STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

ZW 1968-004

De formule van Euler voor veelvlakken

door

Prof. dr. M.A. Maurice

1. Het doel van deze voordracht is tweeledig:
   (i) Als bijzonder doel is gekozen de generalisatie van de bekende formule van Euler voor convexe veelvlakken in de 3-dimensionale Euclidische ruimte E_3 tot convexe n-dimensionale veelvlakken in E_n, voor willekeurige n.
   (ii) Als algemeen doel kan worden beschouwd een poging om iets te laten zien van de beginselen van dat onderdeel van de topologie, waar het gebruik van algebraische methoden een belangrijke rol speelt n.l. de algebraische topologie.

Met behulp van het volgens (ii) te schetsen begrippen- en stellingenmateriaal zullen we (i) behandelen.

2. In de volgende paragrafen zullen we bepaalde "figuren" in E_n gaan bestuderen.

Ter inleiding willen we enige heuristische (en alle strengheid missende) opmerkingen maken.
Daarbij zullen we denken aan (convexe) figuren in E_3.
Het blijkt belangrijk te zijn om te letten op de rand van een figuur.
Indien een figuur F een rand heeft, dan zal de dimensie van de rand i.h.a., gelijk zijn aan de dimensie van F, verminderd met één: een 3-dimensionale (convexe) figuur heeft i.h.a. tot een rand een 2-dimensionaal oppervlak, een oppervlak heeft i.h.a. tot rand een 1-dimensionale kromme, een kromme heeft i.h.a. tot rand de 0-dimensionale figuur bestaande uit 2 punten.
Een gesloten oppervlak en een gesloten kromme hebben geen rand; en omgekeerd: een oppervlak zonder rand is gesloten, een kromme zonder rand is gesloten.
We beschouwen een krommen op (gesloten) oppervlakken en letten daarbij op krommen die weliswaar gesloten zijn (dus geen rand hebben), maar die zelf geen rand zijn van gebieden op het oppervlak. Op de bol bestaan zulke krommen niet; op de torus zijn er twee "soorten" van zulke krommen; op de dubbeltorus zijn er vier "soorten" van.
De generalisatie van deze observaties heeft geleid tot de introductie van de rij van homologiegroepen van bepaalde topologische ruimten.
Corresponderende homologiegroepen van twee homeomorfe (= topologische equivalente) ruimten zijn isomorf. Een omgekeerd dus: zijn van zeker tweetal ruimten niet alle corresponderende homologiegroepen isomorf, dan kunnen die ruimten niet homeomorf zijn.
In het bovenstaande voorbeeld volgt dat de 1-dimensionale homologiegroepen van bol, torus en dubbeltorus onderling alle verschillen.

3. We zullen ons nu beperken tot "rechtlijnige" figuren in E_n.
De algemene idee bij de bestudering van zulke figuren is om ze op te splitsen in eenvoudige bouwstenen en de samenhang van de bouwstenen te bekijken.
Bij de bedoelde figuren kan men voor de bouwstenen bijv. simplices nemen.
Dit is wat we in het volgende zullen doen.

N.B. Wellicht ten overvloede wijzen we erop dat er meer en algemenere homologie theorieën (toepasbaar op grotere klassen van ruimten) bestaan dan de hier te schetsen (klassieke) simpliciale homologie-theorie. De laatste is echter voor ons doel voldoende.

4. (k+1) punten $x_0, x_1, \ldots, x_k$ in E_n heten lineair onafhankelijk, indien uit

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0 \text{ en } \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$$

(met reële getallen α_i) volgt dat

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Dit is slechts mogelijk als $k \leq n$.

Als $a_0, a_1, \ldots, a_k$ lineair onafhankelijk zijn in E_n, dan heet

$$A^k = (a_0, a_1, \ldots, a_k) = \{x \in E_n \mid x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$$

het (gesloten) k-simplex (k-dimensionaal simplex) met hoekpunten $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

Elk der twee klassen van permutaties van de hoekpunten van het k-simplex $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ heet een orientatie van het simplex.

Onder een georienteerd simplex $\varepsilon(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $\varepsilon = \pm 1$, verstaan we een simplex, tezamen met een orientatie ervan; de orientatie is de klasse waartoe $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ behoort als $\varepsilon = +1$, en de andere klasse als $\varepsilon = -1$.

Het r-zijsimplices $(0 \leq r \leq k)$ van een georienteerde simplex $\varepsilon(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ kunnen nog willekeurig georienteerd zijn.
Alleen voor $r = k - 1$ kan men in elk (k-1)-zijsimplex) een geinduceerde orientatie (die geheel onafhankelijk is van een eventueel reeds gegeven orientatie van zo'n zijsimplex) definieren door

$$(-1)^i \ \varepsilon(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

[Men gaat gemakkelijk na, dat bij deze definitie de orientatie van een $(k-1)$-zijvlak inderdaad alleen afhangt van de orientatie van het gegeven simplex, en niet van de volgorde van de hoekpunten $a_0, a_1, \ldots, a_k$ die die orientatie representeert].

5. Een simpliciaal complex $\mathcal{C}$ is een eindige collectie van simplices zó, dat

(i) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow$ alle zijsimplices van A behoren tot $\mathcal{C}$

(ii) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ of $A \cap B$ is een zijsimplex zowel van A als van B.

Laat nu $A_1^k, A_2^k, \ldots, A_{n_k}^k$ alle, op de één of andere wijze georienteerde, k-simplices zijn van een complex $\mathcal{C}$.

Een formele lineaire uitdrukking

$$x = g_1 A_1^k + g_2 A_2^k + \ldots + g_{n_k} A_{n_k}^k = \sum_{i=1}^{n_k} g_i A_i^k,$$

met gehele getallen g_i als coefficienten, heet een k-dimensionale keten van $\mathcal{C}$.

Opmerking: We spreken af, dat voor alle gehele getallen, en $\varepsilon = \pm 1$, zal gelden dat

$$g(\varepsilon A^k) = (\varepsilon g) A^k.$$

Dan wordt het begrip keten onafhankelijk van de orientatie van de simplices van $\mathcal{C}$. D.w.z. dat een keten t.o.v. één of andere orientatie v.d. simplices uit $\mathcal{C}$, ook een keten is t.o.v. een willekeurige andere orientatie van de simplices uit $\mathcal{C}$.

T.o.v. de optellingsoperatie

$$\sum g_i A_i^k + \sum h_i A_i^k = \sum (g_i + h_i) A_i^k$$

vormen de k-dimensionale ketens van $\mathcal{C}$ een abelse groep.

Deze duiden we aan met

$$L_k = L_k(\mathcal{C}).$$

Als m de maximale dimensie is van een simplex in $\mathcal{C}$, dan stellen we

$L_k = 0$ voor $k < 0$ en $k > m$.

Als $A^k = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ een k-simplex is uit $\mathcal{C}$, dan definieren we de rand van A^k als de (k-1)-dimensionale keten

$$\partial_k A^k = \partial A^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

De rand van een keten

$$x = \sum g_i A_i^k$$

wordt gedefinieerd door

$$\partial_k x = \partial x = \sum g_i \cdot \partial A_i^k.$$

Merk op dat ∂_k een afbeelding is van L_k in L_{k-1}, die blijkens

$$\partial_k (x+y) = \partial_k x + \partial_k y$$

een homomorfie is.

Lemma: $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ - d.w.z. voor alle k-ketens x geldt

$$\partial_{k-1}(\partial_k x) = 0.$$

Opmerking: Het is gebruikelijk en dikwijls gemakkelijk om de index k in ∂_k weg te laten.
De inhoud van het voorgaande lemma wordt dan uitgedrukt door

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Een k-keten x heet een k-cykel of een gesloten k-keten als $\partial_k x = \partial x = 0$.
De verzameling van alle k-cykels in L_k duiden we aan met $Z_k(\mathcal{C})$; dus $Z_k = \partial_k^{-1}[\{0_{k-1}\}] \subset L_k$.

Een k-keten x heet homoloog met 0, of: een k-rand, als $x = \partial_{k+1} y$ voor zekere $y \in L_{k+1}$.
Zo'n k-keten is in ieder geval een k-cykel, daar $\partial_k \partial_{k+1} y = 0$.
De verzameling van alle k-randen in L_k duiden we aan met $B_k(\mathcal{C})$; dus $B_k = \partial_{k+1}(L_{k+1}) \subset L_k$.

Merk op dat $B_k \subset Z_k$.
$H_k = H_k(\mathcal{C}) = Z_k / B_k$ is de k-dimensionale homologiegroep van $\mathcal{C}$.

H_k is in zekere zin een maat voor het aantal (soorten) gesloten k-ketens in $\mathcal{C}$ dat geen rand is.

6. Het laatste gedeelte van de voorgaande paragraaf laat een zuiver algebraische formulering toe.

Zij

$$\mathcal{A} : \dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

een rij van abelse groepen, en homomorfismen

$$\partial_n : A_n \to A_{n-1}$$

zó, dat

$$\partial_{n+1}[A_{n+1}] \subset \partial_n^{-1}[\{0_{n-1}\}],$$

oftewel

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

$\mathcal{A}$ heet een semi-exacte rij.

De elementen van A_n heten de n-dimensionale ketens van $\mathcal{A}$.
De index n in ∂_n wordt weer dikwijls weggelaten. ∂ heet de randoperator.
De elementen van

$$Z_n(\mathcal{A}) = \partial_n^{-1}[\{0_{n-1}\}] \subset A_n$$

heten de n-dimensionale cykels van $\mathcal{A}$.
De elementen van

$$B_n(\mathcal{A}) = \partial_{n+1}[A_{n+1}] \subset A_n$$

heten de n-dimensionale randen van $\mathcal{A}$.
Tenslotte is

$$H_n(\mathcal{A}) = Z_n(\mathcal{A})/B_n(\mathcal{A})$$

de n-dimensionale homologiegroep van $\mathcal{A}$.

7. Zij A een (additief geschreven) abelse groep.

De elementen $a_1, a_2, \dots, a_s$ van A heten lineair onafhankelijk indien uit

$$g_1a_1 + g_2a_3 + \dots + g_sa_s = 0$$

met gehele getallen g_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, volgt dat

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_s = 0.$$

Onder de rang $\rho(A)$ van A verstaan we het maximale aantal lineair onafhankelijke elementen in A.
Eventueel is $\rho(A) = \infty$.
In het volgende zullen we ons louter bezighouden met het geval dat $\rho(A) < \infty$.

Lemma: Als A een abelse groep is, en H is een ondergroep, dan geldt

$$\rho A = \rho H + \rho(A/H).$$

8. Zij $\mathcal{A}$ een semi-exacte rij als in 6.

Stelling (Euler-Poincaré).
Als $\mathcal{A}$ eindig is [d.w.z. $A_n = 0$ voor bijna alle n], dan geldt

$$\sum_n (-1)^n \rho(A_n) = \sum_n (-1)^n \rho(H_n(A))$$

$\rho(H_n(\mathcal{A}))$ heet het n-dimensionale Betti-getal van $\mathcal{A}$

$\chi(\mathcal{A}) = \sum_n (-1)^n \rho(H_n(\mathcal{A}))$ heet de Euler-Poincaré-karakteristiek van $\mathcal{A}$.

9. Bij een simpliciaal complex $\mathcal{C}$ behoort een eindige semi-exacte rij $\mathcal{L}$ van groepen L_k en homomorfismen ∂_k [zie §5].
Dan is $H_n(\mathcal{C}) = H_n(\mathcal{L})$.
We schrijven ook $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{L})$.

10. Zij $\mathcal{C}$ een simpliciaal complex in E_n.
Met $|\mathcal{C}|$ duiden we de deelruimte van E_n aan, die bestaat uit de vereniging van alle simplices van $\mathcal{C}$.

We formuleren nu de belangrijke

Stelling: Als $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ twee simpliciaal complexen zijn, zó, dat

$|\mathcal{C}_1| - |\mathcal{C}_2|$ homeomorf zijn

dan is

$H_n(\mathcal{C}_1) \cong H_n(\mathcal{C}_2)$ voor alle n.

Een bewijs van deze fundamentele stelling moet in het kader van deze voordracht achterwege blijven.

11. Voor twee simpliciaal complexen $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ zó, dat $|\mathcal{C}_1|$ en $|\mathcal{C}_2|$ homeomorf zijn, geldt dus i.h.b.

$$\chi(\mathcal{C}_1) = \chi(\mathcal{C}_2).$$

Is i.h.b. $\mathcal{C}$ een simpliciaal complex zó, dat $|\mathcal{C}|$ homeomorf is met een n-simplex, resp. de rand van een n-simplex, dan is

$$\chi(\mathcal{C}) = 1$$

resp.

$$\chi(\mathcal{C}) = 1 - (-1)^n.$$

12. <u>Stelling</u> (Euler):

Zij P de rand van een n-dimensionaal convex veelvlak in E_n.

Zij γ_i het aantal i-dimensionaal zijvlakken van P. Dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \gamma_i = 1 - (-1)^n.$$

<u>Literatuur</u>:

Alle boeken over algebraische topologie. We noemen er drie, waarvan de eerste twee betrekkelijk eenvoudig en klassiek zijn, terwijl de derde abstracter en moderner is.

In dit laatste vindt men ook een uitgebreidere literatuur-opgave:

[1] L.S. Pontryagin: Foundations of combinatorial topology.
[Graylock, 1952].

[2] A.H. Wallace: An introduction to algebraic topology.
[Pergamon, 1957].

[3] S.T. Hu: Homology theory: a first course in algebraic topology.
[Holden-Day, 1966].