STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 004

CYLINDERALGEBRA'S

P.C. Baayen

1962

ZW 1962-004

CYLINDERALGEBRA'S

P.C. Baayen

1. Inleiding

Het is algemeen bekend dat er een nauw verband bestaat tussen de symbolische logica en de studie van de boole-algebra's. Maar wellicht is het toch nuttig om even op dit verband nader in te gaan, voordat we ons gaan bezig houden met ons eigenlijke onderwerp, de cylinderalgebra's.

Beschouw een propositielogica P (eventueel met meer dan aftelbaar veel variabelen). We noemen twee formules M,N van P <u>aequivalent</u> als $\vdash M \rightarrow N$ en $\vdash N \rightarrow M$; zij $[M]$ de verzameling van alle formules in P die met M aequivalent zijn. In de verzameling A van alle aequivalentieklassen definieren we operaties $-, \vee, \wedge$ als volgt:

$$-[M] = [\neg M] \quad ;$$
$$[M] \vee [N] = [M \vee N] \quad ;$$
$$[M] \wedge [N] = [M \wedge N] \quad ;$$

en we definieren twee speciale elementen 0 en 1 van A door

$$0 = [M \wedge \neg M] \quad ;$$
$$1 = [M \vee \neg M] \quad .$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat deze definities zinvol zijn, d.w.z. onafhankelijk van de keuze van de representerende formules uit $[M]$ en $[N]$; ook 0 en 1 hangen niet van de keuze van M af. Het is eveneens eenvoudig aan te tonen dat A t.o.v. de operaties $\vee, \wedge, -$ een boole-algebra is, met 0 als nulelement en 1 als eenheidselement. De algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$ wordt wel de Lindenbaum-algebra van P genoemd.

Zij vervolgens Γ een verzameling formules in P. De aequivalentieklassen van formules uit Γ vormen een deelverzameling B van A. Zij $I = I(\Gamma)$ het duale ideaal dat in $\mathfrak{A}$ wordt voortgebracht door B. Dan is het ook niet moeilijk in te zien dat

$$[M] \in I(\Gamma) \text{ dan en slechts dan als } \Gamma \vdash M.$$

Bijgevolg geldt bijvoorbeeld: Γ is dan en slechts dan consistent als $I(\Gamma) \neq A$.

Een laatste begrip uit de propositielogica dat we willen vertalen in de terminologie van de boole-algebra's is het begrip <u>interpretatie</u>. Een interpretatie van P is een toekenning van waarden W ("waar") of O ("onjuist"), eerst aan de propositie-variabelen van P, en vervolgens aan alle formules van P d.m.v. de recursieve voorschriften:

de waarde van $\neg M$ is O (resp. W) als de waarde van M W (resp. O) is;

de waarde van $M \vee N$ is O als M en N beide waarde O hebben, en is W in alle andere gevallen.

Dan hebben aequivalente formules steeds gelijke waarden. Bijgevolg kunnen we aan iedere aequivalentieklasse M zelf een waarde V(M) toekennen:

$V\,[M] = O$ (resp. W) als M de waarde O (resp. W) heeft.

De betekenis van bovengenoemde recursieve voorschriften is dan, in algebraische terminologie: V is een homomorphie van de boole-algebra $\mathfrak{A}$ op $\{O,W\}$, waarbij $\{O,W\}$ moet worden opgevat als een boole-algebra met O als nulelement en W als eenheidselement.

Wat voor zin heeft nu deze vertaling van de propositielogica naar de algebra? In hoofdzaak deze, dat nu algebraïsche methoden toegepast kunnen worden op problemen uit de logica. Als voorbeeld geven we een algebraisch bewijs (zie Henkin [14], [16] en vooral Łoś [20]) van de zog.stelling van Gödel-Malcev voor de propositielogica.

Deze stelling luidt: "Als Γ een consistente verzameling formules uit een propositielogica P is, dan is er een interpretatie van P waarin alle formules van Γ waar zijn."

Bewijs: Beschouw het duale ideaal $I(\Gamma)$ in de Lindenbaum-algebra $\mathfrak{A}$ van P. Daar Γ consistent is, is $I(\Gamma) \neq A$. Volgens een algebraische stelling is $I(\Gamma)$ dan bevat in een maximaal duaal ideaal J van $\mathfrak{A}$, en de factor algebra $\mathfrak{A}/J$ is isomorph met $\{0,W\}$. Daaruit volgt: als we de waarde W toekennen aan die formules M in P waarvoor $[M] \in J$, en de waarde 0 aan alle andere formules in P, dan is dit een interpretatie van P, en in deze interpretatie zijn alle formules van Γ waar.

Voor de predicatenlogica kennen we een analoge stelling, de beroemde volledigheidsstelling van Gödel, die (in één van zijn formuleringen) bijna gelijk luidend is: "Als Γ een consistente verzamling formules is in een predicatenlogica P, dan is er een interpretatie van P waarin alle formules uit Γ waar zijn".

Maar dan moet wel opgemerkt worden dat het begrip interpretatie hier verschilt van het gelijkluidende begrip bij de propositielogica. De definitie ligt wel voor de hand, maar is gecompliceerder. We zullen daar echter niet uitvoeriger op ingaan.

Als men van deze volledigheidsstelling van Gödel een algebraisch bewijs wil geven, dan blijkt dat men er met boole-algebra's niet komt. De belangrijkste moeilijkheid is, dat de quantoren geen algebraisch analogon hebben in een boole-algebra zonder meer. We stuiten hier dus op de noodzaak, nieuwe algebraische systemen in te voeren.

2. Cylinder-algebra's en polyadische algebra's

In de afgelopen tien jaar zijn er twee soorten algebraische systemen gedefinieerd, die beide de structuur weerspiegelen van de predicatenlogica: de cylinderalgebra's, gedefinieerd in 1952 door Tarski en Thomson [22], en de polyadische algebra's, in 1954 door Halmos ingevoerd (Halmos [5] , [6]).

Deze begrippen zijn in hun algemeenheid niet aequivalent. In essentie is het verschil dit: de polyadische algebra's weerspiegelen de zuivere predicatenlogica, terwijl de cylinderalgebra's het formalisme van de predicatenlogica met gelijkheid weergeven. Maar in het geval dat vanuit het gezichtspunt van de klassieke logica eigenlijk alleen van belang is (het geval van de oneindig-dimensionale locaal eindig-dimensionale algebra's) is hun aequivalentie wel aangetoond (Galler [4]). (Ook in het eenvoudigste geval, dat der 0- en 1-dimensionale algebra's, zijn beide begrippen aequivalent. De nuldimensionale algebra's zijn niet anders dan boole-algebra's. De ééndimensionale algebra's zijn onder de naam <u>monadische algebra's</u> door Halmos ([6],[12]) uitvoerig bestudeerd). We zullen ons daarom tot één van beide begrippen beperken; en daar de definitie van een cylinder-algebra het eenvoudigst is, zullen we deze algebraische systemen kiezen.

Voor de polydische algebra's zij verder verwezen naar het recente boek van Halmos, Algebraic Logic [13]; een zeer helder overzicht over deze theorie wordt ook gegeven in [9].

Laten we nu de definitie geven van het begrip cylinderalgebra. Zij N een (wellicht transfiniet) ordinaalgetal.

<u>Definitie</u>. Een <u>N-dimensionale cylinderalgebra</u> is een algebraisch systeem $\langle A,\vee,\wedge,-,C_i,d_{ij},0,1\rangle$, met $0\leq i,j<N$. Daarbij is het partiele systeem $\langle A,\vee,\wedge,-,0,1\rangle$ een boole-algebra, de C_i zijn enkelvoudige operaties in A, en de d_{ij} zijn elementen uit A. Voorts is voldaan aan de volgende axioma's, voor willekeurige $x,y\in A$ en $i,j,k<N$:

A 1. $x\wedge C_i x=x$;

A 2. $C_i(x\wedge C_i y)=C_i x\wedge C_i y$;

A 3. $C_iC_jx = C_jC_ix$;

A 4. $d_{ii} = 1$;

A 5. $d_{ij}=C_k(d_{ik}\wedge d_{jk})$ als $i,j\neq k$; is er geen $k\neq i,j$, dan: $d_{ij}=d_{ji}$;

A 6. $C_i(d_{ij}\wedge x)\wedge C_i(d_{ij}\wedge -x)=0$ als $i\neq j$; is er geen $j\neq i$, dan: $C_i0=0$.

<u>Voorbeeld 1.</u> Zij P een predicatenlogica met gelijkheid, met individuele variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ $(i < N)$. Evenals bij een propositielogica vormen we de verzameling A van alle aequivalentieklassen van formules uit P, maar behalve $-, \vee, \wedge, 0, 1$ definieren we ook nog de enkelvoudige operaties C_i $(i < N)$ door

$$C_i\ [M] = \left[(\exists\ x_i)M\right] \quad ,$$

en de elementen d_{ij} $(i,j < N)$ door

$$d_{ij} = [x_i = x_j] \ .$$

Dan is $\langle A, \vee, \wedge, -, C_i, d_{ij}, 0, 1 \rangle$ een N-dimensionale cylinder-algebra.

<u>Voorbeeld 2.</u> Zij X een niet-lege verzameling, en beschouw de verzameling X^N van alle "rijen" $(x_i)_{i < N}$ van elementen uit X. Als $S \subset X^N$ en $i < N$, dan zij

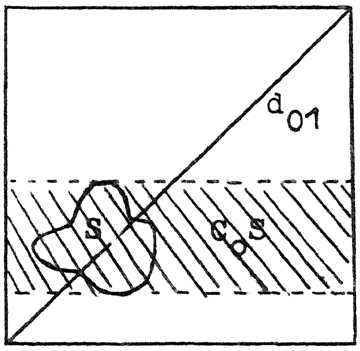
$$C_i S = \{\, x \in X^N \colon \text{er is een } y \in S \text{ met } y_j = x_j \\ \text{voor } j \neq i \,\} \ .$$

Als $i, j < N$, dan zij D_{ij} de deelverzameling van X^N, gedefinieerd door

$$D_{ij} = \{\, x \in X^N ;\ x_i = x_j \,\} \ .$$

Dan is $\langle \mathfrak{S}(X^N), \cup, \cap, ', C_i, D_{ij}, \emptyset, X^N \rangle$ een cylinderalgebra (met $\mathfrak{S}(Y)$ geven we aan de verzameling van alle deelverzamelingen van Y; met $'$ geven we aan de overgang op de complementsverzameling).

Iedere deelalgebra van een aldus geconstrueerde cylinder-algebra heet <u>uitgesproken concreet.</u> Voor N=2 illustreert onderstaande figuur de begrippen:



Naar aanleiding van deze concrete algebra's noemt men in een willekeurige cylinderalgebra de elementen d_{ij} de <u>diagonaalelementen</u>, en de operaties C_i de cylindrificaties. Vandaar ook de naam cylinderalgebra.

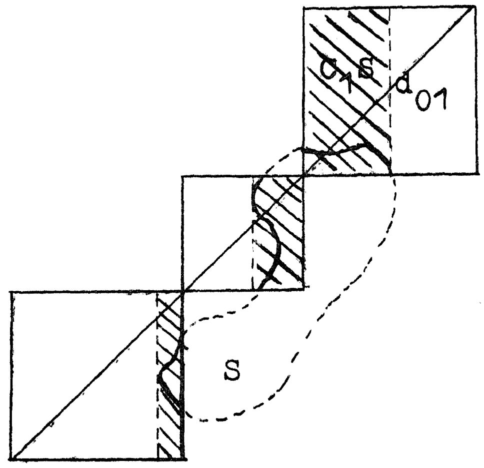
<u>Voorbeeld 3.</u> We kunnen gemakkelijk de uitgesproken concrete algebra's generaliseren. Daartoe gaan we uit, niet van één verzameling X, maar van vele niet-lege verzamelingen X_k, $k \in K$, en vormen $\bigcup_{k \in K} X_k^N$. Voor deelverzamelingen S van $\bigcup_{k \in K} X_k^N$ definieren we weer

$$C_i S = \{ X \in \bigcup_{k \in K} X_k^N : \text{er is een } y \in S \text{ met } y_j = x_j \text{ voor alle } j \neq i \},$$

terwijl ook weer

$$D_{ij} = \{ x \in \bigcup_{k \in K} X_k^N : x_i = x_j \} .$$

Dan is ook $\langle \mathfrak{S}(\bigcup_{k \in K} X_k^N), \cup, \cap, ', C_i, D_{ij}, \emptyset, \bigcup_{k \in K} X_k^N \rangle$ een cylinderalgebra. Iedere deelalgebra van een dergelijke algebra zullen we <u>concreet</u> noemen. Voor N=2, en K bestaande uit 3 elementen, volgt weer een schetsje.



Als we de definities van concrete en uitgesproken concrete cylinderalgebra's nader beschouwen, dan moet ons opvallen dat de concrete cylinderalgebra van alle deelverzamelingen van $\bigcup_{k \in K} X_k^N$ eigenlijk niets anders is dan (exacter gezegd: isomorph is met) het directe product van de <u>uitgesproken</u> concrete cylinderalgebra's van alle deelverzamelingen van X_k^N $(k \in K)$. Hieruit volgt:

<u>Stelling 1</u>. Iedere concrete cylinderalgebra is isomorph met een subdirect product van uitgesproken concrete cylinderalgebra's.

<u>Voorbeeld 4</u>. Schijnbaar geheel andersoortig zijn de cylinderalgebra's die we als volgt construeren. Zij X een niet-lege verzameling, N een ordinaal getal, en $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$ een boole-algebra. We beschouwen de functies p,q,... van X^N naar B. Als we zoals gebruikelijk definieren

$$(-p)\ (x) = -(p(x))\ ;$$
$$(p \vee q)\ (x) = p(x) \vee q(x);$$
$$(p \wedge q)\ (x) = p(x) \wedge q(x);$$
$$O(x) = 0 \text{ voor alle } x \in X^N;$$
$$e(x) = 1 \text{ voor alle } x \in X^N,$$

dan vormen deze functies weer een boole-algebra (het directe product $\mathcal{G}^{(X^N)}$) met 0 en e als nul- en eenheidselement.

We definieren nu speciale functies d_{ij}, voor $i,j < N$, als volgt:

$$d_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x_i \neq x_j \quad ; \\ 1 & \text{als } x_i = x_j \quad . \end{cases}$$

Tenslotte nemen we een verzameling A van functies met de volgende eigenschappen:

(1) de speciale functies $0, e, d_{ij}$ $(i,j < N)$ behoren tot A;

(2) als $p,q \in A$, dan ook $-p$, $p \vee q$, $p \wedge q$;

(3) als $p \in A$, dan heeft voor iedere $x \in X^N$ en iedere $i < N$ de verzameling

$$\{p(y) : y \in X^N \text{ en } y_j = x_j \text{ voor alle } j \neq i\}$$

een supremum in $\mathcal{G}$;

(4) als $p \in X$, dan behoort voor iedere $i < N$ de functie $C_i p$, gedefinieerd door $(C_i p)(x) = \sup\{p(y) : y \in X^N$ en $y_j = x_j$ voor $j \neq i\}$ weer tot A.

Dan kan men controleren dat ook $\langle A, \vee, \wedge, -, C_i, d_{ij}, 0, 1 \rangle$ weer een N-dimensionale cylinderalgebra is. Een dergelijke algebra heet een <u>cylindrische functie-algebra</u>.

In wezen leveren de functie-algebra's niets nieuws. Men kan n.l. bewijzen:

<u>Stelling 2</u>. Iedere cylindrische functie-algebra is isomorph met een concrete cylinderalgebra; omgekeerd is iedere concrete algebra isomorph met een functie-algebra.

<u>Stelling 3</u>. Iedere cylindrische functie-algebra, geconstrueerd m.b.v. de uit twee elementen bestaande boole-algebra $\{0, W\}$, is isomorph met een uitgesproken concrete cylinderalgebra, en omgekeerd.

Tenslotte moet nog een (tamelijk triviaal) voorbeeld van cylinderalgebra's vermeld worden, eigenlijk een bijzonder geval van voorbeeld 4: iedere boole-algebra kan, voor iedere N, beschouwd worden als een N-dimensionale cylinderalgebra, wanneer we definieren:

$$C_i x = 1 \,, \quad \text{voor alle } i < N \text{ en alle } x \neq 0;$$

$$d_{ij} = 1 \,, \quad \text{voor alle } i,j \,.$$

3. Cylinderalgebra's en de volledigheidsstelling van Gödel

Zij P een predicatenlogica met gelijkheid, en zij $\mathfrak{A}$ de cylinderalgebra van alle aequivalentieklassen van formules uit P.

In iedere formule M van P komen slechts eindig veel variabelen vrij voor; zeg $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$. Zij M^* de formule $(\exists x_{i_1})(\exists x_{i_2})\dots(\exists x_{i_n})M$. Dan heeft M^* de eigenschap: voor iedere i is $(\exists x_i)M^*$ aequivalent met M^*.

Algebraisch betekent dit: $C_i\ [M^*] = [M^*]$ voor alle i, waar $[M^*] = C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}\ [M]$. We zullen een element p van een cylinderalgebra <u>gesloten</u> noemen, als $C_i p = p$ voor alle $i < N$, en we zullen een cylinderalgebra <u>locaal eindig-dimensionaal</u> noemen als er voor iedere p eindig veel indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ bestaan zodanig dat $C_{i_1}\ C_{i_2}\ \dots\ C_{i_n}\ p$ gesloten is. Uit het bovenstaande volgt: de Lindenbaum-algebra $\mathfrak{A}$ van een predicatenlogica P is locaal eindig-dimensionaal.

De dimensie van $\mathfrak{A}$ komt overeen met het aantal individuele variabelen van P. Is dit aantal oneindig (zoals gebruikelijk), dan zal $\mathfrak{A}$ een oneindig-dimensionale locaal eindig-dimensionale cylinderalgebra zijn.

Voor dergelijke algebra's geldt de volgende belangrijke stelling (Tarski [21]):

<u>Stelling 4</u>. Iedere oneindig-dimensionale locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra is isomorph met een concrete

cylinderalgebra.

Waarom nu is deze stelling zo belangrijk? Niet in de laatste plaats omdat hij in feite de algebraische vertaling geeft van de volledigheidsstelling van Gödel. Ik wil deze voordracht ermee besluiten dit feit enigszins aannemelijk te maken, althans in één richting.

Daartoe gaan we uit van een andere formulering van de volledigheidsstelling, die luidt:

"Iedere formule van een predicatenlogica P, die waar is in iedere interpretatie, is bewijsbaar". Als we deze stelling zouden willen algebraiseren, dan zouden we eerst het begrip interpretatie nader moeten beschrijven. Deze beschrijving zullen we echter kortheidshalve achterwege laten; ik deel U maar onmiddellijk mee wat het algebraisch analogon van zo'n interpretatie blijkt te zijn: een homomorphie van de bij P behorende cylinderalgebra op een functie-algebra $\mathcal{L}$, die geconstrueerd is m.b.v. de boole-algebra $\{0,W\}$. En de algebraische vertaling van de uitspraak: M is waar in de interpretatie V, is dan: in de door V geinduceerde homomorphie van $\mathfrak{A}$ op $\{0,W\}$ wordt $[M]$ afgebeeld op de functie uit $\mathcal{L}$ die de constante waarde W heeft, i.e. op het eenheidselement van $\mathcal{L}$.

Op grond van stelling 3 kunnen we echter ook als algebraisch analogon van een interpretatie V nemen een homomorphe afbeelding van $\mathfrak{A}$ op een uitgesproken concrete algebra $\mathcal{L}^*$; "M is waar onder de interpretatie V" betekent dan weer: "het beeld van $[M]$ onder de bijbehorende homomorphie is het eenheidselement van $\mathcal{L}^*$ ".

Als we eenmaal over deze "vertalingen" beschikken, is het niet moeilijk meer om, m.b.v. stelling 4 (en stelling 1) de volledigheidsstelling te bewijzen.
Zij nl. P een predicatenlogica, en zij $\mathfrak{A}$ weer de Lindenbaum-algebra van P. Volgens stelling 4 is $\mathfrak{A}$ isomorph met een concrete cylinderalgebra, en dus, volgens stelling 1, met een subdirect product $\mathfrak{A}^*$ van uitgesproken concrete algebra's $\mathcal{L}_k, k \in K$.
Zij φ de isomorphie $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^*$, en π_k de projectie $\mathfrak{A}^* \longrightarrow \mathcal{L}_k$.

Stel nu de formule M van P is waar in iedere interpretatie van P. Onder iedere homomorphie van $\mathfrak{A}$ op een uitgesproken concrete algebra wordt [M] dan op het eenheidselement afgebeeld. I.h.b. is $\pi_k \varphi[M] = 1$, voor alle $k \in K$. Maar dan is ook $\varphi[M] = 1$ in $\mathfrak{A}^*$, dus $[M]=1$ in $\mathfrak{A}$, d.w.z. M is bewijsbaar.

Daarmee is de volledigheidsstelling bewezen.

<u>Literatuur</u>

[1] M.L'ABBÉ : Structures algébriques suggérées par la logique mathématique. Bull.Soc.Math.de France <u>86</u> (1958), 299-314.

[2] H.BASS : Finite monadic algebras. Proc.Am.Math. Soc. <u>9</u> (1958), 258-268.

[3] A.H.COPELAND SR: Note on cylindric algebras and polyadic algebras. Mich.Math.J. <u>3</u> (1955),155-157.

[4] B.A.GALLER : Cylindric and polyadic algebras. Proc.Am.Math.Soc. <u>8</u> (1957), 176-183.

[5] P.R.HALMOS : Polyadic Boolean algebras. Proc.Nat.As. Sc.U.S.A. <u>40</u> (1954), 296-301.

[6] " : Algebraic Logic I. Compos.Math. <u>12</u> (1954), 217-249.

[7] " : Algebraic Logic II. Fund.Math. <u>43</u> (1956), 255-325.

[8] " : Algebraic Logic III. Trans.Am.Math.Soc. <u>83</u> (1956), 430-470.

[9] " : The basic concepts of algebraic logic. Am.Math.Monthly <u>63</u> (1956), 363-387.

[10] " : Algebraic Logic IV. Trans.Am.Math.Soc. <u>86</u> (1957), 1-27.

[11] " : Free monadic algebras. Proc.Am.Math.Soc.<u>10</u> (1959), 219-227.

[12] P.R.HALMOS : The representation of monadic boolean algebras. Duke Math.J.26 (1959) 447-454.

[13] " : Algebraic Logic. Chelsea, New York,1962.

[14] L.HENKIN : Boolean representation through proposition calculus. Fund.Math.41 (1954), 89-96.

[15] " : The representation theorem for cylindrical algebras. In: Mathematical interpretation of formal systems, Amsterdam, 1955, 84-97.

[16] " : The algebraic structure of mathematical theories. Bull.Soc.Math.Belg. 7 (1955), 131-136.

[17] " : La structure algébrique des théories mathématiques. Gauthier-Villard, Paris,1956.

[18] " : Cylindrical algebras of dimension 2. Bull.Am. Math.Soc. 63 (1957), 26.

[19] M.KRASNER : Les algèbres cylindriques. Bull.Soc.Math,de France 86 (1958), 315-319.

[20] J.ŁOŚ : Remarks on Henkin's paper:Boolean representation through propositional calculus. Fund.Math. 44 (1957), 82-90.

[21] A. TARSKI : A representation theorem for cylindric algebras. Bull.Am.Math.Soc. 58 (1952) 65-66.

[22] A.TARSKI en F.B.THOMSON : Some general properties of cylindric algebras. Bull.Am.Math.Soc. 58 (1952),65.

[23] F.B. THOMSON : Some contributions to abstract algebra and meta-mathematics. Berkeley thesis, 1951.

[24] O. VARSAVSKY : Quantifiers and equivalence relations. Revista Math.Cuyana 2 (1956), 29-51.

[25] F.B. WRIGHT : Ideals in a polyadic algebra. Proc.Am.Math.Soc. 8 (1957), 544-546.

[26] " : Some remarks on Boolean duality. Portugal.Math. 16 (1957), 109-117.