STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 003

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

zaterdag 27 februari 1960

# Een methode van Mordell

1960

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960-003

ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

op zaterdag 27 februari 1960 door

Dr C.G. Lekkerkerker

# Een methode van Mordell

1. Hermite [1] heeft twee methoden aangegeven om zijn bekende schatting af te leiden voor het arithmetisch minimum van een positief definiete n-aire kwadratische vorm $F^2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

(1) $$\min_{u_1,\ldots,u_n \text{ geheel, niet alle } 0} F^2(u_1,u_2,\ldots,u_n) \leq \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D}$$

(D = determinant der coëfficienten van $F^2$). De kleinste constante die rechts als factor van $\sqrt[n]{D}$ toegelaten is, heet nu constante van Hermite, $\gamma_n$. We zijn hier geïnteresseerd in Hermite's eerste methode, die een generalisatie is van Gauss' behandeling van positieve ternaire vormen [2] . Daarbij wordt een (n-1)-aire sectie van $F^2$ genomen en de geadjungeerde vorm van $F^2$ in de beschouwing betrokken (zie ook Bachmann [3], p.253-254). In wezen bewijst Hermite de pas veel later door Mordell [6] en Oppenheim [9] expliciet afgeleide relatie:

(2) $$\gamma_n \leq \gamma_{n-1}^{\frac{n-1}{n-2}} .$$

Het is duidelijk dat (1) uit (2) en de waarde $\gamma_2 = \sqrt{4/3}$ volgt door volledige inductie naar n.

Later is bovenstaande methode herhaalde malen toegepast in de meetkunde der getallen, met name door Mordell [4,5,6,7,8 ], maar ook door Korkin-Zolotarew [12], Oppenheim [9,10,11 ] , Mullender [13 ] , Davenport [14] en Rankin [15]. De toepassingen betreffen positieve kwadratische vormen, producten van lineaire vormen, kruisingen daartussen, indefiniete kwadratische vormen en nog andere vormen. Armitage [16] heeft een slechts ten dele geslaagde poging ondernomen om de toepassingen te laten volgen uit één algemene stelling. Twee toepassingen worden uitvoerig besproken in het recente boek van Cassels [17], p.268-279, waarbij echter de grondgedachte nog vaag blijft en schuil gaat achter de details:

> "......so in general we have replaced one n-dimensional problem by another, rather vaguer, one for the polar lattice, together with an (n-1)-dimensional problem".

In het volgende zullen we pogen een systematische uiteenzetting te geven van de methode en zijn toepassingen.

2. We geven eerst enige begrippen en notaties.
Punten in $R_n$ geven we aan met $x, y, z$, $a, b, c$, $x^1, x^2, \ldots$, het inproduct van $x$ en $y$ met $x \cdot y$. De eenheidspunten op de coördinaatassen geven we aan met $e^1, e^2, \ldots, e^n$; en $u, v, w, u^1, u^2, \ldots$ betekenen punten met gehele coördinaten. Het rooster der punten $u$ is $Y$; een willekeurig rooster kunnen we aangeven met

$$\Lambda = AY \;, \quad A \text{ een niet-singuliere matrix.}$$

De kolommen van $A$ geven een basis van $\Lambda$ (we spreken van de basis $A$ van $\Lambda$); verder is $A$ bepaald op een rechtsfactor $U$ na (automorfie van $Y$; gehele matrix met determinant $\pm 1$). De determinant van $\Lambda$ geven we aan met $d(\Lambda)$.

In het volgende is van belang het polaire rooster

(3) $$\Lambda^* = A^* Y \;, \quad A^* \text{ gespiegeld inverse van } A.$$

Het bestaat uit de punten $y$ waarvoor

$$x \cdot y = \text{geheel} \quad \text{voor alle } x \in \Lambda .$$

Want dit laatste betekent dat $u . A^T y$ = geheel voor alle $u$, dus $A^T y \in Y$, dus $y \in (A^T)^{-1} Y = A^* Y$. De basis $A^* = \{ b^1, b^2, \ldots, b^n \}$ van $\Lambda^*$ wordt als volgt bepaald door de basis $A = \{ a^1, a^2, \ldots, a^n \}$ van $\Lambda$:

$b^i$ = normaal op de deelruimte der $a^j (j \neq i)$; $b^i . a^i = 1$.

Een gevolg is: is $L$ een (n-1)-dimensionaal deelrooster van $\Lambda$, met (n-1)-dimensionale determinant $d(L)$, dan bevat het reciproke rooster $\Lambda^*$ een primitief punt $a^*$, dat loodrecht staat op de deelruimte van $L$ en voldoet aan

(4) $$|a^*| = d(L)/d(\Lambda).$$

Tenslotte wijzen we op de regel

(5) $$(AB)^* = A^* B^*.$$

Met een basiswijziging $A \longrightarrow AU$ van $\Lambda$ komt dus overeen de basiswijziging $A^* \longrightarrow A^* U^*$ van $\Lambda^*$.

Zij S een n-dimensionaal (gesloten) sterlichaam van eindig type, d.w.z. met toegelaten roosters. Zo'n sterlichaam hoeft zeker niet begrensd te zijn. Het wordt bepaald door een continue functie F(x), die voldoet aan

(6) $$F(x) \geq 0; \quad F(\tau x) = |\tau| F(x) \qquad (x \in R_n, \ \tau \text{ reëel}),$$

en wel is S de verzameling der x met $F(x) \leq 1$. In formules treedt vaak een positieve macht $F^h(x)$ op. Is $\Lambda$ een rooster, dan is

$$\inf_{x \neq 0, x \in \Lambda} F(x)$$

de onderste grens der getallen $\lambda > 0$, zó dat $\Lambda$ toegelaten is voor $\lambda S$; deze wordt aangegeven met $\lambda(S, \Lambda)$ of $\lambda(F, \Lambda)$. Het absolute minimum $\lambda(S) = \lambda(F)$ is de bovenste grens van $\lambda(F, \Lambda)$ over de roosters met determinant 1:

(7) $$\lambda(F) = \sup_{d(\Lambda)=1} \lambda(F, \Lambda) = \sup_{\Lambda} \lambda(F, \Lambda) d(\Lambda)^{-1/n} .$$

Een triviaal gevolg van deze definitie is

(8) $$\lambda(F, \Lambda) \leq \lambda(F) d(\Lambda)^{1/n} \quad \text{voor alle } \Lambda .$$

Het hangt samen met de determinant $\Delta(S)$ = determinant dichtste S-toegelaten rooster d.m.v.

(9) $$\lambda(S) = \Delta(S)^{-1/n} .$$

Voor machten van F stellen we

(10) $$\lambda(F^h, \Lambda) = \lambda^h(F, \Lambda); \quad \lambda(F^h) = \lambda^h(F).$$

3. We wenden ons thans tot Hermite en geven zijn gedachtegang weer in meetkundige en iets vereenvoudigde vorm. Zij $F_0^2$ de vorm $|x|^2$ en S de eenheidsbol. Een willekeurige positieve kwadratische vorm $F^2(x)$ kan geschreven worden als $|Ax|^2$, met A bepaald op een linksfactor O na. Het arithmetisch minimum van $F^2$ is dan niets anders dan het minimum $\lambda(F_0^2, \Lambda) = \lambda^2(S, \Lambda)$ van $F_0^2$ t.o.v. het rooster $\Lambda = AY$. Hierbij is $d(\Lambda) = |\det A| = \sqrt{D}$. Merk op dat $\gamma_n = \lambda(F_0^2) = \lambda^2(S)$.

We beschouwen nu het hypervlak H door een willekeurig (n-1)-dimensionaal deelrooster L van $\Lambda$. Zijn vergelijking is te schrijven in de vorm

(11) $\qquad a^*.x = 0, \qquad a^* \in \Lambda^*.$

Trivialerwijze geldt: $\lambda(S,\Lambda) \leqq \lambda(H \cap S, L)$. Willen we de laatste uitdrukking zo klein mogelijk hebben, dan moeten we uiteraard de determinant van L zo klein mogelijk zien te krijgen. Wegens (4) betekent dit dat $|a^*|$ zo klein mogelijk moet zijn. Nu kunnen we zeker maken $|a^*| \leqq \lambda(S,\Lambda^*)$. We stuiten dus op de analoge grootheid t.o.v. $\Lambda^*$. Wegens (4),(8) en $d(\Lambda^*)=1/d(\Lambda)$ hebben we

$$\begin{aligned} d(L) &\leqq \lambda(S,\Lambda^*)\, d(\Lambda) \\ &\leqq \lambda(S)\ d(\Lambda^*)^{1/n}\ d(\Lambda) = \lambda(S) d(\Lambda)^{1-1/n} \ . \end{aligned}$$

Dus hebben we, als we (8) toepassen op $H \cap S$,

$$\begin{aligned} \lambda(S,\Lambda) \leqq \lambda(H \cap S, L) &\leqq \lambda(H \cap S)\ d(L)^{1/(n-1)} \\ &\leqq \lambda(H \cap S)\ \lambda(S)^{1/(n-1)} d(\Lambda)^{1/n}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\lambda(S) \leqq \lambda(H \cap S)\ \lambda(S)^{1/(n-1)}.$$

Dit geeft (2), wegens $\lambda^2(S) = \gamma_n$, $\lambda^2(H \cap S) = \gamma_{n-1}$ .

Het is interessant op te merken dat men in geval n=4 uit (2) meteen de juiste waarde van $\gamma_4$ vindt. Want enerzijds leidt $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$ tot $\gamma_4 \leqq \sqrt{2}$, en anderzijds heeft de vorm

$$\begin{aligned} 2D_4 &= |\, x_1(e^1-e^2)+x_2(e^2-e^3)+x_3(e^3-e^4)+x_4(e^3+e^4)\,|^2 \\ &= 2(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_2x_4+x_4^2) \end{aligned}$$

minimum 2 en determinant 4, zodat $2 \leqq \gamma_4 \sqrt[4]{4}$, i.e. $\gamma_4 \geqq \sqrt{2}$; dus vinden we $\gamma_4 = \sqrt{2}$. Dit resultaat is, in andere bewoordingen, maar met de methode van Hermite, reeds gevonden door Korkin en Zolotarew [12] .

Mordell [6] merkt op dat dit spelletje zich merkwaardigerwijze herhaalt bij n=8. Enerzijds volgt uit $\gamma_7 = \sqrt[7]{64}$ dat $\gamma_8 \leqq 2$, en anderzijds heeft de vorm

$$2E_8 = |\sum x_i t^i\,|^2 = 2(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_3x_4+\ldots+x_7^2-x_5x_8+x_8^2)$$

minimum 2 en determinant 1, zodat $\gamma_8 \geqq 2$. Dus is $\gamma_8 = 2$. Hierboven kan men voor de $t^i$ nemen de volgende vectoren in een $R_9$:

$$e^2-e^3, e^3-e^4, \ldots, e^8-e^9,\ -\tfrac{1}{3}(e^1+e^2+\ldots+e^6)+\tfrac{2}{3}(e^7+e^8+e^9).$$

De vormen $D_4$ en $E_8$ representeren zekere compacte, enkelvoudige Liegroepen (Coxeter [18] ).

4. Bovenstaande methode kan gegeneraliseerd worden. Zij $S:F(x) \leq 1$ een sterlichaam van eindig type dat een groep van automorfieën met nader aan te geven eigenschappen toelaat. Zij $\Lambda = AY$ een willekeurig rooster. Zij $L$ een of ander $(n-1)$-dimensionaal deelrooster, in een hypervlak $H$. We kunnen de vergelijking van $H$ weer schrijven in de vorm (11). Triviaal is weer

$$\lambda(S,\Lambda) \leq \lambda(H \cap S, L).$$

Nu zal echter bij andere keuze van het deelrooster $L$ niet alleen $d(L)$, maar ook $\lambda(H \cap S)$ veranderen. Laten we eens een automorfie $\Omega$ van $S$ toepassen. Die laat $S$ invariant en transformeert $\Lambda$, $L$, $H$. Uiteraard blijft $\lambda(H \cap S, L)$ hetzelfde. Het polaire rooster van $\Omega\Lambda = \Omega AY$ wordt wegens (5) gegeven door $\Omega^* A^* Y = \Omega^* \Lambda^*$, en het punt $\Omega^* a^*$ is normaal op $\Omega H$.

Laten we eens aannemen dat elk vlak $H$, waarvoor het $(n-1)$-dimensionale sterlichaam $H \cap S$ van eindig type is, door een geschikte automorfie $\Omega_H$ van $S$ overgevoerd kan worden in een vast vlak $H_0$. Voor al zulke vlakken $H$ ligt $\Omega_H^* a^*$ op een vaste rechte door $O$, n.l. de normaal op $H_0$. Het gaat er om het roostervlak $H$ zó te kiezen dat $|\Omega_H^* a^*|$ zo klein mogelijk is.

We merken nu op dat er wel een sterlichaam $T : G(x) \leq 1$ is dat de transformaties $\Omega^*$ als automorfieën toelaat. We nemen aan dat dit weer $S$ is, dat dus met elke automorfie $\Omega$ ook $\Omega^*$ een automorfie van $S$ is. Dan is

$$F(\Omega_H^* a^*) = F(a^*)$$

en gaat het er ons dus om in $\Lambda^*$ een (primitief) punt $a^*$ te vinden waarvoor $F(a^*)$ zo klein mogelijk is. We zijn daarmee gestuit op het oorspronkelijke probleem, nu voor $\Lambda^*$. We kunnen in elk geval maken $F(a^*) \leq \lambda(S, \Lambda^*)$. Er zijn twee gevallen

$1^o$. Het bijbehorende sterlichaam $H \cap S$ is van eindig type, i.e. $\Delta(H \cap S) < \infty$. Dan kan $a^*$ overgevoerd worden in een punt $\neq 0$ van een vaste rechte, zonder dat $F(a^*)$ verandert; dus is $F(a^*) > 0$, omdat anders $F(a^*) = 0$ zou zijn voor alle $H$ met $\Delta(H \cap S) < \infty$ en dus $F(x) = 0$ zou zijn op een verzameling van positieve maat. Als nu $a^o$ een punt op de normaal van $H_0$ is met $F(a^o) = 1$, dan hebben we

$$\lambda(S,\Lambda) \leq \lambda(H \cap S, L) = \lambda(H_0 \cap S, \Omega_H L)$$
$$\leq \lambda(H_0 \cap S)\, d(\Omega_H L)^{1/(n-1)}$$

en
$$d(\Omega_H L) = |\Omega_H^* a^*| \, d(\Lambda) = F(\Omega_H^* a^*) \quad |a^o| \, d(\Lambda)$$
$$\leqq \lambda(S, \Lambda^*) \, |a^o| \cdot d(\Lambda)$$
$$\leqq \lambda(S) \, |a^o| \cdot d(\Lambda)^{1-1/n} \quad .$$

Dus is
$$\lambda(S,\Lambda) \leqq \lambda(H_o \cap S) \cdot \{\lambda(S)|a^o|\}^{1/(n-1)} \, d(\Lambda)^{1/n}.$$

$2^o$. $H \cap S$ is van oneindig type. Dan is, wegens (9), $\lambda(H \cap S)=0$, dus ook $\lambda(H \cap S,L)=0$ en $\lambda(S, \Lambda) = 0$.

Uit $1^o$ en $2^o$ tezamen volgt
$$\lambda(S) \leqq \lambda(H_o \cap S) \cdot \{\lambda(S) \, |a^o|\}^{1/(n-1)},$$
dus
$$\lambda(S) \leqq \{\lambda(H_o \cap S)^{n-1} \, |a^o|\}^{1/(n-2)}.$$

Natuurlijk kan de redenering gemakkelijk uitgebreid worden tot het geval dat ieder vlak H met $\Delta(H \cap S) < \infty$ overgevoerd kan worden in één van eindig vele vlakken $H_1, H_2, \ldots, H_r$. We hebben dan de volgende stelling bewezen.

<u>Stelling.</u> Zij S een sterlichaam van eindig type, met afstandsfunctie $F(x)$, en met een groep $\Gamma$ van automorfieën. Laten $H_\rho$ hypervlakken door O en $b^\rho$ punten zijn zodanig dat $b^\rho$ normaal is op $H^\rho$ en $F(b^\rho)=1$ ($\rho=1,2,\ldots,r$). Onderstel verder:

a) als $\Omega \in \Gamma$, dan $\Omega^* \in \Gamma$

b') als H een hypervlak door O is met $\Delta(H \cap S) < \infty$, dan is $\Omega H=H^\rho$ voor geschikte $\Omega \in \Gamma$ en geschikte index $\rho \leqq r$.

Dan geldt:

$$\lambda(S) \leqq \max_{\rho=1,2,\ldots,r} \{\lambda(H_\rho \cap S)^{n-1} \, |b^\rho|\}^{1/(n-2)}. \tag{12}$$

Het is duidelijk dat men de voorwaarde b') mag vervangen door de twee volgende:

b) bij elk punt $b \neq 0$ met $F(b) > 0$ bestaat een automorfie
$$\Omega \in \Gamma \text{ met } \Omega b = \alpha b^\rho \ (\alpha \text{ reëel}) \text{ voor een } \rho \leqq r$$

c) als $b \neq 0$, $F(b)=0$ en H loodrecht op b is, dan is $\Delta(H \cap S)=\infty$.

Een iets specialere stelling is te vinden bij Armitage [16] ; zijn bewijs bevat nog een lacune, in zoverre de voorwaarde c) weggelaten wordt. Als in de toepassingen een punt $b^\rho$ niet op één der coördinaatassen ligt, dan zullen we $H_\rho \cap S$ projecteren op een coördinaatvlak - hetgeen neerkomt op het elimineren van de resterende coördinaat m.b.v. de vergelijking voor $H_\rho$. Geven we de corresponderende coördinaat van $b^\rho$ aan met $\beta^\rho$ en de projectie van $H_\rho \cap S$ met $S^\rho_{n-1}$, dan hebben we

$$(13) \qquad \lambda(H_\rho \cap S)^{n-1}|b^\rho| = |b^\rho| \,/\, \Delta(H_\rho \cap S) = |\beta^\rho| \,/\, \Delta(S^\rho_{n-1}).$$

Een generalisatie kan men krijgen door de transformaties $\Omega^*$ alleen maar automorfieën te laten zijn van een sterlichaam T (zie hierboven en v. Galen [19]).

5. We bespreken nu toepassingen, allereerst de twee die door Cassels behandeld worden.

I. $F^2(x) = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2-(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2) \qquad (1 \leq p \leq n-1).$

We stellen gemakshalve de determinant van $F(x) \leq 1$ voor door $\Delta_{p,q}$ en het absolute minimum van $F^2(x)$ door $\gamma_{p,q}$ $(q=n-p)$.
De groep $\Gamma$ wordt voortgebracht door de euclidische draaiingen in de $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$-ruimte, die in de $(x_{p+1},\ldots,x_n)$-ruimte en de hyperbolische draaiingen van $R_n$ in het $(x_1,x_n)$-vlak. Dan is voldaan aan a). Is $b \neq 0$ en $F(b)=0$, dan is

$$\Omega\, b = \alpha(e' + e^n)$$

voor geschikte $\Omega \in \Gamma$ en geschikte reële $\alpha$; daarbij is $\Omega H \cap S$ de oneindige cylinder

$$x_1+x_n=0,\ x_2^2+\ldots+x_p^2-(x_{p+1}^2+\ldots+x_{n-1}^2) = 0,$$

en is $H \cap S$ dus van oneindig type. Is $F(b) \neq 0$, dan is er een $\Omega \in \Gamma$ met $\Omega\, b = \alpha e'$ of $\alpha e^n$ ($\alpha$ reëel). We vinden dan het volgende analogon van (2):

$$(14) \qquad \gamma_{p,q} \leq \max(\gamma_{p-1,q}, \gamma_{p,q-1})^{\frac{n-1}{n-2}} \qquad (p+q=n).$$

Dit resultaat is in wezen afkomstig van Oppenheim [10]. De waarde $\gamma_{2,1} = \sqrt[3]{2/3}$ geeft meteen de juiste waarde $\gamma_{2,2} = \sqrt{2/3}$ (Oppenheim [11], Cassels [17]).

II. $F^3(x) = |x_1x_2x_3| \qquad (n=3).$

De automorfieën zijn hier $x_i = \tau_i x_i'$ $(i=1,2,3)$, $\prod \tau_i = \pm 1$. Dan is a) triviaal. De H uit c) gaan door een coördinaatas, en dan is $\Delta(H \cap S) = \infty$. En elk punt b met $F(b) > 0$ is over te voeren in een punt $(\alpha,\alpha,\alpha)$. We vinden zo, als we op (13) letten:

(15) $\lambda(F) \leqq \lambda^2(S_2)$, waarbij $S_2$: $|x_1 x_2(x_1+x_2)| \leqq 1$.

Uit bekende resultaten volgt $\Delta(S_2) = \sqrt[3]{7}$. Verder is er een totaal reëel algebraïsch getallenlichaam met discriminant 49; dit leidt tot een rooster met determinant 7, toegelaten voor het sterlichaam $F(x) \leq 1$ (vgl. een algemeen en eenvoudig resultaat van Hofreiter [20]). Dan is $\Delta(S) \leq 7$, ofwel $\lambda(F^3) \geq \frac{1}{7}$. Dus is $\lambda(F^3) = \frac{1}{7}$ (zie Mordell [7]).

III. $F^3(x) = |x_1(x_2^2+x_3^2)|$.

Hier vindt men op analoge wijze $\lambda(F^3)=2/\sqrt{23}$ (Mordell [7]).

IV. $F^n(x) = |x_1 x_2 \ldots x_n|$.

De methode van II geeft onmiddellijk $\lambda(F) \leq \{\lambda(S_{n-1})\}^{(n-1)(n-2)}$, waarbij $S_{n-1}$ gegeven wordt door $|x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})| \leq 1$. Mordell [4,5] geeft voor enige n ondergrenzen voor $\Delta(S_{n-1})$ door een convex lichaam in te passen en de stelling van Minkowski toe te passen.

V. Zij S het gebied $0 < F^2(x) \leq 1$ (geen sterlichaam), waarbij $F^2(x)$ gegeven is als onder I, en zij $\gamma^*_{p,q}$ het absolute minimum van S. In het speciale geval p=q zijn er bij een gegeven rooster $\Lambda$ zowel punten $a^*$ met $0 \leq F(a^*) \leq \lambda(S, \Lambda^*)$ als punten $a^*$ met $0 \leq -F(a^*) \leq \lambda(S, \Lambda^*)$. Dit leidt tot

(16) $$\gamma^*_{p,p} \leq \min(\gamma^*_{p-1,p}, \gamma^*_{p,p-1})^{(2p-1)/(2p-2)} .$$

In het geval p=2 is hier, blijkens bekende resultaten, juist gelijkheid (zie Cassels [17] , p.272 en 333):

$$\gamma^*_{2,1} = \sqrt[3]{4}, \quad \gamma^*_{1,2} = \sqrt[3]{27/4}, \quad \gamma^*_{2,2} = (\gamma^*_{2,1})^{3/2} = 2.$$

6. De methode is ook van toepassing als S geen automorfieën toelaat, al zal in het algemeen het resultaat minder bruikbaar zijn. Zij weer S een sterlichaam van eindig type, $\Lambda$ een rooster, $a^*$ een primitief punt van $\Lambda^*$ en H het hypervlak door O loodrecht op $a^*$. Dan is weer

$$\lambda(S, \Lambda) \leq \lambda(H \cap S, L) \qquad (L = \Lambda \cap H),$$

dus

$$\lambda^{n-1}(S, \Lambda) \leq \lambda^{n-1}(H \cap S) d(L) = \lambda^{n-1}(H \cap S) \, |a^*| \, d(\Lambda).$$

Laten we het hypervlak door 0 loodrecht op een variabele vector $z \neq 0$ aangeven met $H_z$ en laten we aannemen dat $\lambda(H_z \cap S)$ continu afhangt van z. Dan is

$$G(z) \equiv \lambda^{n-1}(H_z \cap S)\ |z|$$

een afstandsfunctie, behorende bij een of ander sterlichaam $T \subset R_n$. En we hebben

$$\lambda^{n-1}(S,\Lambda) \leqq G(a^*)d(\Lambda),$$

dus ook

$$\lambda^{n-1}(S,\Lambda) \leq \lambda(G,\Lambda^*)d(\Lambda)$$
$$\leq \lambda(G)\ d(\Lambda^*)^{1/n}\ d(\Lambda) = \lambda(G)\ d(\Lambda)^{1-1/n}.$$

We vinden dus

(17) $$\lambda(S) \leq \lambda(G)^{1/(n-1)}.$$

Er zijn twee toepassingen bekend. Daarbij wordt eerst de functie G(z) bepaald (of naar boven geschat) en vervolgens de grootheid $\lambda(G)$ bestudeerd. Natuurlijk kunnen we, analoog aan (13), gebruik maken van de formule

(18) $$\lambda^{n-1}(H_z \cap S)\ |z| = \lambda^{n-1}(S_{n-1})\ |z_i| = |z_i|\ /\ \Delta(S_{n-1})$$

als $S_{n-1}$ de projectie op het i-de coördinaatvlak is.

I. $F^3(x) = |x_1^3+x_2^3+x_3^3|$ (Mordell [8]).

Zij $z \neq 0$, bijv. $z_3 \neq 0$. Stellen we even $\alpha = -z_1/z_3$, $\beta = -z_2/z_3$, dan wordt de projectie van $H_z \cap S$ op $x_3=0$ gegeven door $|\emptyset(x_1,x_2)| \leq 1$, met

$$\emptyset^3(x_1,x_2) = x_1^3+x_2^3+(\alpha x_1+\beta x_2)^3.$$

De discriminant van deze vorm is

$$D = -27(1+\alpha^3)^2(1+\beta^3)^2 + 18\cdot 9(1+\alpha^3)(1+\beta^3)\alpha^3\beta^3+81\alpha^6\beta^6$$
$$-4\cdot 27(1+\alpha^3)\alpha^3\beta^6-4\cdot 27(1+\beta^3)\alpha^6\beta^3$$
$$= -27[1+\alpha^6+\beta^6+2\alpha^3+2\beta^3-2\alpha^3\beta^6].$$

Wegens bekende resultaten (ook gebruikt in 5,II en III) is $\lambda(\emptyset^3) = \sqrt[4]{D/49}$ $(D>0)$ of $\sqrt[4]{-D/23}$ $(D<0)$, dus

$$\lambda^{12}(\emptyset)\ |z_3|^6 \leq \frac{1}{23}\,|D|\cdot|z_3|^6 \leq \frac{27}{23}\left|\sum z_i^6-2\sum_{i<j} z_i^3z_j^3\right| .$$

We vinden zo

(19) $$\lambda(F^3) \leq \sqrt[4]{\frac{27}{23}}\ \lambda(G_1^6), \text{ met } G_1^6(z)=\sum z_i^6-2\sum_{i<j} z_i^3 z_j^3 .$$

II. $F^3(x) = |x_1| \max(x_2^2, x_3^2)$ (Mullender [13]).

Zij $z \neq 0$. Voor $z_1=0$ en voor $z_2=z_3=0$ is $H_z \cap S$ van oneindig type, dus $G(z)=0$. Dat mogen we dus uitsluiten. Dan is $G(z)=|z_1|/\Delta$, waarin $\Delta$ de determinant is van het gebied

$$\left|\frac{1}{z_1}(z_2x_2+z_3x_3)\right| \max(x_2^2,x_3^2) \leq 1.$$

Door de unimodulaire transformatie $\xi, \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 \pm x_3)$, zodat $\max(|x_2|,|x_3|) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\xi| + |\eta|)$, gaat dit gebied over in

$$|(z_2+z_3)\xi + (z_2-z_3)\eta| \cdot (|\xi| + |\eta|)^2 \leq \sqrt{8} \cdot |z_1|$$

ofwel $|\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi| \cdot (|\xi| + |\eta|)^2 \leq 2|z_1| \cdot (z_2^2+z_3^2)^{-1/2}$, met een zekere hoek $\varphi$, afhangend van $z_2$ en $z_3$. Mullender bewijst, door convexe zeshoeken in te passen, dat

$$|\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi| \cdot (|\xi| + |\eta|)^2 \leq 1$$

voor elke $\varphi$ determinant $\geq \frac{27}{32}$ heeft. Dan is

$$G(z) \leq \frac{32}{27}|z_1| \cdot \{2|z_1| \cdot (z_2^2+z_3^2)^{-\frac{1}{2}}\}^{-2/3} = \frac{16}{27}\sqrt[3]{2|z_1|(z_2^2+z_3^2)}.$$

Wegens 5,III is nu $\lambda(G^3) \leq (\frac{16}{27})^3 \cdot 4/\sqrt{23}$. Dus is

$$\lambda(F^3) \leq 2^7/(3^4\sqrt{3}\ \sqrt[4]{23}) = \frac{1}{2.400\ldots}.$$

Davenport [14] verscherpt met de beschreven methode dit resultaat. Resultaten van dit type hebben implicaties inzake het probleem van de simultane approximatie van twee reële getallen.

7. De methode kan nog in een andere richting gegeneraliseerd worden. We beperken ons tot de eenheidsbol in $R_n$, stel $S$, en beschouwen k-dimensionale deelroosters L. Zij $\lambda_{n,k}$ het kleinste getal zó dat bij elk rooster $\Lambda$ met determinant 1 een k-dimensionaal deelrooster L bestaat met $d(L) \leq \lambda_{n,k}$. Dan is $\lambda_{n,1}=\lambda(S)=\sqrt{\gamma_n}$. Op dezelfde wijze als in 3. vinden

$$\lambda_{n,1} \leq \lambda_{k,1}(\lambda_{n,k})^{1/k},$$

en algemener

$$\lambda_{n,m} \leq \lambda_{k,m}(\lambda_{n,k})^{m/k} \qquad (1 \leq m < k \leq n-1)$$

(Rankin [15]).

Literatuur:


[1] Ch. Hermite, Première lettre à M. Jacobi, Oeuvres I, p.100-121.

[2] C.F. Gauss, Werke II, Göttingen 1876 (zie ook Bachmann [3], p. 191-192).

[3] P. Bachmann, Arithmetik der quadratischen Formen II, Leipzig-Berlin (1923), p.253-254.

[4] L.J. Mordell, The product of homogeneous linear forms, J. London Math.Soc. 16, 4-12 (1941).

[5] ——————, The product of n homogeneous forms, Mat.Sbornik 12, 273-276 (1943)

[6] ——————, Observation on the minimum of a positive definite quadratic form in eight variables, J. London Math. Soc. 19, 3-6 (1944).

[7] ——————, The product of three homogeneous linear ternary forms, J. London Math.Soc. 17, 107-115 (1942).

[8] ——————, On the minimum of a ternary cubic form, J. London Math.Soc. 19, 6-12 (1944).

[9] A. Oppenheim, Remark on the minimum of quadratic forms, J. London Math.Soc. 21, 251-252 (1946).

[10] ——————, Values of quadratic forms I, Quarterly J. Math. (2) 4, 54-59 (1953).

[11] ——————, The minima of indefinite quaternary quadratic forms, Proc.National Acad. USA 15, 724-727 (1929).

[12] A. Korkine-G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives quaternaires, Math. Annalen 5, 581-583 (1872).

[13] P. Mullender, Simultaneous approximation, Ann.of Math. 52, 417-426 (1950).

[14] H. Davenport, Simultaneous diophantine approximation, Proc. London Math.Soc.(3) 2, 406-416 (1952).

[15] R.A. Rankin, On positive definite quadratic forms, J. London Math.Soc. 28, 309-314 (1953).

[16] J.V. Armitage, On a method of Mordell in the geometry of numbers, Mathematika 2, 132-140 (1955).

[17] J.W.S. Cassels, An introduction to the geometry of numbers, Springer, Grundlehren Band 99 (1959).

[18] H.S.M. Coxeter, Extreme forms, Canadian J. Math.3, 391-441 (1951).

[19] J. van Galen, Generalisatie van een methode van Mordell, Syllabus colloquium Meetkunde der Getallen, Math.Centrum, 30-31 (1959).

[20] N. Hofreiter, Ueber das Produkt von Linearformen, Monatshefte Math. Phys. 49, 295-298 (1940).