STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 002

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. H.J.A. Duparc

17 februari 1960

Rationale en irrationale lijnstukken in de Euclidische meetkunde

1960

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr H.J.A. Duparc

17 februari 1960

Rationale en irrationale lijnstukken in de Euclidische meetkunde

In de Euclidische meetkunde komen bij tal van figuren homogene relaties $f(a,b,c,\ldots)=0$ voor tussen de lengten van lijnstukken $a,b,c,\ldots$, die het mogelijk maken de lengte van een dier lijnstukken te vinden als die van de overige gegeven zijn. Zo is het b.v. mogelijk dat a op te lossen is uit de bovengenoemde betrekking $a=F(b,c,\ldots)$. Het is daarbij uiteraard niet zeker of bij gegeven gehele (of rationale) $b,c,\ldots$ ook de oplossing a geheel (of rationaal) is. Dit hangt af van de structuur van de functie f, dus van F.

In het vervolg zullen wij ons in eerste instantie vaak afvragen of de rationale getallen $b,c,\ldots$ zo gekozen kunnen worden, dat ook a rationaal is. Prefereert men, en dat doen wij veelal, gehele oplossingen, dan passe men een vermenigvuldiging van figuren toe, die het rationale stel $a,b,c,\ldots$ overvoert in een stel gehele getallen. Als de functie F een rationale functie is van $b,c,\ldots$ is het probleem triviaal; wij zullen dus in principe aan het geval voorbij kunnen gaan.

Interessant zijn dan ook die gevallen, waarin F geen rationale functie is van $b,c,\ldots$

Als eerste oriënterend (en nuttig) voorbeeld nemen wij de relatie $a^2+b^2=c^2$, optredend bij een rechthoekige driehoek met hypotenusa c en rechthoekszijden a en b. Het is duidelijk dat alle gehele oplossingen (a,b,c) kunnen worden afgeleid uit die waarbij de G.G.D. van a,b en c gelijk is aan 1. Dientengevolge is één der drie grootheden a,b en c even, de beide andere zijn oneven. Daar c niet even is (immers dan zijn a en b oneven en dus a^2 en b^2 beide een viervoud +1, dus c^2 weliswaar even, maar niet deelbaar door 4), mag men zonder de algemeenheid te schaden aannemen dat a even is en b en c oneven zijn.

Men schrijft nu

$$a^2 = c^2-b^2 = (c+b)(c-b).$$

Daar $c+b$ en $c-b$ slechts één factor 2 gemeen hebben (immers elke verdere gemeenschappelijke factor zou in c en b zitten, dus ook in a en dan was de GGD van a,b en c niet gelijk aan 1) en allebei even zijn,en daar hun product een quadraat is (nl. a^2),moeten er gehele p en q zijn, zodanig dat $c+b=2p^2$, $c-b=2q^2$, dus

$$a = 2pq,\ b = p^2-q^2,\ c = p^2+q^2 \tag{1}$$

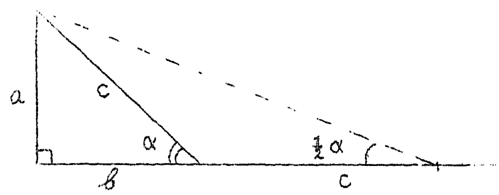
Omgekeerd, voldoen a,b en c aan (1) en zijn p en q van verschillende pariteit, dan voldoen a,b en c aan $a^2+b^2=c^2$ en zijn a,b en c onderling ondeelbaar.

Er is ook een andere manier om tot dit resultaat te komen. Daarbij wordt weer de ontbinding van c^2-b^2 gebruikt (dat ontbinden blijkt nl. bij deze en verdere voorbeelden essentiëel te zijn). Men heeft

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}\ .$$

Stelt men elk dezer rationale getallen gelijk aan $\frac{q}{p}$ dan vindt men na oplossen van a,b en c hiervoor de formules (1) (of een ermee evenredig stel) terug.

Tevens is nu opgelost het probleem om alle hoeken te bepalen waarvan de sinus $(\frac{a}{c})$ en cosinus $(\frac{b}{c})$ rationaal zijn. Men ziet uit bijgaande figuur direct in dat de breuk $t = \frac{q}{p}$ een meetkundige betekenis heeft, nl. $t = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha$. Een en ander correspondeert met de welbekende formules uit de goniometrie, die ons in het onderhavige geval leren dat



$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ is. Wij zullen dergelijke hoeken heronische hoeken noemen naar Hero van Alexandrië (Hero bewees meetkundig de welbekende s-formule voor de oppervlakte Q van een driehoek. Hij gebruikte daarbij de uit de gelijkvormigheid van driehoeken direct af te leiden formules

$$r : r_c = (s-c) : s;\quad r : (s-a) = (s-b) : r_c\ ;\quad r = Q/s,$$

waarbij r en r_c de stralen zijn van ingeschreven en aan de zijde c aangeschreven cirkel van de driehoek. Het verband tussen heronische hoeken en de oppervlakte van een driehoek zal direct blijken.

Alvorens met planimetrische figuren verder te gaan willen wij eerst een stereometrische toepassing geven nl. de bepaling van een viervlak ABCO met uitsluitend rationale (gehele) zijden en een rechte drievlakshoek O (d.w.z. $\angle$ AOB = $\angle$ BOC = $\angle$ COA = 90^o).

De getallen OA = a, OB = b en OC = c onderstellen wij onderling ondeelbaar. Er is er dus één oneven, laat dat a zijn. Dan is zowel b als c even; maar een van beide (laat dat c zijn) moet meer factoren 2 bevatten dan de andere. Men kan dus stellen

$$\frac{b}{a} = \frac{2t}{1-t^2}\,,\quad \frac{c}{b} = \frac{2u}{1-u^2}\,,\ \text{dus}\ \frac{c}{a} = \frac{4tu}{(1-t^2)(1-u^2)}\,.$$

Anderzijds moet gelden $\frac{c}{a} = \frac{2s}{1-s^2}$, dus

$$\frac{2tu}{(1-t^2)(1-u^2)} = \frac{s}{1-s^2}\,.$$

Stel $s = 2ktu$, dus $1-s^2 = k(1-t^2)(1-u^2) = 1-4k^2t^2u^2$, d.z.w. t en u moeten voldoen aan

$$(k+4k^2)t^2u^2 - kt^2-ku^2+k-1 = 0.$$

Men vindt b.v.

$$u^2 = \frac{kt^2-(k-1)}{(c+4k^2)t^2-k}\,.$$

Zij $u = \frac{x}{y}$, $t = \frac{z}{w}$, $k = \frac{m}{n}$ met $(x,y)=(z,w)=(m,n)=1$.

Dan geldt

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{n}{m}\cdot\frac{mz^2-(m-n)w^2}{(n+4m)z^2-nw^2}\,.$$

Zonder hier op het algemene geval door te gaan beperken wij ons tot het interessante geval m=n (d.w.z. k=1), dus

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{z^2}{5z^2-w^2}\,.$$

Men ziet dan dat $5z^2-w^2 = \frac{y^2z^2}{x^2} = q^2$ is, dus $5z^2 = w^2+q^2$, waaruit de getallentheorie leert, dat z zelf een quadraatsom r^2+s^2 is. Men vindt dan

$$w^2+q^2 = 5(r^2+s^2)^2 = (r^2s^2+4rs)^2 + (2r^2 2s^2-2rs)^2,$$

dus b.v.

$$w = r^2-s^2+4rs,\ z = r^2+s^2,\ \frac{x}{y} = \frac{r^2+s^2}{2r^2-2rs-2s^2}\,.$$

De keuze r=2, s=1 geeft

$$t = \frac{z}{w} = \frac{5}{11}\,,\quad u = \frac{x}{y} = \frac{5}{2}\,,$$

hetgeen voert tot OA = 252, OB = 240, OC = 275 met BC = 365, CA = 373, AB = 348.

In het hierboven gegevene trad een nieuw getallentheoretisch argument op. Iets dergelijks hadden wij ook bij de rechthoekige driehoek met $c^2=a^2+b^2$ kunnen proberen. De getallentheorie leert daarvoor nl. dat c een quadraatsom $c=r^2+s^2$ moet zijn en dan vindt men vrijwel direct $a=r^2-s^2$, $b=2rs$, overeenkomstig het hierboven gevondene.

Wij gaan thans over tot het bepalen van "geheelzijdige" driehoeken met rationaal oppervlak (men noemt ze heronische driehoeken). Een dergelijke niet-rechthoekige driehoek ABC wordt door zijn hoogtelijn CD verdeeld in twee heronische rechthoekige driehoeken. Men heeft er dan slechts voor te zorgen, dat

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha = t, \quad \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\beta = u$$

met rationale t en u. Wij vinden dan b.v.

$$CD = 2,\ a = \frac{1+u^2}{u},\ b = \frac{1+t^2}{t},\ c = \left|\frac{1-t^2}{t} \pm \frac{1-u^2}{u}\right|. \tag{2}$$

Zo geeft de keuze $u=\frac{1}{2}$, $t=\frac{2}{3}$ ons $a=2\frac{1}{2}$, $b=2\frac{1}{6}$, $c=2\frac{1}{3}$, hetgeen voert tot de welbekende heronische driehoek (15,13,14) (met een driehoek (p,q,r) bedoelen wij in het vervolg een driehoek met zijden p,q en r).

Men kan zich afvragen of heronische driehoeken te vinden zijn door uit te gaan van de oppervlakteformule

$$Q = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Stelt men $s-a=a'$, $s-b=b'$, $s-c=c'$ dan is $s=a'+b'+c'$, dus

$$Q^2 = a'b'c'(a'+b'+c').$$

Het getal $\frac{a'(a'+b'+c')}{b'c'}$ moet dus een quadraat $q^2 = \frac{Q^2}{b'^2c'^2}$ zijn. Men neme daartoe a' en b' willekeurig en vindt dan

$$c' = \frac{a'(a'+b')}{q^2b'-a'}. \tag{3}$$

Zo voert $a'=2$, $b'=1$, $q=3$ tot de driehoek (13,20,21). Het verband tussen de beide resultaten voor heronische driehoeken wordt gegeven door $t=\frac{1}{q}$, $u=a'/qb'$.

Het feit, dat een driehoek heronisch is als de tangenten van zijn halve hoeken rationaal zijn (en omgekeerd!) maakt het mogelijk heronische driehoeken met een of meer rationale binnen- of buitenbisectrices te vinden. Laat b.v. in een heronische driehoek ABC de binnenbisectrix AD rationaal zijn. Bekend is, dat BD rationaal is, waaruit met de sinusregel en cosinusregel blijkt dat de hoek $\frac{1}{2}\alpha$ heronisch is.

Het is dus eenvoudig om een heronische driehoek te construeren met één rationale bisectrix b.v. AD. Men neme tg $\frac{1}{4}\alpha = r$ en tg $\frac{1}{2}\beta = u$ rationaal. Dit levert ons de gewenste driehoek met behulp van de formules (2), waarin $t = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{2r}{1-r^2}$ moet worden genomen. In zo'n driehoek is ook tg $\frac{1}{4}(180^\circ-\alpha) =$ tg$(45^\circ-\frac{1}{4}\alpha)$ rationaal, hetgeen maakt dat in een heronische driehoek binnenbisectrix en corresponderende buitenbisectrix tegelijkertijd rationaal of tegelijkertijd irrationaal zijn. Dit volgt trouwens ook uit de formules voor deze bisectrices

$$d_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc\,s(s-a)}, \quad e_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(s-b)(s-c)},$$

dus
$$d_a e_a = \frac{4bc}{|b^2-c^2|}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Men kan ook heronische driehoeken maken met twee rationale binnenbisectrices, b.v. d_a en d_b. Dan moeten tg $\frac{1}{4}\alpha = u$ en tg $\frac{1}{4}\beta = v$ rationaal zijn. Tevens is dan de hoek $90^\circ-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$ heronisch, zodat dan automatisch de derde bisectrix rationaal is. Dit volgt trouwens ook weer uit de elementaire formules der planimetrie, die ons leren

$$d_a d_b d_c = \frac{8\,abc\,s}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

De "eenvoudigste" ongelijkbenige heronische driehoek met drie rationale bisectrices vindt men door $u=\frac{1}{3}$, $v=\frac{1}{5}$ te nemen. Dit voert tot de driehoeken (125,154,169) en (84,125,169). De keuze $u=\frac{1}{3}$, $v=\frac{1}{4}$ voert tot (231,250,289) en (91,250,289). De "eenvoudigste" gelijkbenige heronische driehoek vindt men uit $u=v=\frac{1}{3}$. Men krijgt dan de driehoek (14,25,25). In 1939 gaf J.G. van der Corput een beginstuk van een tabel van dergelijke driehoeken.

Op analoge manier kan men een heronische driehoek maken, waarin de trisectrices uit een hoekpunt rationaal zijn. Men stelle dan b.v. tg $\frac{1}{6}\alpha = p$, tg $\frac{1}{2}\beta = u$ en gebruike formule (2) met $t = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{3p-p^3}{1-3p^2}$.
Als voorbeeld nemen wij $p = \frac{1}{3}$, $u = \frac{1}{3}$, dus $t = \frac{13}{9}$.
Men zij nu op zijn hoede. Wegens $t > 1$ is $\frac{1}{2}\alpha > 45^\circ$, dus $\alpha > 90^\circ$. Dit houdt in dat bij de rechthoekige driehoek (44,117,125), die bij $t=\frac{13}{9}$

behoort, de buitenhoek tegenover de zijde 117 rationale trisectrices bezit. Dan is dat echter niet het geval met de corresponderende binnenhoek. Immers als $\frac{1}{3}\alpha$ heronisch is, dan is $\frac{1}{3}(180^\circ-\alpha) = 60^\circ - \frac{1}{3}\alpha$ het niet, want anders zou ook de som $\frac{1}{3}\alpha + (60^\circ - \frac{1}{3}\alpha) = 60^\circ$ heronisch zijn, dat is echter kennelijk niet het geval.

Ons voorbeeld voert dan ook tot de heronische scherphoekige driehoek (25,39,40), waarin de BUITENtrisectrices van de hoek tegenover de zijde 39 rationaal zijn, nl. resp. ∞ (zoals te verwachten was wegens p=u) en 40.

De andere heronische driehoek die met $p = \frac{1}{3}$, $u = \frac{1}{3}$ is te vinden, heeft wel rationale trisectrices. Het is de driehoek (112,125,195); de trisectrices naar de zijde 195 zijn hier 70 en $\frac{2800}{39}$. Nadere analyse der figuur onthult hier in verband met p=u de trivialiteit der situatie. De keuze $p = \frac{1}{3}$, $u = \frac{1}{2}$; $t = \frac{13}{9}$ levert een nog kleinere heronische driehoek (35,100,117) met rationale trisectrices 28 en 35 naar de zijde 117. Omdat bg tg p + bg tg u = 45° is ook hier weer iets bijzonders aan de hand: een der trisectrices is tevens hoogtelijn.

De pendant van dit voorbeeld levert de driehoek (35,44,75) met rationale buitentrisectrices 21 en 35 naar de zijde 44.

In het voetspoor van het voorafgaande kan men ook heronische driehoeken maken, waarin de trisectrices van twee hoeken alle vier rationaal zijn. Men neme slechts tg $\frac{1}{6}\alpha$ en tg $\frac{1}{6}\beta$ rationaal. Dan is tg $\frac{1}{6}\gamma$ zeker niet rationaal, want dan zou gelden dat de som $\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{6}\gamma = 30^\circ$ ook een rationale tangens bezat. Er bestaan dus geen heronische driehoeken met 6 rationale trisectrices. Als voorbeeld van een driehoek met 4 rationale trisectrices nemen wij tg $\frac{1}{6}\alpha = \frac{1}{3}$, tg $\frac{1}{6}\beta = \frac{1}{9}$ en vinden dan de driehoek (38308, 45375, 68921). Men kan zo doorgaan en heronische driehoeken maken, waarvan de rechten die één hoek in m en een andere hoek in n gelijke delen verdelen rationaal zijn.

Een verdere wens zou kunnen zijn om heronische driehoeken te maken met een of meer rationale zwaartelijnen.

Uit de welbekende formule

$$m_c^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2) - \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{4}(a+b)^2 + \tfrac{1}{4}(a-b)^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

leidt men af

$$(m_c - \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b)(m_c + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b) = m_c^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2 = s(s-c).$$

Stelt men $m_c+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b = ps$, dan is $s-c=p(m_c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)$.
Eliminatie van m_c levert

$$a(p^2-2p-1)+b(p^2+2p-1)+c(p^2+1)=0.$$

Overgaande op s-a, s-b en s-c vindt men

$$\frac{s-a}{p+1}+\frac{s-b}{p-1}+\frac{s-c}{p}=0.$$

Vervolgens moet men nog zorgen dat aan (3) is voldaan.

Wij zien van een verdere systematische behandeling af en volstaan met de opmerking dat geen heronische driehoeken met 2 rationale zwaartelijnen bestaan (hetgeen b.v. door H. Schubert is bewezen).

Interessant zijn voorts de heronische vierhoeken, dat zijn vierhoeken die door hun diagonalen in 4 heronische driehoeken worden verdeeld.

Wij behandelen hier het speciale geval van de heronische koordevierhoek. Laten de door de zijden a,b,c en d onderspannen bogen resp. 2α, 2β, 2γ en 2δ zijn ($2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=360^\circ$). Dan moeten dus $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha$, $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\beta$ en $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma$ rationaal zijn: u,v resp. w ($\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\delta = \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ is het dan ook). Men vindt dan

$$a=\frac{2u}{1+u^2}, \quad b=\frac{2v}{1+v^2}, \quad c=\frac{2w}{1+w^2}, \quad d=\frac{2x}{1+x^2}$$

met

$$\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\,\mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\delta)=1,$$

dus

$$\frac{u+v}{1-uv}\;\frac{w+x}{1-wx}=1, \quad x=\frac{uv+vw+uw-1}{uvw-u-v-w}.$$

B.v. levert $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{3}$, $w=\frac{1}{4}$, dus $x=\frac{3}{5}$, het resultaat

$$a=68,\ b=51,\ c=40,\ d=75,\ Q=3234,\ e=85,\ f=77,$$

waarbij e en f de diagonalen van de vierhoek voorstellen en Q het oppervlak.
Omdat hier $\alpha+\beta=90^\circ$ is $a\perp b$ en $c\perp d$ en e een middellijn.
Een "algemener" geval vindt men b.v. uit

$$u=\frac{1}{3},\ v=\frac{1}{5},\ w=\frac{1}{7},\ \text{dus } x=\frac{9}{7}.$$

Er komt de koordenvierhoek (195,125,91,315) met diagonalen 204 en 280 en oppervlakte 22848.

Een willekeurige (al of niet heronische) vierhoek met gehele zijden en diagonalen is moeilijker te vinden. Wij komen daarop later nog terug.

Wij stappen thans af van de heronische driehoeken en beschouwen nu figuren, waarin louter rationale lijnstukken optreden (of zo men wil: na vermenigvuldiging met een passende factor louter gehele lijnstukken), maar niet noodzakelijk rationale oppervlakten.

Dergelijke figuren denken wij opgebouwd uit geheelzijdige driehoeken. Bij zo'n driehoek is de cosinus van elke hoek volgens de cosinusregel rationaal. Uit de formule $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ volgt, dat $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ de vierkantswortel is uit een rationaal getal. Is t zelf rationaal dan vinden wij de heronische driehoeken terug. Interessant is in het vervolg het geval, dat t irrationaal is. Men kan dan schrijven $t=m\sqrt{n}$, waarin m rationaal is en n een quadraatvrij natuurlijk getal. Dit getal n noemen wij in navolging van Dr J.H.J. Almering de index van de figuur, resp. de optredende hoeken. Uit $\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$ volgt dat de sinus der hoeken van de driehoek ook van de gedaante $k\sqrt{n}$ zijn en het oppervlak dus eveneens (k rationaal).

Men kan zich nu afvragen of, bij gegeven n, dergelijke geheelzijdige figuren te construeren zijn. (Het geval dat $n=1$ zou zijn is dus hierboven behandeld.)

Kennelijk krijgt men een driehoek met index n door te nemen $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = t\sqrt{n}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = u\sqrt{n}$ en dan als in het voorafgaande verder te gaan.

Een dergelijke driehoek heeft zijden a,b en c die zich verhouden als

$$t\sqrt{n} + \frac{1}{t\sqrt{n}}\ , \quad u\sqrt{n} + \frac{1}{u\sqrt{n}} \text{ en } (t\pm u)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{t} \mp \frac{1}{u}\right)\sqrt{n},$$

dus als

$$(nt^2+1)u\ , \quad (nu^2+1)t \text{ en } ntu(t\pm u)+(u\mp t).$$

Een merkwaardig voorbeeld is het geval $n=3$, want hierbij kan optreden een hoek $\alpha=60^\circ$ of 120° (corresponderend met $t=\frac{1}{3}$ resp. $-\frac{1}{3}$). Zo vindt men voor $t=\frac{1}{3}$, $u=\frac{1}{2}$ b.v. $a=7$, $b=8$, $c=5$.

Natuurlijk zijn driehoeken met $\alpha=60^\circ$ ook rechtstreeks te verkrijgen uit $a^2=b^2\pm bc+c^2$ en wel via een eerder al voorspelde ontbinding. Men neme $a-b=kc$; $a+b=(c-b)/k$ met positieve rationale $k<1$. Men vindt dan

$$a:b:c=(k^2+k+1):(1-k^2):(2k+1).$$

<u>Opmerking:</u> Daar a dus van de gedaante $a=m^2+mn+n^2=(m+\frac{1}{2}n)^2+3(\frac{1}{2}n)^2$ is, geldt voor elke priemfactor p van a de relatie $(\frac{-3}{p}) = 1$, dus $p\equiv1 (\mathrm{mod}\, 6)$, dus $a\equiv1$ (mod 6). Omgekeerd leidt elke dergelijke a tot een driehoek met $\alpha=60^\circ$. Zo geeft b.v. $a=1$ direct $b=c=1$; $a=7$ levert $49=(b-\frac{1}{2}c)^2+$ $+3(\frac{1}{2}c)^2$, dus $b-\frac{1}{2}c=1$, $\frac{1}{2}c=4$, d.w.z. driehoek (7,5,8).

Wij kunnen nu zelfs driehoeken maken met louter rationale trisectrices. Daartoe moeten $\mathrm{tg}\,\frac{1}{6}\alpha$, $\mathrm{tg}\,\frac{1}{6}\beta$, $\mathrm{tg}\,\frac{1}{6}\gamma$ dezelfde index n hebben en $\mathrm{tg}(\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{6}\gamma) = \mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ook die index n. Dus n=3. In overeenstemming met het bovenstaande is de driehoek dan niet heronisch.

Als voorbeeld nemen wij

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{9}\sqrt{3},\ \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{6} = \frac{1}{7}\sqrt{3},\ \text{dus } \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{6} = \frac{1}{19}\sqrt{3}.$$

Men vindt dan de driehoek (2197, 2401, 1254) met louter rationale binnen- en buitentrisectrices en een rationale zijde $\frac{12103}{40}$ van de (kleine) driehoek van Morley.

Een driehoek met uitsluitend rationale lijnen, die de hoeken in vier gelijke delen verdelen bestaat niet, want daarbij zouden de tangenten van de achtste delen der hoeken, dus ook die van hun som ($22\frac{1}{2}^\circ$) van de gedaante $r\sqrt{n}$ zijn. Dit is wegens $\mathrm{tg}\,22\frac{1}{2}=\sqrt{2}-1$ niet het geval. Wel bestaan er dus driehoeken waarin de zijden en de genoemde deellijnen van binnen- en buitenhoeken allemaal van de gedaante $p+q\sqrt{2}$ (p en q geheel) zijn.

Daar er geen heronische driehoeken zijn met twee rationale zwaartelijnen pogen wij nu een niet-heronische driehoek te vinden met twee rationale zwaartelijnen.

Daartoe hebben wij op grond van (4) de getallen s-a, s-b en s-c zo te nemen dat

$$\frac{s-a}{p+1}+\frac{s-b}{p-1}+\frac{s-c}{p}=0,\quad \frac{s-a}{q}+\frac{s-b}{q+1}+\frac{s-c}{q-1}=0$$

(p en q willekeurig rationaal met uiteraard -1 p, q 1. Zo levert b.v. $p=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$ de driehoek (9,8,11) met $m_9=8\frac{1}{2}$, $m = 6\frac{1}{2}$.

Het is nu niet moeilijk om nog de derde relatie

$$\frac{s-a}{r-1}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r-1}=0$$

op te schrijven, die ons ook nog een rationale mediaan m_b garandeert bij rationale r. De drie relaties kunnen echter slechts dan tegelijk bestaan als hun coëfficiëntendeterminant nul is, d.w.z. als geldt

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p-1} & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q} & \frac{1}{q+1} & \frac{1}{q-1} \\ \frac{1}{r-1} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r+1} \end{vmatrix} = 0$$

Na uitwerking en herleiding komt men tot een relatie $G(p,q,r)=0$, die van de zesde graad is in p,q en r. Fixeert men b.v. r, dan moeten p en q voldoen aan een relatie $H(p,q)=0$ van de vierde graad, dus (p,q) een rationaal punt zijn van de vlakke biquadratische kromme $H(p,q)=0$ in het p,q-vlak. Op deze kromme ligt het punt $(0,1)$(corresponderend met $s-c=0$, dus $a+b=c$, d.w.z. met een "platgeslagen" driehoek, waarin uiteraard alle zwaartelijnen rationaal zijn), evenzo het punt $(-1,0)$ en het punt $(1,-1)$.

Het voorbeeld $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{7}{15}$, $r=\frac{3}{5}$ voert tot de kleinste bekende driehoek met drie rationale zwaartelijnen nl. de driehoek (85,87,68).

Men kan ook op geheel andere wijze komen tot dit resultaat. Men weet nl. dat $4m_a^2+a^2=(b+c)^2+(b-c)^2=A$. Het getal A is dus op twee verschillende manieren te schrijven als som van quadraten en bevat volgens de getallentheorie slechts priemfactoren die van de gedaante $4k+1$ zijn en wel tenminste twee verschillende dergelijke (of drie gelijke). Zo levert $A=5.13=65$ ons b.v. $b+c=8$, $b-c=1$, $a=4$, $2m_a=9$ dus de driehoek (8,9,7). Door nu na te gaan of ook $B=(a+c)^2+(a-c)^2$ en $C=(a+b)^2+(a-b)^2$ van het bij A genoemde type zijn vindt men of de gevonden driehoek (A,B,C) nog meer rationale zwaartelijnen bezit. Dit is o.a. door A. van Wijngaarden met rekenmachines uitgewerkt.

Wij zullen nu ons probleem iets generaliseren en vragen naar driehoeken met twee of drie rationale Stewartlijnen. Onder een Stewartlijn verstaan wij de verbindingslijn van een hoekpunt van een driehoek met een punt dat de overstaande zijde in een voorafgegeven rationale verhouding $m:n=k:(1-k)$ verdeelt. Het geval $m=n$ levert automatisch een zwaartelijn.

Bij ons probleem behoeven de rationaal te krijgen Stewartlijnen niet eens uit verschillende hoekpunten te worden genomen.

Laat een lijn d de zijde c in de verhouding $m:n=k:(1-k)$ verdelen. Dan heeft men

$$d^2=(1-k)a^2+kb^2-k(1-k)c^2.$$

Men kan nu op twee vrijwel aequivalente wijzen verder gaan, beide keren door ontbinding, òf door $d^2-kb^2=(1-k)(a^2-kc^2)$ òf door $d^2+k(1-k)c^2=(1-k)a^2+kb^2$ te beschouwen. Wij zullen het eerste doen en moeten dan het lichaam der getallen $u+v\sqrt{k}$ (u,v rationaal) beschouwen (bij het tweede had men het lichaam $u+vi\sqrt{k(1-k)}$ nodig). Stel gemakshalve $\sqrt{k}=w$, dan volgt uit

$$\begin{aligned}(d+bw)(d-bw) &= (1+w)(1-w)(a+cw)(a-cw)\\ &= (a+ck+(a+c)w)(a+ck-(a+c)w)\end{aligned}$$

dat de toegevoegd irrationale getallen

$$\frac{a+ck+(a+c)w}{d+bw} \quad \text{en} \quad \frac{a+ck-(a+c)w}{d-bw}$$

elkaars reciproke moeten zijn. Stel het eerste $u+vw$, dan is het tweede $\frac{1}{u+vw} = u-vw$, dus $u^2-v^2w^2=1$. Heeft men dus eerst de diophantische vergelijking $u^2-v^2k=1$ opgelost, dan vindt men verder

$$a+ck+(a+c)w = (u+vw)(d+bw),$$

dus $$a+ck = du+bvk,\ a+c=bu+dv.$$

Eliminatie van d geeft

$$a(u-v)-b+c(u-kv) = 0.$$

De getallen u en v, die hierbij optreden en die moeten voldoen aan $u^2-v^2k=1$ dus aan $\frac{u+1}{v} = \frac{kv}{u-1}$ $(=z)$ blijken van de gedaante $u= \frac{z^2+k}{z^2-k}$, $v= \frac{2z}{z^2-k}$ te zijn, zodat ons eliminatieresultaat luidt

$$a(z^2-2z+k) + b(k-z^2)+c(z^2-2zk+k) = 0.$$

Eist men de rationaliteit van een Stewartlijn naar de zijde a met deelverhouding $h:(1-h)$ dan vindt men op analoge wijze (met rationale x)

$$a(x^2-2xh+h) + b(x^2-2x+h) + c(h-x^2) = 0.$$

Een derde Stewartlijn, die de zijde b in de verhouding $j:(1-j)$ verdeelt voert tot een relatie

$$a(j-y^2) + b(y^2-2yj+j) + c(y^2-2y+j) = 0$$

met rationale y.

De drie homogene lineaire relaties tussen de zijden a, b en c zijn slechts vervuld als de rationale getallen x, y en z voldoen aan $D=0$, waarin D de coëfficiëntendeterminant dier vergelijkingen is. Na randen en omwerken vindt men

$$P(x,y,z) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ x^2+h & xh & x & x^2 \\ y^2+j & y^2 & yj & y \\ z^2+k & z & z^2 & zk \end{vmatrix} = 0.$$

Het geval $h=j=k=\frac{1}{2}$ (van een driehoek met drie rationale zwaartelijnen) dat wij al eerder noemden in (4) is hieruit terug te vinden.

Het onderzoek naar rationale punten op het oppervlak $P(x,y,z)=0$ en een verdere reductie van dat probleem is uitgewerkt door J.H.J. Almering.

Wij gaan nog even in op het probleem om een willekeurige geheelzijdige vierhoek te vinden, waarvan de diagonalen elkaar in rationale stukken verdelen. Onafhankelijk van het voorafgaande gaan wij als volgt te werk. Laat de cosinus van de hoek der diagonalen (die elkaar in stukken p en s resp. q en r verdelen) gelijk zijn aan k.

In de driehoek (d,p,q) is de cosinus van de hoek (p,q) gelijk aan k. Men heeft dan

$$d^2 = p^2+q^2-2pqk = (p-qk)^2 + q^2(1-k^2).$$

Dus

$$d+p-qk = q(1-k^2)/t$$

$$d-p+qk = tq.$$

Derhalve

$$2p-2qk = q(1-k^2)/t - q^t$$

dus

$$\frac{p}{q} = \frac{1-k^2+2kt-t^2}{2t} .$$

Evenzo

$$\frac{p}{r} = \frac{1-k^2-2ku-u^2}{2u} , \quad \frac{q}{s} = \frac{1-k^2-2kv-v^2}{2v} , \quad \frac{r}{s} = \frac{1-k^2+2kw-w^2}{2w} .$$

De overigens willekeurig te kiezen parameters t,u,v en w hebben dus te voldoen aan

$$\frac{w(1-k^2+2kt-t^2)}{t(1-k^2+2kw-w^2)} = \frac{v(1-k^2-2ku-u^2)}{u(1-k^2-2kv-v^2)} .$$

Kiest men b.v. t en w, dan moeten u en v voldoen aan een betrekking $F(u,v)=v(1-k^2-2ku-u^2) = Au(1-k^2-2kv-v^2) = 0$, een kromme van de derde graad in het (u,v)-vlak.

Er zijn diverse procédé's om rationale punten (u,v) op de door $F(u,v)=0$ bepaalde cubische kromme te vinden (vgl. J.H.J. Almering).

Verder geven wij nog een enkel voorbeeld van zeer speciale irrationale lijnstukken. Zo interesseert het ons om in een driehoek een rechte $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ te vinden (dit om een eenvoudige manier van constructie van de regelmatige tienhoek te geven).

Zo heeft a te voldoen $a^2+a-1=0$, dus aan $a^2+a+1=2$, d.w.z. a treedt op in de driehoek $(a,1,\sqrt{2})$ met een hoek van 120°, d.w.z. de driehoek gevormd door de zijden van de regelmatige 4,6-en 10-hoek heeft een hoek van 120°.

Een ander voorbeeld geeft ons de constructie van a via een Stewartlijn. Het blijkt dat in de driehoek met zijden 1, $\sqrt{2}$ en 2 de Stewartlijn met lengte $\sqrt{3}$ naar de zijde 1 deze zijde juist verdeelt in de stukken a en 1-a.

Tenslotte geven wij nog enige driehoeken "onder de 12" met diverse bijzonderheden (hierbij stellen h,d,e,t en m resp. voor een hoogtelijn, binnenbisectrix, buitenbisectrix, trisectrix en mediaan; de hoek tegenover de zijde met lengte n noemen wij A_n):

(1,1,1)	$A_1 = 60^\circ$
(2,3,4)	$e_2 = 6$
(3,4,5)	$A_5 = 90^\circ$ enz.
(4,5,6)	$A_6 = 2A_4$; $d_6 = \frac{10}{3}$
(5,5,6)	$h_6 = 4$
(3,5,7)	$A_7 = 120^\circ$; $d_7 = \frac{15}{8}$
(4,7,7)	$m_7 = 4$
(6,7,7)	$m_7 = 5\frac{1}{2}$
(5,5,8)	$h_8 = 3$
(3,7,8)	$A_7 = 60^\circ$
(5,7,8)	$A_7 = 60^\circ$
(6,7,8)	$d_7 = 6$
(4,7,9)	$m_9 = 3\frac{1}{2}$
(3,8,9)	$e_3 = 24$
(7,8,9)	$m_8 = 7$
(3,8,10)	$A_{10} = 3A_8$; $t_{10} = 2$ resp. $\frac{12}{5}$
(5,9,10)	$m_9 = 6\frac{1}{2}$
(6,7,11)	$m_{11} = 3\frac{1}{2}$
(8,8,11)	$t_{11} = 6$
(8,9,11)	$m_9 = 8\frac{1}{2}$, $m_{11} = 6\frac{1}{2}$
(9,10,11)	$m_9 = 9\frac{1}{2}$.

Litteratuur

J.H.J. Almering, Rationaliteitseigenschappen in de vlakke meetkunde (1950), 1-104.

J.G. van der Corput, Über Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden, Proc.Kon.Ak.v.Wet. 34 (1931), 1388-1394.

J.G. van der Corput, Tafel der primitiven gleichschenkligen Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Schenkeln kleiner als 160000, Proc.Kon.Ak.Wet.35 (1932), 51-54.

H. Schubert, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis II (1905), 5-104.

A. van Wijngaarden, A table of partitions into two squares with an application to rational triangles, Proc.Kon. Ned.Ak.v.Wet. 53 (1950), 869-881.