STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1964-002

Gleichverteilte Folgen in lokal kompakten Räumen

G. Helmberg

Januar 1964

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Gleichverteilte Folgen in lokal kompakten Räumen

Einleitung

Für eine gegebene Folge $\xi = \{x_n\}$ in $[0,\infty[$ und beliebige nichtnegative Zahlen a,b ($0 \leq a < b \leq \infty$) sei $\chi_{[a,b[}$ die charakteristische Funktion des Intervalles $[a,b[$ und $A(\xi;a,b;N)$ definiert durch

$$A(\xi;a,b;N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b[}(x_n).$$

Bekanntlich heisst eine Folge ξ in $[0,1[$ in diesem Intervall gleichverteilt (glv.), wenn

(1) $$\lim_{N \to \infty} \frac{A(\xi;a,b;N)}{N} = b-a \text{ für alle } a,b \quad (0 \leq a < b \leq 1)$$

gilt.

Es seien für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) mit $C([a,b])$, $R([a,b])$ und $R^+([a,b])$ beziehungsweise die Mengen aller komplexwertigen, reellwertigen, und nichtnegativen reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnet. Für $b=\infty$ verlangen wir dabei für eine Funktion f aus einer dieser Mengen die Existenz des endlichen Grenzwertes $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Eine Folge ξ in $[0,1[$ ist genau dann glv. in diesem Intervall, wenn

(2) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx \quad \text{für alle } f \in C([0,1])$$

gilt. Dies erklärt gleichzeitig die - zumindest theoretische - Bedeutung gleichverteilter Folgen für die Approximation von Integralen.

Bei gegebener Folge ξ in $[0,\infty[$ kann (1) schon deshalb nicht für alle a,b ($0 \leq a < b < \infty$) gelten, weil stets $A(\xi;a,b;N) \leq N$ ist. Ist jedoch $\xi = \{x_n\}$ glv. in $[0,1[$ und ist bei gegebenem $c > 0$ η die Folge $\{y_n\} = \{cx_n\}$, dann gilt, wie man leicht einsieht,

(1') $$\lim_{N \to \infty} c\,\frac{A(\eta;a,b;N)}{N} = b-a \text{ für alle } a,b \quad (0 \leq a < b \leq c).$$

Diese Beziehung ist wieder gleichwertig mit

(2') $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} cf(y_n) = \int_0^c f(x)dx \text{ für alle } f \in C([0,c]).$$

Diese Überlegungen sind aber offenbar unzureichend, wenn die Integration nicht auf ein festes Intervall $[0,c]$ beschränkt bleiben soll, d.h. wenn mit Hilfe einer einzigen Folge $\{x_n\}$ für beliebiges $c > 0$ und jede beliebige Funktion $f \in C([0,c])$ das Integral $\int_0^c f(x)dx$ aus den Funktionswerten $f(x_n)$ in ähnlicher Weise wie in (2') berechnet werden soll. Dieses Ziel lässt sich jedoch bei geeigneter Abänderung des in (2') verwendeten Summationsverfahrens tatsächlich erreichen, und zwar durch Einführung eines neuen, mit dem Lebesgue'schen Mass dx äquivalenten normierten Masses $d\varphi$ auf $[0,\infty[$ mit positiver und stetiger Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\varphi}{dx}$. Im ersten Teil der vorliegenden Notiz werden Verteilungseigenschaften einer Folge in $[0,\infty[$ bezüglich der neu eingeführten Summationsmethode untersucht, die wie im Falle der Gleichverteilung in $[0,1[$ auf die spezielle Struktur der Zahlengeraden Bezug nehmen. Auf Fragestellungen, die auch für Folgen in allgemeinen lokal kompakten Räumen sinnvoll bleiben, wird im zweiten Teil eingegangen.

I. Folgen in $[0,\infty[$

1. Gleichverteilung bezüglich stetiger Verteilungsfunktionen

Unter einer Verteilungsfunktion auf dem Intervall $[a,b]$ $(0 \leq a < b \leq \infty)$ verstehen wir im folgenden immer eine nichtnegativwertige, monoton im engeren Sinn steigende stetige Funktion φ auf $[a,b]$, für die $\varphi(a)=0$ und $\varphi(b) = 1$ gilt (für $b = +\infty$ verlangen wir $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 1$). Mit φ^{-1} bezeichnen wir die auf $[0,1]$ (bzw. $[0,1[$) definierte Umkehrfunktion von φ, d.h.

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = x \quad \text{für } a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq 1.$$

Für $\varphi(x) = 1-e^{-x}$ auf $[0,\infty[$ ist also φ^{-1} auf $[0,1[$ definiert durch $\varphi^{-1}(y) = -\log(1-y)$.

Bereits Schoenberg [1] hat Gleichverteilung von Folgen bezüglich einer Verteilungsfunktion auf $[0,1]$ definiert. Van der Corput [2] untersucht Verteilungseigenschaften von Folgen in $[0,\infty[$ und Hlawka [3] behandelte ähnliche Fragen für Folgen in kompakten topologischen Räumen. Die folgenden Uberlegungen beziehen ihre Anregungen aus diesen und noch zu erwähnenden Arbeiten. Wir beschränken uns dabei auf Folgen in $[0,\infty[$; Folgen in $]-\infty,+\infty[$ können in analoger Weise behandelt werden.

Def.1: Es sei φ eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty[$. Eine Folge ξ in $[0,\infty[$ heisst $d\varphi$ - glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\xi;a,b;N)}{N} = \varphi(b)-\varphi(a) \quad \text{für alle } a,b \quad (0 \leq a < b \leq \infty) \tag{3}$$

gilt.

Das Differential $d\varphi$ soll hierbei das durch φ auf $[0,\infty[$ definierte Lebesgue-Stieltjes-Mass andeuten (vgl. Halmos [4] § 15 (9)). $d\varphi$-Gleichverteilung der Folge ξ kann wieder mit Hilfe des Riemann-Stieltjes-Integrales bezüglich φ auf $C([0,\infty])$ charakterisiert werden. Der Beweis verläuft in den üblichen Bahnen und soll der Vollständigkeithalber kurz angeführt werden. Das Integral $\int_0^\infty f(x)d\varphi(x)$ einer Funktion $f \in C([0,\infty])$ kann hierbei sowohl als uneigentliches Riemann-Stieltjes-Integral als auch (mit gleichem Recht) als eigentliches Riemann-Stieltjes-Integral über $[0,\infty]$ aufgefasst werden. Dabei wird $+\infty$ als Zerlegungspunkt zugelassen, $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\varphi(\infty) = 1$ definiert und von den Zerlegungsfolgen $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \infty$ verlangt, dass $\max\{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) : 1 \leq i \leq n-1\}$ gegen 0 geht.

Satz 1: Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist dann und nur dann $d\varphi$ - glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) \quad \text{für alle } f \in C([0,\infty]). \tag{4}$$

gilt.

Beweis: Es sei (3) erfüllt und $f \in R^+([0,\infty])$ (es genügt, solche Funktionen zu betrachten) sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Funktion f kann durch eine endliche Linearkombination g von charakteristischen Funktionen $\chi_{[a_i,a_{i+1}[}$ $(0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = \infty)$ bis auf ε gleichmässig approximiert werden. Dann folgt (4) aus der Abschätzung

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - g(x_n)| +$$

$$+ \int_0^\infty |g(x) - f(x)|\,d\varphi(x) + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) - \int_0^\infty g(x)\,d\varphi(x) \right|$$

und der Tatsache, dass der letzte Term rechts wegen (3) für wachsendes N beliebig klein wird.

Ist umgekehrt (4) erfüllt und a,b $(0 \leq a < b \leq \infty)$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existieren Funktionen $f_1, f_2 \in R^+([0,\infty])$ derart, dass $f_1 \leq \chi_{[a,b[} \leq f_2$ und $\int_0^\infty [f_2(x) - f_1(x)]\,d\varphi(x) < \varepsilon$ gilt. Wir erhalten

$$\varphi(b) - \varphi(a) - \varepsilon = \int_0^\infty \chi_{[a,b[}(x)\,d\varphi(x) - \varepsilon \leq \int_0^\infty f_1(x)\,d\varphi(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{A(\xi;a,b,N)}{N}$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) + \varepsilon = \int_0^\infty \chi_{[a,b[}(x)\,d\varphi(x) + \varepsilon \geq \int_0^\infty f_2(x)\,d\varphi(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} f_2(x_n) \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{A(\xi;a,b;N)}{N}$$

und somit (3).

Wir schliessen an den Beweis von Satz 1 folgende einfache Bemerkungen an:

1) In (3) kann "für alle a,b ($0 \leq a < b \leq \infty$)" ersetzt werden durch "für alle a,b ($0 \leq a < b < \infty$)" oder "für a=0 und alle b ($0 < b < \infty$)".

2) In (4) kann $C([0,\infty])$ ersetzt werden durch $R([0,\infty])$, $R^+([0,\infty])$, durch die Menge $L([0,\infty[)$ aller Funktionen in $C([0,\infty])$ mit kompaktem Träger, oder durch $L^+([0,\infty[) = R^+([0,\infty]) \cap L([0,\infty[)$.

3) Eine reellwertige Funktion f auf $[0,\infty[$ heisse R-integrierbar auf $[0,\infty]$, wenn sie höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt und auf $[0,\infty[$ beschränkt ist. Die Funktion f ist dann auf $[0,\infty]$ bezüglich φ Riemann-Stieltjes-integrierbar. Eine gleichwertige Definition ist folgende: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R([0,\infty])$ derart, dass $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\int_0^\infty [f_2(x) - f_1(x)]\, d\varphi(x) < \varepsilon$ gilt. In (4) kann "für alle $f \in C([0,\infty])$" ersetzt werden durch "für alle auf $[0,\infty]$ R-integrierbaren Funktionen f".

Zwischen $d\varphi$-glv. Folgen in $[0,\infty[$ und glv. Folgen in $[0,1[$ besteht ein einfacher Zusammenhang (vgl. Schönberg [1] 15 .):

<u>Satz 2</u>: Es sei φ eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty[$. Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann $d\varphi$-glv. in $[0,\infty[$, wenn die Folge $\eta = \varphi \circ \xi = \{\varphi(x_n)\}$ in $[0,1[$ glv. ist.

<u>Beweis</u>: Es sei ξ $d\varphi$-glv. in $[0,\infty[$ und $g \in C([0,1])$. Dann gilt $f = g \circ \varphi \in C([0,\infty])$ und

$$\int_0^1 g(y)\,dy = \int_0^1 f \circ \varphi^{-1}(y)\,dy = \int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\varphi(x_n)).$$

Ist umgekehrt η glv. in $[0,1[$ und $f \in C([0,\infty])$, dann gilt $g = f \circ \varphi^{-1} \in C([0,1])$ und

$$\int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) = \int_0^\infty g \circ \varphi(x)\,d\varphi(x) = \int_0^1 g(y)\,dy =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\varphi(x_n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n).$$

Ist also $\eta = \{y_n\}$ eine glv. Folge in $[0,1[$, dann ist $\xi = \varphi^{-1} \circ \eta = \{\varphi^{-1}(y_n)\}$ $d\varphi$-glv. in $[0,\infty[$ und der Übergang von η zu

$\varphi^{-1} \circ \eta$ liefert sämtliche $d\varphi$-glv. Folgen in $[0,\infty[$.

2. Diskrepanz bezüglich einer Verteilungsfunktion auf $[0,\infty[$

In der Theorie der Gleichverteilung wird die Diskrepanz $D(\eta,N)$ einer Folge $\eta = \{y_n\}$ in $[0,1[$ folgendermassen definiert:

$$D(\eta,N) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{A(\eta;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| . \tag{5}$$

Bekanntlich ist η genau dann glv. in $[0,1[$, wenn $\lim\limits_{N\to\infty} D(\eta,N) = 0$ gilt. (Weyl [5]).

Ist φ eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty[$ und setzen wir für $0 \leq a < b \leq 1$ $a' = \varphi^{-1}(a)$, $b' = \varphi^{-1}(b)$ ($=\infty$ für $b=1$) und $\xi = \varphi^{-1} \circ \eta = \{\varphi^{-1}(y_n)\}$, dann gilt

$$A(\eta;a,b;N) = A(\xi;a',b';N).$$

Definieren wir also

$$D_\varphi(\xi,N) = \sup_{0 \leq a < b \leq \infty} \left| \frac{A(\xi;a,b;N)}{N} - (\varphi(b)-\varphi(a)) \right| , \tag{6}$$

so folgt

$$D(\eta,N) = D_\varphi(\varphi^{-1} \circ \eta, N) \tag{7}$$

(vgl. [5] Satz 7). Damit erhalten wir das folgende, natürlich auch leicht direkt zu beweisende Ergebnis, das auch zum Beweis von Satz 2 hätte verwendet werden können.

Satz 3. Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann $d\varphi$-glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N\to\infty} D_\varphi(\xi,N) = 0.$$

Die Bedeutung der Diskrepanz wird auch durch einen Satz von Koksma [7] aufgezeigt, den wir in einer etwas verallgemeinerten Formulierung wiedergeben. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie bei Koksma.

Satz 4. Es sei φ eine Verteilungsfunktion und f eine reellwertige Funktion mit beschränkter Schwankung $V(f)$ auf dem festen Intervall $[a,b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Es sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[a,b[$ und

$$D_\varphi(\xi,N) = \sup_{a \leq x < y \leq b} \left| \frac{A(\xi;x,y;N)}{N} - (\varphi(y) - \varphi(x)) \right| .$$

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \right| \leq V(f) . D_\varphi(\xi,N)$$

für alle $N \geq 1$.

<u>Beweis</u>: Es gilt

$$N \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = N f(x)\varphi(x) \Big/_a^b - N \int_a^b \varphi(x)\,df(x) + $$

$$- \sum_{n=1}^{N} f(x_n) =$$

$$= N f(b) - \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - N \int_a^b \varphi(x)\,df(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{x_n}^{b} df(x) - N \int_a^b \varphi(x)\,df(x) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \overline{\int_a^b} \chi_{]x_n,b]}(x)\,df(x) - N \int_a^b \varphi(x)\,df(x),$$

wobei für eine beliebige reellwertige Funktion g auf $[a,b]$

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,df(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{m} g(\bar{y}_i)\left[f(y_i) - f(y_{i-1})\right] : m \geq 1,$$

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b,$$

$$\bar{y}_i \in [y_{i-1}, y_i],\ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min\left[f(y_i) - f(y_{i-1}),\ y_i - y_{i-1} \right] \right\} \leq \delta \Big\} .$$

Wenn g als einzige Unstetigkeiten in $]a,b[$ an endlich vielen Stellen z_j $(a < z_1 < \ldots < z_k < b)$ Sprunge von der Höhe s_j $(1 \leq j \leq k)$ besitzt, so gilt

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,df(x) = \int_a^{z_1} g(x)\,df(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} g(x)\,df(x) +$$

$$+ \int_{z_k}^{b} g(x) f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} s_j \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f(z_j + \varepsilon) - f(z_j - \varepsilon) \right] .$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\sum_{n=1}^{N}\int_a^b \chi_{]x_n,b]}(x)\,df(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{N} \chi_{]x_n,b]}(x)\ df(x) =$$

$$= \int_a^b \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,x[}(x_n)\ df(x) = \int_a^b A(\xi;a,x;N)\ df(x).$$

Da das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b -N\varphi(x)df(x)$ existiert, gilt ausserdem

$$\int_a^b A(\xi;a,x;N)df(x) - N\int_a^b \varphi(x)df(x) = \int_a^b \left[A(\xi;a,x;N)-N\varphi(x)\right] df(x).$$

Wir erhalten somit

$$N\int_a^b f(x)dg(x) - \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leq \int_a^b \left[A(\xi;a,x;N) - N(\varphi(x)-\varphi(a))\right]df(x) \leq$$

$$\leq V(f)ND_\varphi(\xi,N).$$

Da dieselbe Ungleichung für die Funktion -f gilt, erhalten wir die Behauptung.

3. Verteilungsfunktionen mit positiver stetiger Ableitung

Es sei eine Funktion $h \in R^+(0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(8) $$h(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in [0,\infty[$$
$$\int_0^\infty h(x)dx = 1.$$

Dann ist $\varphi(x) = \int_0^x h(t)dt$ eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty[$ und $d\varphi = h\ dx$. Umgekehrt lässt sich jede stetig differentierbare Verteilungsfunktion φ mit positiver Ableitung auf $[0,\infty[$ in dieser Weise erhalten. Beispielsweise führt die Funktion $h(x) = e^{-x}$ auf die Verteilungsfunktion $\varphi(x) = 1-e^{-x}$.

Ist also eine Folge $\xi = \{x_n\}$ hdx-glv. in $[0,\infty[$, dann gilt

(9) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \int_0^\infty g(x)h(x)dx$$

für alle R-integrierbaren Funktionen g auf $[0,\infty[$. Nun ist wegen der Stetigkeit der nirgends verschwindenden Funktion h eine reellwertige Funktion f auf $[0,\infty[$ genau dann R-integrierbar und $O(h(x))$ (für $x \to \infty$), wenn die Funktion $g = \frac{f}{h}$ auf $[0,\infty[$ R-integrierbar ist. (9) ist daher gleichbedeutend mit

(10) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

für alle R-integrierbaren Funktionen f auf $[0,\infty[$, die $O(h(x))$ sind. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir künftig mit $S(h(x))$.

Andrerseits gilt $f \in L([0,\infty[)$ genau dann, wenn $g = \frac{f}{h} \in L([0,\infty[)$. Aus der Gültigkeit von (10) für all $f \in L([0,\infty[)$ folgt also die Gültigkeit von (9) für alle $g \in L([0,\infty[)$ und nach Satz 1, Bemerkung 2, die hdx-Gleichverteilung der Folge ξ . Wir erhalten als folgenden Satz:

<u>Satz 5</u>. Es sei $h \in R^+([0,\infty])$ wie in (8). Eine Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann hdx-glv. in $[0,\infty[$, wenn

(11) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_0^\infty f(x)\,dx \quad \text{für alle } f \in S(h(x)).$$

Hierbei kann $S(h(x))$ ersetzt werden durch $L([0,\infty[)$ oder $L^+([0,\infty[)$.

Wir wenden dies auf die Funktion $h(x) = e^{-x}$ und $\varphi(x) = 1-e^{-x}$ an. Um eine in $[0,\infty[$ hdx-glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ zu erhalten, gehen wir von einer in $[0,1]$ glv. Folge $\eta = \{y_n\}$ aus. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $y_n \neq 0$ für alle n gilt (andernfalls können wir durch Streichung aller Nullen in η stets eine glv. Folge dieser Art erhalten). Dann ist auch die Folge $\eta' = \{1-y_n\}$ glv. in $[0,1[$ und $1-y_n \neq 1$ für alle n. Nach der auf Satz 2 folgenden Bemerkung ist die Folge $\xi = \varphi^{-1}(\eta') = \{-\log y_n\}$ hdx-glv. in $[0,\infty[$. Wegen $h(x_n) = y_n$ und der Umkehrbarheit aller Schritte erhalten wir folgendes Ergebnis:

<u>Kor.5.1</u>. Ist die Folge $\eta = \{y_n\}$ glv. in $]0,1]$, dann gilt

(12) $$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(-\log y_n)}{y_n} = \int_0^\infty f(x)\,dx \text{ für alle } f \in S(e^{-x}).$$

Ist $\eta = \{y_n\}$ eine Folge in $]0,1]$ und gilt (12) für alle $f \in L([0,\infty[)$, dann ist η glv. in $]0,1]$.

Setzen wir in (10) $f = \chi_{[a,b[}$ $(0 \leq a < b < \infty)$, dann erhalten wir für eine in $[0,\infty[$ hdx-glv. Folge $\xi = \{x_n\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_{[a,b[}(x_n)}{h(x_n)} = b-a \quad \text{für alle } a,b$$
$$(0 \leq a < b < \infty).$$

Dies führt zu einer Charakterisierung hdx-gleichverteilter Folgen in $[0,\infty[$ analog zu Definition 1:

<u>Satz 6</u>. Es sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0,\infty[$ und $h \in R^+([0,\infty])$ wie in (8). Für $0 \leq a < b < \infty$ sei $B_h(\xi;a,b;N)$ definiert durch

$$B_h(\xi;a,b;N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_{[a,b[}(x_n)}{h(x_n)} .$$

Die Folge ξ ist genau dann hdx-glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} = b-a \quad \text{für alle } a,b \ (0 \leq a < b < \infty) \tag{13}$$

gilt.

<u>Beweis</u>: Nach Satz 5 brauchen wir nur nachzuweisen, dass (10) für alle $f \in L^+([0,\infty[)$ gilt. Ist $f(x) = 0$ für alle $x \geq c \geq 1$ und $m = \inf\{h(x) : 0 \leq x \leq c\}$, dann gibt es in gegebenem $\varepsilon > 0$ eine endlichte (nichtnegative) Linearkombination g charakteristischer Funktionen $\chi_{[a_i,a_{i+1}[}$ $(0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = c)$ derart, dass

$$\| f-g \| < \frac{\varepsilon}{c} \min(1,m)$$

gilt. Wie im Beweis von Satz 1 folgt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{h(x_n)} +$$

$$+ \int_0^c |f(x)-g(x)|\,dx + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{g(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^\infty g(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{h(x_n)} + \frac{\varepsilon}{c} \cdot c + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$

für hinreichend grosses N.

4. Diskrepanz-Sätze

Die Güte der Approximation in (11) kann für bestimmte Funktionen f mittels der Diskrepanz der Folge $\{x_n\}$ abgeschätzt werden. Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4.

Satz 7. Es sei $h \in R^+([0,\infty])$ wie in (8) und $\varphi(x) = \int_0^x h(t)dt$ für $x \geq 0$. Ferner sei $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in $[0,\infty[$, f eine reellwertige Funktion auf $[0,\infty[$ und $\frac{f}{h}$ auf $[0,\infty[$ von beschränkter Variation $V(\frac{f}{h})$. Dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} - \int_0^{\infty} f(x)\,dx \right| \leq V(\tfrac{f}{h}) D_{\varphi}(\xi,N) \tag{14}$$

für alle $N \geq 1$.

Wir bemerken, dass unter den angegebenen Voraussetzungen die Funktion $\frac{f}{h}$ bezüglich der Verteilungsfunktion φ über $[0,\infty]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar ist; das angeschriebene Integral ist also definiert und endlich.

Für den Spezialfall $h(x) = e^{-x}$ erhalten wir unter Berücksichtigung von (7) folgendes Korollar (die Folgen $\{y_n\}$ und $\{1-y_n\}$ in $]0,1[$ haben gleiche Diskrepanz):

Kor.7.1. Es sei f eine reellwertige Funktion auf $[0,\infty[$ und $e^x f$ auf $[0,\infty[$ von beschränkter Variation $V(e^x f)$. Ist $\eta = \{y_n\}$ eine beliebige Folge in $]0,1[$, dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(-\log y_n)}{y_n} - \int_0^{\infty} f(x)\,dx \right| < V(e^x f) . D(\eta,N)$$

für alle $N \geq 1$.

Satz 5 und Satz 7 können insbesondere zur Berechnung von Integralen über beliebige endliche Intervalle $[a,b]$ verwendet werden, wenn f durch $f.\chi_{[a,b]}$ ersetzt wird. Es ist aber unbefriedigend, dass in (14) nicht die Variation von f sondern die Variation von $\frac{f}{h}$ eingeht, und dass die Diskrepanz $D_{\varphi}(\xi,N)$ mittels der Differenzen

$$\left| \frac{A(\xi;a,b;N)}{N} - [\varphi(b)-\varphi(a)] \right|$$

gebildet wird, nicht aber mittels der nach Satz 6 eigentlich näher liegenden Differenzen

$$\left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| . \tag{15}$$

Allerdings wäre es sinnlos, das supremum der Ausdrücke in (15) über all a,b ($0 \leq a < b < \infty$) zu nehmen, da dieses wegen der Beschränktheit von $B_h(\xi;a,b;N)$ stets unendlich ist. Wir definieren also zunächst für jedes feste $c > 0$

$$E_h(\xi,N,c) = \sup_{0 \leq a < b \leq c} \left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| .$$

Satz 8. Es sei $h \in R^+([0,\infty])$ wie in (8). Die Folge $\xi = \{x_n\}$ ist genau dann hdx-glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N \to \infty} E_h(\xi,N,c) = 0 \qquad \text{für alle } c > 0 \tag{16}$$

gilt.

Beweis. Ist (16) erfüllt, dann gilt (13) und nach Satz 6 ist ξ hdx-glv. in $[0,\infty[$. Wir setzen nun umgekehrt die Gültigkeit von (13) voraus, geben $c > 0$ und die natürliche Zahl m vor und wählen N_o derart, dass

$$\left| \frac{B_h(\xi; \frac{kc}{m}, \frac{(k+1)c}{m};N)}{N} - \frac{c}{m} \right| \leq \frac{1}{m^2}.$$

$$\text{für alle } N \geq N_o \text{ und } 0 \leq k \leq m-1.$$

Es seien a,b ($0 \leq a < b \leq c$) beliebig gegeben und

$$\frac{k_a c}{m} \leq a < \frac{(k_a+1)c}{m}$$

$$\frac{(k_b-1)c}{m} < b \leq \frac{k_b c}{m} .$$

Dann folgt (mit trivialen Änderungen für $a = \frac{k_a c}{m}$ oder $b = \frac{k_b c}{m}$)

$$\left|\frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N}-(b-a)\right|\leq\left|\frac{B_h(\xi;\frac{k_a c}{m},\frac{k_b c}{m};N)}{N}-\frac{(k_b-k_a)c}{m}\right|+$$

$$+\frac{B_h(\xi;\frac{k_a c}{m},a;N)}{N}+\frac{B_h(\xi;b,\frac{k_b c}{m};N)}{N}$$

$$+\left(a-\frac{k_a c}{m}\right)+\left(\frac{k_b c}{m}-b\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{m}+2.\left(\frac{1}{m^2}+\frac{c}{m}\right)+2\frac{c}{m}\text{ für alle } N\geq N_o.$$

Ist m so gross gewählt worden, dass der letzte Ausdruck kleiner als ε ist, dann gilt $E_h(\xi,N,c)\leq\varepsilon$ für alle $N\geq N_o$. Damit ist (16) bewiesen.

Ist f eine komplexwertige Funktion auf $[0,\infty[$, dann heisst die abgeschlossene Hülle der Menge $\{x\in[0,\infty[\ :\ f(x)\neq 0\}$ bekanntlich der Träger von f.

Satz 9. Es sei $h\in R^+([0,\infty])$ wie in (8) und $\xi=\{x_n\}$ eine Folge in $[0,\infty[$. Ferner sei f eine reellwertige Funktion auf $[0,\infty[$, deren Träger in $[0,c[$ enthalten ist und die auf $[0,c[$ von beschränkter Variation V(f) ist. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{f(x_n)}{h(x_n)}-\int_0^c f(x)dx\right|\leq V(f)E_h(\xi,N,c),\text{ für alle } N\geq 1. \tag{17}$$

Beweis. Wegen f(c) = 0 schliessen wir wie im Beweis von Satz 4

$$N\int_0^c f(x)dx-\sum_{n=1}^{N}\frac{f(x_n)}{h(x_n)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{f(c)-f(x_n)}{h(x_n)}+Nf(x).x\Big/_0^c+$$

$$-N\int_0^c x\,df(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\int_{x_n}^{c}\frac{1}{h(x_n)}\,df(x)-N\int_0^c x\,df(x)\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{N}\int_0^c\frac{\chi_{[0,x[}(x_n)}{h(x_n)}\,df(x)-N\int_0^c x\,df(x)=$$

$$=\int_0^c\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi_{[0,x[}(x_n)}{h(x_n)}-Nx\right]df(x)\leq N.E_h(\xi,N,c).V(f).$$

Eine Anwendung derselben Ungleichung auf die Funktion $-f$ liefert wieder das gewünschte Resultat.

Ist die reellwertige Funktion f auf dem Intervall $[0,c]$ von beschränkter Variation $V(f,c)$, dann ist die Variation der Funktion $f\chi_{[0,c]}$ auf jedem Intervall $[0,c+\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ nach oben beschränkt durch $V(f,c)+|f(c)|$. Setzen wir

$$E_h^+(\xi,N,c)=\lim_{\varepsilon\to 0} E_h(\xi,N,c+\varepsilon)$$

dann erhalten wir durch Anwendung von Satz 9 folgendes Korollar:

Kor.9.1: Es sei $h\in R^+([0,\infty])$ wie in (8) und $\xi=\{x_n\}$ eine Folge in $[0,\infty[$. Ferner sei f eine reellwertige Funktion auf $[0,\infty[$, die in jedem Intervall $[0,c]$ von beschränkter Variation $V(f,c)$ ist. Dann gilt

$$(18)\qquad \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{f(x_n)}{h(x_n)}\chi_{[0,c]}(x_n)-\int_0^c f(x)\,dx\right|\leq\left[V(f,c)+|f(c)|\right]\cdot$$

$$\cdot\, E_h^+(\xi,N,c)\qquad \text{für alle } c>0 \text{ und alle } N\geq 1.$$

Während die Diskrepanz (6) bei gegebener Folge ξ nur von N abhängt, geht in $E_h(\xi,N,c)$ noch der Parameter c ein. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Monotonie von h (wie sie beispielsweise für $h(x)=e^{-x}$ gegeben ist) können wir beide Diskrepanzbegriffe auf einfache Weise miteinander in Verbindung bringen. Die Notwendigkeit einer zusätzlichen Annahme über h wird klar, wenn wir bedenken, dass bei festem N die Diskrepanz $E_h(\xi,N,c)$ nur von den Werten von h an den endlich vielen Stellen $x_1,\dots,x_N$ abhängt, zur Bildung der Diskrepanz $D_\varphi(\xi,N)$ aber wegen $\varphi(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ die Gesamtheit aller Werte von h herangezogen wird.

Satz 10: Es sei $h\in R^+([0,\infty])$ wie in (8) und monoton fallend, sowie $\varphi(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ für $x\geq 0$ und ξ eine Folge in $[0,\infty[$. Dann gilt

$$E_h(\xi,N,c)\leq\frac{2}{h(c)}D_\varphi(\xi,N)\qquad \text{für alle } c>0 \text{ und alle } N\geq 1.$$

<u>Beweis</u>: Für $0 \leq a < b \leq c$ gilt

$$\left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_{[a,b[}(x_n)}{h(x_n)} + - \int_0^\infty \frac{\chi_{[a,b[}(x)}{h(x)} h(x)\,dx \right|.$$

Die Funktion $\frac{\chi_{[a,b[}}{h}$ ist auf $[0,\infty[$ von beschränkter Variation und zwar hat ihre Schwankung dort den Wert $\frac{2}{h(b)}$. Nach Satz 7 gilt wegen $\frac{2}{h(b)} \leq \frac{2}{h(c)}$

$$\left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| \leq \frac{2}{h(c)} D_\varphi(\xi,N),$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir wenden dies wieder speziell auf den Fall $h(x)=e^{-x}$ an und erhalten aus Kor.9.1 unter Berücksichtigung von (7) folgendes Ergebnis:

<u>Satz 11</u>: Es sei f eine reellwertige Funktion auf $[0,\infty[$, die in jeden Intervall $[0,c]$ von beschränkter Variation $V(f,c)$ ist und $\eta = \{y_n\}$ eine Folge in $]0,1[$. Dann gilt

$$(19) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(-\log y_n)}{y_n} \chi_{[0,c]}(-\log(y_n)) + - \int_0^c f(x)\,dx \right| \leq 2\left[V(f,c)+|f(c)|\right] e^c D(\eta,N)$$

für alle $c > 0$ und $N \geq 1$.

Aus Satz 9 und 10 geht hervor, dass bei gegebener Folge η und monoton fallender Funktion h die Approximation in (17) um so besser ist, je langsamer h für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Anschaulich ist das auch deshalb klar, weil die Funktion $\varphi(x) = \int_0^x h(t)dt$ dann für $x \to \infty$ gleichmässiger gegen 1 konvergiert und die Glieder der Folge $\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ sich gleichmässiger über die positive Halb gerade verteilen. Wählen wir an Stelle der Funktion $h(x) = e^{-x}$ etwa die Funktion $h(x) = \frac{\varepsilon}{(x+1)^{1+\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0$), dann tritt an Stelle von (19) die Formel

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f\left(\frac{1}{y_n^{\frac{1}{\varepsilon}}}-1\right)}{\varepsilon y_n^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} \chi_{[0,c]}\left(\frac{1}{y_n^{\frac{1}{\varepsilon}}}-1\right) - \int_0^c f(x)\,dx \right| \leq 2\left[V(f,c)+|f(c)|\right] \cdot \frac{(c+1)^{1+\varepsilon}}{\varepsilon} D(\eta,N),$$

speziell für $\varepsilon=1$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f\left(\frac{1}{y_n}-1\right)}{y_n^2} \chi_{[0,c]}\left(\frac{1}{y_n}-1\right) - \int_0^c f(x)\,dx \right| \leq 2\left[V(f,c)+|f(c)|\right] \cdot (c+1)^2 D(\eta,N)$$

und bei Wahl von $h(x) = \dfrac{1}{(x+e)\left[\log(x+e)\right]^2}$ die Formel

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\frac{1}{y_n}} f\left(e^{\frac{1}{y_n}}-e\right)}{y_n^2} \chi_{[0,c]}\left(e^{\frac{1}{y_n}}-e\right) - \int_0^c f(x)\,dx \right| \leq 2\left[V(f,c)+|f(c)|\right] \cdot (c+e)\left[\log(c+e)\right]^2 . D(\eta,N) .$$

Mit Hilfe von Satz 10 können wir noch eine zu Satz 8 analoge Aussage beweisen, in der der Parameter c nicht mehr aufscheint.

Satz 12: Es sei $h \in R^+([0,\infty])$ wie in (8) und monoton fallend. Für eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in $[0,\infty[$ sei $E_h(\xi,N)$ definiert durch

$$E_h(\xi,N) = \sup_{0 \leq a < b \leq c < \infty} h(c) \left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| .$$

Dann ist $E_h(\xi,N)$ endlich.

Die Folge ξ ist genau dann hdx-glv. in $[0,\infty[$, wenn

$$\lim_{N \to \infty} E_h(\xi,N) = 0. \tag{20}$$

Beweis: Wir setzen $\varphi(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ für $x \geq 0$. Für $0 \leq a < b \leq c < \infty$ gilt

$$h(c) \left| \frac{B_h(\xi;a,b;N)}{N} - (b-a) \right| \leq h(c) E_h(\xi,N,c) \leq 2 D_\varphi(\xi,N),$$

also

$$E_h(\xi,N) \leq 2D_\varphi(\xi,N)$$

und weiter (20), falls ξ in $[0,\infty[$ hdx-glv. ist.

Andrerseits gilt

(21) $$h(c)E_h(\xi,N,c) \leq E_h(\xi,N) \quad \text{für alle } c>0 \text{ und alle } N\geq 1.$$

Aus (20) folgt also wegen $h(c) \neq 0$ die Gültigkeit von (16) und damit die hdx-Gleichverteilung von ξ in $[0,\infty[$.

Wir bemerken zum Schluss, dass wegen (21) bei monoton fallender Funktion h in (17) die Diskrepanz $E_h(\xi,N,c)$ und in (18) (wegen der Stetigkeit von h) die Diskrepanz $E_h^+(\xi,N,c)$ jeweils durch den Ausdruck $\frac{1}{h(c)} E_h(\xi,N)$ ersetzt werden kann.

II. Folgen in lokal kompakten nicht kompakten Räumen

5. Gleichverteilung bezüglich normierter Borelmasse.

Im folgenden sei X ein lokal kompakter nicht kompakter Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis $\mathcal{V} = \{V_n : n \geq 1\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass alle V_n offen sind und kompakte abgeschlossene Hülle besitzen. Das Komplement einer Menge A in X bezeichnen wir mit A', ihre abgeschlossene Hülle in X mit $\overline{A}$.

Es sei $X^* = X \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X. Die offenen Umgebungen von ∞ in X^* sind bekanntlich die Vereinigungsmengen von $\{\infty\}$ mit den Komplementen der kompakten Mengen in X. Ist A eine beliebige kompakte Menge in X und $A \subset \bigcup_{n=1}^{m} V_n$, dann ist $\{\infty\} \cup (\bigcup_{n=1}^{m} \overline{V}_n)'$ eine in der offenen Menge $\{\infty\} \cup A'$ enthaltene offene Umgebung von ∞ in X^*. Da es nur abzählbar viele Mengen von der Form $(\bigcup_{n=1}^{m} \overline{V}_n)'$ gibt, besitzt auch X^* eine abzählbare Umgebungsbasis.

Die Klassen der Borelmengen in X bzw. X^*, d.h. die von allen kompakten Mengen in X bzw. X^* erzeugten σ-Ringe (in diesem speziellen Falle σ-Algebren, vgl. [4] § 5 und § 51) seien mit $\mathcal{B}$ bezw. $\mathcal{B}^*$ bezeichnet. Offenbar gilt $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{E \cup \{\infty\} : E \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{B}^*$. Andrerseits enthält $\mathcal{B}_1$ alle Mengen der eben konstruierten Umgebungsbasis in X^*, also auch alle offenen Mengen in X^*, als ihre Komplemente alle kompakten Mengen in X^* und damit (da $\mathcal{B}_1$ offenbar ein σ-Ring ist) alle Borelmengen in X^*. Es gilt also $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{E \cup \{\infty\} : E \in \mathcal{B}\}$.

Infolge der Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxiomes ist jede Borelmenge auch Bairemenge und jedes Borelmass auch Bairemass und damit regulär (s. [4] § 51 und § 52). Ist μ ein Borelmass auf X und definieren wir $\mu^*(E) = \mu(E)$ und $\mu^*(E \cup \{\infty\}) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathcal{B}$ (also $\mu^*(\{\infty\}) = 0$), dann erhalten wir ein Mass μ^* auf X^*, das eine Erweiterung von μ darstellt und $\mu^*(X^*) = \mu(X)$ erfüllt. Die Menge aller nichttrivialen Borelmasse auf X bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$, die Untermenge aller normierten Borelmasse ($\mu(X) = 1$) mit $\mathfrak{N}$. Die Mengen der entsprechenden auf X^* erweiterten Masse seien $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{N}^*$.

Es sei $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller stetigen komplex-wertigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger und $\mathcal{L}_\infty(X)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden (d.h. ausserhalb geeigneter kompakter Untermengen von X beliebig klein werden). $\mathcal{L}^+(X)$ und $\mathcal{L}^+_\infty(X)$ seien die entsprechenden Mengen von nichtnegativen Funktionen. Ferner bezeichnen wir mit $C(X^*)$, $R(X^*)$ und $R^+(X^*)$ beziehungsweise die Mengen aller stetigen komplexwertigen, reellwertigen und nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf X^* und mit $C^*(X)$, $R^*(X)$ und $R^{+*}(X)$ ihre Einschränkungen auf X. Schliesslich seien $C(X)$, $R(X)$ und $R^+(X)$ beziehungsweise die Mengen aller stetigen komplexwertigen, reellwertigen und nichtnegativen reellwertigen Funktionen auf X. $C^*(X)$ ist die Menge jener Funktionen $f \in C(X)$, für die der endliche Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert. Es gilt $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{L}_\infty(X) \subset C^*(X) \subset C(X)$, $\mathcal{L}_\infty(X)$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{L}(X)$ in der Norm $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ und $C^*(X) = \{\alpha.1 + f : \alpha \text{ komplex}, f \in \mathcal{L}_\infty(X)\}$.
Im folgenden denken wir uns nötigenfalls die Funktionen aus $C^*(X)$ auch ohne Änderung der Bezeichnung stetig auf X^* fortgesetzt. Eine Funktion $f \in R^{+*}(X)$ heisse Urysohn-Funktion, wenn $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ gilt.

Es sei $\mu^* \in \mathcal{N}^*$ gegeben. Eine Folge $\{x_n\}$ in X^* heisst bekanntlich $d\mu^*$- glv. in X^*, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_{X^*} f(x)\, d\mu^*(x) \quad \text{für alle } f \in C(X^*) \tag{22}$$

gilt (s. [3] § 1; wir verwenden $d\mu^*$ an Stelle von μ^* zur Kennzeichnung des Masses, um wie in Teil I die Schreibweise bei der Betrachtung absolut stetiger Masse beibehalten zu können). Um eine sinnvolle Verallgemeinerung zu erhalten und Sätze über Gleichverteilung in kompakten Räumen anwenden zu können, verwenden wir folgende Definition.

Def.2. Es sei $\mu \in \mathcal{N}$ gegeben. Eine Folge $\{x_n\}$ in X heisst $d\mu$ -glv. in X, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}(X) \tag{23}$$

gilt.

Der Träger $T(\mu)$ eines Masses μ ist bekanntlich die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte in X, für die jede Umgebung positives Mass besitzt. Falls $T(\mu)$ kompakt ist, ist Definition 2 konsistent mit der Definition der $d\mu$-Gleichverteilung der Folge $\{x_n\}$ im kompakten Raum $T(\mu)$. Von Interesse sind für uns im folgenden allerdings vorwiegend Masse mit nicht kompaktem Träger.

Hilfssatz 1: Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben. Die Folge $\{x_n\}$ in X ist genau dann $d\mu$-glv. in X, wenn sie $d\mu^*$-glv. in X^* ist.

Beweis: Ist $\{x_n\}$ $d\mu^*$-glv. in X^*, dann gilt (22) und damit auch (23). Es sei nun $\{x_n\}$ $d\mu$-glv. in X. Wegen $\mu(X) = \mu^*(X^*) = 1$ gilt (22) jedenfalls für alle konstanten Funktionen auf X^*. Aus (23) folgt ferner die Gültigkeit dieser Gleichung für alle Funktionen $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$, da sich jede solche Funktion durch Funktionen aus $\mathcal{L}(X)$ gleichmässig approximieren lassen. Da jede Funktion $f \in C(X^*)$ Summe einer Konstanten und einer Funktion aus $\mathcal{L}_\infty(X)$ ist, gilt (22).

Offenbar kann in (23) $\mathcal{L}(X)$ durch $\mathcal{L}^+(X)$, $C^*(X)$, $R^*(X)$ und $R^{+*}(X)$ ersetzt werden. Ausserdem gilt (23) nach Hilfssatz 1 und [3] Satz 6 noch für die in Definition 3 beschriebene grössere Klasse von beschränkten, aber nicht notwendigerweise stetigen Funktionen.

Def.3: Eine reellwertige Borel-messbare Funktion f auf X heisst bezüglich eines Masses $\mu \in \mathfrak{M}$ R-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R^*(X)$ derart gibt, dass $f_1 \leq f \leq f_2$ und $\int_X [f_2(x) - f_1(x)] d d\mu(x) < \varepsilon$ gilt.

Für unsere Zwecke ist die im folgenden Hilfssatz angeführte Klasse von bezüglich eines Masses $\mu \in \mathfrak{N}$ R-integrierbaren Funktionen von besonderem Interesse:

Hilfssatz 2: Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und f eine beschränkte, Borel-messbare reellwertige Funktion auf X, die in X, abgesehen von einer abgeschlossenen μ-Nullmenge A, stetig ist. Dann ist f bezüglich μ R-integrierbar.

Beweis: Wir setzen wie üblich $f^+ = \max(0, f)$ und $f^- = \max(0, -f)$. Dann gilt $f = f^+ - f^-$ und f^+, f^- besitzen die gleichen Eigenschaften wie

f. Da Differenz zweier R-integrierbarer Funktionen wieder R-integrierbar ist, genügt es, die Behauptung für eine nichtnegativwertige Funktion f zu beweisen.

Wir definieren $f(\infty) = 0$ und setzen $A^{*} = A \cup \{\infty\}$. Dann ist A^{*} eine kompakte μ^{*}-Nullmenge in X^{*} und f ist stetig auf $X^{*} \setminus A^{*}$ ($\setminus$ bedeute Mengentheoretische Subtraktion). Es sei W_1 eine offene Umgebung von A^{*} in X^{*}, für die $\mu^{*}(W_1) < \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|+1}$ gilt. Ferner sei W_2 eine offene Umgebung von A^{*} in X^{*} und $\overline{W}_2 \subset W_1$. Wir wählen zwei Urysohn-Funktionen $h_1, h_2 \in R^{+}(X^{*})$ derart, dass

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \in W_2 \\ 1 \text{ für } x \notin W_1 \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \in A^{*} \\ 1 \text{ für } x \notin W_2 \end{cases}$$

gilt. Wir setzen $f_1 = f.h_1$ und $f_2 = f.h_2 + \|f\|.(1-h_1)$. Dann gilt

$$f_1(x) = f(x) = f_2(x) \quad \text{für } x \notin W_1$$

$$f_1(x) = f(x)h_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x) = f(x) + \|f\|(1-h_1)(x))$$

$$\text{für } x \in W_1 \setminus W_2$$

$$f_1(x) = 0 \leqq f(x) \leqq f_2(x) = f(x)h_2(x) + \|f\| \text{ für } x \in W_2,$$

also $f_1 \leqq f \leqq f_2$ insbesondere auf X. Wegen $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = \|f\|$ für $x \in A^{*}$ sind f_1 und f_2 stetig auf X^{*}. Ferner gilt

$$f_2(x) - f_1(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \notin W_1 \\ \leqq 2\,\|f\| & \text{für } x \in W_1 \end{cases} .$$

Es folgt

$$\int_X [f_2(x)-f_1(x)]\, d\mu(x) = \int_{X^{*}} [f_2(x)-f_1(x)]\, d\mu^{*}(x) \leqq$$

$$\leqq 2\,\|f\|\,\mu^{*}(W_1) < \varepsilon.$$

Nach Hilfssatz 2 ist die charakteristische Funktion χ_E jeder Borelmenge E in X, deren Rand das Mass 0 hat, bezüglich μ R-integrierbar. Setzen wir in (23) $f = \chi_E$, dann erhalten wir die

Aussage, dass für eine in X $d\mu$ -glv. Folge $\{x_n\}$ ihre relative Häufigkeit in E gegen das Mass von E strebt (s. [3] Satz 6). Dass sich diese Aussage sogar unter schwächeren Voraussetzungen auch umkehren lässt, hat mir vor einigen Jahren Herr Professor Hlawka (damals bezugnehmend auf den Fall eines kompakten Raumes X) brieflich mitgeteilt. Da in der allgemein zugänglichen Literatur ein entsprechender Satz meines Wissens noch nicht zu finden ist (vgl. [8] § 2.8), sei der Beweis des folgenden Satzes vollständigkeitshalber zur Gänze wiedergegeben.

<u>Satz 13</u>: Es sei $\mu \in \mathcal{N}$ und eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in X gegeben. Für eine Borelmenge $E \in \mathcal{B}$ und $N \geqq 1$ sei $A(\xi;E;N)$ definiert durch

$$A(\xi;E;N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_E(x_n).$$

Die Folge ξ ist genau dann $d\mu$ -glv. in X, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(\xi;E;N)}{N} = \mu(E) \tag{24}$$

für alle kompakten Borelmengen $E \in \mathcal{B}$ gilt, deren Rand das Mass 0 besitzt.

<u>Beweis</u>: Nach dem oben gesagten haben wir den Beweis nur mehr in einer Richtung zu führen. Es sei (24) erfüllt und $f \in \mathcal{L}^+(X)$ gegeben. Für jede reelle Zahl $\alpha \geqq 0$ setzen wir $E_\alpha = \{x : f(x) \geqq \alpha\}$. E^o bezeichne den offenen Kern von E. Für $0 \leqq \alpha < \beta$ gilt $E_\alpha = \overline{E}_\alpha \supset E^o_\alpha \supset \{x : f(x) > \alpha\} \supset E_\beta = \overline{E}_\beta \supset E^o_\beta$. Die Randmengen $E_\alpha \setminus E^o_\alpha$ und $E_\beta \setminus E^o_\beta$ sind daher disjunkt. Wegen $\mu(X) = 1$ können höchstens abzählbar viele Mengen E_α positives Mass haben. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wählen wir $\alpha_o = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \|f\| < \alpha_n$ derart, dass $\alpha_i - \alpha_{i-1} < \varepsilon$ und $\mu(E_{\alpha_i} \setminus E^o_{\alpha_i}) = 0$ für $1 \leqq i \leqq n$ gilt. Für i=0 ist $E_{\alpha_o} = X$, für $i \geqq 1$ sind die Mengen E_{α_i} kompakt.

Es folgt

$$f(x) - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \chi_{E_{\alpha_i} \setminus E_{\alpha_{i+1}}}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\chi_{E_{\alpha_i}}(x) - \chi_{E_{\alpha_{i+1}}}(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_i}}(x) = f_1(x) \leqq f(x)$$

$$f(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_{\alpha_{i-1}} \setminus E_{\alpha_i}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) - \chi_{E_{\alpha_i}}(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{E_{\alpha_{i-1}}}(x) = f_2(x) \leqq f(x) + \varepsilon$$

für alle $x \in X$. Wegen (24) erhalten wir

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) - \varepsilon \leqq \int_X f_1(x)\,d\mu(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(x_n) \leqq$$

$$\leqq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) + \varepsilon \geqq \int_X f_2(x)\,d\mu(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(x_n) \geqq$$

$$\geqq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n).$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt (23).

Ist das Mass $\mu \in \mathfrak{N}$ nicht auf einer abzählbaren Menge in X konzentriert und $\xi = \{x_n\}$ eine beliebige Folge in X, dann gibt es kompakte Mengen E von positivem Mass, für die $A(\xi;E;N) = 0$ für alle $N \geqq 1$ gilt. Die Menge $X \setminus \{x_n : n \geqq 1\}$ ist nämlich offen und von positivem Mass. Aus der Regularität von μ folgt die Behauptung. Die Gleichung (24) gilt im allgemeinen also auch bei $d\mu$ -Gleichverteilung der Folge ξ in X nicht für alle kompakten Mengen. Andrerseits sieht man wie im Beweis von Satz 14 leicht, dass jede offene Umgebung einer kompakten Menge eine kleinere offene Umgebung dieser Menge enthält, deren Rand das Mass 0 besitzt. Wenden wir das auf die abzählbare Menge jener Paare $V_n, V_m \in \mathcal{O}$ an, für die $\overline{V}_n \subset V_m$ gilt, dann sehen wir, dass wir bei gegebenem Mass $\mu \in \mathfrak{N}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass der Rand jeder Menge der Umgebungsbasis $\mathfrak{W}$ das Mass 0 besitzt. Aus (24) folgt dann, dass jede $d\mu$ -glv. Folge im Träger des Masses μ dicht liegt.

Ist $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben, dann ist die Existenz $d\mu$ -glv. Folgen in X durch ein bekanntes metrisches Resultat über Folgen in kompakten Räumen gesichert (s. [3] Satz 11), das sich auch auf den Fall eines lokal kompakten nicht kompakten Raumes übertragen lässt. Es sei X_∞ die Menge aller Folgen in X (also das kartesische Produkt von abzählbar vielen Exemplaren der Menge X) und X^*_∞ die Menge aller Folgen in X^*. In X_∞ bzw. X^*_∞ führen wir mittels μ bzw. μ^* wie üblich ein normiertes Mass μ_∞ bzw. μ^*_∞ ein, indem wir das Produkt von abzählbar vielen Exemplaren der Massräume $(X,\mathcal{B},\mu)$ bzw. $(X^*,\mathcal{B}^*,\mu^*)$ bilden (s. [4] § 38). Dabei ist $(X_\infty,\mathcal{B}_\infty,\mu_\infty)$ die Einschränkung von $(X^*_\infty,\mathcal{B}^*_\infty,\mu^*_\infty)$ auf die Menge $X_\infty \in \mathcal{B}^*_\infty$, die wir auch erhalten, wenn wir von X^*_∞ die μ^*_∞-Nullmenge aller Folgen in X^* abziehen, für die mindestens ein Glied (d.h. eine Koordinate in X^*_∞) gleich ∞ ist. Da μ^*_∞-fast alle Folgen in X^* $d\mu^*$-glv. sind, sind μ_∞-fast alle Folgen in X $d\mu^*$-glv. in X^*. Aus Hilfssatz 1 schliessen wir:

<u>Satz 14</u>: Es sei $\mu \in \mathcal{N}$ gegeben und μ_∞ das zugehörige Produktmass im messbaren Folgenraum $(X_\infty,\mathcal{B}_\infty)$. Dann ist μ_∞-fast jede Folge in X $d\mu$-glv. in X.

Da es zu jedem Mass $\mu \in \mathcal{N}$ $d\mu$-glv. Folgen gibt, lässt sich auch jede in X überall dichte Folge zu einer $d\mu$-glv. Folge umordnen (s. [3] Satz 17).

6. Unbeschränkte Funktionen

Es sei wieder $\mu \in \mathcal{N}$ gegeben. Aus Hilfssatz 2 und der Bemerkung, die Definition 3 vorangeht, folgt, dass für eine $d\mu$-glv. Folge $\{x_n\}$ in X die Beziehung (23) auch für alle beschränkten (und daher automatisch integrierbaren) stetigen komplexwertigen Funktionen auf X gilt. Wir untersuchen nun in welchem Masse die Beziehung (23) auch für integrierbare, aber unbeschränkte stetige Funktionen auf X zutrifft.

Es sei $f \in R^+(X)$ unbeschränkt und für jedes $k \geqq 1$ die beschränkte stetige Funktion f_k definiert durch $f_k(x) = \min\{f(x),k\}$ für alle $x \in X$. Ist die Folge $\{x_n\}$ $d\mu$-glv. in X, so erhalten wir

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \geqq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_k(x_n) =$$

$$= \int_X f_k(x)\,d\mu(x) \qquad \text{für alle } k \geqq 1.$$

Da die Folge $\{f_k\}$ monoton gegen f konvergiert, gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_X f_k(x)d\mu\ (x) = \int_X f(x)d\mu\ (x)$$

und daher jedenfalls

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \geqq \int_X f(x)d\mu\ (x). \tag{25}$$

Also trifft (23) sicher für alle nicht integrierbaren Funktionen aus $R^+(X)$ zu.

Die folgenden Sätze zeigen, dass die Gültigkeit von (23) im allgemeinen nicht auf alle stetigen integrierbaren Funktionen ausgedehnt werden kann, wie auch die $d\mu$ -glv. Folge $\{x_n\}$ in X gewählt wird. Für jede solche Folge gibt es aber sicher unbeschränkte integrierbare stetige Funktionen auf X, für die (23) erfüllt ist.

<u>Satz 15</u>: Es sei $\mu \in \mathcal{M}$ gegeben und $\{x_n : 1 \leqq n < \infty\}$ eine abzählbare μ -Nullmenge in X, deren abgeschlossene Hülle nicht kompakt ist. Dann existiert eine integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, dass

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \infty .$$

<u>Beweis</u>: Wir setzen $W_k = \bigcup_{m=1}^{k} V_m$ und erhalten eine monoton gegen X konvergierende Folge offener Mengen W_k mit kompakter abgeschlossener Hülle. Wir definieren induktiv eine Folge von Funktionen $f_s \in \mathcal{L}^+(X)$. Es sei $n_1 = 1$ und m_1 der kleinste Index m mit folgenden Eigenschaften:

$$x_1 \in V_m$$

$$\mu(V_m) < \tfrac{1}{2}.$$

Wir wählen die Urysohn-Funktion $f_1 \in \mathcal{L}^+(X)$ so, dass

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_1 \\ 0 & \text{für } x \notin V_{m_1} \end{cases}$$

gilt und erhalten

$$\int_X f_1(x)d\,\mu\,(x) \leqq \mu(V_{m_1}) < \tfrac{1}{2}.$$

Es seien die Funktionen $f_1,\dots,f_r \in \mathcal{L}^+(X)$ und die Indizes $m_1 < m_2 < \dots < m_r$, $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ bereits so gewählt, dass folgende

Bedingungen erfüllt sind:

1) $f_s(x) = 0$ für alle $x \notin V_{m_s}$ $(1 \leqq s \leqq r)$

2) $\overline{V}_{m_s} \cap \overline{V}_{m_t} = \emptyset$ $(1 \leqq s < t \leqq r)$

3) $x_n \in \overline{W}_{m_s}$ für $1 \leqq n \leqq n_s$ $(1 \leqq s \leqq r)$

4) $$\int_X f_s(x) d\,\mu(x) < \frac{1}{2^s} \qquad (1 \leqq s \leqq r)$$

5) $$\frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f_s(x_n) = s \qquad (1 \leqq s \leqq r).$$

Infolge unserer Voraussetzung sind nicht alle x_n in $\overline{W}_{m_r}$ enthalten. Es sei n_{r+1} der kleinste Index n derart, dass $x_n \notin \overline{W}_{m_r}$, sowie m_{r+1} der kleinste Index m mit folgenden Eigenschaften:

$$x_{n_{r+1}} \in V_m$$

$$\mu(V_m) < \frac{1}{(r+1)n_{r+1} 2^{r+1}}$$

$$\overline{V}_m \cap \overline{W}_{m_r} = \emptyset.$$

Wir wählen die Urysohn-Funktion $f'_{r+1} \in \mathcal{L}^+(X)$ so, dass

$$f'_{r+1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{n_{r+1}} \\ 0 & \text{für } x \notin V_{m_{r+1}} \end{cases}$$

gilt und setzen $f_{r+1} = (r+1)n_{r+1} f'_{r+1}$.

Offenbar gilt $n_{r+1} > n_r$ und $m_{r+1} > m_r$. Die Bedingungen 1) - 3) sind auch für r+1 an Stelle von r erfüllt. Ferner gilt

$$\int_X f_{r+1}(x) d\,\mu(x) \leqq (r+1)n_{r+1}\,\mu(V_{m_{r+1}}) < \frac{1}{2^{r+1}}$$

und wegen 3) und der Wahl von n_{r+1}

$$\frac{1}{n_{r+1}} \sum_{n=1}^{n_{r+1}} f_{r+1}(x_n) = \frac{1}{n_{r+1}} f_{r+1}(x_{n_{r+1}}) = r+1.$$

Nun setzen wir $f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s$. Wegen 1) und 2) ist f nichtnegativ reellwertig. Ausserdem gilt

$$f(x) = \sum_{s=1}^{r} f_s(x) \qquad \text{für alle } x \in \bigcup_{m=1}^{m_r} V_m = W_{m_r},$$

also ist f in jedem Punkt $x \in X$ stetig. Aus 4) erhalten wir

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_X f_s(x)d\mu(x) < 1.$$

Andrerseits folgt aus 5) für jedes $s \geq 1$

$$\frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f(x_n) \geq \frac{1}{n_s} \sum_{n=1}^{n_s} f_s(x_n) = s,$$

also

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \infty.$$

Die Voraussetzungen von Satz 15 sind insbesondere erfüllt, wenn μ nicht atomar ist (d.h. $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$ gilt; vgl. [4] § 40), nicht kompakten Träger besitzt und die Folge $\{x_n\}$ in X $d\mu$ - glv. ist.

Kor. 15.1: Es sei ein nicht atomares Mass μ mit nicht kompaktem Träger gegeben und $\{x_n\}$ eine $d\mu$ -glv. Folge in X. Dann existiert eine $d\mu$ -integrierbare Funktion f $R^+(X)$ derart, dass

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \infty.$$

Zwecks Vereinfachung der Sprechweise bedienen wir uns folgender Definition:

Def.3: Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ und eine Folge $\xi = \{x_n\}$ in X gegeben. Eine Borel-messbare komplexwertige Funktion f auf X heisst $(\xi, d\mu)$-summierbar, wenn f $d\mu$ -integrierbar ist und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

gilt.

Die Folge ξ ist also genau dann $d\mu$ -glv. in X, wenn jede Funktion $f \in R^{+*}(X)$ $(\xi, d\mu)$-summierbar ist. Unter den Voraussetzungen von Korollar 15.1 gibt es aber stets eine integrierbare Funktion $f \in R^{+}(X)$, die nicht $(\xi, d\mu)$-summierbar ist.

Besitzt das Mass $\mu \in \mathfrak{M}$ einen kompakten Träger $T(\mu)$ und ist die $d\mu$ -glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in $T(\mu)$ enthalten (solche Folgen gibt es stets), dann trifft die Aussage von Kor. 15.1 sicher nicht mehr zu, da jede Funktion $f \in C(X)$ auf $T(\mu)$ stetig und beschränkt, also auch $(\xi, d\mu)$-summierbar ist. Dass auch die andere Voraussetzung in Kor. 15.1 nicht einfach fallen gelassen werden kann, zeigt das folgende Beispiel.

Es sei X die Menge aller natürlichen Zahlen in der diskreten Topologie und $\mu \in \mathfrak{M}$ definiert durch

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{2^k} \qquad (1 \leqq k < \infty).$$

Die Menge aller integrierbaren komplexwertigen Funktionen ist einfach die Menge aller Folgen f von komplexen Zahlen, für die die Reihe

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k}$$

konvergiert. Beispielsweise ist die durch $f(k) = \frac{2^k}{k^2}$ definierte Funktion auf X unbeschränkt (es gilt sogar $\lim_{k \to \infty} f(k) = \infty$), aber $d\mu$ -integrierbar.

Wir definieren die Folge $\xi = \{x_n\}$ in X folgendermassen:

$$x_{2m-1} = 1 \qquad \text{für alle } m \geqq 1$$

$$x_{2(2m-1)} = 2 \qquad \text{für alle } m \geqq 1$$

$$x_{4(2m-1)} = 3 \qquad \text{für alle } m \geqq 1$$

$$\cdots\cdots,$$

allgemein

(26) $$x_{2^{k-1}(2m-1)} = k \quad \text{für alle } m \geqq 1,\ k \geqq 1.$$

Da jede natürliche Zahl n auf genau eine Weise in der Form

$$n = 2^{k-1}(2m-1) \qquad (m \geqq 1,\ k \geqq 1)$$

geschrieben werden kann, ist die Folge ξ durch (26) wohldefiniert. Ist $k \geqq 1$ gegeben, dann gilt (für die einpunktige Menge $\{k\}$)

$$A(\xi;\{k\};N) = m \text{ für } 2^{k-1}(2m-1) \leqq N < 2^{k-1}(2m+1)$$

$(m \geqq 1)$, und für solche N weiter

$$\frac{m}{2^{k-1}(2m+1)} < \frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} \leqq \frac{m}{2^{k-1}(2m-1)}$$

$$\frac{-1}{2^{k}(2m+1)} < \frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k} \leqq \frac{1}{2^k(2m-1)},$$

also

(27) $$\left|\frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k}\right| \leqq \frac{1}{2^k(2m-1)} \quad \text{für } 2^{k-1}(2m-1) \leqq N < 2^{k-1}(2m+1).$$

Insbesondere gilt

(28) $$\left|\frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k}\right| \leqq \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } N \geqq 1.$$

Für $N \geqq 2^{k-1}$ folgt dies aus (27), wenn wir m=1 setzen, für $N < 2^{k-1}$ ist $A(\xi;\{k\};N) = 0$ und (28) daher ebenfalls erfüllt.

Es sei nun f eine beliebige komplexwertige $d\mu$ -integrierbare Funktion auf X und $\varepsilon > 0$ willkürlich gegeben. Wir wählen erst k_o so gross, dass

$$\sum_{k=k_o+1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k} < \varepsilon$$

gilt. Da bei gegebenem k in (27) mit N auch m gegen ∞ wächst, können wir einen Index N_o derart finden, dass

$$\left|\frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{k_o(1+|f(k)|)} \quad \text{für alle } N \geqq N_o \text{ und für } 1 \leqq k \leqq k_o$$

gilt. Es folgt

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_X f(x)\,d\mu(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} f(k) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{2^k}\right| \leqq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_o} \left| \frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| \, |f(k)| \, +$$

$$+ \sum_{k=k_o+1}^{\infty} \left| \frac{A(\xi;\{k\};N)}{N} - \frac{1}{2^k} \right| \, |f(k)| \leq \sum_{k=1}^{k_o} \frac{\varepsilon \, |f(k)|}{k_o(1+|f(k)|)} \, +$$

$$+ \sum_{k=k_o+1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{2^k} \leq 2\varepsilon \qquad \text{für } N \geq N_o .$$

Also ist die Funktion $f(\xi, d\mu)$-summierbar.

In einem lokal kompakten nicht kompakten Hausdorffschen Raum X gibt es stets eine abzählbare Menge $\{a_k : 1 \leq k < \infty\}$ ohne Häufungspunkte. Identifizieren wir die natürliche Zahl k mit dem Folgenglied a_k und übertragen wir die eben angestellten Überlegungen auf das durch

$$\mu(\{a_k\}) = \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

auf X definierte rein atomare Mass $\mu \in \mathfrak{N}$, dann erhalten wir: In einem lokal kompakten, nicht kompakten Hausdorffschen Raum X gibt es stets ein rein atomares Mass $\mu \in \mathfrak{N}$ mit nicht kompakten Träger und eine $d\mu$-glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ derart, dass jede $d\mu$-integrierbare komplexwertige Funktion $(\xi, d\mu)$-summierbar ist.

Für eine reellwertige Funktion f auf X schreiben wir wie üblich $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, falls f ausserhalb geeignet gewählter kompakter Mengen durch beliebig grosse positive Konstanten nach unten beschränkt ist.

<u>Satz 15</u>. Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine in X $d\mu$-glv. Folge. Dann gibt es eine $(\xi, d\mu)$-summierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, dass $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

<u>Beweis</u>: Während es im Beweis von Satz 15 darauf an kam, eine Funktion zu konstruieren, die auf den Gliedern der Folge ξ möglichst häufig hinreichend grosse Werte annahm, konstruieren wir nun eine Funktion die auf den Gliedern der Folge ξ so selten grosse Werte annimmt, dass diese die Schwankung der Folge $\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\}$ nicht stark beeinflussen können.

Wir setzen wie im Beweis von Satz 15 $W_k = \bigcup_{m=1}^{k} V_m$ und können ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass der Rand jeder Menge V_m das Mass null hat. Wegen

$$\overline{W}_k \setminus W_k \subset \bigcup_{m=1}^{k} (\overline{V}_k \setminus V_k)$$

trifft dasselbe für jede Menge W_k zu. Wir bestimmen wieder induktiv eine Teilfolge $\{W_{k_s}\}$ und eine Folge von Urysohn-Funktionen $f_s \in R^+(X)$ und setzen $k_1=1$ und $f_1(x) = 1$ für alle $x \in X$. Ausserdem wählen wir $N_1 \geqq 1$ so gross, dass

$$\left| \frac{A(\xi;W_1';N)}{N} - \mu(W_1') \right| < 1 \qquad \text{für alle } N \geqq N_1$$

gilt.

Es seien die Indizes $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, die Zahlen $N_1 < N_2 < \ldots < N_r$ und die Urysohn-Funktionen $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_r$ in $R^+(X)$ bereits so gewählt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $x_n \in W_{k_s}$ für $1 \leqq n \leqq N_{s-1}$ $\quad (1 \leqq s \leqq r)$

2) $\overline{W_{k_{s-1}}} \subset W_{k_s}$ $\quad (1 \leqq s \leqq r)$

3) $\mu(W'_{k_s}) \leqq \frac{1}{2^{s-1}}$ $\quad (1 \leqq s \leqq r)$

4) $f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in W_{k_{s-1}} \\ 1 & \text{für } x \notin W_{k_s} \end{cases}$ $\quad (1 \leqq s \leqq r)$

5) $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) - \int_X f_s(x)\,d\mu(x) \right| < \frac{1}{r^2}$ für alle $N \geqq N_r$ $\quad (1 \leqq s \leqq r)$

6) $\left| \frac{A(\xi;W'_{k_r};N)}{N} - \mu(W'_{k_r}) \right| < \frac{1}{r}$ für alle $N \geqq N_r$

(für $s = 1$ ist Bedingung 1) leer und Bedingung 2) und 4) erfüllt, wenn wir formal $W_{k_0} = \emptyset$ setzen). Wir bestimmen zunächst den Index $k_{r+1} > k_r$ so, dass die Bedingungen 1) - 3) für $r+1$ an Stelle von s erfüllt sind und dann die Urysohn-Funktion $f_{r+1} \in R^+(X)$ so, dass Bedingung 4) auch für $r+1$ an Stelle von s erfüllt ist. Insbesondere gilt dann $f_{r+1} \leqq f_r$. Schliesslich wählen wir den Index $N_{r+1} > N_r$ so, dass 5) und 6) für $r+1$ an Stelle von r erfüllt sind.

Wir setzen nun $f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(x)$. Da die Folge $\{W_{k_s}\}$ durch Einschliessung vollständig geordnet ist, folgt aus 4)

$$f(x) = \sum_{s=1}^{r} f_s(x) \qquad \text{für alle } x \in W_{k_r} . \tag{29}$$

Wir ersehen daraus, dass f auf ganz X nichtnegativ reellwertig und stetig ist. Für alle $x \notin W_{k_r}$ gilt $f(x) \geqq r$, woraus $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ folgt. Ausserdem ist f wegen der Abschätzung

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_X f_s(x)\, d\mu(x) \leqq 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \mu(W'_{k_s}) \leqq 3$$

integrierbar.

Ist $N \geqq 1$ gegeben, dann ist r durch die Ungleichung $N_r \leqq N < N_{r+1}$ eindeutig bestimmt. Wir erhalten wegen Bedingung 1) und (29)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{s=1}^{r+2} f_s(x_n) \leqq \\
&\leqq \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} f_{r+1}(x_n) \leqq \\
&\leqq \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) + 2\, \frac{A(\xi ; W'_{k_r} ; N)}{N} \leqq \\
&\leqq \sum_{s=1}^{r} \left[\int_X f_s(x)\, d\mu(x) + \frac{1}{r^2} \right] + 2 \left[\mu(W'_{k_r}) + \frac{1}{r} \right] \leqq \\
&\leqq \int_X f(x)\, d\mu(x) + \frac{3}{r} + \frac{1}{2^{r-2}} .
\end{aligned}$$

Da mit N auch r gegen ∞ strebt, folgt

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leqq \int_X f(x)\, d\mu(x)\, .$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die Behauptung.

Ist eine Funktion $g \in R^+(X)$ gegeben, dann bezeichnen wir in Anlehnung an die für Funktionen einer reellen Veränderlichen gebräuchliche Schreibweise mit $O(g)$ die Menge aller komplex-wertigen Funktionen f auf X, für die es eine von f abhängige kompakte Menge A_f und eine ebenfalls von f abhängige positive Konstante c_f derart gibt, dass

$$|f(x)| \leq c_f\, g(x) \qquad \text{für alle } x \in A_f'$$

gilt.

Satz 17. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine $d\mu$ -glv. Folge in X. Ferner sei die Funktion $g \in R^+(X)$ $(\xi, d\mu)$-summierbar. Dann ist auch jede Funktion $f \in O(g) \cap C(X)$ $(\xi, d\mu)$-summierbar.

Beweis: Es genügt die Behauptung für Funktionen $f \in O(g) \cap R^+(X)$ nachzuweisen. Es sei solch eine Funktion f und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, sowie A eine kompakte Menge in X und c eine positive Konstante mit folgenden Eigenschaften

$$f(x) \leq cg(x) \qquad \text{für alle } x \in A'$$

$$\int_{A'} g(x)\, d\,\mu(x) < \frac{\varepsilon}{c}\,.$$

Ferner sei die Urysohn-Funktion $h \in \mathcal{L}^+(X)$ so gewählt, dass

$$h(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in A.$$

Dann gilt wegen $g = gh + g(1-h)$ und $gh \in \mathcal{L}^+(X)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_n(x_n)(1-h(x_n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n)h(x_n) =$$

$$= \int_X g(x)\, d\mu(x) - \int_X g(x)\, h(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \int_X g(x)(1-h(x))\, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_{A'} g(x)\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{c}\,,$$

also

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)(1-h(x_n)) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} cg(x_n)(1-h(x_n)) < \varepsilon$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)h(x_n) + \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)(1-h(x_n)) \leq$$

$$\leq \int_X f(x)\, h(x)\, d\mu(x) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \int_X f(x)\, d\mu(x) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus in Verbindung mit (25) die Behauptung.

Sind endlich viele $(\xi, d\mu)$-summierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in $R^+(x)$ gegeben, dann ist auch ihre Summe $f = \sum_{k=1}^{m} f_k$ $(\xi, d\mu)$-summierbar und damit auch jede Funktion der Klasse $O(f) \cap C(X)$, die sicher jede der Klassen $O(f_k) \cap C(X)$ $(1 \leqq k \leqq m)$ umfasst; im allgemeinen aber grösser als ihre Vereinigung sein wird. Dieses Resultat lässt sich in folgender Weise auf den Fall einer abzählbaren Menge von $(\xi, d\mu)$-summierbaren Funktionen $f_k \in R^+(X)$ übertragen:

Satz 18. Es sei $\mu \in \mathfrak{N}$ gegeben und $\xi = \{x_n\}$ eine $d\mu$-glv. Folge in X, sowie $\{f_k\}$ eine Folge von $(\xi, d\mu)$-summierbaren Funktionen in $R^+(X)$. Dann gibt es eine $(\xi, d\mu)$-summierbare Funktion $f \in R^+(X)$ derart, dass $f_k \in O(f)$ für alle $k \geqq 1$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 14 setzen wir $W_s = \bigcup_{m=1}^{s} V_m$. Für jede Funktion $g \in R^+(X)$ definieren wir

$$\|g\|_s = \sup \{|g(x)| : x \in \overline{W_s}\} \qquad (s \geqq 1).$$

Ferner sei

$$\sigma_k = \sup_{N \geqq 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_k(x_n) - \int_X f_k(x)\, d\mu(x) \right| \qquad (k \geqq 1).$$

Da jede Funktion f_k $(\xi, d\mu)$-summierbar ist, ist σ_k endlich.

Wir wählen zunächst eine monoton gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen c_k derart, dass

$$(30) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_X f_k(x)\, d\mu(x) < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_k < \infty$$

gilt. Wir bestimmen nun induktiv eine Teilfolge $\{c_{k_s}\}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_s < \ldots)$, für die

$$(31) \qquad c_{k_s} < \frac{1}{2^s(1 + \|f_s\|_s)} \qquad \text{für alle } s \geqq 1$$

erfüllt ist und betrachten die Funktion

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} f_s .$$

Auf jeder Menge W_s $(s \geqq 1)$ ist f wegen (31) eine gleichmässig konvergente Reihe stetiger Funktionen, also ist f auf ganz X nichtnegativ reellwertig und stetig. Wegen $c_{k_s} \leqq c_s$ und (30) ist f integrierbar und

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} \int_X f_s(x)\, d\mu(x) \leqq$$

$$\leqq \sum_{s=1}^{\infty} c_s \int_X f_s(x)\, d\mu(x).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $r \geqq 1$ so bestimmt, dass

$$\sum_{s=r+1}^{\infty} c_{k_s} \sigma_s \leqq \sum_{s=r+1}^{\infty} c_s \sigma_s < \varepsilon$$

gilt. Da jede Funktion f_s $(\xi, d\mu)$-summierbar ist, existiert ein $N_o \geqq 1$ derart, dass für jedes $s \leqq r$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) - \int_X f_s(x)\, d\mu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{r\, c_{k_s}}$$

für alle $N \geqq N_o$

gilt. Es folgt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_X f(x)\, d\mu(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{s=1}^{\infty} c_{k_s} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) - \int_X f_s(x)\, d\mu(x) \right] \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{s=1}^{r} c_{k_s} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_s(x_n) - \int_X f_s(x)\, d\mu(x) \right| + \sum_{s=r+1}^{\infty} c_{k_s} \sigma_s \leqq$$

$$\leqq r \cdot \frac{\varepsilon}{r} + \varepsilon = 2\varepsilon \qquad \text{für alle } N \geqq N_o .$$

Also ist f $(\xi, d\mu)$-summierbar. Ausserdem gilt

$$f_s \leqq \frac{1}{c_{k_s}} f ,$$

womit alles bewiesen ist.

7. Unbeschränkte Masse

Wir betrachten nun ein nicht notwendigerweise normiertes nicht triviales Borelmass μ auf X. Ist μ endlich, dann ist das Mass $\mu' = \frac{1}{\mu(X)}\,\mu$ normiert. Ist die Folge $\xi = \{x_n\}$ in X $d\mu'$glv., dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mu(X)}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

für alle $(\xi, \frac{d\mu}{\mu(x)})$-summierbaren Funktionen f, insbesondere für alle bezüglich μ R-integrierbaren reellwertigen Funktionen auf X.

Um die Integration auch im Falle eines unendlichen Masses μ auf die Durchschnittsbildung über Funktionswerte auf Elementen einer Folge ξ in X zurückführen zu können, gehen wir wie in Abschnitt 3 zu einem mit μ äquivalenten Mass μ' über. Um die Sätze der vorangehenden Abschnitte anwenden zu können, müssen wir aber sicherstellen, dass die Radon-Nikodym-Ableitung $h = \frac{d\mu'}{d\mu}$ und die zu ihr inverse Funktion $\frac{1}{h}$ stetig sind ([4] § 31, § 32).

<u>Hilfssatz 3</u>. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben. Dann existiert eine überall positive Funktion $h \in R^+(X)$ derart, dass $\int_X h(x)\, d\mu(x) = 1$.

<u>Beweis</u>: Für jedes $V_n \in \mathcal{W}$ sei $h_n \in \mathcal{L}^+(X)$ eine Urysohn-Funktion, die auf V_n positiv ist. Ferner sei $\{\alpha_n\}$ eine Folge positiver Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_X h_n(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Die Funktion $h' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n$ ist überall positiv, integrierbar und als Summe einer gleichmässig konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst stetig. Das Integral $\int_X h'(x)\, d\mu(x)$ ist sicher positiv, also besitzt die Funktion

$$h = \frac{1}{\int_X h'(x)\, d\mu(x)}\, h'$$

die verlangten Eigenschaften.

Ist μ endlich, dann können wir einfach $h = \frac{1}{\mu(X)}$ setzen. Ist μ unendlich, dann ist die Funktion h sicher nicht konstant. Durch geeignete Wahl der Funktionen h_n können wir stets erreichen, dass h im Unendlichen verschwindet. Beispielsweise können die Funktionen h_n infolge des Zusammenfallens von Borel- und Baire-Mengen in X und X^* so gewählt werden, dass sie ausserhalb von V_n verschwinden ([4] § 50 C,E, § 51 D). Dann gilt

$$h'(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n h_n(x) \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{für alle } x \notin \bigcup_{n=1}^{N} \overline{V}_n ;$$

also wird auch h ausserhalb geeigneter kompakter Mengen beliebig klein.

Ist $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und h wie in Hilfssatz 3, dann ist das durch

$$\mu'(E) = \int_E h(x)\ d\mu(x) \qquad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}$$

definierte Borelmass μ' normiert. Es existiert nach Satz 14 sicher eine $d\mu'$-glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in X. Für diese gilt dann

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \int_X g(x)h(x)d\mu(x) \quad \text{für alle } g \in O(1) \cap C(X), \tag{32}$$

sogar für alle bezüglich μ' R-integrierbaren reellwertigen Funktionen g auf X. Setzen wir in (32) f = gh, dann erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)\ d\mu(x). \tag{33}$$

<u>Satz 19</u>. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben und h wie in Hilfssatz 3, sowie $\xi = \{x_n\}$ eine Folge in X. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) Die Folge ξ ist $hd\mu$-glv.

b) (33) gilt für alle $f \in \mathfrak{L}(X)$.

c) (33) gilt für alle $f \in O(h) \cap C(X)$.

d) (33) gilt für alle bezüglich μ R-integrierbaren reellwertigen Funktionen $f \in O(h)$.

<u>Beweis</u>: Ist ξ $hd\mu$-glv. und $f \in O(h) \cap C(X)$ gegeben, dann gilt für die Funktion $g = \frac{f}{h} \in O(1) \subset C(X)$ die Gleichung (32), also für f=gh die Gleichung (33). Dies zeigt die Implikation a) $\Rightarrow$ c). Wegen

$\mathcal{L}(X) \subset O(h) \cap C(X)$ folgt b) aus c). Ist b) erfüllt und $g \in \mathcal{L}(X)$ gegeben, dann gilt (33) für die Funktion $f = gh \in \mathcal{L}(X)$, was auf die Gleichung (32) führt. Also trifft (32) für alle Funktionen $g \in \mathcal{L}(X)$ zu und ξ ist hdμ-glv.

Um die Äquivalenz a) $\Leftrightarrow$ d) zu erhalten, überlegen wir, dass die folgenden Feststellungen über die reellwertige Borelmessbare Funktion f gleichbedeutend sind:

1) Die Funktion $g = \frac{f}{h}$ ist bezüglich des Masses μ' R-integrierbar.
2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R^*(X)$ derart, dass $f_1 \leq \frac{f}{h} \leq f_2$ und $\int_X [f_2(x) - f_1(x)]\, h(x)\, d\mu(x) < \varepsilon$ gilt.
3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Funktionen $f_1', f_2' \in O(h) \cap R(X)$ derart, dass $f_1' \leq f \leq f_2'$ und $\int_X [f_2'(x) - f_1'(x)]\, d\mu(x) < \varepsilon$ gilt (aber nicht notwendigerweise $\frac{f_i}{h} \in R^*(X)$).
4) Die Funktion f liegt in O(h) und ist bezüglich des Masses μ R-integrierbar (die einschränkenden Funktionen in $R^*(X)$ können dann selbst in O(h) gewählt werden).

Es ist also d) äquivalent mit der Gültigkeit von (32) für alle bezüglich μ' R-integrierbaren reellwertigen Funktionen g; dies ist aber wieder äquivalent mit a).

Der Träger eines unendlichen Borelmasses μ ist sicher nicht kompakt. Ist μ nicht atomar, dann gibt es nach Korollar 15.1 zu jeder hdμ-glv. Folge $\xi = \{x_n\}$ in X stets eine hdμ-integrierbare Funktion $g \in R^+(X)$ derart, dass

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \infty$$

gilt. Setzen wir $f = gh$, dann ist $f \in R^+(X)$ dμ-integrierbar und

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \infty .$$

Im allgemeinen ist es also nicht möglich, die Folge ξ so zu wählen, dass (33) für alle dμ-integrierbaren Funktionen in C(X) zutrifft. Ein Gegenstück zu dieser Aussage liefert der folgende Satz.

Satz 20. Es sei $\mu \in \mathcal{M}$ gegeben und $g \in R^+(X)$ dμ-integrierbar. Dann gibt es eine Funktion h wie in Hilfssatz 3 derart, dass für jede hdμ-glv.

Folge $\{x_n\}$ in X

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)d\mu \qquad \text{für alle } f \in O(g) \cap C(X)$$

gilt.

Beweis: Wir wählen zuerst eine Funktion h_1 wie in Hilfssatz 3 und setzen

$$h = \frac{h_1+g}{1+\int_X g(x)d\mu(x)} .$$

Dann ist auch h eine Funktion von der in Hilfssatz 3 beschriebenen Art. Es sei nun die Folge $\{x_n\}$ in X $h d\mu$-glv. und die Funktion $f \in O(g) \cap C(X)$ gegeben. Dann ist die Funktion $\frac{f}{h_1+g}$ beschränkt und

$$\frac{f}{h} = \frac{f}{h_1+g}\left(1+\int_X g(x)d\mu(x)\right) \leqq K\left(1+\int_X g(x)d\mu(x)\right).$$

Also liegt f in O(h) und aus Satz 19 c) folgt die Behauptung.

Für eine $d\mu$-integrierbare Funktion $f \in C(X)$ gilt (33) genau dann, wenn die Funktion $\frac{f}{h}$ $(\xi, h d\mu)$-summierbar ist. In Ergänzung zu Satz 19 lassen sich daher aus den Sätzen 16, 17 und 18 die folgenden Aussagen ableiten:

Satz 21. Es sei $\mu \in \mathfrak{M}$ gegeben, h wie in Hilfssatz 3 und $\{x_n\}$ eine in X $h d\mu$-glv. Folge.

a) Es gibt stets eine $d\mu$-integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$, für die sowohl

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)d\mu(x)$$

als auch $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \infty$ gilt.

b) Gilt für eine $d\mu$-integrierbare Funktion $g \in R^+(X)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{g(x_n)}{h(x_n)} = \int_X g(x)\, d\mu(x),$$

dann gilt auch

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{für alle } f \in O(g) \cap C(X).$$

c) Es sei $\{f_k\} \subset R^+(X)$ eine Folge $d\mu$-integrierbarer Funktionen, für die

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_k(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f_k(x)\, d\mu(x) \qquad \text{für alle } k \geqq 1$$

gilt. Dann gibt es eine $d\mu$-integrierbare Funktion $f \in R^+(X)$, für die

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

und $f_k \in O(f)$ für alle $k \geqq 1$ gilt.

Von Interesse ist noch der Fall eines auf der σ-Algebra aller Borelmengen gegebenen Masses μ, das möglicherweise auch auf kompakten Mengen den Wert ∞ annimmt. Ein Beispiel hierfür ist etwa das auf der Zahlengeraden durch

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{|x|}\, dx \qquad \text{für alle } E \in \mathcal{L}$$

definierte Mass μ oder, im Falle eines unendlichen Borelmasses μ auf X, das in Abschnitt 5 eingeführte Mass μ^* auf X^*.

Hilfssatz 4: Es sei ein Mass μ auf $\mathcal{L}$ gegeben und die Menge $Y \subset X$ definiert durch

$$Y = \{y \in X:\ \mu(V) = \infty \text{ für jede Umgebung } V \text{ von } y\}\ .$$

Dann ist Y abgeschlossen in X und die Einschränkung μ_1 von μ auf den lokal kompakten Unterraum $X_1 = X \setminus Y$ von X ein Borelmass auf X_1.

Beweis: Es sei $\bar{y} \in \bar{Y}$ und V eine beliebige Umgebung von $\bar{y}$. Dann ist V auch Umgebung mindestens eines Punktes von Y und daher $\mu(V) = \infty$. Es folgt $\bar{y} \in Y$ und $\bar{Y} = Y$. Die Menge $X_1 = X \setminus Y$ ist offen in X und daher lokal kompakt in der relativen Topologie. Offenbar genügt auch X_1 dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Eine in X_1 kompakte Menge E ist auch kompakt in X, daher ist μ_1 jedenfalls auf den Borelmengen von X_1 definiert. Jeder Punkt in E besitzt mindestens eine offene Umgebung von endlichem Mass. Da bereits endlich viele hiervon E überdecken, ist auch $\mu_1(E)$ endlich und μ_1 ein Borelmass auf X_1.

Für jede $d\mu$-integrierbare Funktion $f \in C(X)$ gilt notwendigerweise $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$, also auch

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{X_1} f(x)\, d\mu_1(x).$$

Wir können die Integration $d\mu$-integrierbarer stetiger Funktionen also auf Integration über dem lokal kompakten Raum X_1 zurückführen und hierauf die bisher abgeleiteten Sätze anwenden. Insbesondere können wir die auf X_1 positive und stetige integrierbare Funktion h so konstruieren, dass sie als Funktion auf X_1 im Unendlichen verschwindet, also stetig auf X festgesetzt werden kann. Unter anderem erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 22. Es sei ein Mass μ auf $\mathcal{J}$ gegeben und Y wie in Hilfssatz 4. Dann gibt es eine nur auf Y verschwindende $d\mu$-integrierbare Funktion $h \in R^+(X)$ und eine Folge $\{x_n\}$ in $X \setminus Y$ derart, dass

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in O(h) \cap C(X),$$

speziell also für alle $f \in \mathcal{L}(X \setminus Y)$ gilt.

LITERATUR

[1] Schoenberg, I.: Uber die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1. Math.Z. 28, 171-199 (1928).

[2] Van der Corput,J.G.: Verteilungsfunktionen, 1-8. Proc.Akad. Amsterdam 38, 813-821, 1058-1066 (1935), 39, 10-19, 19-26, 149-153, 339-344, 489-494, 579-590 (1936).

[3] Hlawka, E.: Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math.Sem. Univ. Hamburg 20, 223-241 (1956).

[4] Halmos, P.R.: Measure Theory.New York: Van Nostrand 1956.

[5] Weyl, H.: Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77, 313-352 (1916).

[6] Hlawka, E.: Uber C-Gleichverteilung. Ann.Mat. pura appl. IV. Ser.49, 311-326 (1960).

[7] Koksma, J.F.: Ein allgemeiner Satz der Theorie der Gleichverteilung mod 1. Mathematica, Zutphen B 11, 7-11, 49-52 (1942).

[8] Eckmann, B.: Uber monothetische Gruppen. Commentarii math. Helvet. 16, 249-263 (1943/44).

typ.: LN