

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1954 - 002

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Prof.dr. R. Timman

10 februari

Toepassing van de conforme transformatie
op de berekening van vleugelprofielen



1954

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

10 Februari: voordracht door

Prof. Dr R. Timman

over:

Toepassing van de conforme transformatie op de berekening van vleugelprofielen.

1. Inleiding.

Wij beschouwen een functie $w = u + iv$ van de complexe variabele $z = x + iy$ en in het bijzonder het geval, dat deze functie regulier analytisch is in een zeker gebied G ; d.w.z. dat in ieder punt z van G de afgeleide $\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ bestaat en een waarde heeft, die onafhankelijk is van de richting, waarin het complexe getal Δz tot nul nadert. Het reële deel $u(x,y)$ en het imaginaire deel $v(x,y)$ van w moeten dan voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Door de functie $w = f(z)$ wordt een punt in het complexe z vlak afgebeeld op een punt in het complexe w vlak en deze afbeelding is conform, d.w.z. dat de hoek tussen twee lijnelementen in het z vlak gelijk is aan de hoek tussen de beeldelementen in het w vlak.

Immers

$$\Delta w_1 = f'(z + \Theta_1 \Delta z_1) \cdot \Delta z_1$$

$$\Delta w_2 = f'(z + \Theta_2 \Delta z_2) \cdot \Delta z_2$$

waarbij $0 < \Theta_1 < 1$ en $0 < \Theta_2 < 1$ is.

Dus is ook

$$\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \frac{f'(z + \Theta_1 \Delta z_1)}{f'(z + \Theta_2 \Delta z_2)} \cdot \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}$$

Als wij tot de limiet overgaan, vinden wij dat de twee breuken $\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}$ en

$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}$ tot dezelfde limiet naderen als $f'(z) \neq 0$ is.

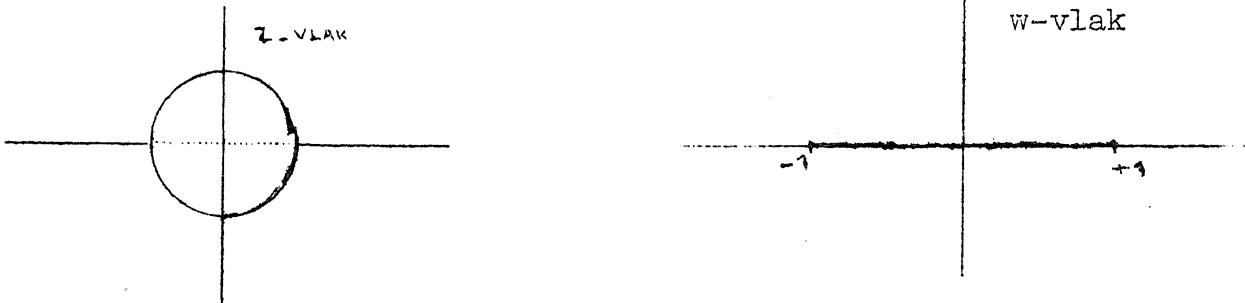
De argumenten van deze twee breuken zijn dus gelijk.

Verder kan bewezen worden, dat als $f(z)$ regulier analytisch is, haar afgeleide dit ook is.

Voorbeeld: De transformatie

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

beeldt de eenheidskirkel $z = e^{i\varphi}$ in het z vlak af op het segment $-1 \leq u \leq +1$ in het w -vlak.



Behalve in het punt $z = 0$ is de functie in ieder punt van het vlak regulier, de afgeleide is

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

en de afbeelding is conform, behalve in de punten $z = \pm 1$.

2. Potentiaal en stroomfunctie.

Wij beschouwen nu een wervelvrije stroming van een incompressibele vloeistof in twee dimensies. Voor de snelheidscomponenten $u(x,y)$ en $v(x,y)$ gelden dan de vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{continuïteitsvergelijking})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{wervelvrijheid}).$$

Hieruit volgt, dat wij u en $-v$ juist kunnen opvatten als het reële en imaginaire deel van een functie $w = u - iv$ van de complexe variabele z . Het is voor de verdere beschouwingen nuttig naast $w(z)$ de functie

$\Phi(z)$ te beschouwen, waarvan $w(z)$ de afgeleide is.

$$w(z) = u + iv = \frac{d\Phi}{dz}.$$

Stel $\Phi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, dan is

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u + iv$$

dus

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

en

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi(z) = i \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = iu + v.$$

dus

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

De functie ϕ heet de potentiaal van de stroming, ψ heet de stroomfunctie; beiden voldoen aan de vergelijking van Laplace;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

De functie $\Phi = \phi + i\psi$ heet de complexe potentiaal in de stroming. Onder een stroomlijn verstaan wij een lijn, waarvan de richting in elk punt de richting van de stroming aangeeft. Dus geldt in zo'n punt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad u dy - v dx = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0.$$

Langs een stroomlijn is dus $\psi = \text{const.}$ en dit verklaart de naam stroomfunctie.

3. Conforme transformatie van stromingsvelden.

Wij beschouwen conforme transformaties, waarbij een z vlak ($z=x+iy$) door een regulier analytische functie $\zeta = f(z)$ wordt afgebeeld op een $\zeta = \xi + i\eta$ vlak. Is nu $\Phi(\zeta)$ de complexe potentiaal van een stroming in het ζ vlak, dan ontstaat door de transformatie een complexe potentiaal $\Phi\{\zeta(z)\}$ van een stroming in het z vlak. De functie Φ is hierbij invariant, zij heeft in toegevoegde punten dezelfde waarde. In het bijzonder gaat een lijn $\psi = \text{const.}$ in het ζ vlak over in een lijn $\psi = \text{const.}$ in het z vlak, d.w.z. de stroomlijnen gaan over in stroomlijnen.

Nu de complexe snelheden!

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\Phi}{d\zeta} \cdot f'(z).$$

De verhouding van de complexe snelheden in toegevoegde punten is dus gelijk aan de afgeleide van de afbeeldingsfunctie.

4. De stroming om een cirkel.

Wij beschouwen nu in het ζ vlak de stroming om een cirkel, die de volgende eigenschappen heeft,

- Voor grote waarden van $|z|$ nadert de complexe snelheid tot de waarde $Ve^{-i\alpha}$, stelt dus een stroming voor met constante snelheid V , die een hoek α met de x as maakt.
- De complexe potentiaal $\Phi(\zeta)$ is overal buiten de cirkel regulier.
- De cirkel is een stroomlijn.

Als de cirkel de oorsprong tot middelpunt en een straal R heeft, kan men aantonen, dat de enige functie, die aan deze drie eisen voldoet, is

$$F(z) = V \left\{ e^{-i\alpha} z + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right\} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

waarbij Γ een willekeurige constante is.

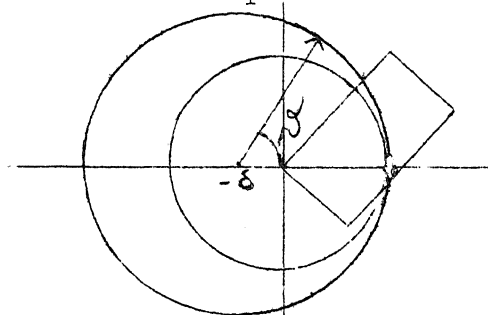
De complexe snelheid is

$$u - iv = \frac{dF}{dz} = V \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z}.$$

6. Profielen van Joukowski.

De transformatie uit het eerste voorbeeld beeldt een cirkel af op een lijnsegment. Het lijnsegment is echter een zeer sterke schematisering van een vleugelprofiel. Men zal een vleugelprofiel kunnen krijgen door een kromme te nemen, die weinig van de cirkel afwijkt en deze af te beelden met dezelfde transformatie. Dit geeft een kromme, die het lijnsegment omsluit en er ook weinig van zal afwijken.

Joukowski nam een cirkel, die de eenheidscirkel raakte. Om de gedachten te bepalen nemen wij het middelpunt op de reële as. $(-\delta, 0)$



De straal van de cirkel is dan $(1 + \delta)$ en een willekeurig punt kan worden voorgesteld door

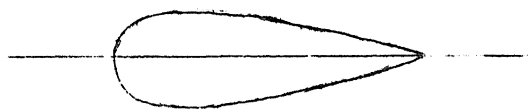
$$z = -\delta + (1 + \delta) \cdot e^{i\psi}.$$

Het beeldpunt wordt dan:

$$w = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\delta + (1 + \delta) e^{i\psi} + \frac{1}{-\delta + (1 + \delta) e^{i\psi}} \right\}.$$

Op deze wijze wordt een parameterrepresentatie van het Joukowski profiel verkregen met ψ als parameter. Met behulp van de transformatie formule kan het profiel ook gemakkelijk geconstrueerd worden.

Bepaal het inverse punt Q van een punt P van de grote cirkel t.o.v. de eenheidscirkel. Spiegel dit punt R en bepaal het midden van PR. Daar de grote cirkel in het punt $(0, 1)$ aan de eenheidscirkel raakt, zal het Joukowski profiel in het punt $(0, 1)$ aan het lijnsegment raken, d.w.z. het eindigt in een scherpe punt.



De vorm van de kromme is uit de exacte formule te bepalen. Overzichtelijker is het echter om voor kleine δ de formule voor w in een reeks te ontwikkelen.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left\{ e^{i\psi} - \delta(1 - e^{i\psi}) + \frac{1}{e^{i\psi} - \delta(1 - e^{i\psi})} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{i\psi} - \delta(1 - e^{i\psi}) + e^{-i\psi} \left\{ 1 - \delta(e^{-i\psi} - 1) \right\}^{-1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{i\psi} + e^{-i\psi} + \delta^2(e^{-3i\psi} - 2e^{-2i\psi} + e^{-i\psi}) + (\delta^3) + \dots \right] \end{aligned}$$

De eerste term geeft het lijnsegment, de hogere termen de afwijking hiervan. Splitsing in reële en imaginaire delen geeft

$$u = \cos \mathcal{N} + \frac{1}{2} \delta^2 (\cos 3\mathcal{N} - 2 \cos 2\mathcal{N} + \cos \mathcal{N}) + \dots$$

$$v = -\frac{1}{2} \delta^2 (\sin 3\mathcal{N} - 2 \sin 2\mathcal{N} + \sin \mathcal{N})$$

of wel

$$\begin{cases} u = \cos \mathcal{N} - \delta^2 \cdot \cos 2\mathcal{N} \cdot (1 - \cos \mathcal{N}) + \dots \\ v = \delta^2 \cdot \sin 2\mathcal{N} (1 - \cos \mathcal{N}) + \dots \end{cases}$$

Het profiel is blijkbaar symmetrisch t.o.v. de reële as. De grootste dikte treedt op als

$$\frac{dv}{d\mathcal{N}} = \delta^2 \{ 3 \cos 3\mathcal{N} - 4 \cos 2\mathcal{N} + \cos \mathcal{N} \} = 0$$

$$\cos \mathcal{N} = \frac{-\sqrt{13} - 1}{3}.$$

Ook hier zien wij, dat aan de achterkant de raaklijn horizontaal loopt. De stroming om het Joukowski profiel kan men berekenen door de stroming om de cirkel eerst te berekenen en deze dan conform af te beelden op de stroming om het profiel. Hierbij kan de constante Γ vastgelegd worden. Immers, volgens het voorgaande geldt voor de complexe snelheden in overeenkomstige punten

$$\frac{v \text{ profiel}}{v \text{ cirkel}} = \frac{dz}{dz} = \frac{2}{1 - \frac{1}{z^2}}$$

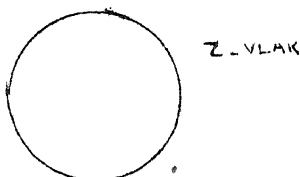
en voor $z=1$ wordt dit quotient oneindig. De snelheid op het profiel zal i.h.a. oneindig worden, tenzij Γ zodanig wordt bepaald, dat dit niet het geval is. Daartoe is nodig, dat voor $z=1$ de snelheid op de cirkel nul wordt.

7. Willekeurige vleugelprofielen.

In werkelijkheid gebruikt men geen Joukowski-profielen, maar profielen, die gunstiger eigenschappen hebben. Het is belangrijk om dergelijke profielen te kunnen ontwerpen, zo, dat de snelheidsverdeling om het profiel voorgeschreven wordt. De theorie berust op de stelling van Riemann.



Een enkelvoudig samenhangend gebied G met tenminste één randpunt kan één-éénduidig en continu worden afgebeeld door een analytische functie op het binnengebied van een cirkel. Het is voor ons doel beter om het buitengebied af te beelden op het buitengebied van de cirkel. Het blijkt, dat men hierbij nog zorgen kan, dat in het oneindige de functie nadert tot de identiteit.



Wij hebben al gezien, dat de afbeeldingsfunctie samenhangt met het quotient van de snelheden

$$\frac{v_c}{v_p} = \frac{d\Sigma}{dz} = f'(z).$$

Wij stellen nu:

$$\ln f'(z) = \sigma + i\tau,$$

dan is

$$\sigma = \operatorname{Re} \{ \ln f'(z) \} = \ln \left| \frac{v_c}{v_p} \right|$$

en

$$\tau = \operatorname{Im} \{ \ln f'(z) \} = \arg v_p - \arg v_c.$$

De functies σ en τ , die samenhangen met de verhouding van de snelheden en de helling van het profiel zijn, als functies van x en y beschouwd het reële en imaginaire deel van een analytische functie op de eenheidscirkel. Voeren wij de hoekvariabele φ in door te stellen, dat $z = e^{i\varphi}$, dan levert de integraal van Poisson

$$\sigma(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\varphi) \cot \frac{1}{2}(\Psi - \varphi) d\varphi$$

en

$$\tau(\Psi) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) \cot \frac{1}{2}(\Psi - \varphi) d\varphi$$

Met behulp van deze relaties kan bij gegeven snelheidsverdeling (als functie van φ) de functie $\tau(\varphi)$ gevonden worden en hieruit kan de vorm van het profiel worden bepaald.

Omgekeerd, als $\tau(\varphi)$ gegeven is, kan $\sigma(\varphi)$ worden bepaald; de snelheidsverdeling om een gegeven profiel kan dus ook worden berekend.