. We bepalen hiervan de j-de component. Deze zal op grond van de eigenschappen van de matrix L (voor $j \neq 0$) gelijk zijn aan

$$y_0(-a_j)-l_{j1}y_1-\dots-l_{j\,j-1}y_{j-1}+a_0y_j-l_{j\,j+1}y_{j+1}-\dots-l_{j\,n-1}y_{n-1}$$

(Hier is het van groot belang, dat $L_1' = -L_1$ en dat L_1 niet afhangt van a_0.) Op grond hiervan is $l_{ik} = -l_{ki}$ $(i \neq k)$, zodat onze uitdrukking gelijk is aan

$$y_0l_{0j} + y_1l_{1j} + \dots + y_jl_{jj} + \dots + y_{n-1}l_{n-1\,j},$$

wat overeenkomt met $x_jN(A)$. Als $j = 0$, krijgt men hetzelfde; de eerste term wordt dan $y_0(+a_0)$.

Dus de oplossing van de vergelijking

$$AX = Y$$

wordt

$$X = \frac{\bar{A}Y}{N(A)}$$

Maar

$$Y = \frac{(A\bar{A})}{N(A)}Y$$

Dus

$$\frac{1}{N(A)} A(\bar{A}Y) = \frac{1}{N(A)} (A\bar{A})Y$$

of

$$A(\bar{A}Y) = (A\bar{A})Y.$$

Hieruit vinden we

$$\overline{(\bar{A}Y)}\bar{A} = (\bar{Y}A)\bar{A} = \bar{Y}(A\bar{A}),$$

of algemeen

$$(YA)\bar{A} = Y(A\bar{A}).$$

Op grond van (20,3) volgt hieruit, dat voor $b \neq 0$

$$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$$

voor willekeurige elementen van de algebra. Verder voldoet ieder element aan de quadratische vergelijking met reële coëfficiënten (20,1). Dus volgens de door ons bewezen generalisatie van de stelling van Frobenius is dit een algebra van Cayley of deelalgebra daarvan.

Dus het getal $n = 1, 2, 4$ of 8. De stelling van Hurwitz is bewezen.