STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 002

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. G.H.A. Grosheide F. Wzn.

18 februari 1959

Het werk van C. Juel en daarmede verwante meetkundige onderzoekingen

1959

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr G.H.A. Grosheide F.Wzn

18 februari 1959

Het werk van C. Juel en daarmede verwante meetkundige onderzoekingen.

Wij beperken ons tot de meetkunde van de vlakke krommen. Uitgangspunt voor de te bespreken onderzoekingen vormen vragen als: Zijn er onder de eigenschappen, die voor krommen van de graad n worden bewezen, ook aan te wijzen, voor de aanwezigheid waarvan het niet noodzakelijk is, dat deze krommen door een algebraïsche vergelijking zijn voor te stellen en die alleen berusten op het bezit van zekere continuiteiten en het gesneden worden door een rechte in maximaal n punten?

Definitie: Een elementaire boog (e.b.) is een Jordan-boog met eindpunten A en B, die met de koorde AB een convex gebied begrenst.

Neveneisen, die wij in het betoog aan een e.b. stellen:

1. tot een e.b. behoren geen lijnstukken;
2. in elk punt P van een e.b. AB vallen de raaklijn aan de boog PA en de raaklijn aan de boog BP langs dezelfde rechte.

Nu is het begrip e.b. duaal met zich zelf.

Hebben twee e.b. AB en AC het eindpunt A gemeen en vallen de raaklijnen in A aan BA en aan CA langs dezelfde rechte, dan zijn er voor het punt A op de boog BC vier mogelijkheden:
A kan een gewoon punt, een buigpunt, een doornpunt of een snavelpunt wezen.
Deze vier gevallen zijn te onderscheiden met behulp van het begrip bewegingsrichting op een rechte en in een stralenwaaier.

Hebben twee e.b. AB en AC het eindpunt A gemeen, doch vallen de raaklijnen in A aan BA (b) en aan CA (c) niet langs dezelfde rechte, dan is A op boog BC een "hoekig" (angulair) punt.

Men heeft hier drie typen:

1. doornhoek (l snijdt CA, m snijdt BA);
2. snavelhoek (l snijdt CA, m snijdt BA niet);
3. gewone hoek (l snijdt CA niet, m snijdt BA niet).

Duaal met een boog met een hoekig punt is een boog, waartoe een lijnstuk behoort.

Definitie: Een <u>elementaire kromme</u> (e.k.) is een in het projectieve vlak gesloten kromme, die is te verkrijgen door het samenvoegen van een eindig aantal e.b.

Definitie: Het (eindige) aantal punten, dat een e.k. maximaal met een rechte gemeen heeft, heet de <u>realiteits-orde</u> of <u>orde</u> van de e.k..

Duaal met het begrip orde is de (realiteits-)klasse.

Stelling: Als een e.k. met één rechte een even (oneven) aantal snijpunten bezit, heeft zij met iedere rechte een even (oneven) aantal snijpunten.

Stelling: Het aantal buigraaklijnen van een e.k. zonder hoekige punten is even (oneven), als de orde even (oneven) is.
Opmerking: Een snavelpunt telt hierbij als buigpunt.

De laatste stelling geldt ook voor e.k. met hoekige punten, als wij een snavelhoek als buigpunt tellen.
Dit wordt bewezen met behulp van de door Juel geïntroduceerde bewerking van het afronden.

Definitie: Onder het <u>afronden</u> van de uit de e.b. BA en CA opgebouwde boog BAC met een hoekig punt A, verstaan wij het vervangen van de boog BAC door de uit drie e.b. BB_1, B_1C_1, C_1C opgebouwde boog BB_1C_1C, waarbij B_1 een punt van BA en C_1 een punt van CA is en voorts B_1 en C_1 op de vervangende boog B_1C_1 gewone punten of buigpunten zijn.

Stelling: Iedere rechte, die met de vervangende e.b. B_1C_1 twee punten (juist één punt) gemeen heeft, heeft met de boog gevormd door de beide vervangen e.b. B_1A en AC_1 twee punten (tenminste één punt) gemeen.

Stelling: Afronding verhoogt de orde van een kromme nooit.

Afronden wordt ook toegepast bij keerpunten en snavelpunten en is voorts van belang bij het onderzoek van dubbelpunten.

Correspondentiebeginsel: Is op een gesloten kromme een verwantschap (X,Y) gedefinieerd zodanig, dat met elk punt X p verschillende punten Y en met elk punt Y q verschillende punten X corresponderen en bewegen twee corresponderende punten X en Y zich in tegengestelde richtingen, dan heeft men p+q dekpunten.

Stelling: Bij een e.k. van de n-de orde met een (n-2)-voudig punt O, dat voor geen der takken een buigpunt is, bestaan er twee mogelijkheden:
Er gaan door O twee of er gaan door O geen rechten, die de kromme in een van O verschillend punt raken.

Opmerking: Een rechte door een keerpunt telt voor raaklijn.
Stelling: Een e.k. van de 4-de orde met twee dubbelpunten O_1 en O_2 van verschillend type heeft nog een derde dubbelpunt O_3.

Enige literatuur.

C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, 1914.

L. Locher-Ernst, Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, 1952.

Colloque sur les Questions de Réalité en Géométrie, 1955.