[redacted]


**STICHTING**

**MATHEMATISCH CENTRUM**

**2e BOERHAAVESTRAAT 49**

**AMSTERDAM**

**AFDELING ZUIVERE WISKUNDE**



ZW 1968-002


Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door


Prof.dr. M. Euwe


24 januari 1968

## De Pivot Procedure

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt" luidt de algemene titel van deze reeks voordrachten. Ik ben er niet zeker van dat dit onderwerp volledig voldoet aan de gestelde eisen, maar wèl betreft het een onderwerp dat een algemene interpretatie toelaat met mogelijkheden van toepassing op een groot aantal gebieden.

I. $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = z_2 \end{array}\right.$ Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden $x_1$ en $x_2$.

Oplossing volgens de substitutie-methode komt neer op vervanging van dit stel vergelijkingen door twee nieuwe:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 1/a_{11}z_1 - a_{12}/a_{11}x_2 \\ z_2 = a_{21}/a_{11}z_1 + (a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11})x_2 \end{array}\right.$$

Wanneer wij in het eerste stel vergelijkingen $x_1$ en $x_2$ beschouwen als afhankelijk veranderlijken, $z_1$ en $z_2$ als onafhankelijk veranderlijken, dan zijn in het tweede stel vergelijkingen de rollen van $x_1$ en $z_1$ verwisseld: $z_1$ is nu afhankelijk veranderlijk en $x_1$ onafhankelijk veranderlijk.
Wij schrijven dit symbolisch in matrix vorm

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} z_1 = \\ z_2 = \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} z_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 = \\ z_2 = \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1/a_{11} & -a_{12}/a_{11} \\ \hline a_{21}/a_{11} & a_{22}-a_{12}a_{21}/a_{11} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Dit noemen wij de pivot procedure of verwisselprocedure (draaiprocedure); $a_{11}$ heet het pivot element (of spil).
De transformatieregels luiden (algemeen geformuleerd):
(1) Het pivot-element neemt de reciproke waarde aan ($1/a_{11}$);
(2) De elementen van de pivot-kolom worden gedeeld door het pivot-element;
(3) De elementen van de pivot-rij worden gedeeld door het tegengestelde van het pivot-element;
(4) Voor de overige elementen geldt de z.g. rechthoeksregel: op het pivot-element p (hier $a_{11}$) en het te transformeren element t (hier $a_{22}$) wordt binnen de matrix een rechthoek beschreven, waarvan p en t overstaande hoekpunten zijn; de andere hoekpunten zijn $h_1$ en $h_2$; het element t gaat dan over in $t - (h_1h_2/p)$.

Deze regels zijn algemeen en gelden ook voor niet-vierkante matrices.
De bewijzen worden op eenvoudige manier geleverd door rechtstreekse berekening.

Een drietal opmerkingen:
(1) het pivot-element mag niet 0 zijn. Voorts komt de nauwkeurigheid in gevaar, wanneer de absolute waarde van het pivot-element relatief klein is.
(2) vaak wordt de pivot-procedure anders toegepast:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = z_1$ wordt vervangen door $0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - z_1$ enz. De matrix wordt dan

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y_1 =$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $-z_1$ |
| $y_2 =$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $-z_2$ |

Men manipuleert nu op dezelfde wijze met $y_1$ en $y_2$ (als tevoren met $z_1$ en $z_2$) maar stelt dan tenslotte $y_1 = y_2 = 0$.

(3) Er is nog een tweede schrijfwijze in gebruik, de z.g. getransponeerde schrijfwijze.

Wij nemen als voorbeeld:

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\ z_2 = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Gewone schrijfwijze:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $z_1 =$ | 4 | 6 | -1 |
| $z_2 =$ | 2 | 2 | 5 |

Getransformeerde schrijfwijze:

| | $\underline{\underline{z_1}}$ | $\underline{\underline{z_2}}$ |
|---|---|---|
| $-x_1$ | -4 | -2 |
| $-x_2$ | -6 | -2 |
| $-x_3$ | 1 | -5 |

De " = " - tekens staan boven de matrix. De betekenis is precies dezelfde. De "min" - tekens voor $x_1$, $x_2$ en $x_3$ dienen om de transformatieregels onveranderd te laten.

Wij passen de pivot procedure toe op het (omkringde) snijpuntelement van $x_2$ en $z_2$. Dit geeft:

| | $z_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $-x_1$ | 2 | 1 |
| $-z_2$ | -3 | $-\frac{1}{2}$ |
| $-x_3$ | 16 | 5/2 |

(De "min" - tekens gaan bij de verwisseling niet mee)

Aldus wordt het stelsel

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\ z_2 = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{cases} \quad \text{getransformeerd in:} \quad \begin{cases} z_1 = -2x_1 + 3z_2 - 16x_3 \\ x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}z_2 - 5/2x_3 \end{cases}$$

Lezen wij de getransponeerde schrijfwijze evenwel als gewone schrijfwijze (zelfde matrix, dus ook dezelfde getransformeerde matrix), dan is het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 = -4z_1 - 2z_2 \\ x_2 = -6z_1 - 2z_2 \\ x_3 = z_1 - 5z_2 \end{cases} \quad \text{overgegaan in:} \quad \begin{cases} x_1 = 2z_1 + x_2 \\ z_2 = -3z_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 16z_1 + 5/2x_2 \end{cases}$$

Door één pivot procedure worden twee geheel verschillende stelsels van betrekkingen getransformeerd. Men noemt dit het dualiteitsbeginsel.

II. Toepassing op het inverteren van matrices

Voorbeeld

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $z_1 =$ | 3 | 5 | 1 |
| $z_2 =$ | 2 | 4 | 5 |
| $z_3 =$ | 1 | 2 | 2 |

Wanneer de pivot procedure driemaal wordt toegepast zodanig dat alle links-variabelen worden verwisseld met de boven variabelen, dan hebben wij de matrix geïnterveerd. Wij nemen als pivot elementen achtereenvolgens de (omkringde) elementen van de diagonaal en krijgen

| | $z_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1/3 | -5/3 | -1/3 |
| $z_2$ = | 2/3 | 2/3 | 13/3 |
| $z_3$ = | 1/3 | 1/3 | 5/3 |

$\Longrightarrow$

| | $z_1$ | $z_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 2 | -5/2 | 21/2 |
| $x_2$ = | -1 | 3/2 | -13/2 |
| $z_3$ = | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

$\Longrightarrow$

| | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 2 | 8 | -21 |
| $x_2$ = | -1 | -5 | 13 |
| $x_3$ = | 0 | 1 | -2 |

Wij hebben in dit voorbeeld een vaste route gevolgd (de diagonaal) maar dit is niet altijd mogelijk omdat het pivot element niet 0 mag zijn. Soms heeft men geen keuze, bijv. bij de laatste transformatie, dan is het pivot element voorgeschreven; was in de voorlaatste matrix het rechterhoek-element nul geweest, dan had dit betekend dat de oorspronkelijke matrix singulier is.

Echter stuit ook het werken met kleine pivot elementen op bezwaren die door dr. T.J. Dekker zijn behandeld in zijn voordracht voor het Mathematisch Centrum op 28 september 1966. Dr. Dekker spreekt van partiële pivoting wanneer de rijen worden omgewissels en van volledige pivoting, wanneer de volgorde van zowel rijen als kolommen wijziging ondergaat.

III. <u>Toepassing op het oplossen van lineaire vergelijkingen</u> (methode van Gauss).

Voorbeeld

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 14 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Wij volgen de onder I bij opmerking (2) aangegeven methode

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ = | 1 | -1 | -2 | 3 | -1 |
| $z_2$ = | 2 | -3 | 1 | 2 | -14 |
| $z_3$ = | 3 | -1 | -2 | -1 | 1 |
| $z_4$ = | 1 | 1 | 1 | 1 | -9 |

$\Longrightarrow$

| | $z_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | 1 | 1 | 2 | -3 | 1 |
| $z_2$ = | 2 | -1 | 5 | -4 | -12 |
| $z_3$ = | 3 | 2 | 4 | -10 | 4 |
| $z_4$ = | 1 | 2 | 3 | -2 | -8 |

Daar $z_1 = 0$ kan de eerste kolom vervallen. De betekenis van de eerste rij luidt: $x_1 = x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 1$. Deze doet alleen dienst voor de berekening van $x_1$ als wij $x_2$, $x_3$ en $x_4$ hebben gevonden en speelt geen rol bij de verdere berekening. Wij laten daarom de eerste rij ook achterwege en houden over:

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $z_2 =$ | -1 | 5 | -4 | -12 |
| $z_3 =$ | 2 | 4 | -10 | 4 |
| $z_4 =$ | 2 | 3 | -2 | -8 |

Wij herhalen de procedure maar laten nu onmiddellijk het overtollige weg

| | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $z_3 =$ | 14 | -18 | -20 |
| $z_4 =$ | 13 | -10 | -32 |

met
$x_2 = 5x_3 - 4x_4 - 12$

Nog een keer dezelfde procedure

| | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|
| $z_4 =$ | 47/7 | -94/7 |

met $x_3 = 9/7x_4 + 10/7$

$0 = 47/7x_4 - 94/7 \rightarrow x_4 = 2$

Voortw $x_3 = 4$; $x_2 = 0$; $x_1 = 3$.

Wanneer de nauwkeurigheid van de uitkomst in het geding komt, is het van belang te wijzen op de volgende iteratie procedure:

$$[A](x) = (b).$$

Wij vinden in eerste instantie $(x_0)$ en substitueren.

$[A](x_0) = (c)$ Aftrekking geeft:

$[A](x-x_0) = (b-c)$ Stel $x-x_0 = \Delta x$ en los $\Delta x$ op, waarbij valt op te merken dat de matrix A voor dit nieuwe stel vergelijkingen dezelfde is als voor het oorspronkelijke stel vergelijkingen.

Met de nieuwe gevonden oplossing $(x+\Delta x)$, kan men op dezelfde wijze te werk gaan en deze procedure kan worden herhaald totdat een tevoren vastgestelde graad van nauwkeurigheid is bereikt. In dit verband wijst dr. T.J. Dekker in de reeds geciteerde voordracht op een andere oplossingsmethode welke begint met de ontbinding van de matrix A in twee matrices. De ene matrix is bovendriehoeks, de andere matrix is onderdriehoeks met diagonaal-elementen 1.

IV. Toepassing op Lineaire Programmering.

Onder lineaire programmering (of optimalisering) wordt verstaan: het bepalen van extremen van lineaire functies, wanneer de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire bijvoorwaarden in de vorm van vergelijkingen of ongelijkheden.

Een voorbeeld.

Een landbouwer heeft 100 ha land, waarop hij aardappelen of graan kan verbouwen of niets.

Gegevens:

De kosten bedragen voor aardappelen ƒ 10,- per ha, voor graan ƒ 20,- per ha. Het aantal werkdagen is resp 1 en 4 per ha. De opbrengst is resp. ƒ 40,- en ƒ 120,- per ha.

Totaal beschikbaar zijn ƒ 1100,- en 160 werkdagen. Als $x_1$ en $x_2$ de aantallen ha. aardappelen en graan voorstellen is dus gegeven:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 1100 \\ x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Gevraagd wordt: voor welke combinatie $(x_1 x_2)$ is de opbrengst (z) maximaal?

$$z = 40x_1 + 120x_2$$

Schrijven wij de gegevens in matrix vorm met invoering van residuvariabelen $y_1$, $y_2$, $y_3$, dan komt de oplossing neer op de uitvoering van een aantal pivot-procedures.

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y_1$ = | -10 | -20 | 1100 |
| $y_2$ = | -1 | -4 | 160 |
| $y_3$ = | -1 | -1 | 100 |
| z = | 40 | 120 | 0 |

Om het doel te bereiken moeten wij de volgende regels in acht nemen.

(1) Als pivot-kolom kiezen we die kolom die in de laatste rij een positief getal heeft. (Bij voorkeur het grootste).

(2) Het pivotelement moet negatief zijn; bij keuze moeten wij dat element nemen waarvoor het karakteristiek quotiënt (definitie volgt) het grootst is.

(3) Wij zetten de procedure zolang voort totdat de z-rij geen enkel positief element meer telt (afgezien van het rechter hoek-element).

Door toepassing van deze regels zullen de getallen van de laatste kolom non-negatief blijven (dit is gemakkelijk te bewijzen) en zal het rechter hoek-element (de winst) steeds groter worden.
Nu de uitvoering.
Wij kiezen de tweede kolom als pivotkolom ($120 > 40$). Vervolgens berekenen wij de karakteristieke quotiënten, waaronder te verstaan is de quotiënten van de elementen van de 3e kolom en de overeenkomstige elementen van de 2e kolom - alleen de negatieve doen mee.
Dit geeft achtereenvolgens $1100 : -20 = -55$; $160 : -4 = -40$; $100 : -1 = -100$. Het grootste quotiënt is $-40$, het pivotelement is dus $-4$.
Wij pivoteren:

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y_1$ = | -5 | 5 | 300 |
| $x_2$ = | -1/4 | -1/4 | 40 |
| $y_3$ = | -3/4 | 1/4 | 60 |
| z = | 10 | -30 | 4800 |

Nog eenmaal de pivot-procedure met inachtneming van dezelfde regels (het pivot-element is omkringd)

| | $y_1$ | $y_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_1$ = | -1/5 | 1 | 60 |
| $x_2$ = | 1/20 | $-\frac{1}{2}$ | 25 |
| $y_3$ = | 3/20 | $-\frac{1}{2}$ | 15 |
| z = | -2 | -20 | 5400 |

De laatste rij is negatief. Wij zijn klaar. De maximale waarde z = 5400 wordt bereikt voor $y_1 = 0$ en $y_2 = 0$. Daaruit volgt verder $x_1 = 60$, $x_2 = 25$, $y_3 = 15$. In woorden: de opbrengst = ƒ 5400,-, voor 60 ha. aardappelen, 25 ha. graan terwijl 15 ha. leeg blijft.

Deze oplossingsmethode gaat slechts volledig op, wanneer in de oorspronkelijke opgave de elementen van de laatste kolom niet negatief zijn (en derhalve zo blijven). Immers alleen in dit geval voldoet de oplossing aan de ongelijkheden $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$.

Wij zullen ons hier niet bezig houden met vraagstukken, die leiden tot matrices met wèl negatieve elementen in de laatste kolom. Aan de eigenlijke pivotage gaan dan een of meer lineaire substituties vooraf, die de negatieve elementen verdrijven. Meetkundig gezien komen deze substituties neer op een translatie van het assenstelsel. Daarbij blijft uiteraard de mogelijkheid bestaan dat de ongelijkheden onderling strijdig zijn, zodat het vraagstuk geen enkele oplossing heeft. Voorts kunnen ook de normale gevallen (geen negatieve elementen in de laatste kolom) aanleiding geven tot bijzonderheden, zoals meer gelijkwaardige oplossingen, maximum oneindig groot dus in feite geen maximum e.d.

V. Toepassing op transportproblemen

Bij transportproblemen wordt gevraagd naar de optimalisering van een complex van transportopdrachten, die op verschillende wijzen kunnen worden uitgevoerd. Bij voorbeeld in deze zin dat de gereden kilometers resp. de transportkosten minimaal moeten uitvallen. Doorgaans wordt het probleem gepresenteerd in de vorm van 2 matrices, de transportmatrix en de kostenmatrix.

filialen

magazijnen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | 27 |
| $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | 15 |
| $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | 12 |
| 30 | 4 | 15 | 5 | 54 |

De betekenis van deze transportmatrix luidt (bijv.) als volgt. Een bedrijf beschikt over drie magazijnen die resp. 27, 15 en 12 eenheden van een bepaald goed bevatten. Deze goederen moeten worden geleverd aan 4 filialen en wel 30 aan het eerste filiaal, 4 aan het tweede, 15 aan het derde en 5 aan het vierde filiaal.

$x_{11}$ stelt nu voor hoeveel magazijn 1 levert aan winkel 1, $x_{12}$ de levering van magazijn 1 aan winkel 2, $x_{33}$ de levering van magazijn 3 aan winkel 3 enz.

Thans de kostenmatrix.

filialen

magazijnen

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |

De betekenis van deze matrix is: de transportkosten van magazijn 1 aan winkel 1 bedragen 1 eenheid, van magazijn 1 aan winkel 2 bedragen 2 eenheden, van 1 aan 3 1 eenheid, van magazijn 2 aan winkel 4 3 eenheden enz.

De vraag is nu de $x_{11}$ t/m $x_{34}$ zo te bepalen dat de kosten minimaal worden.

We hebben dus te doen met het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 27 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 12 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 4 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5 \end{cases}$$

Wegens de onderlinge afhankelijkheid kan er van deze 7 vergelijkingen één vervallen. Voorts $x_{11} \geq 0$; $x_{12} \geq 0$ enz.

Voor welke waarden der onbekenden wordt de kostenfunctie

$$K = x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + x_{33} + 2x_{34} \quad \text{minimaal?}$$

Wij zouden dit vraagstuk door voortdurende pivotage van een 7 bij 13-matrix kunnen oplossen. (7 = aantal vergelijkingen plus de transportfunctie; 13 = aantal onbekenden + 1). De uitvoering daarvan betekent nogal een karwei en de praktijk kent dan ook verschillende methoden. die sneller tot het doel leiden. Wij behandelen daarvan die methode, welke het dichtst staat bij de methode der pivotage en die door Prof.dr. L. Kosten (Delft) werd belicht in een publicatie "Inverse matrix tecgnique for solving the transportation problem" (Uitgave Math. Inst. van de T.H. te Delft 1963).

Voor het gegeven voorbeeld met 3 rijen en 4 kolommen komen de verschillen met de gewone pivotage nog niet zo tot hun recht, maar bij toenemend aantal variabelen komt de reductie neer op een aanzienlijke vermindering van afzonderlijke berekeningen (in de orde van grootte van $n^3$ tot $2n^2$ per pivotage).

De onderstaande schrijfwijze wijkt enigszins af van de hier gebruikte in het bijzonder doordat de links-variabelen boven de matrix worden herhaald, maar dit is de consequentie van de gevolgde methode. Men betitelt de links variabelen als de variabelen in de basis of de basis-

variabelen.
Als basis variabelen zijn hier gekozen alle x-en met een 1 als eerste of tweede index.

| | | 0 | $x_{31}$ | $x_{21}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| $x_{31}$ | 2 | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $x_{21}$ | 2 | 15 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_{11}$ | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| $x_{12}$ | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_{13}$ | 1 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_{14}$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | $\rho$ | 85 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| | $\sigma$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | -1 | 2 | 1 | 0 |

De opschriften van de diverse kolommen ondergaan bij de nu volgende pivotages geen wijziging. De bovenste rij geeft de variabelen x in een bepaalde volgorde, de daarop volgende geeft de bijbehorende $a_{31}$, $a_{21}$ enz. De eerste kolom vermeldt de basis-variabelen; deze verandert voortdurend. Elke pivotage betekent een vervanging van een basis-variabele door een niet-basis-variabele. De tweede kolom (2, 3, 1 enz.) geeft weer de bij de basis-variabelen behorende a's.

Met de derde kolom begint de matrix-weergave van de vergelijkingen. De eerste rij van de matrix betekent:

$12 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$, hetgeen overeenkomt met een der gegevens. Evenzo de tweede, vierde, vijfde en zesde.

De derde rij behoeft nog enige toelichting. De daar gegeven vergelijking $3 = x_{11} - x_{22} - x_{23} - x_{24} - x_{32} - x_{33} - x_{34}$ is afgeleid uit

$30 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$, waarbij voor $x_{31}$ en $x_{21}$ de uitdrukkingen van de eerste en tweede rij zijn gesubstitueerd.

Wij merken evenwel op dat de matrix-elementen rechts van de tweede dubbele streep ook te berekenen zijn met behulp van de weldra te geven formules.
De getallen van de eerste rij onder de matrix verkrijgen wij door de inwendige producten te berekenen van de betreffende kolom telkens met de tweede kolom vóór de matrix. Bijv. $12 \times 2 + 15 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 15 \times 1 + 5 \times 1 = 85$. Voorts (eerste matrix kolom): $1 \times 2 + 0 \times 2 + \ldots = 2$; (10de matrix kolom) $1 \times 2 + 0 \times 2 + -1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 3$.
Ten slotte worden de elementen van de tweede rij onder de matrix (de laatste rij) verkregen door aftrekking: de elementen van de eerste rij onder de matrix worden verminderd met de overeenkomstige elementen van de eerste rij boven de matrix.
Deze onderste rij bepaalt tenslotte de keuze van de pivot-kolom: daar waar het grootste positieve getal staat. Bevat deze onderste rij geen positieve getallen meer, dan zijn wij klaar.
De pivot-regels ondergaan door de veranderde schrijfwijze kleine wijzigingen, die alleen betrekking hebben op de pivot-rij en de pivot-kolom. De elementen van de pivot-rij blijven constant; de elementen van de pivot-kolom worden 0 met uitzondering van het pivot-element zelf. Het pivot-element is altijd 1; bij keuze moeten wij het element met het kleinste standaard-quotiënt nemen.
Een en ander toegepast op het onderhavige geval hebben wij wat betreft de pivot-kolom de keuze tussen de zevende en de tiende kolom van de (eigenlijke matrix). Wij kiezen de zevende en hebben dan de keuze tussen de 1 op de tweede rij en de 1 op de vierde rij. Wij moeten de laatste kiezen, omdat $4 \leq 15$.
De clou van Prof. Kosten's publicatie is nu dat wij bij deze pivotage en bij alle volgende kunnen volstaan met de (eenvoudige) berekening van de eerste 6 bij 6 matrix., de referentie matrix (tussen de dubbele lijnen) plus de berekening van de twee rijen onder de matrix.
Er bestaan namelijk betrekkingen tussen de elementen van de referentie matrix en de overige elementen. Deze betrekkingen zien er nogal afschrikwekkend uit en wij geven ze daarom uitsluitend in vereenvoudigde vorm, zoals ze voor ons geval van toepassing zijn.

$$\alpha_{k,(ij)} = \alpha_{k,\ m-i+1} - \alpha_{km} + \alpha_{k,\ m+j-1}$$

$$\rho_{(ij)} = \rho_{m-i+1} - \rho_m + \rho_{m+j-1}.$$

Hierbij betekent m het aantal rijen van de transport matrix, in ons geval m = 3.
De indices van de elementen van de referentie-matrix zijn aangeduid met <u>enkele</u> cijfers. De overige elementen hebben als tweede index een combinatie van 2 cijfers.
Passen wij deze formule bijv. toe voor de berekening van

$\alpha_{3,(24)}$ en $\rho_{(22)}$:

$$\alpha_{3,24} = \alpha_{32} - \alpha_{33} + \alpha_{36} = 0 - 1 - 0 = -1.$$

$$\rho_{(22)} = \rho_2 - \rho_3 + \rho_4 = 2 - 1 + 2 = 3.$$

De elementen van de referentie-matrix zijn op de gewone wijze genummerd van $\alpha_{11}$ t/m $\alpha_{66}$ en voorts ook de rijen onder deze matrix:

$\rho_1$ t/m $\rho_6$, $\sigma_1$ t/m $\sigma_6$.

Na bepaling van het eerste pivot-element $\alpha_{4,(22)}$ is nu de gang van zaken als volgt.
Wij bepalen de nieuwe referentiematrix, waarbij inbegrepen kolom 0. Vervolgens berekenen wij met gebruikmaking van de gegeven formule de gehele $\rho$-rij. Door aftrekking vinden wij de $\sigma$ rij die onder de referentie-matrix uitsluitend 0 - elementen heeft. Kies uit de overige elementen (rechts) het grootste positieve element; daarmee is de pivot-kolom bepaald. Bereken vervolgens met behulp van de formule alle elementen van deze kolom en kies er het element met kleinste standaardquotiënt uit. Een en ander toepassend krijgen wij de hier volgende "halve" matrix.

| | | 0 | $x_{31}$ | $x_{21}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| $x_{31}$ | 2 | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{21}$ | 2 | 11 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{11}$ | 1 | 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{22}$ | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{13}$ | 1 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | |
| $x_{14}$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | |
| $\rho$ | | | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| $\sigma$ | | 77 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

De elementen van de pivot-kolom (voorlaatste kolom) worden berekend:

$$\alpha_{1,(33)} = \alpha_{11} - \alpha_{13} + \alpha_{15} = 1; \alpha_{2,(33)} = \alpha_{21} - \alpha_{23} + \alpha_{25} = 0;$$

$$\alpha_{3,(33)} = \alpha_{31} - \alpha_{33} + \alpha_{35} = 1; \alpha_{4,(33)} = \alpha_{41} - \alpha_{43} + \alpha_{45} = 0;$$

$$\alpha_{5,(33)} = \alpha_{51} - \alpha_{53} + \alpha_{55} = 1; \alpha_{6,(33)} = \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{65} = 0.$$

Het nieuwe pivot-element is blijkbaar $\alpha_{1,(33)}$ aangezien $12 < 15$.
Deze procedure herhalend komen wij tot het volgende schema

| | | 0 | $x_{31}$ | $x_{21}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| $x_{33}$ | 1 | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{21}$ | 2 | 11 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{11}$ | 1 | 19 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{22}$ | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| $x_{13}$ | 1 | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | |
| $x_{14}$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | |
| $\rho$ | | | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| $\sigma$ | | 65 | -1 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | -1 |

Aangezien de $\sigma$-rij nu geen enkel positief element meer bevat zijn wij klaar.

De minimum transportkosten bedragen 65 en de gevraagde variabelen zijn:

$$x_{33} = 12,\ x_{21} = 11,\ x_{11} = 19,\ x_{22} = 4,\ x_{13} = 3,\ x_{14} = 5.$$

De overige x- en zijn 0.

VI. Toepassing op de speltheorie.

Enigszins verrassend doet het wellicht aan dat de pivot-procedure eveneens van toepassing is op eenvoudige vraagstukken van de speltheorie. Een voorbeeld.

A en B spelen een spel, waarbij A de keuze heeft tussen 3 strategieën en B tussen 4 strategieën.

De betalingsmatrix luidt:

| | | A | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| B I | 2 | 6 | 1 |
| B II | 4 | 3 | 3 |
| B III | 5 | 2 | 4 |
| B IV | 3 | 6 | 2 |

De cijfers geven aan welk bedrag B aan A moet betalen bij een bepaalde keuze van hun strategieën. Bijvoorbeeld: als A I kiest en B I, betaalt B aan A 2 eenheden; als A I kiest en B II, betaalt B 4 eenheden; als A III kiest en B II, dan betaalt B 3 eenheden, enz. (B betaalt steeds).

De vraag is nu: hoe moet A zijn strategie kiezen om zijn kans op winst (mathematische verwachting) zo groot mogelijk te maken.

De gevraagde keuze-frequenties noemen wij p1, p2 en p3. Derhalve is:

$0 \leq p1 \leq 1$; $0 \leq p2 \leq 1$; $0 \leq p3 \leq 1$; $p1 + p2 + p3 = 1$.

Als B strategie I kiest (wat A natuurlijk niet weet) dan is blijkens de betalingsmatrix de mathematische verwachting van A:

$$P1 = 2p1 + 6p2 + p3.$$

Als B strategie II kiest dan krijgen wij:

$$P2 = 4p1 + 3p2 + 2p2.$$ Voorts:

$P3 = 5p1 + 2p2 + 4p3$ bij keuze van III en $P4 = 3p1 + 6p2 + 2p3$, bij keuze van IV.

Zij P de kleinste waarde van P1, P2, P3 en P4, dan geldt dus:

$$\begin{cases} 2p1 + 6p2 + \phantom{2}p3 \geq P \\ 4p1 + 3p2 + 2p2 \geq P \\ 5p1 + 2p2 + 4p3 \geq P \\ 3p1 + 6p2 + 2p3 \geq P \end{cases}$$

Wij delen links en rechts door P en definiëren

$x_1 = \frac{p1}{P}$, $x_2 = \frac{p2}{P}$, $x_3 = \frac{p3}{P}$. Wij krijgen aldus:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + \phantom{3}x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{P} = \frac{1}{P}.$$

De vraag is P zo groot mogelijk te maken, hetgeen neerkomt op het minimaliseren van $z = (x_1 + x_2 + x_3)$.

Wij zouden nu -z kunnen invoeren om er een maximum-probleem van te maken maar het is even eenvoudig het vraagstuk zo te laten en het minimum te zoeken door ernaar te streven dat in de laatste rij geen negatieve elementen overblijven. Daarmee is dit vraagstuk teruggebracht tot een der voorafgaande categoriën.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | 2 | 6 | 1 | -1 |
| $y_2$ | = | 4 | 3 | 3 | -1 |
| $y_3$ | = | 5 | 2 | 4 | -1 |
| $y_4$ | = | 3 | 6 | 2 | -1 |
| z | = | 1 | 1 | 1 | 0 |

De laatste rij is al in orde (geen negatieve getallen), maar gezien de negatieve elementen in de laatste kolom zou nu de substitutiemethode moeten voorafgaan. Hetzelfde doel (het verdrijven van de - tekens) is echter in dit geval op eenvoudiger wijze te bereiken door een enkele pivotage met het links-boven hoekelement als spil.

Dit geeft

| | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | $\frac{1}{2}$ | -3 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y_2$ = | 2 | -9 | 1 | 1 |
| $y_3$ = | 5/2 | -13 | 3/2 | 3/2 |
| $y_4$ = | 3/2 | -3 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| z = | $\frac{1}{2}$ | -2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Nu is alles in de laatste kolom positief en wij kunnen derhalve de gewone regels volgen. De tweede kolom is pivot-kolom; de quotiënten zijn achtereenvolgens: -1/6, -1/9, -3/26 en -1/6. Het tweede quotiënt is het kleinste en -9 is derhalve de spil.
Pivotage geeft:

| | $y_1$ | $y_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = | -1/6 | 1/3 | -5/6 | 1/6 |
| $x_2$ = | 2/9 | -1/9 | 1/9 | 1/9 |
| $y_3$ = | -7/18 | 13/9 | 1/18 | 1/18 |
| $y_4$ = | 5/6 | 1/3 | 1/6 | 1/6 |
| z = | 1/18 | 2/9 | 5/18 | 5/18 |

Het vraagstuk is opgelost; de minimale z = 5/18, d.w.z. de minimale winst P = 18/5 wordt behaald voor $x_1$ = 1/6, $x_2$ = 1/9, $x_3$ = 0.
Hieruit volgt $p_1$ = 3/5 ; $p_2$ = 2/5. Van elke 5 keren moet A dus 3 maal strategie I kiezen, 2 maal strategie II en geen enkele maal strategie III. Zijn mathematische verwachting is dan 18/5.

Bekijken wij thans dit probleem van de kant van B. Voor hem is het zaak zijn verlies zo klein mogelijk te houden.
B hanteert $q_1$ maal strategie I, $q_2$ maal strategie II en $q_3$ maal III, $q_4$ maal IV.
$Q_1$ (het te verwachten verlies als A I kiest) =

$$2q_1 + 4q_2 + 5q_3 + 3q_4. \quad \text{Voorts:}$$

$$Q_2 = 6q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 6q_4$$

$$Q_3 = q_1 + 3q_2 + 4q_3 + 2q_4.$$

Q is de grootste van de 3Q's en deze Q moet zo klein mogelijk blijven. Wij definiëren weer:

$$y_1 = \frac{q_1}{Q}, \quad y_2 = \frac{q_2}{Q}, \quad y_3 = \frac{q_3}{Q}, \quad y_4 = \frac{q_4}{Q}$$

en krijgen:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leq 1 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$z = \frac{1}{Q} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$; z moet maximaal worden.

Wij schrijven de matrix in getransponeerde vorm (zie onder I).

| | $x_1 =$ | $x_2 =$ | $x_3 =$ | $z =$ |
|---|---|---|---|---|
| $-y_1$ | 2 | 6 | 1 | -1 |
| $-y_2$ | 4 | 3 | 3 | -1 |
| $-y_3$ | 5 | 2 | 4 | -1 |
| $-y_4$ | 3 | 6 | 2 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Deze matrix is dezelfde als de voorgaande. Volgens het dualiteitsprincipe is (met verandering van minimum in maximum) ook de uitkomst dezelfde m.a.w. de minimale Q = 18/5. Deze wordt bereikt voor:

$$y_1 = 1/18, \quad y_2 = 2/9, \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Hieruit volgt: $q_1 = 1/5$, $q_2 = 4/5$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$.

Van elke 5 keer moet B eenmaal strategie I kiezen, viermaal strategie II en geen enkele maal strategie III en IV. B's beste strategie sluit aan bij A's beste strategie; beider mathematische verwachting = 18/5.

Deze conclusie stelt ons in staat van dit spel een "eerlijk" spel te maken door alle elementen van de betaalmatrix met 18/5 te verminderen. Deze matrix wordt dan:

| | | A: I | A: II | A: III |
|---|---|---|---|---|
| B | I | -1,6 | 2,4 | -2,6 |
| B | II | 0,4 | -0,6 | -0,6 |
| B | III | 1,4 | -1,6 | 0,4 |
| B | IV | -0,6 | 2,4 | -1,6 |

In de nieuwe vorm hebben A en B evenveel kans op winst en verlies. Hun mathematische verwachting = 0.