STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-003

Een klasse van toetsingsmethoden voor wegglijdende waarnemingen

R. Doornbos

1956

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht door R. Doornbos in de serie
Actualiteiten op 25 Februari 1956.

Een klasse van toetsingsmethoden voor weggglijdende waarnemingen

1. Inleiding

In de volgende paragrafen houden wij ons in de eerste plaats bezig met weggglijtoetsen voor stochastische grootheden die een Γ-verdeling volgen. Deze toetsen zijn generalisaties van de toetsen beschreven door W.G. COCHRAN (1941) en R. DOORNBOS (1956) voor respectievelijk de grootste en de kleinste van een aantal geschatte varianties van normale verdelingen, in die zin dat ze ook kunnen worden toegepast in het geval dat de steekproeven waaruit de varianties zijn geschat van verschillende uitgebreidheid zijn.

De exacte berekening van kritieke waarden voor de toetsingsgrootheden is bijzonder ingewikkeld, maar het is mogelijk, volgens een methode afkomstig van COCHRAN, bij een gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel ε, benaderde kritieke waarden te construeren, zodanig dat de bij deze benaderde waarden behorende onbetrouwbaarheidsdrempel ligt tussen ε en $\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$.

Verder zullen wij laten zien dat deze zelfde methode kan worden toegepast om de kritieke waarden te benaderen van de weggglijtoets voor normaal verdeelde variabelen, voorgesteld door E.S. PEARSON en C. CHANDRA SEKAR (1936) en getabelleerd door F.E. GRUBBS (1950).

Tenslotte geven wij weggglijtoetsen voor enige variabelen die een discrete verdeling bezitten, en wel voor de Poisson-verdeling, de binomiale verdeling en de negatief binomiale verdeling.

Het onderscheidingsvermogen van de toetsen beschreven in de paragrafen 2 en 5 wordt behandeld respectievelijk in R. DOORNBOS en H.J. PRINS (1956) en in een in bewerking zijnd rapport van H.J. PRINS. In dit laatste rapport worden ook de bewijzen gegeven die wij in de paragrafen 4 en 7 achterwege hebben gelaten. Het bewijs voor het parametervrije geval is afkomstig van H. KESTEN, die eveneens vereenvoudigingen aanbracht in andere bewijzen.

2. Wegglijtoetsen voor gamma-verdeelde grootheden

Wij beschouwen een aantal stochastische grootheden

(2.1) $$\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k,$$

die onderling volledig onafhankelijk verdeeld zijn volgens gamma-verdelingen met parameters respectievelijk $\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_k, \beta_k$, dat wil zeggen de verdelingsdichtheid van $\underline{u}_i$ is

(2.2) $$f(u_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\beta_i^{\alpha_i}} u_i^{\alpha_i - 1} e^{-u_i/\beta_i}, \quad (0 \leq u_i \leq \infty),$$

waarbij α_i en β_i reëel en positief zijn. Zoals bekend is de verdeling van $\underline{t} = \underline{\chi}^2 . \sigma^2$, waarbij $\underline{\chi}^2$ een χ^2-verdeling met ν vrijheidsgraden bezit een speciaal geval van een gamma-verdeling met parameters $\alpha = \nu/2$ en $\beta = 2\sigma^2$.

Wij willen nu de hypothese H_0 toetsen:

(2.3) $$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = \beta,$$

tegen de alternatieven

(2.4) $$H_1 : \beta_1 = \ldots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \ldots = \beta_k = \beta,$$
$$\beta_i = c_{1i}\beta, \quad c_{1i} > 1,$$

voor een of andere waarde van i en tegen

(2.5) $$H_2 : \beta_1 = \ldots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \ldots = \beta_k = \beta,$$
$$\beta_i = c_{2i}\beta, \quad 0 < c_{2i} < 1,$$

voor een of andere waarde van i.

Wij berekenen nu de quotiënten

(2.6) $$\underline{x}_j = \frac{\underline{u}_j}{\Sigma \underline{u}_i}, \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Vervolgens berekenen wij, om H_0 te toetsen tegen het alternatief H_1 de volgende onvolledige B-integralen:

(2.7) $$\underline{d}_j = \frac{1}{B(\alpha_j, A - \alpha_j)} \int_{\underline{x}_j}^{1} x^{\alpha_j - 1} (1 - x)^{A - \alpha_j - 1} dx =$$
$$= 1 - I_{\underline{x}_j}(\alpha_j, A - \alpha_j),$$

waarin $A = \Sigma^i \alpha_i$.

Onze toetsingsgrootheid $\underline{d}$ is nu

(2.8) $$\underline{d} = \min_{j=1,\ldots,k} \underline{d}_j.$$

Als wij H_0 verwerpen indien $\underline{d} \leq \frac{\varepsilon}{k}$ is, ligt onze onbetrouwbaarheidsdrempel tussen ε en $\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$.

Om H_0 tegen H_2 te toetsen, berekenen wij

$$(2.9) \qquad \underline{e}_j = \frac{1}{B(\alpha_j, A-\alpha_j)} \int_0^{\underline{x}_j} x^{\alpha_j-1}(1-x)^{A-\alpha_j-1}\,dx = 1-\underline{d}_j = I_{\underline{x}_j}(\alpha_j, A-\alpha_j).$$

Nu verwerpen wij H_0 als

$$(2.10) \qquad \underline{e} = \min_{j=1,\dots,k} \underline{e}_j \leq \frac{\varepsilon}{k}.$$

Ook hier ligt de onbetrouwbaarheidsdrempel tussen ε en $\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2$.

3. Bewijs van de in paragraaf 2 vermelde resultaten

Wij stellen $\underline{u}_1+\dots+\underline{u}_k=\underline{U}$ en berekenen de simultane verdeling van $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{k-1}$ (gegeven door (2.6)) en van $\underline{U}$. De determinant van JACOBI van de transformatie

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u_1 = x_1 U, \\ \vdots \\ u_{k-1} = x_{k-1} U, \\ u_k = U(1-x_1-\dots-x_{k-1}), \end{cases}$$

is

$$(3.2) \qquad \begin{vmatrix} U & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & U & \dots & 0 & x_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & U & x_{k-1} \\ -U & -U & \dots & -U & (1-x_1-\dots-x_{k-1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & U & \dots & 0 & x_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & U & x_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = U^{k-1}.$$

De simultane verdelingsdichtheid van $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_k$ onder H_0 is volgens (2.2)

$$(3.3) \qquad f(u_1,\dots,u_k) = \frac{u_1^{\alpha_1-1}\dots u_k^{\alpha_k-1} e^{-(u_1+\dots+u_k)/\beta}}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_k)\beta^A}, \quad (u_i \geq 0).$$

Dus de simultane verdelingsdichtheid van $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{k-1}$ en $\underline{U}$ is

$$(3.4) \qquad g(x_1,\dots,x_{k-1},U) = \frac{x_1^{\alpha_1-1}\dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(1-x_1-\dots-x_{k-1})^{\alpha_k-1}U^{A-1}e^{-U/\beta}}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_k)\beta^A} =$$

$$= \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1-1}\dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(1-x_1-\dots-x_{k-1})^{\alpha_k-1}\frac{U^{A-1}e^{-U/\beta}}{\Gamma(A)\beta^A},$$

$$(0 \leq x_i \leq 1,\ \Sigma x_i \leq 1,\ 0 \leq U \leq \infty).$$

Hieruit volgt dus dat $\underline{u} = \underline{u}_1 + \cdots + \underline{u}_k$ weer een gamma-verdeling bezit met parameters A en β (de bekende additiviteitseigenschap van de χ^2-verdeling) en dat de simultane verdeling van $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{k-1}$ gegeven wordt door

$$(3.5) \qquad h(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1} (1 - x_1 - \cdots - x_{k-1})^{\alpha_k - 1},$$

$$(0 \leq x_i \leq 1, \; \Sigma x_i \leq 1).$$

Maar nu hebben wij ook meteen de simultane verdeling van $\underline{x}_{i_1}, \ldots, \underline{x}_{i_t}$, als $\{i_1, \ldots, i_t\}$, $(t \leq k-1)$ een willekeurige deelverzameling is van de verzameling $\{1, 2, \ldots, k\}$, immers $\underline{u} - \underline{u}_{i_1} - \cdots - \underline{u}_{i_t}$ heeft ook een Γ-verdeling omdat het de som is van $k-t$ onafhankelijk Γ-verdeelde grootheden met dezelfde parameter β, en speelt dus de rol van $\underline{u}_k$ bij de afleiding van (3.5). Dus de gezochte verdeling is

$$(3.6) \qquad p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) = \frac{\Gamma(A)\, x_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1} \cdots x_{i_t}^{\alpha_{i_t}-1} (1 - x_{i_1} - \cdots - x_{i_t})^{A - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_t} - 1}}{\Gamma(\alpha_{i_1}) \cdots \Gamma(\alpha_{i_t})\, \Gamma(A - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_t})}.$$

Wij beschouwen vervolgens een verzameling van k reële getallen $g_1, \ldots, g_k$ $(0 \leq g_i \leq 1)$ en de daarbij behorende waarschijnlijkheden gedefiniëerd door

$$(3.7) \qquad \begin{cases} p_i = P[\underline{x}_i \leq g_i], \\ p_{i,j} = P[\underline{x}_i \leq g_i \text{ en } \underline{x}_j \leq g_j], \quad (i \neq j), \\ \cdots \\ q_i = P[\underline{x}_i > g_i], \\ q_{i,j} = P[\underline{x}_i > g_i \text{ en } \underline{x}_j > g_j], \quad (i \neq j), \\ \cdots \end{cases}$$

berekend onder H_0. Als wij met P de kans aangeven dat minstens een van de quotiënten $\underline{x}_i$ de bijbehorende waarde g_i niet overschrijdt, dus $P \overset{def}{=} P[\min(\underline{x}_i - g_i) \leq 0]$, dan geldt

$$(3.8) \qquad P = \Sigma p_i - \Sigma p_{i,j} + \Sigma p_{i,j,l} \cdots + (-)^{k-1} p_{1,2,\ldots,k},$$

waarbij de r^e sommatie zich uitstrekt over alle p's met r coëfficiënten, zodat de r^e som $\binom{k}{r}$ termen bevat (vgl. W. FELLER (1950)).

De kans Q dat minstens één van de $\underline{x}_i$ de waarde g_i overschrijdt, dus $Q \overset{def}{=} P[\max(\underline{x}_i - g_i) > 0]$, is gelijk aan

$$Q = \sum q_i - \sum q_{i,j} + \sum q_{i,j,l} \cdots + (-1)^{k-1} q_{1,2,\ldots,k} . \tag{3.9}$$

Volgens de ongelijkheid van BONFERRONI (vgl. W. FELLER (1950)), geldt

$$\sum p_i - \sum p_{i,j} \leq P \leq \sum p_i \tag{3.10}$$

en

$$\sum q_i - \sum q_{i,j} \leq Q \leq \sum q_i . \tag{3.11}$$

Verder zullen wij bewijzen dat geldt

$$p_{i,j} \leq p_i p_j \tag{3.12}$$

en

$$q_{i,j} \leq q_i q_j . \tag{3.13}$$

Als wij nu de getallen $g^{(2)}_{i,\varepsilon}$ zo bepalen dat alle p_i gelijk zijn aan $\frac{\varepsilon}{k}$, dus $P\left[\underline{x}_i \leq g^{(2)}_{i,\varepsilon}\right] = \frac{\varepsilon}{k}$, $(i = 1, \ldots, k)$, dan volgt uit (3.10) en (3.12) dat de bijbehorende kans $P_\varepsilon \overset{def}{=} P\left[\min(\underline{x}_i - g^{(2)}_{i,\varepsilon}) \leq 0\right]$ voldoet aan

$$\sum p_i - \sum p_i p_j \leq \sum p_i - \sum p_{i,j} \leq P_\varepsilon \leq \sum p_i ,$$

of

$$\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{k-1}{k}\varepsilon^2 \leq P_\varepsilon \leq \varepsilon ,$$

of voor $k \geq 2$:

$$\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \leq P_\varepsilon \leq \varepsilon . \tag{3.14}$$

Op dezelfde manier vinden wij

$$\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \leq Q_\varepsilon \leq \varepsilon , \tag{3.15}$$

als wij de getallen $g^{(1)}_{i,\varepsilon}$ zo bepalen, dat alle q_i gelijk worden aan $\frac{\varepsilon}{k}$, zodat $P\left[\underline{x}_i > g^{(1)}_{i,\varepsilon}\right] = \frac{\varepsilon}{k}$, $(i = 1, \ldots, k)$ en als $Q_\varepsilon \overset{def}{=} P\left[\max(\underline{x}_i - g^{(1)}_{i,\varepsilon}) > 0\right]$. Daar het in paragraaf 2 beschreven procédé om de hypothese H_0 te toetsen tegen H_1 en H_2 respectievelijk de kansen Q_ε en P_ε oplevert om H_0 te verwerpen, als H_0 waar is, liggen deze kansen tussen de daar vermelde grenzen.

Rest dus nog de ongelijkheden (3.12) en (3.13) te bewijzen. Allereerst zullen wij aantonen, dat ze aequivalent zijn. Wij hebben

$$p_i = 1 - q_i \quad \text{en} \quad q_j = 1 - p_j$$

en dus

(3.16) $$p_i(1-p_j) = q_j(1-q_i).$$

Verder geldt

(3.17) $$p_i - p_{i,j} = q_j - q_{i,j} \;(= P[x_i \leqq g_i \text{ en } x_j > g_j]).$$

Uit (3.16) en (3.17) volgt door aftrekking

(3.18) $$p_i p_j - p_{i,j} = q_i q_j - q_{i,j},$$

zodat (3.12) en (3.13) aequivalent zijn. Wij kunnen dus volstaan met (3.12) te bewijzen en wel alleen voor het geval $g_i + g_j \leqq 1$, want als $g_i + g_j > 1$ is, is $q_{i,j} = 0$, zodat (3.12) en (3.13) zeker waar zijn. In aansluiting hierop merken wij op dat als ε zo klein is dat $g^{(1)}_{i,\varepsilon} + g^{(1)}_{j,\varepsilon} \geqq 1$ voor alle i en j, $i \neq j$, de onbetrouwbaarheidsdrempel van onze toets dus exact gelijk is aan ε.

Het is gemakkelijk in te zien, dat (3.12) aequivalent is met

(3.19) $$\frac{p_{i,j}}{p_j} \leqq \frac{p_i - p_{i,j}}{q_j}$$

of

(3.20) $$\frac{P[x_i \leqq g_i \text{ en } x_j \leqq g_j]}{P[x_j \leqq g_j]} \leqq \frac{P[x_i \leqq g_i \text{ en } x_j > g_j]}{P[x_j > g_j]}.$$

Uit (3.6) volgt dat het linkerlid $L(g_i, g_j)$ van (3.20) gelijk is aan

$$C.\ \frac{\int_0^{g_j}\int_0^{g_i} x_j^{\alpha_j-1} x_i^{\alpha_i-1}(1-x_i-x_j)^{A-\alpha_i-\alpha_j-1}\,dx_i\,dx_j}{\int_0^{g_j} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{A-\alpha_j-1}\,dx_j},$$

waarin $C = \dfrac{\Gamma(A-\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(A-\alpha_i-\alpha_j)}$.

Wij stellen nu $x_i = v(1-x_j)$ waardoor $L(g_i, g_j)$ overgaat in

(3.21) $$L(g_i, g_j) = C\ \frac{\int_0^{g_j}\int_0^{\frac{g_i}{1-x_j}} v^{\alpha_i-1}(1-v)^{A-\alpha_i-\alpha_j-1} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{A-\alpha_j-1}\,dv\,dx_j}{\int_0^{g_j} x_j^{\alpha_j-1}(1-x_j)^{A-\alpha_j-1}\,dx_j}$$

$$\leqq C \int_0^{\frac{g_i}{1-g_j}} v^{\alpha_i-1}(1-v)^{A-\alpha_i-\alpha_j-1}\,dv.$$

Aan de andere kant is het rechterlid van (3.20) gelijk aan

(3.22)
$$R(g_i, g_j) = C \frac{\int_{g_j}^{1} \int_0^{\min(g_i, 1-x_j)} x_i^{\alpha_i - 1} x_j^{\alpha_j - 1} (1 - x_i - x_j)^{A - \alpha_i - \alpha_j - 1} \, dx_i \, dx_j}{\int_{g_j}^{1} x_j^{\alpha_j - 1} (1 - x_j)^{A - \alpha_j - 1}} =$$
$$= C \frac{\int_{g_j}^{1} \int_0^{\min\left(\frac{g_i}{1-x_j}, 1\right)} v^{\alpha_i - 1} (1 - v)^{A - \alpha_i - \alpha_j - 1} x_j^{\alpha_j - 1} (1 - x_j)^{A - \alpha_j - 1} \, dv \, dx_j}{\int_{g_j}^{1} x_j^{\alpha_j - 1} (1 - x_j)^{A - \alpha_j - 1}} \geq$$
$$\geq C \int_0^{\frac{g_i}{1-g_j}} v^{\alpha_i - 1} (1 - v)^{A - \alpha_i - \alpha_j - 1} \, dv.$$

Uit (3.21) en (3.22) volgt dat (3.20) en dus (3.12) waar zijn.

4. Weggglijtoetsen voor normaal verdeelde grootheden

Wij beschouwen nu een aantal onderling volledig onafhankelijke normaal verdeelde grootheden

(4.1) $$\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_k,$$

afkomstig uit verdelingen met dezelfde onbekende spreiding σ en met gemiddelden

$$\mu_1, \ldots, \mu_k.$$

Wij willen de nulhypothese

(4.2) $$H_0: \quad \mu_1 = \ldots = \mu_k = \mu \quad , \quad (\mu \text{ onbekend})$$

toetsen tegen de alternatieven

(4.3) $$H_1: \begin{cases} \mu_1 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_k = \mu, \\ \mu_i = c_{1i}\,\mu \quad , \quad c_{1i} > 1, \end{cases}$$

voor een onbekende waarde van i en

(4.4) $$H_2: \begin{cases} \mu_1 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_k = \mu, \\ \mu_i = c_{2i}\,\mu, \quad c_{2i} < 1, \end{cases}$$

voor een onbekende waarde van i.

Denken wij de grootheden $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_k$ gerangschikt naar opklimmende grootte:

(4.5) $$\underline{y}_{(1)}, \ldots, \underline{y}_{(k)},$$

dan kunnen wij als toetsingsgrootheid om H_0 tegen H_1 te toetsen, nemen:

(4.6) $$\underline{a}_{(k)} = \frac{\underline{y}_{(k)} - \underline{\bar{y}}}{\underline{s}},$$

waarin
$$\underline{\bar{y}} = \frac{1}{k} \sum_i \underline{y}_i$$
en
$$\underline{s}^2 = \frac{1}{k} \sum_i (\underline{y}_i - \underline{\bar{y}})^2.$$

Als toetsingsgrootheid voor H_0 tegen H_2 nemen wij

(4.7) $$a_{(1)} = \frac{\bar{y} - y_{(1)}}{s}.$$

De grootheden $a_{(1)}$ en $a_{(k)}$ zijn voorgesteld door E.S. PEARSON en C. CHANDRA SEKAR (1936), terwijl kritieke waarden zijn gegeven door F.E. GRUBBS (1950).
Wij stellen

(4.8) $$a_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s},$$

waarbij y_i willekeurig is gekozen uit $y_1, \ldots, y_k$. Dan heeft

(4.9) $$t = \frac{a_i \sqrt{k-2}}{\sqrt{n-1-a_i^2}}$$

een t-verdeling van STUDENT met $k-2$ vrijheidsgraden (vgl. W.R. THOMPSON (1935)). Wij kunnen nu een kritieke waarde g_ε zo bepalen dat

(4.10) $$P\left[\,|a_i| \geqq g_\varepsilon \mid H_0\right] = \frac{2\varepsilon}{k}.$$

Daar wij kunnen bewijzen dat het analogon van (3.12) en (3.13) ook voor de grootheden a_i geldt, is dus

(4.11) $$\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \leqq P\left[a_{(1)} \geqq g_\varepsilon\right] = P\left[a_{(k)} \geqq g_\varepsilon\right] \leqq \varepsilon.$$

Het bepalen van de waarde g_ε komt dus neer op het bepalen van een percentielpunt van de t-verdeling. Daar $\frac{t^2}{k-2+t^2}$ weer een bêta-verdeling bezit, kunnen dezelfde berekeningsmethoden worden gevolgd als bij de toets beschreven in de vorige paragraaf.

Verder kan men eenvoudig inzien dat

(4.12) $$P\left[a_i \geqq g_\varepsilon \text{ en } a_j \geqq g_\varepsilon\right] = 0 \qquad \text{voor } g_\varepsilon \geqq \sqrt{\frac{k-2}{2}}.$$

Uit (4.12) volgt dus dat g_ε bepaald uit (4.10) de exacte kritieke waarde geeft, indien $g_\varepsilon \geqq \sqrt{\frac{k-2}{2}}$ is. Dit blijkt het geval te zijn in het gebied:

$\varepsilon \leqq 0{,}10$ en $k \leqq 10$,
$\varepsilon \leqq 0{,}05$ en $k \leqq 14$,
$\varepsilon \leqq 0{,}025$ en $k \leqq 16$,
$\varepsilon \leqq 0{,}01$ en $k \leqq 19$,

waartoe dus veel in de practijk voorkomende gevallen behoren.

E. PAULSON (1952) geeft een generalisatie van de toets van GRUBBS door het geval te beschouwen waarbij wij voor iedere y_i

niet 1 maar n waarnemingen hebben. Ook hierop is onze benaderingsmethode van toepassing.

5. Wegglijtoetsen voor Poisson-verdeelde grootheden

Wij beschouwen een aantal stochastische grootheden die onderling volledig onafhankelijk zijn:

$$(5.1) \qquad \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_k,$$

en allen een Poisson-verdeling bezitten, met gemiddelden $\mu_1, \ldots, \mu_k$. De nulhypothese luidt nu dat deze gemiddelden bekende verhoudingen hebben:

$$(5.2) \qquad H_0 : \frac{\mu_j}{\Sigma_i \mu_i} = p_j \quad (j=1,\ldots,k).$$

Deze situatie doet zich bij voorbeeld voor als wij van Poissonverdelingen, waarvan wij willen toetsen of de gemiddelden gelijk zijn, verschillende aantallen waarnemingen doen.

Wij willen H_0 toetsen tegen de alternatieven

$$(5.3) \qquad H_1 : \frac{\mu_j}{\Sigma_i \mu_i} = c_{1j} p_j, \quad \frac{\mu_\ell}{\Sigma_i \mu_i} = \frac{1-c_{1j} p_j}{1-p_j} \cdot p_\ell, \; (\ell \neq j),$$

$1 < c_{1j} < \frac{1}{p_j}$, voor een onbekende waarde van j en

$$(5.4) \qquad H_2 : \frac{\mu_j}{\Sigma_i \mu_i} = c_{2j} p_j, \quad \frac{\mu_\ell}{\Sigma_i \mu_i} = \frac{1-c_{2j} p_j}{1-p_j} p_\ell, \; (\ell \neq j),$$

$0 < c_{2j} < 1$, voor een onbekende waarde van j.

Zoals bekend zijn $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_k$, onder de voorwaarde dat de som $\Sigma \underline{z}_i$ een vaste waarde N heeft, verdeeld volgens een multinomiale verdeling met kansen $p_j = \frac{\mu_j}{\Sigma_i \mu_i}$ en aantal trekkingen N. De volgende relatie is algemeen bekend:

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} P[\underline{z}_1 \geq z_1 \mid \Sigma \underline{z}_i = N] &= \sum_{z_1}^{N} \binom{N}{s} p_1^s (1-p_1)^{N-s} = \\ &= \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(z_1)\Gamma(N-z_1+1)} \int_0^{p_1} t^{z_1-1}(1-t)^{N-z_1} dt = \\ &= I_{p_1}(z_1, N-z_1+1). \end{aligned}$$

Wij kunnen deze relatie evenwel ook generaliseren tot

$$P[\underline{z}_1 \geqq z_1 \text{ en } \underline{z}_2 \geqq z_2 \mid \Sigma \underline{z}_i = N] =$$

(5.6)
$$= \sum_{z_1}^{N} \sum_{z_2}^{N} \frac{N!}{s_1!\,s_2!\,(N-s_1-s_2)!}\, p_1^{s_1} p_2^{s_2} (1-p_1-p_2)^{N-s_1-s_2} =$$
$$= \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)\Gamma(N-z_1-z_2+1)} \int_0^{p_1}\int_0^{p_2} t_1^{z_1-1} t_2^{z_2-1} (1-t_1-t_2)^{N-z_1-z_2}\, dt_2\, dt_1,$$

enz., voor meerdere variabelen. Uit de ongelijkheid (3.12) volgt dus meteen

(5.7)
$$P[\underline{z}_1 \geqq z_1 \text{ en } \underline{z}_2 \geqq z_2 \mid \Sigma \underline{z}_i = N] \leqq$$
$$\leqq P[\underline{z}_1 \geqq z_1 \mid \Sigma \underline{z}_i = N] . P[\underline{z}_2 \geqq z_2 \mid \Sigma \underline{z}_i = N],$$

daar de ongelijkheden (3.12) en (5.7) betrekking hebben op dezelfde gegeneraliseerde onvolledige bêta-integralen. Wij hebben dus een, voorwaardelijke, toets voor de hypothese H_0 tegen het alternatief H_1 door te berekenen

$$\underline{m}_j = I_{p_j}(\underline{z}_j, N-\underline{z}_j+1)$$

en H_0 ten gunste van H_1 te verwerpen als

(5.8)
$$\underline{m} = \min_{1,\ldots,k} \underline{m}_j \leqq \frac{\varepsilon}{k}$$

is. Op volkomen analoge wijze toetsen wij H_0 tegen H_2 door de integralen

$$\underline{n}_j = 1 - I_{p_j}(\underline{z}_j, N-\underline{z}_j+1) = 1 - \underline{m}_j$$

te berekenen en H_0 te verwerpen als

(5.9)
$$\underline{n} = \min_{1,\ldots,k} \underline{n}_j \leqq \frac{\varepsilon}{k}$$

is. Voor de onbetrouwbaarheidsdrempel hebben wij dus in beide gevallen weer de grenzen ε en $\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$.

6. Een algemene stelling voor discrete variabelen

Wij zullen de volgende stelling bewijzen:

Als $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ discreet verdeelde, onderling volledig onafhankelijke stochastische grootheden zijn en

(6.1)
$$\frac{P[\sum_1^k \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = a]}{P[\sum_1^k \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = a+1]}$$

is monotoon niet dalend in a, dan geldt de ongelijkheid

$$(6.2)\qquad P[\underline{v}_j > v_j \text{ en } \underline{v}_l > v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N] \leqq$$
$$\leqq P[\underline{v}_j > v_j \mid \Sigma \underline{v}_i = N].P[\underline{v}_l > v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N].$$

De ongelijkheid (6.2) is aequivalent met (vgl. de overgang van (3.19) op (3.20))

$$(6.3)\qquad \frac{P[\underline{v}_j > v_j \text{ en } \underline{v}_l > v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N]}{P[\underline{v}_l > v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N]} \leqq$$
$$\leqq \frac{P[\underline{v}_j > v_j \text{ en } \underline{v}_l \leqq v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N]}{P[\underline{v}_l \leqq v_l \mid \Sigma \underline{v}_i = N]}.$$

Het linkerlid L van (6.3) is gelijk aan

$$(6.4)\qquad L = \frac{\sum\limits_{v_l+1}^{\infty}{}_x\, P[\underline{v}_l = x \mid \Sigma \underline{v}_i = N] \sum\limits_{v_j+1}^{\infty}{}_y\, P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x]}{\sum\limits_{v_l+1}^{\infty}{}_x\, P[\underline{v}_l = x \mid \Sigma \underline{v}_i = N]}.$$

Als nu

$$(6.5)\qquad \sum_{v_j+1}^{\infty}{}_y\, P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x]$$

monotoon niet stijgend is in x, dan geldt dus

$$(6.6)\qquad L \leqq \sum_{v_j+1}^{\infty}{}_y\, P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = v_l + 1].$$

Op precies dezelfde manier kunnen wij laten zien dat het rechterlid R van (6.3)

$$(6.7)\qquad R \geqq \sum_{v_j+1}^{\infty}{}_y\, P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = v_l] \geqq$$
$$\geqq \sum_{v_j+1}^{\infty}{}_y\, P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = v_l + 1],$$

als (6.5) monotoon niet stijgend is in x. Deze laatste voorwaarde is dus voldoende voor de geldigheid van de ongelijkheid (6.3) en dus van (6.2). Nu is aan deze voorwaarde zeker voldaan als er een y_0 bestaat, zodanig dat voor alle x en voor alle $y \geqq y_0$ geldt

$$P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x] \geqq P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x+1],$$

terwijl voor alle x en voor alle $y < y_0$ geldt

$$P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x] \leqq P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x+1].$$

Voldoende voor het bestaan van zo'n waarde y_0 is weer dat

$$(6.8) \qquad \frac{P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x]}{P[\underline{v}_j = y \mid \Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x+1]}$$

monotoon niet dalend is in y voor alle waarden van x . Wij vermenigvuldigen nu (6.8) met de factor

$$(6.9) \qquad \frac{P[\Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x]}{P[\Sigma \underline{v}_i = N \text{ en } \underline{v}_l = x+1]},$$

die niet van y afhangt; (6.8) gaat dan over in

$$(6.10) \qquad \frac{P[\underline{v}_j = y].P[\underline{v}_l = x].P[\Sigma \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = N-x-y]}{P[\underline{v}_j = y].P[\underline{v}_l = x+1].P[\Sigma \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = N-x-y-1]}.$$

De voorwaarde dat (6.8) niet dalend is in y is dus aequivalent met de voorwaarde dat

$$(6.11) \qquad \frac{P[\Sigma \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = N-x-y]}{P[\Sigma \underline{v}_i - \underline{v}_j - \underline{v}_l = N-x-y-1]}$$

monotoon niet dalend is in y , wat weer aequivalent is met de voorwaarde van onze stelling, die hiermee dus is bewezen.

Wil (6.2) gelden voor alle j en l, dan is het dus voldoende dat (6.1) voor alle j en l geldt. Hebben $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ alle een zelfde type verdelingsfunctie, terwijl de som van een aantal van deze variabelen weer verdeeld is volgens een verdelingsfunctie van hetzelfde type, dan is de voorwaarde (6.1) eenvoudig te controleren. Dit is b.v. het geval als

a) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ binomiaal verdeeld zijn met dezelfde kans p . De verdeling van de som van $k-2$ $\underline{v}$'s is dan weer binomiaal met kans p en heeft dus de vorm:

$$P[\underline{x} = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad (x = 0, 1, \ldots, n).$$

De voorwaarde (6.1) luidt dan:

$$\frac{\binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a}}{\binom{n}{a+1} p^{a+1} (1-p)^{n-a-1}} = \frac{a+1}{n-a} \cdot \frac{1-p}{p}$$

monotoon niet dalend in a, hetgeen klaarblijkelijk het geval is.
b) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ zijn negatief binomiaal verdeeld met dezelfde kans. De verdeling van een som van $k-2$ $\underline{v}$'s is dan van de vorm:

$$P[\underline{x}=x] = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x \quad , (x=0,1,2,\ldots).$$

De voorwaarde (6.1) zegt nu

$$\frac{\binom{a+r-1}{a} p^r (1-p)^a}{\binom{a+r}{a+1} p^r (1-p)^{a+1}} = \frac{a+1}{a+r} \cdot \frac{1}{1-p}$$

is monotoon niet dalend in a, hetgeen waar is als $r>1$.
c) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ zijn Poisson-verdeeld. De son van $k-2$ variabelen heeft weer een Poisson-verdeling:

$$P[\underline{x}=x] = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \quad (x=0,1,2,\ldots).$$

De voorwaarde (6.1) is in dit geval:

$$\frac{\dfrac{e^{-\mu}\mu^a}{a!}}{\dfrac{e^{-\mu}\mu^{a+1}}{(a+1)!}} = \frac{a+1}{\mu}$$

is monotoon niet dalend in a. Hiermee is dus langs andere weg de ongelijkheid (5.7) en dus ook (3.12) bewezen.

De op (6.2) gebaseerde wegglijtoetsen zijn toetsen voor wegglijding naar rechts. De voor wegglijding naar links nodige ongelijkheid is echter weer met (6.2) aequivalent, op grond van het bewijs voor de aequivalentie van (3.12) en (3.13).

7. Een parametervrije wegglijtoets voor k steekproeven

Wij beschouwen k onderling volledig onafhankelijke stochastische grootheden

(7.1) $\qquad \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k.$

De te toetsen hypothese H_0 luidt nu: $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k$ hebben dezelfde continue verdelingsfunctie. De alternatieve hypothese H_1 luidt:

$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{i-1}, \underline{w}_{i+1}, \ldots, \underline{w}_k$ hebben dezelfde continue verdelingsfunctie, maar

(7.2) $\qquad H_1: \; P[\underline{w}_i > \underline{w}_j] > \frac{1}{2} \quad (j \neq i),$

voor een onbekende vaste waarde van i.

De alternatieve hypothese H_2 is: $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{i-1}, \underline{w}_{i+1}, \ldots, \underline{w}_k$ hebben dezelfde continue verdeling, maar

(7.3) $\qquad H_2: \; P[\underline{w}_i > \underline{w}_j] < \frac{1}{2} \;, (j \neq i),$

voor een onbekende vaste waarde van i.

Stel wij hebben van w_j de waarnemingen w_{jl} $(l=1,\ldots,n_j)$. Wij rangschikken nu alle $\sum n_i = N$ waarnemingen naar opklimmende grootte en bepalen de sommen van de rangnummers van de waarnemingen van iedere w_j. Deze sommen noemen wij T_j. Dit zijn dus de toetsingsgrootheden van de toets van WILCOXON (vgl. H.B. MANN en D.R. WHITNEY (1947)) voor iedere steekproef tegen de $k-1$ andere samengenomen. Wij krijgen op die manier k rechtseenzijdige overschrijdingskansen en wij verwerpen H_0 ten gunste van H_1 als de kleinste van deze kansen $\leqq \frac{\varepsilon}{k}$ is. Op dezelfde manier nemen wij de kleinste van de linkseenzijdige overschrijdingskansen als criterium als wij H_0 tegen H_2 willen toetsen. Wil de onbetrouwbaarheidsdrempel weer tussen de grenzen ε en $\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$ liggen, dan moet de volgende ongelijkheid gelden:

$$(7.4) \qquad P[\underline{T}_i \geqq T_i \text{ en } \underline{T}_j \geqq T_j] \leqq P[\underline{T}_i \geqq T_i]\, P[\underline{T}_j \geqq T_j],$$

voor alle i en j, $i \neq j$. Het bewijs laten wij hier achterwege.

Een andere toets voor dit probleem is gegeven door F. MOSTELLER (1948). MOSTELLER neemt als toetsingsgrootheid het aantal waarnemingen van de steekproef die de grootste waarneming bevat, dat groter is dan alle waarnemingen van de $k-1$ andere steekproeven.

Literatuur

W.G. COCHRAN (1941), The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total, Annals of Eugenics, 11 (1941), pp 47-52.

R. DOORNBOS (1956), Significance of the smallest of a set of estimated normal variances, zal verschijnen in jaargang 10 (1956) van Statistica Neerlandica.

R. DOORNBOS en H.J. PRINS (1956), A slippage test for a set of Gamma-variates, Report S 187 (VP 4) van het Mathematisch Centrum, Statistische Afdeling.

W. FELLER (1950), An introduction to probability theory and its applications, Volume I, New York and London, 1950.

F.E. GRUBBS (1950), Sample criteria for testing outlying observations, Annals of Math.Stat., 21 (1950), pp 27-58.

H.B. MANN and D.R. WHITNEY,(1947), On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Annals of Math. Stat., 18 (1947), pp 50-60.

F. MOSTELLER (1948), A k-sample slippage test for an extreme population, Annals of Math. Stat., 19 (1948), pp 58-65.

E. PAULSON (1952), An optimum solution to the k-sample slippage problem for the normal distribution, Annals of Math.Stat., 23 (1952), pp 610-616.

E.S. PEARSON and C. CHANDRA SEKAR (1936), The efficiency of statistical tools and a criterion for the rejection of outlying observations, Biometrika, 28 (1936), pp 308-320.

W.R. THOMPSON (1935), On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of the deviation to the sample standard deviation, Annals of Math.Stat., 6 (1935), pp 214-219.