[redacted]

STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

ZW 1968-003

2-stelsels van rechte lijnen.

door

Prof.dr. G.H.A. Grosheide F.Wzn.

1. Men kan in de lijnenmeetkunde twee hoofdrichtingen onderscheiden

a. de differentiaalmeetkundige

b. de algebraïsche.

Tot onderzoek in de eerstgenoemde richting werd men vooral geleid door problemen uit de geometrische optica. Deze deed in het bijzonder aandacht schenken aan de tweeledige stelsels van rechten, die in een driedimensionale ruimte gewoonlijk <u>stralencongruenties</u> worden genoemd. Het eerste algemene theorema over 2-stelsels in R_3 door Malus in 1808 bewezen luidt:

"Een stralencongruentie is op twee wijzen te beschouwen als eenledig stelsel ontwikkelbare regelvlakken"

Het onderzoek in algebraïsche richting kwam met name voort uit de gedachte van Plücker voor de opbouw der meetkunde andere objecten dan het punt en het vlak (bijvoorbeeld de rechte of de bol) als bouwstenen te nemen. Zijn samenvattend werk werd juist een eeuw geleden (Bd I 1868; Bd II 1869) door F. Klein voltooid en uitgegeven.
In de laatste tijd kan van een opleving van de belangstelling voor de lijnenmeetkunde (in ruimere zin!) gesproken worden.

2. Wij zullen in ons betoog de 2-stelsels in ruimten van drie (en meer) afmetingen introduceren als verzamelingen van verbindingsrechten van corresponderende punten van twee oppervlakken, tussen de punten waarvan een één-éénduidige correspondentie is gedefinieerd.
Onderstellen wij, dat deze oppervlakken zijn

$$y(u, v) \quad \text{en} \quad z(u, v)$$

en dat de parameters op beide zó zijn gekozen, dat corresponderende punten bij dezelfde parameterwaarden behoren, dan worden de stralen van het 2-stelsel voorgesteld door

$$y(u, v) + \rho z(u, v).$$

Ook geheel andere introducties zijn mogelijk. Zo leiden bepaalde natuurkundige problemen in R_3 tot z.g. <u>normalencongruenties</u>, welke gevormd worden door de normalen van een gegeven oppervlak. Als generalisatie van deze heeft men dan bijv. de congruentie gevormd door de teruggekaatste stralen van een lichtpunt bij een sferische spiegel.

3. Aansluitend bij de stelling van Malus definieren wij een <u>brandpunt</u> of <u>focus</u> op een straal van een 2-stelsel, als een punt, waarin deze straal raakt aan de keerkromme van een ontwikkelbaar oppervlak van het stelsel.
In R_3 draagt iedere straal dan twee (eventueel samenvallende) brandpunten, welke worden verkregen uit de voorwaarde

$$\det(y, z, \partial_u y + \rho\partial_u z, \partial_v y + \rho\partial_v z) = 0.$$

In ruimten van meer dan drie dimensies is het al of niet aanwezig zijn van brandpunten op elke straal afhankelijk van de karakteristiek van het 2-stelsel. Daaronder wordt verstaan de dimensie d van de ruimte bepaald door de punten

$$y,\ z,\ \partial_u y,\ \partial_v y,\ \partial_u z,\ \partial_v z.$$

Is voor alle stralen d = 5 dan zijn alle regelvlakken niet ontwikkelbaar. Geldt voor alle stralen d = 4 dan treden ontwikkelbare regelvlakken alleen op, als aan een extra voorwaarde is voldaan.

4. De stralencongruenties in S_3, waarbij de brandpunten op elke straal samenvallen worden parabolisch genoemd. Men kan hierbij onderscheiden

a. de stralenschoof (alle rechten door een vast punt)
b. de congruenties met als meetkundige plaats van de brandpunten een focaalkromme.
c. de congruenties met als meetkundige plaats van de brandpunten een focaaloppervlak.

Voor de niet-parabolische congruenties heeft men een analoge indeling, welke leidt tot de volgende mogelijkheden:
De stralen van de congruentie zijn:

a. gemeenschappelijke raaklijnen van twee (verschillende) focaaloppervlakken.
b. dubbelraaklijnen van éénzelfde focaaloppervlak.
c. transversalen van twee verschillende focaalkrommen.
d. koorden van één enkele focaalkromme.
e. transversalen van een focaalkromme, die een focaaloppervlak raken.

Kiezen wij in het geval van twee verschillende focaaloppervlakken deze oppervlakken tot richtoppervlakken $y(u, v)$ en $z(u, v)$ en bepalen wij de keuze van de parameters zó, dat de raakkrommen op $y(u, v)$ worden voorgesteld door u = constant en die op $z(u, v)$ door v = constant dan geldt

$$\partial_v y = \alpha y + \beta x; \qquad \partial_u x = \gamma y + \delta z$$

en dus

$$\partial_v \partial_v y = (\partial_v \alpha + \alpha^2)y + (\partial_v \beta + \alpha\beta)z + \beta \partial_v z.$$

In het eerste brandpunt $y(u_0, v_0)$ van de straal (u_0, v_0) bezit de op het eerste focaaloppervlak $y(u, v)$ gelegen keerkromme $u = u_0$, dus een osculatievlak, dat in het tweede brandpunt $z(u_0, v_0)$ op dezelfde

straal aan het tweede focaaloppervlak z(u, v) raakt.
Dit osculatievlak wordt dan het eerste brandvlak door de straal genoemd.
Voor de tweede brandpunten geldt m.m. hetzelfde.

5. De algebraïsche stralencongruenties in S_3 bezitten vijf onafhankelijke karakteristieke getallen

m(graad)	:	het aantal stralen door een (algemeen) punt.
n(klasse)	:	het aantal stralen in een (algemeen) vlak.
μ_1	:	de rang van het regelvlak beschreven door de stralen, die een (algemene) rechte snijden.
μ_2	:	de rang van het focaaloppervlak (indien aanwezig).
γ_2	:	het aantal brandvlakken, dat door een (algemeen) vast punt gaat, terwijl het bijbehorende brandpunt in een vast vlak is gelegen.

Men kan nu o.m. bewijzen:

a. de stralen, welke een gegeven rechte snijden vormen een regelvlak van de graad m+n.

b. de rang r van de congruentie, d.w.z. het aantal paren stralen, welke zowel concurrent als coplanair met een gegeven rechte zijn is

$$r = mn - \tfrac{1}{2}\mu,$$

c. formule van Felix Klein
graad focaaloppervlak-klasse focaaloppervlak = 2(m-n).