STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1967-002

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. J.H. van Lint

26 april 1967

Minimale bomen en Steiner bomen

1. De minimale Steiner bomen, het onderwerp van deze voordracht, komen in vele practische problemen te voorschijn. In de periode waarin spreker werkzaam was op Bell Telephone Laboratories werkte hij met diverse anderen o.a. aan dit probleem. Hierbij speelden elementair meetkundige beschouwingen vaak een rol. Als inleiding beschouwen we eerst minimale bomen. Bij gegeven punten A_1, A_2, ..., A_n uit R_2 zoeken we de boom waarvan A_1, A_2, ..., A_n de hoekpunten zijn en waarvan de som van de lengten van de ribben minimaal is. (Een boom is een graph waarin ieder

tweetal verschillende hoekpunten A_i, A_j door precies één weg is verbonden, d.w.z. een samenhangende graph zonder kringen.) Een eenvoudig en ook bij gebruik van een rekenmachine handig algorithme voor de bepaling van een minimale boom is gegeven door R.C. Prim (Bell System Techn. J. 36 (1957) 1389-1401).
Het volgende schema geeft aan hoe dit werkt:

Afstandstabel

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	67	52	28	56	36
A_2		0	57	73	51	32
A_3			0	34	85	40
A_4				0	80	44
A_5					0	46
A_6						0

Begin bij A_1. Neem ribbe A_1A_4;

$$\begin{pmatrix} A_2 & A_3 & A_5 & A_6 \\ 67 & 34 & 56 & 36 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad : \text{Voeg toe ribbe } A_3A_4;$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & A_5 & A_6 \\ 57 & 56 & 36 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad : \text{Voeg toe ribbe } A_1A_6;$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & A_5 \\ 32 & 46 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \quad : \text{Voeg toe ribbe } A_2A_6;$$

$$\begin{pmatrix} A_5 \\ 46 \\ 6 \end{pmatrix} \quad : \text{Voeg toe ribbe } A_5A_6.$$

Als n groot is heeft deze methode het voordeel dat steeds slechts één rij uit de afstandstabel en de vorige rij uit het rekenschema gebruikt worden.

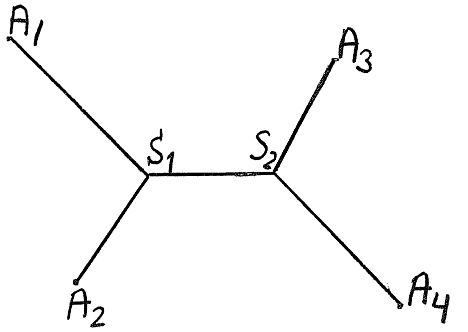
Het is duidelijk dat we hier met een eindig probleem te doen hebben en dat met bovenstaand algorithme de moeilijkheden zijn opgelost.

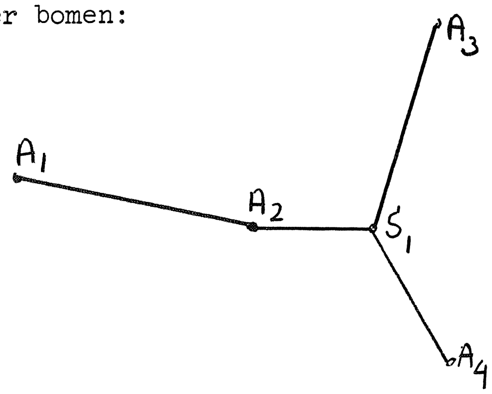
Van practisch belang is deze berekening voor Bell System omdat de tarieven voor zgn. leased-line services berekend moeten worden naar de lengte van de minimale boom.

2. Historische aanleiding voor de bestudering van Steiner bomen is de ontdekking door een bestuurder van één van de steden betrokken bij het netwerk van telefoonlijnen dat toevoeging van een punt aan de reeds aanwezige hoekpunten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tot gevolg kan hebben dat de nieuwe minimale boom korter is dan de oude! Dit wordt onmiddellijk duidelijk als we het volgende probleem uit de planimetrie bekijken (probleem van Steiner, ook wel naar Fermat genoemd). In ΔABC is BAC $\angle 120^\circ$ de grootste hoek. Bepaal P in het inwendige van ABC zo dat $AP + BP + CP$ minimaal is.
1e oplossing: roteer BPC over 60° om C (van A af) tot B'P'C'. Dan is $AP + BP + CP = AP + PP' + P'B'$ en dit is minimaal als A, P, P' en B' op één rechte liggen.
2e oplossing: vanuit P lopen touwtjes naar A, B en C die in deze punten door gaten naar de onderkant van het vlak gaan. Aan elk touwtje hangt een gewicht 1. Voor de krachten die op P werken is $AP + BP + CP$ de potentiële energie. In de evenwichtstoestand is deze minimaal. De drie krachten heffen elkaar op dus maken AP, BP en CP onderling hoeken van 120°.

3. <u>Probleem</u>: Gegeven n punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in R_2. Voeg zodanig punten $S_1, S_2, \ldots, S_k$ aan deze verzameling toe dat de minimale boom voor $A_1, A_2, \ldots, A_n, S_1, \ldots, S_k$ zo klein mogelijk is. We noemen deze boom de <u>minimale Steiner boom</u>, de toegevoegde punten heten Steiner punten. Men kan eenvoudig inzien dat dit probleem toepassing kan vinden in wegenbouw, telefoonnetwerken, etc. Onlangs kwam het te voorschijn in een artikel over efficiënte graanoogst in China (Chinese Math. <u>2</u> (1962) 77-91).

Een goed overzicht van dit probleem in de literatuur verschijnt (binnen-kort?) in een artikel van E.N. Gilbert en H.D. Pollak.
In tegenstelling tot het probleem uit 1. hebben we nu voorlopig met een niet eindig probleem te maken daar over de ligging van en het aantal punten S_i niets bekend is. Het is echter eenvoudig om zó veel stellingen hierover af te leiden dat in principe de minimale Steiner boom is te construeren. In 1961 heeft Z.A. Melzak hiervoor een algorithme beschreven (Canadian Math. Bn. 4 (1961) 143-148). Er moeten echter zo veel mogelijkheden onderzocht worden dat reeds voor kleine n (bijv. n = 8) de methode zelfs voor snelle rekenmachines niet bruikbaar is.
Voorbeelden van minimale Steiner bomen:

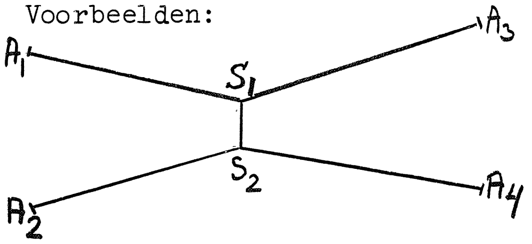




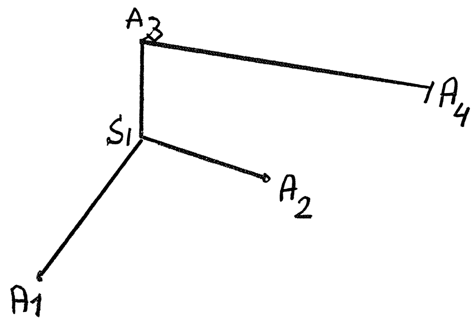
Een demonstratie van het ontstaan van een minimale Steiner boom is als volgt te geven: 2 evenwijdige glasplaten worden door een aantal staven (loodrecht op de platen) verbonden. Het hele ding wordt in een zeep-oplossing gedompeld en er weer uitgehaald. Tussen de staven ontstaat een zeepvlies waarvan de projectie op de platen een minimale Steiner boom is.

4. Beschouw weer punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in R_2. Beschouw alle bomen met $A_1, \ldots, A_n$ en k toegevoegde punten $S_1, S_2, \ldots, S_k$ als hoekpunten en met éénzelfde topologie d.w.z. met vaste incidentiematrix. Een boom uit deze collectie met minimale lengte heet <u>relatief minimaal</u> (t.o.v. de gegeven topologie). Een boom die door kleine variaties, waarbij ook verandering van de topologie is toegestaan, niet te verkorten is heet een <u>Steiner boom</u>.

Voorbeelden:



Steiner boom



relatief minimale boom

Uit 2. volgt dat in een Steiner boom ribben die in één punt samenkomen daar een hoek $\geqq 120^\circ$ maken. Dit betekent dat er ten hoogste drie samenkomen, in een punt S_i precies 3. Daaruit zien we:

(4.1) Een Steiner boom van $A_1, \ldots, A_n$ heeft ten hoogste $n-2$ Steiner punten $S_1, \ldots, S_k$.

We weten nu dus dat er slechts eindig veel mogelijke topologieën zijn. Als we nog aantonen (zie 6.3) dat er bij iedere topologie slechts één relatief minimale boom is is het probleem weer eindig. De bedoeling van het onderzoek van Steiner bomen is zó veel stellingen te vinden dat het aantal mogelijkheden dat onderzocht moet worden zo klein wordt dat het met rekenmachines mogelijk wordt dit in redelijke tijd te doen.

5. Voor we verder over Steiner bomen praten eerst een berekening die een indruk geeft van het zeer grote aantal topologieën. Bomen waarin drie ribben in een hoekpunt A_i samenkomen tellen we niet.
Zij $F(n,k)$ het aantal topologieën voor $A_1, \ldots, A_n$ met k Steiner punten. Zo'n topologie heeft $n-k-2$ punten A_i waar 2 ribben samenkomen. We kunnen de topologie veranderen door zo'n punt weg te laten en van de 2 ribben één te maken. We kunnen dus $F(n,k)$ berekenen door eerst $f(k) = F(k+2,k)$ te bepalen. Nu is

$$f(k+1) = (2k+1)f(k), \text{ dus } f(k) = 2^{-k}(2k)!/k!;$$

$$F(n,k)=\binom{n}{k+2}f(k)(2k+1)(2k+2)\ldots(n+k-2), \text{ dus}$$

$$F(n,k) = 2^{-k}\binom{n}{k+2}(n+k-2)!/k!.$$

Het aantal topologieën voor 7 punten is $\sum_{k=0}^{5} F(7,k)$. Dit aantal is 62370.

6. Stellingen over Steiner bomen

(6.1) Alle Steiner punten liggen binnen het convex omhulsel van $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(6.2) Teken in ieder punt A_i eenheidsvectoren in de richting van verlengden van in A_i samenkomende ribben van een relatief minimale boom en laat $\vec{F}_i$ de som van deze vectoren zijn. Kies ergens een oorsprong O en beschouw $\vec{A}_i$ als vectoren uit O. Dan is de lengte van de boom $\sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \cdot \vec{F}_i$ (J.C. Maxwell, Trans. Royal Soc. Edinburgh 26 (1869)).

(6.3) Bij iedere topologie is ten hoogste één relatief minimale boom.

Bewijs: Laat $V_1, V_2, \ldots, V_{n+s}$ de hoekpunten zijn en (a_{ij}) de incidentiematrix. Dan is de lengte van de boom $L = \sum_{i<j} a_{ij} |V_i - V_j|$. De functie L is convex. Dan hebben 2 relatief minimale bomen dezelfde lengte. Nu volgt het gestelde na een inductie-redenering.

(6.4) Is AB een ribbe van een minimale boom, dan liggen in de doorsnede van de cirkels met A resp. B als middelpunt en straal AB geen andere hoekpunten van de boom.

(6.5) Een gebied, tussen 2 halfrechten die een hoek van 120° maken, dat géén der punten A_i bevat bevat ook geen Steiner punten.
Voor ieder lijnstuk AB definiëren we R(AB) als de ruit met AB als diagonaal die in A en B hoeken van 60° heeft.

(6.6) Als AB en CD ribben van een minimale boom zijn hebben R(AB) en R(CD) geen inwendige punten gemeen.
Hieruit kunnen we afleiden dat voor N punten in een cirkel met straal 1 de lengte van de minimale boom ten hoogste $2^{3/2} 3^{-1/4} \pi^{1/2} (N-1)^{1/2}$ is.

Vermoeden (E.N. Gilbert en H.O. Pollak): als l de lengte van de langste boom met n hoekpunten in de éénheidscirkel is dan is $l \sim (2\pi/\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}$ $(n \to \infty)$.

7. Over het rendement van dit onderzoek is lang gediscussiëerd. Het is eenvoudig aan te tonen dat voor driehoeken met grootste hoek $\theta < 120^{\circ}$ de verhouding l_S/l_M minimaal is als de driehoek gelijkbenig is. (Hierin stellen l_S en l_M de lengten van de minimale Steiner boom, resp. de minimale boom voor.)
Voor driehoeken is dus $l_S/l_M \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vermoeden: Voor ieder n-tal punten in R_2 is $l_S/l_M \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Hoewel dit eenvoudig lijkt is het niet gelukt hiervoor een bewijs te vinden. Wel voor n = 4 maar dat is erg lang en onbevredigend.
Om een idee te krijgen van het rendement werden "random driehoeken" beschouwd. Als model werd gekozen: $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3 \geqq 0$ en hierop een homogene verdeling. De verwachtingswaarde van l_S/l_M is dan groter dan 0,98, een weinig bemoedigend resultaat. Op grond van experimenten met random punten in een cirkel lijkt het of de verwachtingswaarde van l_S/l_M (n willekeurig) in ieder geval > 0,95 is.

8. De onderstaande figuur geeft aan hoe (hier voor n = 5) de minimale Steiner boom geconstrueerd wordt als men inmiddels weet wat de topologie van deze boom is.