STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 003

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. E. van Spiegel

Over- en Onderbepaalde Systemen

1962

Voordracht in de Serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht".

Prof. dr. E. van Spiegel

Over- en Onderbepaalde Systemen.

In deze voordracht zullen we ons bezighouden met systemen van lineaire vergelijkingen. Meestal beperkt men zich in zijn beschouwingen tot systemen van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarbij de rechterleden dan al of niet gelijk aan nul zijn. In het geval dat de rechterleden alle gelijk aan nul zijn, spreekt men van een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen. Uitspraken omtrent oplosbaarheid van dergelijke vierkante systemen van lineaire vergelijkingen formuleert men meestal met behulp van het begrip determinant van de coëfficiënten-matrix. Zo is een inhomogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden éénduidig oplosbaar indien de coëfficiënten determinant ongelijk aan nul is. Het ongelijk aan nul zijn van de coëfficiënten determinant bij een homogeen stelsel impliceert dat alleen de zgn. triviale oplossing aanwezig is, d.i. die oplossing, waarbij alle onbekenden de waarde nul hebben. Bij homogene stelsels is men dikwijls juist geïnteresseerd in niet-triviale oplossingen. Voor het bestaan van dergelijke oplossingen is noodzakelijk, dat de coëfficiënten determinant gelijk aan nul is.

Het begrip determinant laat ons echter in de steek, zodra we de oplosbaarheid van niet-vierkante systemen van lineaire vergelijkingen willen onderzoeken. Dergelijke systemen van n lineaire vergelijkingen met m onbekenden $(n \neq m)$ zijn evenwel van groot belang en treden op in allerlei wiskundige en technische vraagstukken. Niet-vierkante systemen komen bijvoorbeeld te pas bij de behandeling van constructies zoals vakwerken. De moderne digitale rekenmachines openen de mogelijkheden grote systemen van lineaire vergelijkingen te behandelen. Het laat zich zeer goed voorstellen dat men in vele gevallen de rekenmachine zelf het systeem van vergelijkingen laat opstellen. Daarbij zal het echter niet altijd mogelijk zijn van te voren na te gaan of het aantal vergelijkingen wel gelijk zal zijn aan het aantal optredende onbekenden, of er onder de vergelijkingen misschien afhankelijke relaties voorkomen, die geen essentieel nieuwe informaties leveren, of dat de vergelijkingen eigenlijk strijdig zijn. Om deze redenen lijkt het gewenst nader aandacht te schenken aan algemene systemen van lineaire vergelijkingen, waarbij het aantal vergelijkingen ongelijk is aan het aantal voorkomende onbekenden. Belangrijk is om een methode aan te geven waarmee nagegaan kan worden, of het systeem van lineaire vergelijkingen afhankelijk is en op welke wijze die afhankelijkheid kan worden verwijderd. Een dergelijke procedure moet ook strijdigheid van het systeem kunnen constateren en tevens de weg moeten kunnen wijzen, waarmee die strijdigheid kan worden opgelost.

Voor literatuur over het hier besprokene kan worden verwezen naar:

C. Lanczos : Linear differential operators, 1961.
E. Stiefel : Einführung in die numerische Mathematik, 1961.

Beschouw het systeem van n vergelijkingen met m onbekenden.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots\dots\dots + a_{1m}y_m = b_1 \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots\dots\dots + a_{2m}y_m = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{nm}y_m = b_n
\end{array}
\qquad (1)
$$

Een dergelijk n+m systeem van lineaire vergelijkingen kan met behulp van de matrixnotatie worden weergegeven in de simpele vorm

$$A_y = b \,, \qquad (2)$$

waarbij de matrix A dus bestaat uit n rijen en m kolommen. Zoals bekend ondersteld wordt, kan deze matrix A opgevat worden als een lineaire afbeelding,die een vector y van de m-dimensionale S_m ruimte afbeeldt of de vector b van de n-dimensionale S_n ruimte. De matrix A is dus gekoppeld aan twee verschillende ruimten.

We zullen ons hier beperken tot het geval, dat de elementen van de matrix A reëel zijn.
Naast het systeem (2) van lineaire vergelijkingen beschouwen we ook het systeem:

$$\tilde{A}\, x = c \qquad (3)$$

waarbij de matrix $\tilde{A}$ de zgn. geadjungeerde van de matrix A is, d.w.z. die matrix, die uit A onstaat door verwisseling van rijen en kolommen. Naast elkaar geschreven hebben we dus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots\cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

We merken op, dat er alleen enig verband bestaat tussen de matrices A en $\tilde{A}$, doch niet tussen de vectoren y en x en tussen de vectoren b en c.

De systemen (2) en (3) combineren we nu tot een groot systeem van de vorm

$$S\ z = a \tag{4}$$

dat op de volgende wijze schematisch wordt aangegeven

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

De matrix S is dus een vierkante matrix van n+m rijen en kolommen. Bovendien is de matrix S symmetrisch als gevolg van de speciale opbouw. De vectoren x en y worden gecombineerd tot een vector z, terwijl de vectoren b en c tezamen de vector a vormen. Met behulp van deze kunstgreep zijn we nu terecht gekomen op een symmetrische matrix S. Dientengevolge kunnen we nu allerlei bekende eigenschappen betreffende symmetrische matrices toepassen. Daartoe beschouwen we eerst de eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren van de matrix S, die gedefiniëerd worden door de vergelijking:

$$\tilde{S}\ w = \lambda w \tag{5}$$

In verband met het speciale karakter van de matrix S kunnen we deze vergelijking (5) splitsen in twee relaties:

$$\begin{aligned} A\ v &= \lambda u \\ \tilde{A}\ u &= \lambda v \end{aligned} \qquad (6)$$

indien u en v samen de vector w vormen.
Deze beide vergelijkingen (6) formuleren eigenlijk het eigenwaardeprobleem voor de n+m matrix A. Het normale eigenwaardeprobleem verliest voor een n+m matrix zijn betekenis, omdat de vectoren u en v tot verschillende ruimten behoren.
We onderstellen nu bekend de eigenschap, dat voor een symmetrische matrix de eigenwaarden reëel zijn, en dat de bij verschillende eigenwaarden behorende eigenvectoren loodrecht op elkaar staan.
Beschouwen we nu in ons geval van de matrix S twee verschillende eigenwaarden λ_i en λ_k met de bijbehorende eigenvectoren w_i en w_k , dan geldt dus:

$$\tilde{w}_i\ w_k = 0$$

of in een andere vorm geschreven:

$$\tilde{u}_i\ u_k + \tilde{v}_i\ v_k = 0 \qquad (7)$$

Uit de betrekkingen (6) zien we echter onmiddellijk, dat indien de combinatie (v,u,λ) aan (6) voldoet, ook de combinatie $(v, -u,-\lambda)$ voldoet, m.a.w. naast (7) geldt ook de relatie

$$\tilde{u}_i\ u_k - \tilde{v}_i\ v_k = 0 \qquad (8)$$

Uit de betrekkingen (6) en (7) tezamen volgt dus:

$$\tilde{u}_i\ u_k = 0 \text{ en } \tilde{v}_i\ v_k = 0 \qquad \text{voor } i \neq k \quad (9)$$

Dit betekent nu, dat de vectoren u en de vectoren v afzonderlijk een orthogonaal systeem van vectoren vormen. Deze conclusie is alleen geldig voor alle eigenwaarden λ_i, die niet nul zijn. Het is mogelijk dit ook nog enigszins anders te benaderen. De betrekkingen (6) kunnen we ook schrijven in de gedaante

$$\begin{aligned} A\ \tilde{A}\ u &= \lambda^2\ u \\ \tilde{A}\ A\ v &= \lambda^2\ v \end{aligned} \qquad (10)$$

Uit (10) zien we nu, dat de vectoren u en evenzo de vectoren v

onafhankelijk van elkaar te voorschijn gebracht kunnen worden als oplossingen van verschillende eigenwaardeproblemen.
De matrix $A\tilde{A}$ is een symmetrische n+n matrix, die gekoppeld is aan de n-dimensionale S_n ruimte, terwijl de matrix $\tilde{A}A$ gekoppeld is aan de m-dimensionale S_m ruimte.
Hieruit mogen we nu de conclusie trekken, dat we kunnen vinden n onderling orthogonale vectoren u op grond van de eerste vergelijking van (10) en m onderling orthogonale vectoren v op grond van de tweede vergelijking van (10). Deze vectoren u en v kunnen nu dienen als basis voor de n-dimensionale S_n ruimte resp. m-dimensionale S_m ruimte. Door deze basisvectoren te rangschikken in kolommen vormen we twee vierkante matrices U en V, waarbij U bevat de n eigenvectoren u_i en V de m eigenvectoren v_i. De ruimten S_n en S_m zijn geheel onafhankelijk van elkaar, doch de twee matrices U en V zijn gekoppeld door het oorspronkelijke eigenwaardeprobleem (6). Deze koppeling moet bestaan voor iedere eigenwaarde λ_i, die niet gelijk aan nul is, terwijl voor een eigenwaarde gelijk aan nul de twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} A\, v_i &= 0 \\ \tilde{A}\, u_j &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

volledig onafhankelijk van elkaar zijn.
We scheiden nu de eigenwaarden nul van de overige eigenwaarden. Onderstel nu eens dat het eigenwaardeprobleem (6) p onafhankelijke oplossingen heeft, indien we alleen positieve eigenwaarden beschouwen. Er bestaan dus p onafhankelijke oplossingen (u_i, v_i, λ_i). Daarnaast bestaan echter ook p oplossingen, die de vorm hebben $(u_i, -v_i, -\lambda_i)$. In totaal hèbben we dan dus 2 p oplossingen.

Echter het eigenwaardeprobleem, geformuleerd door de eerste vergelijking van (10), moet n onafhankelijke oplossingen bezitten en aangezien er p eigenwaarden ongelijk aan nul zijn, bestaan er dus n-p onafhankelijke oplossingen bij de eigenwaarde nul. De tweede vergelijking van (11) bezit dus n-p onafhankelijke oplossingen. Op dezelfde wijze kan men aantonen dat de eerste vergelijking van (11) m-p onafhankelijke oplossingen bezit. Aangezien de oplossingen van de beide vergelijkingen in (11) niet gekoppeld zijn, bestaan er dus oplossingen van de vorm $(u_j, 0)$ en $(0, v_i)$. De eigenwaarde nul bezit dus de multipliciteit m+n-2p. Tezamen

-6-

met de 2p oplossingen behorende bij de eigenwaarden ongelijk aan nul, hebben we dus juist m+n onafhankelijke oplossingen van de matrix S.

Met behulp van de matrix S kunnen we nu het probleem van de oplosbaarheid van het n+m systeem van lineaire vergelijkingen behandelen. Dit probleem is namelijk geheel terug te voeren tot het overeenkomstige probleem voor een zelf-geadjungeerd (=symmetrisch) systeem. Beschouw daartoe nu eens de symmetrische matrix A met het bijbehorende systeem lineaire vergelijkingen:

$$A\,y = b \tag{12}$$

Bij iedere eigenwaarde van de matrix bepalen we de bijbehorende eigenvectoren, die onderling loodrecht op elkaar staan (eventueel gelezen worden). Deze eigenvectoren benutten we nu als nieuwe coördinaatassen, m.a.w. we voeren een orthogonale coördinaten-transformatie uit, die geschreven kan worden in de vorm:

$$y = U\,y' \quad , \quad b = U\,b' \tag{13}$$

De kolommen van de matrix U worden gevormd door de onderling loodrechte eigenvectoren. Substitutie van de relaties (13) in (12) geeft:

$$A'y' = b' \quad \text{met } A' = \tilde{U}\,A\,U\;. \tag{14}$$

In (14) staat nu het systeem lineaire vergelijkingen geschreven op de nieuwe coördinaten. Het resultaat van het invoeren van het nieuwe coördinatenstelsel is dat de matrix A' een zuivere diagonaalmatrix wordt. (Op hoofdassen brengen van de matrix A). Als gevolg hiervan worden dus de lineaire vergelijkingen gescheiden met betrekking tot de onbekenden, waardoor ze onmiddellijk oplosbaar worden, in de onderstelling althans dat het systeem (11) oplosbaar is. Dit is nu zeer zeker het geval indien geen van de eigenwaarden van A nul zijn, immers dan heeft A', resp. de inverse van A' de gedaante

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} \qquad A'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \; \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

De oplossing y' is dus te schrijven in de gedaante $y' = A'^{-1} b'$.
Hieruit zien we dus nu, dat een zelf-geadjungeerd lineair systeem, waarvan de matrix geen eigenwaarden nul bezit, éénduidig oplosbaar is.
We moeten echter nog nagaan hoe de situatie is indien er wel eigenwaarden gelijk aan nul optreden.
Voor een eigenwaarde $\lambda_i=0$ kunnen we stellen, dat de vergelijking

$$\lambda_i \, y_i' = b_i' \tag{15}$$

alleen oplosbaar is, indien $b_i' = 0$
De grootheid b_i' stelt voor de i^e componentn van de vector b in het nieuwe assenstelsel. Er geldt dus:

$$b_i' = \tilde{u}_i \, b \tag{16}$$

De voorwaarde $b_i' = 0$ betekent dus dat de vector b loodrecht staat op de eigenvector behorende bij de eigenwaarde $\lambda_i=0$.
Ook geldt er:

$$A \, u_i = \lambda_i \, u_i \tag{17}$$

en daar $\lambda_i = 0$ is,

$$A \, u_i = 0 \tag{18}$$

u_i kunnen we dus ook opvatten als een oplossing van het homogene systeem $A_y = 0$.
Indien de multipliciteit van de eigenwaarde nul groter is dan één, heeft de vergelijking $A_y=0$ meer dan één lineair onafhankelijke oplossing. De voorwaarde $\tilde{u}_i b=0$ moet gelden voor iedere eigenwaarde nul. We komen aldus tot de volgende uitspraak: noodzakelijk en voldoende voor de oplosbaarheid van een zelf-geadjungeerd lineair systeem is, dat het rechterlid loodrecht staat op de lineair onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking $Ay=0$. Deze orthogonaliteitsvoorwaarden noemen we de compatibiliteitsvoorwaarden.

Naast deze compatibiliteitsvoorwaarden moeten we nog onderzoeken de al of niet éénduidigheid van de oplossing. Daartoe beschouwen we weer het oorspronkelijke systeem vergelijkingen: $Ay=b$.
Stel, dat bij de eigenwaarde $\lambda_i=0$ behoort de eigenvector u_i (i^e hoofdas), dan geldt $Au_i = \lambda_i u_i = 0$, m.a.w. u_i is een oplossing van het homogene systeem $Ay = 0$. Bij een oplossing van

het systeem kan dus opgeteld worden een lineaire combinatie van de onafhankelijke eigenvectoren behorende bij de eigenwaarde nul. Een lineaire combinatie van eigenvectoren behorend bij de eigenwaarde nul betekent niets anders dan een lineaire combinatie van de onafhankelijke oplossingen van het homogene systeem $Ay = 0$. Concluderend kunnen we dus zeggen: De algemene oplossing van een compatibel zelf-geadjungeerd systeem wordt verkregen door een speciale oplossing van het systeem te vermeerderen met de algemene oplossing van het bijbehorende homogene systeem.

De verkregen kennis betreffende zelf-geadjungeerde systemen passen we nu toe op het systeem met de matrix S. De compatibiliteitsvoorwaarden, waaraan het rechterlid (b,c) moet voldoen, kunnen we onmiddellijk neerschrijven:

$$\tilde{U}_i\, b + \tilde{v}_i\, c = 0, \tag{19}$$

waarbij $(u_i,\ v_i)$ is een eigenvector behorende bij de eigenwaarde $\lambda_i=0$, met andere woorden u_i en v_i voldoen aan de vergelijkingen

$$\tilde{A}u_i = 0 \qquad \text{en } Av_i = 0.$$

We hebben echter reeds gezien, dat deze twee vergelijkingen twee onafhankelijke systemen van oplossingen leveren, n.l.:

$$u = u_{p+1}\ ,\ u_{p+2},\ \dots\dots\dots,\ u_n \qquad v=0$$

$$v = v_{p+1}\ ,\ v_{p+2},\ \dots\dots\dots,\ v_m \qquad u=0.$$

De voorwaarde (19) kan dus gesplitst worden in twee systemen van voorwaarden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{p+j}\ b &= 0 \qquad & j &= 1,2,\dots\dots\dots,\ n-p \\ \tilde{v}_{p+j}\ c &= 0 \qquad & j &= 1,2,\dots\dots\dots,\ m-p \end{aligned} \tag{20}$$

We komen aldus tot de uitspraak: De noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid van een willekeurig n+m systeem van lineaire vergelijkingen is dat het rechterlid loodrecht staat op alle lineair onafhankelijke oplossingen van het geadjungeerde homogene systeem.

Met betrekking tot de oplossing van een n+m systeem van lineaire vergelijkingen kunnen we weer zeggen, dat de algemene oplossing wordt verkregen door bij een speciale oplossing op te tellen de algemene oplossing van het homogene systeem $Ay=0$.

Een interessante vraag is nu nog of het mogelijk is verschillende lineaire systemen van vergelijkingen van elkaar te onderscheiden, m.a.w. bestaat er een zekere classificatie van lineaire systemen. Beschouw eens

eens het systeem:

$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 2$$

Het is duidelijk dat met behulp van deze twee lineaire betrekkingen de grootheden x en y niet kunnen worden bepaald. In feite bestaat er maar één vergelijking voor twee onbekenden. Nemen we nu eens het stelsel

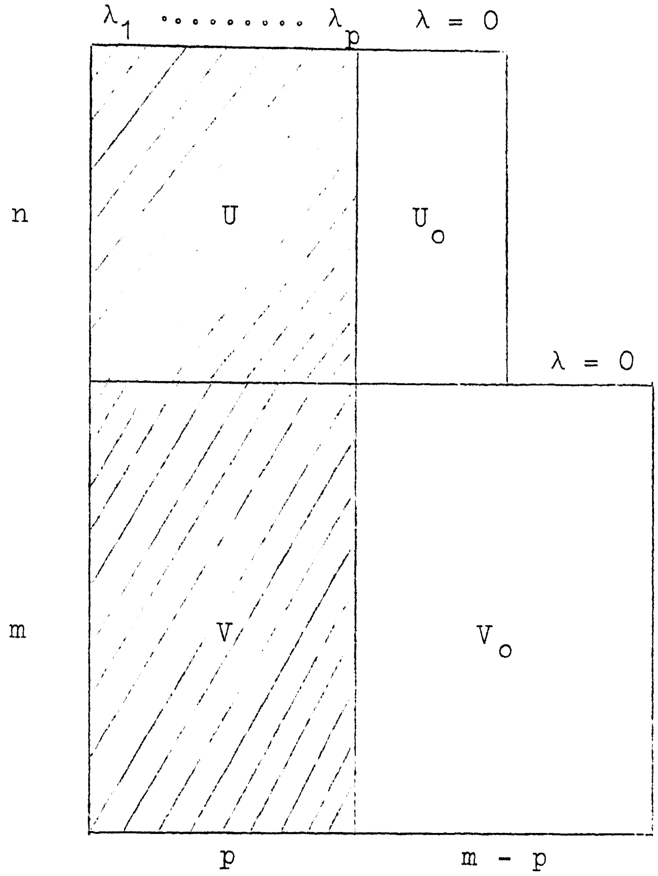
$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 3$$

dan zien we dat de vergelijkingen met elkaar in strijd zijn, d.w.z. geen enkele combinatie van x en y waarden is te vinden, zodat aan beide vergelijkingen gelijktijdig wordt voldaan.
Aan deze twee eenvoudige voorbeelden zien we reeds dat er zich verschillende mogelijkheden kunnen voordoen. Voor een classificatie van lineaire systemen hebben we aan de grootheden, die aangeven het aantal vergelijkingen n en het aantal onbekenden m niet voldoende, zoals de twee gegeven voorbeelden duidelijk laten zien. Naast het aantal vergelijkingen en het aantal onbekenden behoeven we nog een derde getal, dat we de rang zullen noemen.
Daartoe beschouwen we nog eens de twee homogene systemen van vergelijkingen:

$$\tilde{A}u = 0 \text{ en } Av = 0.$$

We hebben reeds afgeleid dat het aantal lineaire onafhankelijke oplossingen van het eerste systeem bedraagt $n - p$ en van het tweede systeem $m - p$. Het ligt nu voor de hand als derde belangrijke grootheid voor de classificatie van lineaire systemen het getal p te nemen. Dit getal p noemen we nu de rang van de matrix A of de rang van het systeem. We kunnen direct de conclusie trekken dat de rang van de matrix A gelijk is aan de rang van de matrix $\tilde{A}$.
Om de geometrische betekenis van het begrip rang te verklaren beschouwen we nog eens de n-dimensionale ruimte S_n en de m-dimensionale ruimte S_m, waarmee de matrix A gekoppeld is. Deze ruimten kunnen we opgespannen denken door de n eigenvectoren $u_1, u_2, \ldots, u_n$ resp. m eigenvectoren $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Echter we verdelen beide groepen van eigenvectoren in twee gedeelten bij de index p. De eerste p vectoren u_i, v_i behoren weliswaar tot verschillende ruimten, maar zijn toch met elkaar gekoppeld. Zij vormen de matrices U_p en V_p; we zullen ze echter gewoon aanduiden door U resp. V.

De overige gedeelten van de S_n en S_m ruimte zijn gekoppeld aan de eigenwaarde nul; ze worden gerepresenteerd door de matrices K_o en V_o. De ruimten S_n en S_m kunnen nu als volgt schematisch worden aangegeven:



De rang p geeft nu aan de dimensie van de subruimte waarin de matrix A in feite werkt.

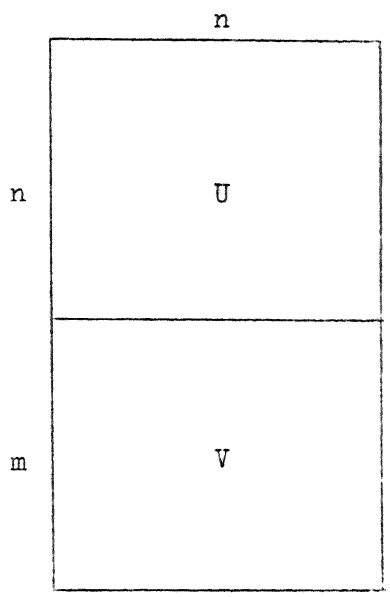
Met behulp van het aantal vergelijkingen n, het aantal onebekenden m en de rang p kunnen we nu lineaire systemen classificeren. Dit doen we nu van uit twee gezichtspunten:

1. Zijn de gegevens, uitgedrukt in de lineaire betrekkingen, voldoende voor het eenduidig vastleggen van de oplossing? Zo ja, dan spreken we van een "volledig bepaald systeem", zo neen, dan spreken we van een "onderbepaald systeem".
2. Zijn de gegevens in de vorm van de lineaire relaties onafhankelijk van elkaar of bestaan er zekere lineaire betrekkingen zodat er enige vergelijkingen geschrapt kunnen worden, zonder essentiële informatie te verliezen? In het eerste geval spreken we van een "vrij systeem", in het tweede geval van een "overbepaald systeem".

Deze twee gezichtspunten geven nu aanleiding tot vier verschillende soorten van lineaire systemen:

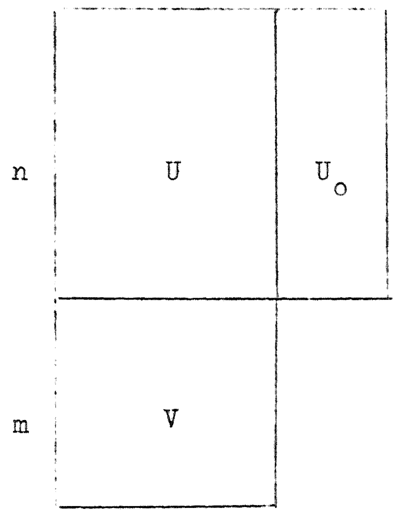
1. vrij en volledig

Het rechterlid kan vrij worden gekozen en de oplossing is eenduidig.
In dit geval geldt: $m = n = p$.



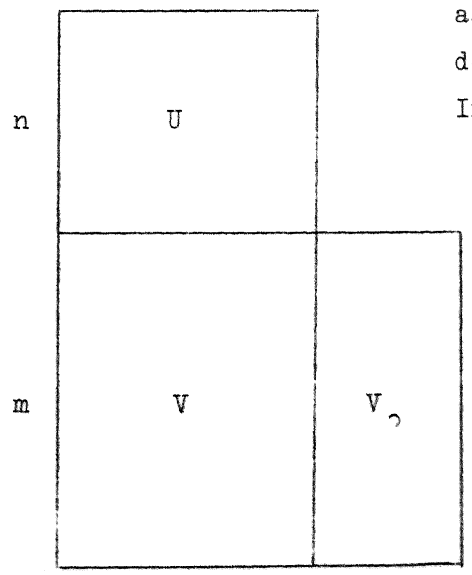
2. overbepaald en volledig

Het rechterlid voldoet aan de compatibiliteitsvoorwaarden, maar de oplossing is eenduidig.
In dit geval geldt: $p = m < n$

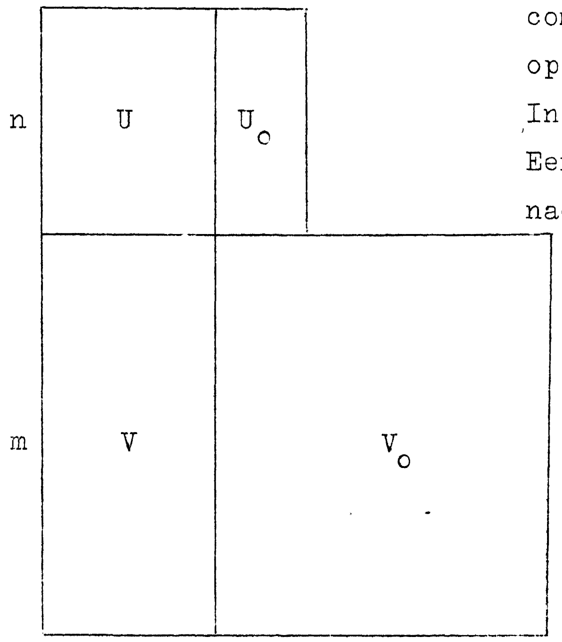


3. vrij en onderbepaald

Het rechterlid behoeft niet te voldoen aan compatibiliteitsvoorwaarden, maar de oplossing is niet eenduidig.
In dit geval $p = n < m$.



4. <u>overbepaald en onderbepaald</u> Het rechterlid voldoet aan de compatibiliteitsvoorwaarden en de oplossing is niet eenduidig. In dit geval $p < m$ en $p < n$. Een relatie tussen m en n is niet nader vastgelegd.



Een belangrijk vraagstuk is nu de werkelijke behandeling van een willekeurig n + m systeem van lineaire vergelijkingen. Hoe vindt men de compatibiliteitsvoorwaarden en hoe de lineaire betrekkingen bij overbepaaldheid? Een daarvoor zeer geëigende methode is de zgn. "pivot-methode", die uitvoerig beschreven wordt in het onlangs verschenen boek van Stiefel (zie literatuuropgave).
We zullen hier de methode in het kort weergeven.
Beschouw eens de twee lineaire relaties:

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

Onderstellen we dat $a \neq 0$ is, dan kunnen we uit de eerste betrekking x_1 oplossen en uitdrukken in y_1 en x_2:

$$x_1 = \frac{1}{a} y_1 - \frac{b}{a} x_2.$$

Substitutie in de tweede betrekking levert nu:

$$y_2 = \frac{c}{a} y_1 + (d - \frac{bc}{a})x_2.$$

Uit de oorspronkelijke twee lineaire vormen hebben we dus twee nieuwe lineaire vormen gekregen, die zo gekarakteriseerd kunnen worden, dat de onafhankelijk variabele x_1 verwisseld is met de afhankelijk variabele y_1. Een dergelijk proces noemen we nu een verwisselingsproces.

Dit verwisselingsproces kunnen we nu schematisch als volgt weergeven:

$$\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline y_1 = & a & b \\ y_2 = & c & d \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & y_1 & x_2 \\ \hline x_1 = & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ y_2 = & \frac{c}{a} & d - \frac{bc}{a} \end{array}$$

Het element a, waar de x_1 kolom en de y_1 rij, dus juist de twee grootheden, die verwisseld worden, elkaar snijden, heet nu "pivot element".

Opgemerkt moet worden dat het element diagonaalsgewijze gelegen tegenover het pivot element op de gecompliceerdste wijze wordt getransformeerd.

We beschouwen nu eens een uitgebreider systeem:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline y_1 = & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ y_2 = & a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} & a_{24} \\ y_3 = & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$$

We willen nu de onafhankelijk variabele x_3 verwisselen met de afhankelijk variabele y_2. Het pivot element is dus het element a_{23}. We onderstellen nu dat het element $a_{23} \neq 0$ is. De variabele x_3 speelt nu de rol van x_1 in het voorgaande elementaire verwisselingsproces en y_2 de rol van y_1. Alle overige variabelen x_1, x_2, x_4 en y_1, y_3 gedragen zich nu precies zoals x_2 en y_2 in het vorige voorbeeld.

We kunnen dus nu direct het schema opstellen na de verwisseling van x_3 en y_2

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & y_2 & x_4 \\ \hline y_1 = & \alpha 11 & \alpha 12 & \frac{a_{13}}{a_{23}} & \alpha 14 \\ x_3 = & -\frac{a_{21}}{a_{23}} & -\frac{a_{22}}{a_{23}} & \frac{1}{a_{23}} & -\frac{a_{24}}{a_{23}} \\ y_3 = & \alpha 31 & \alpha 32 & \frac{a_{33}}{a_{23}} & \alpha 34 \end{array} \qquad (14)$$

waarbij:

$$\alpha 11 = a_{11} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{23}} \quad \alpha 12 = a_{12} - \frac{a_{22}a_{13}}{a_{23}} \quad \alpha 14 = a_{14} - \frac{a_{24}a_{13}}{a_{23}}$$

$$\alpha 31 = a_{31} - \frac{a_{21}a_{33}}{a_{23}} \quad \alpha 32 = a_{32} - \frac{a_{22}a_{33}}{a_{23}} \quad \alpha 34 = a_{34} - \frac{a_{24}a_{33}}{a_{23}}$$

De transformatieregels kunnen we nu als volgt samenvatten:

a. het pivot element gaat over in zijn reciproke waarde.

b. de overige elementen van de "pivot kolom" worden gedeeld door het pivot element.

c. de overige elementen van de "pivot rij" worden gedeeld door het pivot element en vervolgens van een minteken voorzien.

d. een element uit het overblijvende gedeelte van de matrix wordt getransformeerd door bij het beschouwde element op te tellen het product van het getransformeerde element van de pivot rij, dat beneden het beschouwde element ligt en het oorspronkelijke element van de pivot kolom, dat naast het te beschouwen element ligt.

In verband met de regel d verdient het aanbeveling de nieuwe pivot rij, met uitzondering van het pivot element zelf, onder het nog niet getransformeerde schema te plaatsen. Men kan dan spreken van de toegevoegde pivot rij.

De transformatie regel d) kan men dan als volgt formuleren:

d. een element uit het overblijvende gedeelte van de matrix wordt getransformeerd door bij het beschouwde element op te tellen het product van het er onder staande element van de toegevoegde pivot rij en het er naast staande element van de pivot kolom.

Als voorbeeld beschouwen we nu eens het systeem van lineaire betrekkingen:

$$y_1 = 3x_1 + 5x_2 + x_3$$
$$y_2 = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$
$$y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

We willen nu de variabelen x_2 en y_3 verwisselen.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & \underline{2} & 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} -0{,}5 & & -1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} x_1 & y_3 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} y_1 = \\ y_2 = \\ x_2 = \end{array} & \begin{pmatrix} \underline{0{,}5} & 2{,}5 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} & -5 & +8 \end{array} \end{array}$$

Men kan nu weer een onafhankelijk variabele x verwisselen met een afhankelijk variabele y. Stel we verwisselen nu x_1 en y_1, dan is het pivot element 0,5

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_3 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} x_1 = \\ y_2 = \\ x_2 = \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & \underline{1} \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} 0 & -2 & \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_3 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{r} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -21 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenslotte is er nog één verwisseling mogelijk, n.l. de variabelen x_3 en y_2. Het pivot element is dus 1; de keuze hiervan ligt ondubbelzinnig vast.

We hebben nu alle onafhankelijk variabelen verwisseld met de afhankelijke variabelen, m.a.w. we hebben het inverse systeem bepaald:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + 8y_2 - 21y_3 \\ x_2 &= -y_1 - 5y_2 + 13y_3 \\ x_3 &= \phantom{-y_1 -{}} y_2 - 2y_3 \end{aligned}$$

Een essentieel element van het gehele verwisselingsproces is, dat het mogelijk is een pivot element te kiezen, dat ongelijk aan nul is. Indien het op een gegeven moment niet meer mogelijk is een pivot element ongelijk aan nul te vinden, dan kan men het proces niet verder voortzetten, m.a.w. men kan dan niet meer afhankelijke en onafhankelijke variabelen verwisselen.
We willen nu eens dit verwisselingsproces doorvoeren voor vier gevallen, die kunnen dienen als representanten voor de verschillende soorten van lineaire systemen.

1e voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ \frac{11}{6} & -\frac{7}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Stel rechterlid van systeem vergelijkingen is (6, 0, 13), dan vinden we door substitutie de oplossing:

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$ of $x = (1, -2, 3)$.

In dit geval is $m = n = p$; het systeem is dus vrij en volledig.

2e voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \\ y_4 = \\ y_5 = \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ y_4 = \\ y_5 = \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ \frac{11}{6} & -\frac{7}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{21}{6} & -\frac{15}{6} & -2 \\ \frac{27}{6} & -\frac{21}{6} & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Decompatibiliteitsvoorwaarden zijn dus:

$y_4 = \frac{21}{6} y_1 - \frac{15}{6} y_2 - 2y_3$ of $7y_1 - 5y_2 - 4y_3 - 2y_4 = 0$

$y_5 = \frac{27}{6} y_1 - \frac{21}{6} y_2 - 2y_3$ of $9y_1 - 7y_2 - 4y_3 - 2y_5 = 0.$

Nemen we dus als rechterlid $y_1 = 6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 13$, dan is noodzakelijk voor oplosbaarheid: $y_4 = -5$ en $y_5 = 1$.
De oplossing is in dat geval $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. In dit voorbeeld is $n = 5$ en $p = m = 3$. Het systeem is dan dus overbepaald en volledig.
3e voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & -\frac{21}{6} & -\frac{27}{6} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{15}{6} & \frac{21}{6} \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

De oplossing van het systeem luidt dus:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} y_1 + \frac{11}{6} y_2 - \frac{5}{3} y_3 - \frac{21}{6} x_4 - \frac{27}{6} x_5 \\ x_2 = -\frac{5}{3} y_1 - \frac{7}{6} y_2 + \frac{4}{3} y_3 + \frac{15}{6} x_4 + \frac{21}{6} x_5 \\ x_3 = - y_1 - y_2 + y_3 + 2x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Stel nu dat het rechterlid is: $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$,
dan luidt de oplossing:

$$\begin{cases} x_1 = 11 - \frac{21}{6} x_4 - \frac{27}{6} x_5 \\ x_2 = -7 + \frac{15}{6} x_4 + \frac{21}{6} x_5 \\ x_3 = -4 + 2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

In de oplossing kunnen de onbekenden x_4 en x_5 willekeurig gekozen worden.

Dit betekent dat het bijbehorende homogene systeem twee lineaire onafhankelijke oplossingen bezit. Gemakkelijk zien we in dat deze zijn

$(-7, 5, 4, 2, 0)$ en $(-9, 7, 4, 0, 2)$.

De oplossing van het gekozen getallenvoorbeeld kunnen we dus schrijven in de vorm:

$$x = (11, -7, -4, 0, 0) + \alpha(-7, 5, 4, 2, 0) + \beta(-9, 7, 4, 0, 2)$$

In dit voorbeeld is $p = n = 3$ en $m = 5$. Het systeem is dus vrij en onderbepaald.

4e voorbeeld:

$$A= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \\ y_4 = \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ y_4 = \end{array} & \begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{17}{13} & 2 \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ \frac{8}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{6}{13} & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

We zien hier dat de variabelen x_4 en y_4 niet meer verwisseld kunnen worden, aangezien het bijbehorende pivot element nul is.

In dit voorbeeld bestaat een compatibiliteitsvoorwaarde, n.l.

$$y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0.$$

Stel nu dat het rechterlid als volgt gekozen wordt:

$y_1 = 12$, $y_2 = 29$, $y_3 = 4$, dan moet $y_4 = 37$ gekozen worden opdat het systeem oplosbaar is.

De oplossing is dan:

$$x_1 = -7 + 2x_4$$

$$x_2 = 2x$$

$$x_3 = 7 - x_4$$

In de oplossing kan de onbekende x_4 vrij worden gekozen; dit betekent dat het bijbehorende homogene systeem één niet-triviale oplossing bezit.
De oplossing kunnen we nu ook schrijven in de vorm:

$$x = (-7, 2, 7, 0) + \alpha(2, 0, -1, 1).$$

In dit voorbeeld is $m = n = 4$, maar $p = 3$, dus $p < m$ en $p < n$.
Het systeem is dus overbepaald en onderbepaald tegelijk.

Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49,
Amsterdam-oost.