MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam (O).

Rapport Z.W. 1952-003

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

20 Februari; voordracht door
Prof.Dr J.P. van Rooijen
over:

Afrondingsproblemen.

Men onderscheidt in hoofdzaak drie methoden van afronding: 1°. de grafische, 2°. de mechanische en 3°. de analytische.
Over de eerstgenoemde methode valt uit mathematisch oogpunt weinig te vermelden.
De tweede methode beoogt de verwijdering van toevallige waarnemingsfouten en werkt als volgt:
Gegeven de reeks: $u_1 \quad u_2 \quad u_3 \dots u_k \dots u_{n-1} \quad u_n$
in aequidistante punten.
Stel nu:

$$u'_k = c_0 u_k + c_1(u_{k-1} + u_{k+1}) + \dots + c_r(u_{k-r} + u_{k+r})$$

De symmetrie ligt voor de hand en vloeit mede voort uit de overweging, dat door de afronding een arithmetische reeks van gegeven orde onveranderd moet blijven.
Nu is:

$$u_{k+\lambda} = u_k + \binom{\lambda}{1} \Delta u_k + \binom{\lambda}{2} \Delta^2 u_k + \binom{\lambda}{3} \Delta^3 u_k + \binom{\lambda}{4} \Delta^4 u_k + \dots$$

$$u_{k-\lambda} = u_k + \binom{-\lambda}{1} \Delta u_k + \binom{-\lambda}{2} \Delta^2 u_k + \binom{-\lambda}{3} \Delta^3 u_k + \binom{-\lambda}{4} \Delta^4 u_k + \dots$$

Dus:

$$\begin{aligned} u'_k &= u_k(c_0 + 2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_r) \\ &+ \Delta^2 u_k(1^2 c_1 + 2^2 c_2 + \dots + r^2 c_r) \\ &- \Delta^3 u_k(1^2 c_1 + 2^2 c_2 + \dots + r^2 c_r) \\ &+ \frac{1}{12} \Delta^4 u_k \sum_1^r (\lambda^4 + 11\lambda^2) c_\lambda - \frac{1}{6} \Delta^5 u_k \sum_1^r (\lambda^4 + 5\lambda^2) c_\lambda + \end{aligned}$$

Algemeen geldt blijkbaar: blijft een reeks van de orde (2p) onveranderd, dan ook een reeks van de orde (2p+1). Overigens hangen de c's af van het criterium, hetwelk aan de afronding wordt gesteld.
B.v. de middelbare fout

$$\sqrt{[c_0^2 + 2c_1^2 + 2c_2^2 + \dots + 2c_r^2]} \qquad \text{zij minimaal.}$$

Stel nu: $u'_k = c_0 u_k + c_1(u_{k-1} + u_{k+1}) + \dots + c_r(u_{k-r} + u_{k+r})$.

Een reeks van de orde $(2p+1)$ moet onveranderd blijven en de middelbare fout zij minimaal. Stellig is $p < r$, zodat:

$$\left.\begin{array}{l} f_0 = c_0 + 2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_r - 1 = 0 \\ f_1 = 1^2c_1 + 2^2c_2 + \dots + r^2c_r = 0 \\ f_2 = 1^4c_1 + 2^4c_2 + \dots + r^4c_r = 0 \\ \text{-------------------} \\ f_p = 1^{2p}c_1 + 2^{2p}c_2 + \dots + r^{2p}c_r = 0 \end{array}\right| \quad (p+1) \text{ verg.}$$

Voorts: $g = c_0^{\,2} + 2c_1^{\,2} + \dots + 2c_r^{\,2} =$ minimaal.

Dus moet: $g + \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p$ een abs. min. zijn.

Of:

$$\left.\begin{array}{l} 2c_0 + \alpha_0 = 0 \\ 4c_1 + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 0 \\ 4c_2 + 2\alpha_0 + 4\alpha_1 + 16\alpha_2 + \dots + 2^{2p}\alpha_p = 0 \\ \text{-------------------} \\ 4c_r + 2\alpha_0 + r^2\alpha_1 + r^4\alpha_2 + \dots + r^{2p}\alpha_p = 0 \end{array}\right| (r+1) \text{ verg.}$$

In totaal dus $(r+p+2)$ vergelijkingen met evenveel onbekenden.

Zo vindt men:

$$p = 0 \qquad c_s = \frac{1}{2r+1}$$

$$p = 1 \qquad c_s = 3\,\frac{3r^2 + 3r - 1 - 5s^2}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$$

$$p = 2 \qquad c_s = \frac{15}{4}\,\frac{(15r^4 + 30r^3 - 35r^2 - 50r + 12) - 35(2r^2+2r-3)5^2 + 635^4}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

Wij gaan weer uit van de n punten (x_k, y_k) en voeren in:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m, \text{ waarbij } m \ll n.$$

Zij:

$$V = \sum_1^n \left[y_k - c_0 - c_1x_k - \dots - c_mx_k^m\right]^2 = \text{minimaal.}$$

Dus:

$$\sum_1^n x_k^i y_k = c_0 \sum_1^n x_k^i + c_1 \sum_1^n x_k^{i+1} + \dots + c_m \sum_1^n x_k^{i+m},$$

waarbij $i = 0, 1, 2 \dots m$

Dus $(m+1)$ verg. met evenveel onbekenden $c_0, c_1, \dots, c_m$. In het geval van aequidistante punten komt men weer bij de mechanische methode volgens het minimum-principe terecht. Nu is tegen deze oplossing in te brengen, dat men de hele berekening opnieuw moet opzetten, indien met een a priori gekozen m geen voldoende nauwkeurigheid is bereikt.

Voer daarom in: $y = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \dots + c_mP_m$, waarbij P_i polynomium van de graad i.

Zij:

$$V = \sum_1^n \left[y_k - c_0P_0 - c_1P_1 - c_2P_2 - \ldots - c_mP_m\right]^2 = \text{minimaal.}$$

Dus:

$$\sum_1^n P_i(x_k)y_k = c_0 \sum_1^n P_0(x_k)P_i(x_k) + \ldots + c_m \sum_1^n P_m(x_k)P_i(x_k)$$

Of:

$$\begin{array}{ll}
(i=0) & c_0\,\sigma_{00} + c_1\,\sigma_{10} + c_2\,\sigma_{20} + \ldots + c_m\,\sigma_{m0} = \rho_0 \\
(i=1) & c_0\,\sigma_{01} + c_1\,\sigma_{11} + c_2\,\sigma_{21} + \ldots + c_m\,\sigma_{m1} = \rho_1 \\
& - \\
(i=m) & c_0\,\sigma_{0m} + c_1\,\sigma_{1m} + c_2\,\sigma_{2m} + \ldots + c_m\,\sigma_{mm} = \rho_m.
\end{array}$$

Stel nu:

$$\sum_1^n P_i(x_k)P_j(x_k) = \sigma_{ij} = 0 \qquad \text{voor } i \neq j.$$

Dan is de oplossing : $c_i = \rho_i : \sigma_{ii}$, alleen bepaald door P_i en

$$V = \sum_1^n y_k^2 - c_0^2 \sum_1^n P_0^2(x_k) - c_1^2 \sum_1^n P_1^2(x_k) - \ldots - c_m^2 \sum_1^n P_m^2(x_k)$$

Het systeem $P_0, P_1 \ldots P_m$ omvat $1+2+\ldots+\overline{m+1} = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ constanten, terwijl de orthogonaliteit $\frac{1}{2}m(m+1)$ voorwaarden telt. Resteert dus voor elke P_m één vrijheidsgraad.

Om tot orthogonale polynomen te geraken, voeren we het navolgende stelsel in:

$$\Pi_0(x) = \sigma_{00} \qquad \Pi_1(x) = \begin{vmatrix} \sigma_{00} & P_0 \\ \sigma_{10} & P_1 \end{vmatrix} \qquad \Pi_2(x) = \begin{vmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & P_0 \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & P_1 \\ \sigma_{20} & \sigma_{21} & P_2 \end{vmatrix}$$

Algemeen:

$$\Pi_m(x) = \begin{vmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \sigma_{02} & \ldots & \sigma_{0.m-1} & P_0 \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1.m-1} & P_1 \\ \sigma_{20} & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2.m-1} & P_2 \\ - - & - - & - - & - - & - - & - - \\ \sigma_{m0} & \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \ldots & \sigma_{m.m-1} & P_m \end{vmatrix}$$

Wij kunnen nu aantonen, dat de polynomen $\Pi_i(x)$ orthogonaal zijn, zodat:

$$\sum_1^n \Pi_i(x_k)\,\Pi_j(x_k) = 0, \qquad \text{voor } i \neq j.$$

Men heeft:

$$\Pi_i = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_i P_i$$

en:

$$\Pi_i \Pi_j = \alpha_0 P_0 \Pi_j + \alpha_1 P_1 \Pi_j + \ldots + \alpha_i P_i \Pi_j$$

en:

$$\sum_1^n \Pi_i(x_k)\,\Pi_j(x_k) = \alpha_0 \sum_1^n P_0(x_k)\,\Pi_j(x_k) + \ldots +$$

$$+ \alpha_i \sum_1^n P_i(x_k)\,\Pi_j(x_k).$$

Maar in het rechterlid is elke term blijkbaar nul.

Beschouw nu het bijzondere geval, dat de abscissen der n punten aequidistant zijn, dus:

$$\begin{array}{cccccc} -(n-1) & -(n-3) & -(n-5) & \ldots\ldots & (n-3) & (n-1) \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_{n-1} & y_n \end{array}$$

Dan is: $\sigma_{ij} = \sum_1^n x_k^{\,i+j}$ voor zover $P_i(x) = x^i$

$\sigma_{00} = n$; $\sigma_{11} = \frac{1}{3}n(n^2-1)$; $\sigma_{22} = \frac{1}{15}\,n(n^2-1)(3n^2-7)$;

$\sigma_{33} = \frac{1}{21}\,n(n^2-1)(3n^4-18n^2+31)$, enz. enz.

$\Pi_0 = 1$; $\Pi_1 = \sigma_{00}x$; $\Pi_2 = \sigma_{11}(\sigma_{00}x^2 - \sigma_{11})$;

$\Pi_3 = (\sigma_{00}\sigma_{22} - \sigma_{11}^{\,2})(\sigma_{11}x^3 - \sigma_{22}x)$; $\Pi_4 =$

$= (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}^{\,2})\left[(\sigma_{00}\sigma_{22} - \sigma_{11}^{\,2})x^4 - (\sigma_{00}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{22})x^2 +\right.$

$\left. + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}^{\,2})\right]$

Hiermede is het probleem in beginsel opgelost. Ter vereenvoudiging mag elke $\Pi_i(x)$ door de coëfficiënt van x^i worden gedeeld, aangezien nog één vrijheidsgraad ter beschikking stond.