STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1967-004

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. A.F. Monna

27 september 1967

Convexiteit

In deze voordracht worden enkele eigenschappen behandeld van convexe verzamelingen. Bewijzen van stellingen blijven in dit overzicht in het algemeen afwezig. Toegepast in bepaalde functieruimten geven zij aanleiding tot een speciale belichting van fraaie eigenschappen uit de analyse.

1. Driehoeken en cirkels

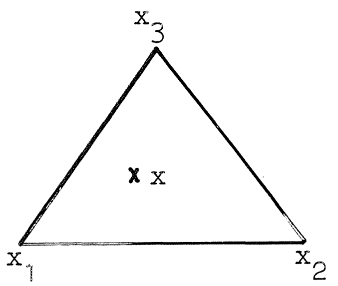
Zij D een driehoek in een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$; de hoekpunten zijn in vectornotatie x_1, x_2, x_3. De volgende stelling is triviaal.

Stelling. Elk punt binnen of op de rand van de driehoek is zwaartepunt van passende massa's m_1, m_2, m_3 resp. is x_1, x_2, x_3 geplaatst waarbij $m_i \geq 0, \sum m_i = 1$.

Dus: $x = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$.

Algemene definitie van het begrip zwaartepunt:

$$\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i} .$$

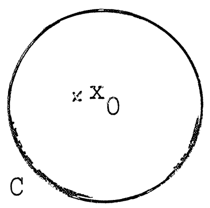


Dit zwaartepunt hangt niet af van het coördinatensysteem. Het is een kwestie van lineaire algebra om te bewijzen dat deze voorstelling eenduidig bepaald is: bij elke x behoort één en slechts één massaverdeling. Overigens kan elk punt in het vlak van de driehoek op overeenkomstige wijze worden geschreven, mits we dan ook niet-positieve massa's toelaten.

Neem nu een cirkel.

<u>Stelling</u>. <u>Elk punt van de cirkelschijf is zwaartepunt van een massaverdeling op de cirkelomtrek</u> C <u>met positieve massa en totale massa</u> 1.

Genoteerd



$$x_0 = \int_C x \, d\mu \quad \text{met} \quad \int d\mu = 1, \ \mu \geq 0,$$

of, als er een dichtheid ρ is:

$$x_0 = \int_C \rho(x) x \, d s .$$

Hierin is de integraal bedoeld als vectorwaardige integraal (op de definitie daarvan wordt niet ingegaan).

Men ziet direct in dat bij de cirkel geen eenduidigheid van de voorstelling bestaat.

Voor de driehoek geldt: een hoekpunt, zeg x_1, kan slechts worden verkregen door te nemen $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 0$.

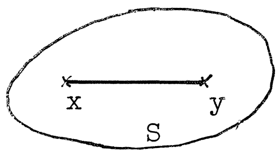
Voor de cirkel geldt: is $x_0 \in C$, dan is de eenheidsmassa in x_0 de enige massaverdeling op C die x_0 als zwaartepunt heeft.

Deze eenvoudige feiten zijn aanleiding tot diepliggende stellingen over convexe verzamelingen, in het bijzonder over zgn. extremaalpunten.

2. Convexiteit

Zij E een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$; er wordt voorlopig niets ondersteld over de dimensie, noch iets over een topologie op E.

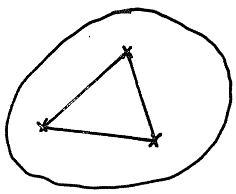
Definitie. Een verzameling $S \subset E$ heet convex indien $x, y \in S \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in S$ voor elke $0 \leq \lambda \leq 1$.



Een equivalente definitie is:

$$x_1, \ldots, x_n \in S \implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{voor alle } \lambda_i \geq 0$$

$$\text{met } \sum \lambda_i = 1.$$



Voor convexe verzamelingen gelden een aantal evidente eigenschappen (doorsnede, affiene transformaties).

Definitie. Gegeven een verzameling $A \subset E$. Het convex omhulsel $C(A)$ van A is de doorsnede van alle convexe verzamelingen die A bevatten.

$C(A)$ is convex. Men bewijst:

$C(A)$ is de verzameling van alle eindige combinaties

$$\sum \lambda_i x_i, \ \sum \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0,$$

waarin de punten x_i de verzameling A doorlopen.

Extremaalpunten

1e definitie. Zij A convex; $x \in A$ heet een extremaalpunt van A indien er geen open segment in A is dat x bevat.

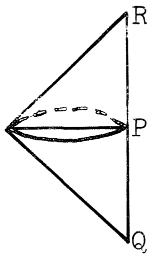
Voorbeelden.

(i) Neemt men voor A de verzameling van de punten binnen de driehoek, dan zijn er geen extremaalpunten. Neemt men de "rand" erbij, dan zijn de hoekpunten de enige extremaalpunten.

(ii) Van een "gesloten" cirkelschijf zijn alle punten van de cirkelomtrek extremaalpunten.

(iii) In R^n: neem de bol $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$. Men bewijst dat de "randpunten". dat zijn de punten waarvoor $\sum x_i^2 = 1$, extremaalpunten zijn.

(iv) Van het lichaam uit de figuur zijn extremaalpunten de punten R en Q en alle punten van de cirkel behalve P. Laten we nu de gewone metrische topologie toe dan besluit men uit dit voorbeeld dat zelfs van een compacte convexe verzameling de verzameling van de extremaalpunten niet gesloten behoeft te zijn.



(v) Beschouw in de Hilbert-ruimte l^2 de verzameling van de punten waarvoor geldt

$$\sum_{i=1}^{\infty} (2^i x_i)^2 \leq 1.$$

Men bewijst dat deze verzameling convex is en dat de verzameling van de extremaalpunten er overal dicht in ligt.

Zulke pathologische feiten doen zich niet voor in R^2. Daarin geldt namelijk dat van een convexe compacte verzameling de verzameling van de extremaalpunten gesloten is.

2e definitie. Zij A convex, $x \in A$ heet extremaalpunt indien $A - \{x\}$ convex is.

Beide definities zijn equivalent.

Voor de gewone lichamen die in de schoolwiskunde voorkomen constateert men: de convexe verzameling is het convex omhulsel van de verzameling van de extremaalpunten.

Niet elke convexe verzameling heeft extremaalpunten. Om de vraag naar de existentie van extremaalpunten te kunnen beantwoorden wordt de theorie nu verder behandeld in locaal convexe ruimten; de topologie gaat een rol spelen. Oneindig dimensionale ruimten zijn toegelaten. Dan geldt:

Stelling. Elke convexe compacte verzameling heeft extremaalpunten.

Definitie. Gegeven een verzameling $A \subset E$. Het gesloten convex omhulsel van A is de doorsnede van alle gesloten convexe verzamelingen die A bevatten.

Vrij triviaal is: het gesloten convex omhulsel is de afsluiting van het convex omhulsel.

Opmerking. Men kan uit eenvoudige voorbeelden zien dat het convex omhulsel van een verzameling niet steeds gesloten is.

Notatie. Zij $A \subset E$ convex. A_e is de verzameling van de extremaalpunten van A; $\overline{A}$ is de afsluiting van A. Over het verband tussen extremaalpunten en convex omhulsel geldt de volgende stelling.

Stelling van Krein-Milman.
Zij $A \subset E$ convex en compact. Dan is

$$A = \overline{C(A_e)}.$$

Dus: $C(A_e)$ ligt dicht in A.

Men kan niet algemeen bewijzen dat $A = C(A_e)$ (vergelijk de voorbeelden). De theorie draait om dit punt.

Andere formulering:

De verzameling van de punten $\sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, eindig veel λ_i ongelijk 0, $x_i \in A_e$, ligt dicht in A.

Interpretatie in termen van zwaartepunten

Zij ε_x de massaverdeling die bestaat uit de massa 1 geplaatst in het punt x (Dirac-maat in x). Een lineaire combinatie als in de vorige formulering geeft aanleiding tot de verdeling $\sum_i \lambda_i \varepsilon_{x_i}$. Het zwaartepunt van deze verdeling is $\sum \lambda_i x_i$. Dan zegt de stelling van Krein-Milman:

Een overal dichte verzameling in A kan men verkrijgen als zwaartepunt van passende massaverdelingen op A_e.

Probleemstelling. Gevraagd condities waaronder elk punt van A (dus niet alleen een dichte verzameling) is te verkrijgen als zwaartepunt van massa's op A_e.

Dit probleem wordt behandeld met maattheorie in de vorm van de theorie van lineaire vormen op de ruimte van de continue functies op een verzameling. Men moet n.l. definiëren wat men zal hebben te verstaan onder het begrip zwaartepunt.

Voor de Dirac-maat ε_x geldt per definitie voor continue f: $\varepsilon_x(f) = f(x)$.

Zij nu μ een maat die een lineaire combinatie is van Dirac-maten:

$$\mu = \sum \lambda_i \varepsilon_{x_i}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Zij A een convexe verzameling. Zij f een affien-lineaire functie op A, d.w.z.

$$\text{voor alle } x,\ y \in A \text{ en alle } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ is}$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Dan geldt

$$\mu(f) = \int f\, d\mu = \sum \lambda_i \varepsilon_{x_i}(f) = \sum \lambda_i f(x_i) = f(\sum \lambda_i x_i).$$

Stel het zwaartepunt $\sum \lambda_i x_i$ van deze verdeling x_μ. Dan is dus

$$\mu(f) = f(x_\mu) \text{ voor alle affien-lineaire } f \text{ op } A.$$

Men gebruikt deze eigenschap om het zwaartepunt te definiëren van een massa(maat) $\mu \geq 0$ met totale massa 1 op een convexe compacte verzameling A.

<u>Stelling</u>. <u>Voor elke $\mu \geq 0$, $\mu(A) = 1$, is er een eenduidig bepaald punt $x_\mu \in A$ met</u>

$$\mu(f) = f(x_\mu)$$

<u>voor alle affien-lineaire</u> f.

Het probleem wordt nu

<u>Onderzoek of er maten μ zijn met drager A_e zó, dat elk punt van A zwaartepunt is van zo'n maat (die zal afhangen van het punt).</u>

Een dergelijke maat zal in het algemeen niet een lineaire combinatie van Dirac-maten zijn.

Het blijkt niet voor alle convexe compacte verzamelingen mogelijk te zijn. Men kent condities waaronder er zulke maten bestaan. Het gaat goed bijv. als A metriseerbaar, convex en compact is, dus bijv. in R^n. Men kan het probleem ook betitelen als een veeg probleem.
Neem $x \in A$ en beschouw $\mathcal{E}_x$. Het zwaartepunt van $\mathcal{E}_x$ is x. Gevraagd wordt: veeg de massa 1 op A_e met behoud van het zwaartepunt.
Er zijn meer veegproblemen in de analyse (bijv. in de potentiaaltheorie de methode van Poincaré).

De eenduidigheidsvraag

Men kan bewijzen dat een maat, als hiervoor bedoeld, eenduidig bepaald is dan en slechts dan als A een simplex is. Daarbij wordt een simplex in een locaal convexe ruimte E als volgt gedefiniëerd. Zij A convex compact. Neem $a \in E$.

$$A' = a + \lambda A, \ \lambda \geq 0,$$

heet een positief homothetisch beeld van A. Dan heet A een simplex indien de doorsnede van elk paar positief homothetische beelden van A óf leeg óf ook weer een positief homothetisch beeld van A is.

3. Toepassing

De theorie kan worden toegepast in de analyse.

Voorbeeld. Zij f een reële functie op $(0,\infty)$. f heet volledig monotoon als alle afgeleiden van f bestaan en $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$ voor $n = 0,1,2,\ldots$.
Een voorbeeld is $e^{-\alpha x}$ $(\alpha \geq 0)$.

Stelling (Bernstein). Bij elke volledig monotone f op $(0,\infty)$ is er een eenduidig bepaalde positieve maat μ zó dat voor alle $x > 0$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, d\mu(\alpha).$$

Het bewijs verloopt als volgt.
Zij E de ruimte van de oneindig vaak differentieerbare functies op $(0,\infty)$, voorzien van een goede topologie. Beschouw alle functies f uit E waarvoor

$f(0^+) \leq 1$ is. Deze vormen een verzameling A in E waarvan men bewijst dat ze convex en compact is. De extremaalpunten van A blijken te zijn de functies

$$x \to e^{-\alpha x}$$

voor elke $0 \leq \alpha \leq \infty$ ($e^{-\infty x}$ is per definitie de nulfunctie).
Toepassing van de theorie leidt tot de existentie van een positieve maat μ op de extremale punten die via α wordt getransformeerd in een maat op $[0,\infty]$.
Dit leidt tot een integraal-uitdrukking $\int \xi \, d\mu$, waarin ξ een extremaalpunt is. Enige omvormingen leiden tot het gewenste resultaat.