

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1961 - 004

Voordracht in de serie  
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. L. Kuipers

29 maart 1961

De transformatie van Schwarz-Christoffel en toepassingen



1961

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen  
vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. L. Kuipers

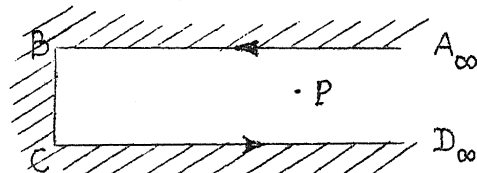
29 maart 1961

De t r a n s f o r m a t i e v a n S c h w a r z - C h r i s t o f f e l e n t o e p a s s i n g e n .

Als we in het volgende van een (vlakke) veelhoek spreken bedoelen we een enkelvoudig-samenhangende gesloten veelhoek. Een punt van het vlak, waarin deze veelhoek ligt, is òf een inwendig punt, òf een uitwendig punt, òf een punt van de grens; het binnengebied, het buitengebied en de veelhoek zelf zijn enkelvoudig-samenhangende systemen. Een punt gelegen in het gebied, dat links van een waarnemer blijft die de grens in een bepaalde richting volgt, heet een inwendig punt.

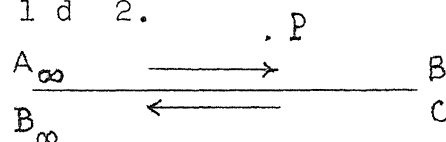
Bij de behandeling van hydrodynamische problemen laat men toe dat de (grens van de) veelhoek gedeeltelijk naar oneindig gaat.

V o o r b e e l d 1.



Twee hoekpunten van de rechthoek ABCD liggen op oneindig. We kunnen deze figuur ook als een driehoek beschouwen met één hoekpunt ( $A_\infty$ ,  $D_\infty$  vallen samen) op oneindig. P is een inwendig punt. (Het buitengebied is gearceerd.)

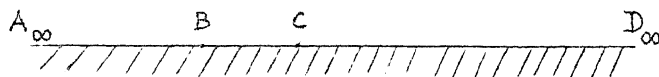
V o o r b e e l d 2.



Dit diagram kan men beschouwen als een rechthoek  $A_\infty B C D_\infty$  waarvan twee hoekpunten B en C samenvallen, en waarvan ook  $A_\infty$  en  $B_\infty$  samenvallen op oneindig. Er zijn géén uitwendige punten.

Een veelhoek gelegen in het (complexe)z-vlak kan getransformeerd worden in de reële as van het  $\zeta$ -vlak door een conforme transformatie. Het binnengebied van de veelhoek wordt getransformeerd in een der halfvlakken. Het patroon binnen de veelhoek van de stroomlijnen en de potentiaallijnen wordt afgebeeld op een over-

eenkomstig patroon in dit halfvlak. De hoekpunten van de veelhoek worden punten op de reële as in het  $\zeta$ -vlak. De figuur van voorbeeld 1 geeft het beeld:



De bovenbedoelde transformatie berust op de stelling van Schwarz-Christoffel:

Stel  $a, b, c, \dots$  zijn  $n$  punten op de reële as van  $\zeta$ -vlak zó dat  $a < b < c < \dots$ .

Stel  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  zijn de inwendige hoeken van een veelhoek met  $n$  hoekpunten zó dat

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n-2)\pi .$$

De transformatie van het  $\zeta$ -vlak naar het  $z$ -vlak, gedefinieerd door

$$(*) \quad \frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} (\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} \dots$$

transformeert de reële as in het  $\zeta$ -vlak in de grens van een veelhoek in het  $z$ -vlak zó dat de hoekpunten van de veelhoek toegevoegd zijn aan de punten  $a, b, c, \dots$  en de inwendige hoeken gelijk zijn aan  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Het bovenhalfvlak is afgebeeld op het inwendige van de veelhoek.

$K$  kan een complexe waarde aannemen.

Een uitvoerig bewijs van deze stelling (dat kenners van de beginselen der complexe-functietheorie geen enkele moeilijkheid biedt) vindt men o.a. in L.M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics (Macmillan, Londen), 10.2, blz. 263. De stelling is bewezen, als men aangetoond heeft, dat

- (1)  $z$  een rechte lijn beschrijft, als  $\zeta$  toeneemt van  $a$  tot  $b$
- (2) deze rechte lijn over een hoek  $\pi - \beta$  wentelt als  $\zeta$  het punt  $b$  passeert
- (3) de punten in het bovenhalfvlak afgebeeld worden in punten binnen de veelhoek
- (4) de veelhoek zich sluit indien  $\zeta$  van  $-\infty$  naar  $\infty$  loopt (langs de reële as).

Stel nu  $K = Ce^{i\lambda}$ . Integratie van de transformatievergelijking (\*) geeft  $z = Ce^{i\lambda} f(\zeta) + L$ . Door geschikte keuze van de oorsprong in het  $z$ -vlak kan  $L=0$  gesteld worden. Wijziging van  $\lambda$  geeft wijziging van de orientatie van de veelhoek en verandering van  $C$  verandert de schaal

( $C > 0$ ,  $\lambda$  reëel). Hieruit volgt dat alle veelhoeken behorend bij  $\{a, b, c, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  gelijkvormig zijn. Bij de toepassingen in de hydrodynamica komt het erop neer dat een veelhoek gegeven is (i.h.a. met een of meer hoekpunten op oneindig). Drie punten van  $a, b, c, \dots$  kunnen willekeurig gekozen worden, de overige liggen dan vast. De keuze van  $C$  en van  $\lambda$  bepaalt de schaal en de orientatie.

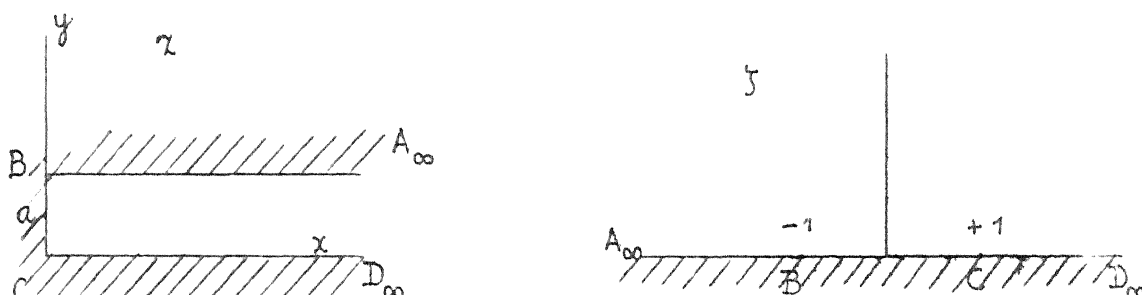
Als een hoekpunt van de veelhoek het beeldpunt is van  $\zeta = \infty$  of  $-\infty$ , dan is een met dit beeldpunt overeenkomende factor in het rechterlid van (\*) niet aanwezig. Het is gemakkelijk dit door een limietovergang aan te tonen. We schrijven (als  $a \rightarrow -\infty$  bijv.)

$$\frac{dz}{d\zeta} = Ce^{i\lambda} (-a)^{-\frac{\alpha}{\pi} + 1} (\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} \dots$$

(immers  $C$  en  $\lambda$  zijn willekeurig) en (als  $a \rightarrow -\infty$ )

$$\frac{dz}{d\zeta} = Ce^{i\lambda} (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} (\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} \dots$$

To e p a s s i n g 1. Afbeelding van een halfoneindige strook (breedte  $a > 0$ )  $A_\infty B C D_\infty$ .



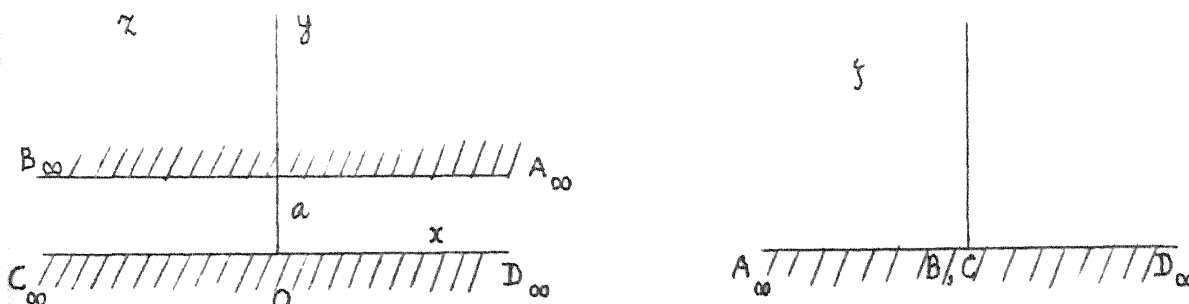
$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \text{ of } z = K \operatorname{arccosh} \zeta + L.$$

Stel  $\operatorname{arccosh} 1 = 0$ , dan is  $\operatorname{arccosh} (-1) = i\pi$ .

Er volgt:  $z = (a/\pi) \operatorname{arccosh} \zeta$

of  $\zeta = \cosh(\pi z/a)$ .

To e p a s s i n g 2. Afbeelding van een oneindige strook (breedte  $a > 0$ )  $A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty$ .

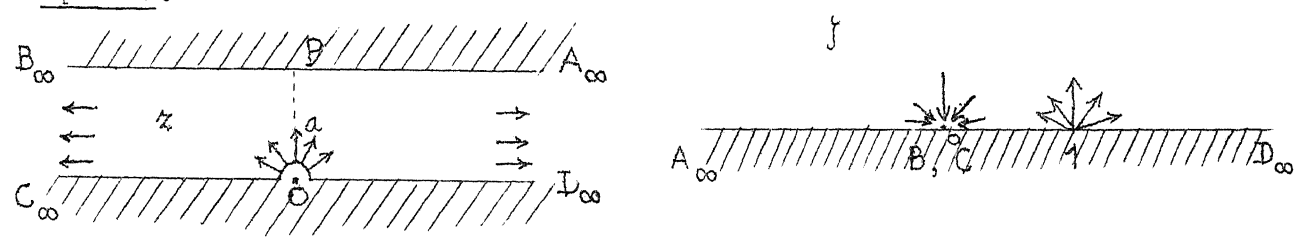


$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta}, \quad z = K \log \zeta + L$$

Stel  $z=0$  voor  $\zeta=1$  en  $z=ai$  voor  $\zeta=-1$ . Dan volgt:

$$z = \frac{a}{\pi} \log \zeta, \quad \text{of} \quad \zeta = e^{(\pi z/a)}$$

To e p a s s i n g 3. Stroming van een vloeistof door een nauwe spleet.



Stel  $\pi m$  is het volume dat bij O per tijdeenheid (en per lengte-eenheid) binnenstroomt. Bij O is er dus een bron met een sterkte  $=m$ , en aan beide uiteinden zijn er putten elk met een sterkte  $=\frac{1}{2}m$ . In het  $\zeta$ -vlak is er nu een bron bij  $\zeta=1$  met sterkte  $=m$  en een put bij  $\zeta=0$  met sterkte  $=\frac{1}{2}m$ .

De Schwarz-Christoffeltransformatie (zie toepassing 2) is hier

$$\zeta = e^{(\pi z/a)}$$

De c o m p l e x e p o t e n t i a a l is hier

$$\begin{aligned} w &= -m \log(\zeta - 1) + \frac{1}{2}m \log \zeta = -m \log(\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= -m(e^{\pi z/2a} - e^{-\pi z/2a}) = -m \log \sinh \frac{\pi z}{2a}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\frac{dw}{dz} = - \frac{m\pi}{2a} \coth \frac{\pi z}{2a}$$

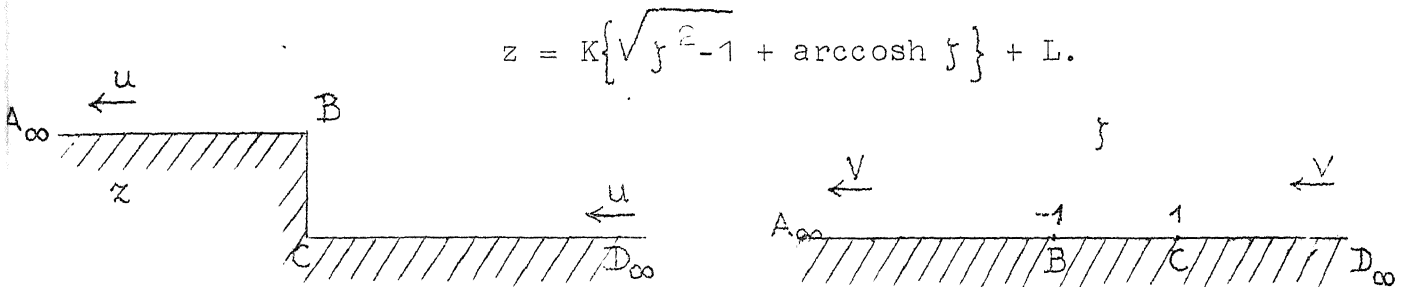
Voor  $z=ai$  is deze laatste uitkomst  $=0$ . De druk op de wand in P is het grootst. De snelheid op grote afstand van de oorsprong is gelijk aan  $\frac{m\pi}{2a}$ .

To e p a s s i n g 4. Een verhoging in de bedding van een diepe stroom.

Stel de diepte van de bedding van een stroom (stroomsnelheid op grote afstand zij U) neemt abrupt af met een bedrag h. De bedding is een vierhoek  $A_{\infty}BCD_{\infty}$  en wordt getransformeerd in het  $\zeta$ -vlak op de reële as ( $B \rightarrow -1$  en  $C \rightarrow 1$ ). De transformatievergelijking is

$$\frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta + 1)^{\frac{1}{2}}(\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K\zeta}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{K}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

zodat



$$z = K \left\{ \sqrt{\zeta^2 - 1} + \operatorname{arccosh} \zeta \right\} + L.$$

Neem de oorsprong ( $z=0$ ) in C, en het punt  $z=ih$  in B. Dan is

$$z = \frac{h}{\pi} \left\{ \sqrt{\zeta^2 - 1} + \operatorname{arccosh} \zeta \right\}.$$

Een uniforme stroom in het  $z$ -vlak impliceert een bron bij  $D_\infty$  en een put bij  $A_\infty$ . Dit is ook het geval in het  $\zeta$ -vlak, met snelheid  $V$ . Dus is  $w = V \zeta$ . Daarom is

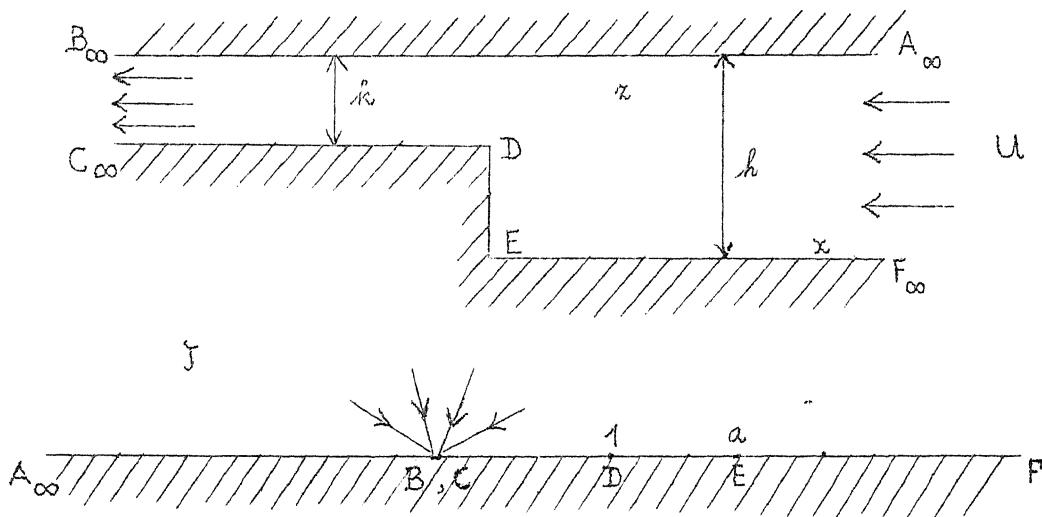
$$\frac{dw}{dz} = V \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{V}{K} \cdot \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}.$$

Op oneindig is  $\frac{dw}{dz} = U$ ,  $\zeta = \infty$ . Dus  $U = \frac{V}{K} = \frac{V\pi}{h}$ . Derhalve is  $w = hU \zeta / \pi$ . Stelt men  $\zeta = \cosh t$ , dan is de oplossing te schrijven in de vorm

$$z = \frac{h}{\pi} (t + \sinh t), \quad w = \frac{hU}{\pi} \cosh t.$$

Merk op: de snelheid  $=\infty$  bij B, en  $=0$  bij C.

Toepassing 5. Een abrupte verandering in de breedte van een kanaal.



Stel  $B_\infty, C_\infty$  komen in  $\zeta = 0$  terecht, en het beeld van D zij  $\zeta = 1$ . Het punt  $z=0$  nemen we in E ( $\zeta = a$ ).

De transformatie is hier

$$\frac{dz}{d\zeta} = K \zeta^{-1} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2}}.$$

Gemakkelijk bewijst men:

$$K = h/\pi \quad , \quad a = h^2/k^2.$$

Door integratie vindt men het stroompatroon in het z-vlak:

$$\begin{cases} z = \frac{h}{\pi} \left( \log \frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{b} \log \frac{b+t}{b-t} \right) & (b^2=a) \\ t^2 = \frac{e^{w\pi/(Uh)} - b^2}{e^{w\pi/(Uh)} - 1} . \end{cases}$$

L i t e r a t u u r :

- L.M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics (Macmillan), 10.1.  
E. Durand, Electrostatique et Magnétostatique (Masson), Chapitre X,  
p.328-353 (met vele toepassingen).  
R.V. Churchill, Complex variables and applications (McGraw-Hill),  
Chapter X.