STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950 - 005

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

INTUITIONISTISCHE WISKUNDE

15 maart 1950

Prof.dr. A. Heyting

1950

Rapport Z.W., 1950-005
15 Maart 1950.

Voordracht door Prof. Dr A. Heyting
in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

INTUITIONISTISCHE WISKUNDE

1. In de intuitionistische wiskunde beschouwen wij wiskundige systemen, die wij in onze geest opbouwen. De vraag, of zulk een systeem ook onafhankelijk van die opbouw bestaat, mag geen rol spelen in de bewijzen.

Wij beginnen met het stellen van een eenheid en een daarvan onderscheiden eenheid; de herhaling van dit proces levert de rij der natuurlijke getallen.

2. "Een getal met de eigenschap E bestaat" betekent: "Wij kunnen een getal met de eigenschap E construeren". "Een getal met de eigenschap E bestaat niet (kan niet bestaan)" betekent: "Uit de onderstelling, dat een getal met de eigenschap E gevonden zou zijn, kunnen wij een contradictie afleiden". Er is geen reden om aan te nemen, dat altijd een van die twee uitspraken juist is. Zelfs als de tweede onjuist is, mag men niet beweren, dat de eerste juist is.

3. De rekenkunde der gehele en meetbare getallen geeft geen moeilijkheden. De definitie van het begrip "reëel getal" moet een kleine wijziging ondergaan. Men kan ze bijv. als volgt geven. Onder een λ_k-interval verstaan wij een interval $(a/2^{k+1}, a+2/2^{k+1})$, a en k geheel. Een reëel getal is een onbepaald voort te zetten rij van λ-intervallen, waarvan elk binnen het voorgaande ligt. Twee reële getallen zijn gelijk $(\alpha=\beta)$ als binnen ieder interval van α een interval van β ligt: zij zijn van elkaar verwijderd $(\alpha \# \beta)$, als een interval van α en een van β buiten elkaar liggen.

Stelling 1. Twee reële getallen, die niet van elkaar verwijderd kunnen zijn, zijn gelijk.

Stelling 2. Uit $\alpha \# \beta$ volgt, dat voor ieder reëel getal γ óf $\alpha \# \gamma$, óf $\beta \# \gamma$.

De deling kan alleen gedefinieerd worden voor het geval, dat de deler van nul verwijderd is. Overigens gelden de gewone regels voor de hoofdbewerkingen. Als $\alpha \# 0$ en $\beta \# 0$, dan is $\alpha\beta \# 0$. Maar als $\alpha\beta = 0$, dan mag men niet zeggen, dat of $\alpha = 0$, of $\beta = 0$.

4. In de driehoeken ABC en DEF zij $a=1-p$, $b=1$, $c=1+p$, $d=1-q$, $e=1$, $f=1+q$. Hier is p de limiet van de getallenrij (p_n), waarin $p_n = 2^{-n}$ wanneer onder de eerste n decimalen van π geen drie opeenvolgende zevens voorkomen, maar $p_n = 2^{-k}$, als dit wel het geval is, en k het rangnummer van de laatste 7 uit het eerste drietal voorstelt. q is evenzo gedefinieerd, met dit verschil, dat in het laatste geval, als bovendien k oneven is, $q_n = -2^{-k}$ gesteld wordt. $a+c = d+f$, $ac = df$, dus hoek B = hoek D; ook is $b = d$, maar men mag niet beweren, dat $\triangle ABC \cong \triangle DEF$; wel, dat het onmogelijk is, dat zij niet congruent zijn.

5. De asrichtingen van de kegelsnede $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ worden bepaald uit $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2b}{a-c}$. Dit gaat, als $b \# 0$ of $a \# c$, maar niet in het volgende voorbeeld: $x^2 + y^2 + (px + ry)^2 = 1$, waarin p dezelfde betekenis heeft als onder 4, en r analoog gedefinieerd wordt met 8 in plaats van 7.

6. n lineaire vergelijkingen met n onbekenden kunnen met de regel van Cramer opgelost worden, als hun determinant $d \# 0$. Deze oplossing $(x_1 = a_1, \ldots\ldots, x_n = b_n)$ is de enige in verscherpte zin: Geldt voor minstens een index k, dat $b_k \# a_k$, dan is voor $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$ minstens een linkerlid van het corresponderende rechterlid verwijderd.

7. Deling door een veelterm is alleen uitvoerbaar, als de begincoefficient van 0 verwijderd is. De bepaling van de G.G.D. door deling is dus in het algemeen niet uitvoerbaar.

8. Een reeks met positieve termen, waarvan de deelsommen beperkt zijn, behoeft niet te convergeren, zelfs niet als men de convergentie als volgt negatief definieert: Er bestaat een getal s, zodat het voor ieder positief getal ε onmogelijk is, dat er geen n bestaat, zodat $|s - s_m| < \varepsilon$ voor $m > n$.

9. Sommige theorieën, zoals die der oneindige reeksen, vallen uiteen in een positieve en een negatieve theorie; meestal is de positieve de belangrijkste. Bij andere theorieën, bijv. die over de ontbinding in factoren van veeltermen over een willekeurig lichaam, bestaat alleen de negatieve vorm. Er zijn ook delen der wiskunde, die van intuitionistisch standpunt uit geheel opnieuw opgebouwd moeten worden, zoals de theorie der verzamelingen.
