STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1954 - 003

(intern)

Over de reductie van een probleem over stelsels functies tot een matrixprobleem

H.J.A. Duparc en W. Peremans

1954

Over de reductie van een probleem over stelsels functies tot een matrixprobleem.

door H.J.A.Duparc en W.Peremans.

Een ons gesteld probleem over stelsels functies luidt als volgt:

Gegeven: $k < m$; $\mu = 1,\dots,m$; $\alpha_\kappa = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$;
m functies $P_\mu(\alpha_\kappa)$
de functie $E(\alpha_\kappa)$;
m getallen p_μ;
m^2 getallen $c_{\mu\nu}$; $\mu,\nu = 1,\dots,m$; de matrix $(c_{\mu\nu})$ zij **positief definiet**.

Gezocht: k functies $L_{\kappa'}(\pi_\mu)$ met de volgende eigenschap:
Stel

(1) $$L_{\kappa'}(P_\mu(\alpha_\kappa)) = M_{\kappa'}(\alpha_\kappa) \qquad (\kappa,\kappa' = 1,\dots,k).$$

Na oplossen:

$$\alpha_\kappa = A_\kappa(L_{\kappa'}) = A_\kappa(L_{\kappa'}(\pi_\mu)).$$

Stel nu:

$$a_\kappa = A_\kappa(L_{\kappa'}(p_\mu)),$$

en bepaal $L_{\kappa'}$ zo dat

(2) $$\tau^2 = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}\left(\frac{\partial E}{\partial \pi_\mu}\frac{\partial E}{\partial \pi_\nu}\right)_{\pi=p} \text{ minimaal is.}$$

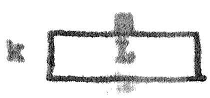
De reductie van dit probleem tot een matrixprobleem geschiedt als volgt.

Men heeft

(3) $$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial E}{\partial \pi_\mu}\right)_{\pi=p} = \sum_\kappa \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha=a}\left(\frac{\partial \alpha_\kappa}{\partial \pi_\mu}\right)_{\pi=p} = \\ &= \sum_\kappa \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha=a}\sum_{\kappa'}\left(\frac{\partial \alpha_\kappa}{\partial L_{\kappa'}}\right)_{L(\pi)=L(p)}\left(\frac{\partial L_{\kappa'}}{\partial \pi_\mu}\right)_{\pi=p}. \end{aligned}\right.$$

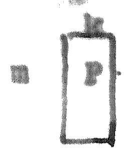
Voer nu in de volgende matrices:

1° $(L_{\kappa\mu}) = \left(\frac{\partial L_\kappa}{\partial \pi_\mu}\right)_{\pi=p}$



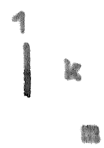
(matrix k x m)

2° $(P_{\mu\kappa}) = \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha=a}$



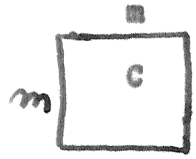
(matrix m x k)

3° $(E_\kappa) = \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha=a}$



(d.i. staande vector = matrix k x 1)

4° $(C_{\mu\nu}) = c_{\mu\nu}$



Dan heeft men wegens (1)

$$\frac{\partial L_{k'}}{\partial \alpha_k} = \sum_{\mu} \frac{\partial L_{k'}}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \pi_\mu}{\partial \alpha_k},$$

dus $\frac{\partial L_{k'}}{\partial \alpha_k}$ is het k',k^e element van een matrix, die te schrijven is in de gedaante LP. Dan is $\frac{\partial \alpha_k}{\partial L_{k'}}$ het k,k'^e element van de inverse matrix, dus van $(LP)^{-1}$.

Dan leert (3) dat $(\frac{\partial E}{\partial \pi_\mu})$ het μ^e element is van een liggende vector V' (= 1 x m matrix) die de gedaante $E'(LP)^{-1}L$ bezit.

De eis (2) is dus dat

$\tau^2 = V'CV$ minimaal is, d.w.z. dat

(4) $\tau^2 = E'(LP)^{-1}L\ C\ L'\ (P'L')^{-1}E$

minimaal is.

Deze uitdrukking genomen voor $\alpha = a$ (d.w.z. $\pi = p$) legt dus een eis op aan de elementen der onbekende matrix

$$(L_{k\mu}) = \left(\frac{\partial L_k}{\partial \pi_\mu}\right)_{\pi=p}.$$

Is nu deze matrix zo bepaald dat deze eis vervuld is, dan heeft men van de k overigens willekeurige functies $L_k(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ slechts in 1 punt (nl. $\pi=p$) de partiële 1^e orde afgeleiden gegeven, zodat alle functies $L_k(\pi_\mu)$ zullen voldoen die in $\pi = p$ diezelfde afgeleiden bezitten en in het bijzonder dus in $\pi = p$ raken aan een zelfde raakruimte, nl. de lineaire functies $L_k(\pi_\mu)$, die in $\pi = p$ ook die afgeleiden bezitten.

Op de discussie van (4) hopen wij nog nader terug te komen. Het is te verwachten dat voor zekere keuze van L, op een of andere wijze afhangende van E, C en P, zo'n minimum optreedt, zodat dan de stand van bovengegeven raakruimte, afhankelijk van E, C en P, is vastgelegd. Wij hebben de indruk dat het in bepaalde omstandigheden heel goed mogelijk is dat $\tau^2 = 0$ is.