

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 005

Voordracht in de serie Actualiteiten

J.H.B. Kemperman

24 februari 1951

Enige beschouwingen over de "random walk"



1951

Voordracht door J.H.B.Kemperman in de serie
Actualiteiten op 24 Februari 1951.

Enige beschouwingen over de "random walk"

Zij $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ een van de tijd t afhankelijke n -dimensionale stochastische variabele. Deze correspondeert met een aan het toeval onderworpen beweging van een deeltje ("wandelaar") W in de Euclidische ruimte E_n . We zullen aannemen, dat deze "random walk" (ook wel stochastisch proces genoemd) stochastisch definitief is, d.w.z. tot door de positie $\bar{x}$ op het tijdstip t voor elk tijdstip $t' \geq t$ de verdelingsfunctie van $\bar{x}(t')$ wordt bepaald. Onder de voorwaarde $\bar{x}(t) = \bar{x}$ zullen we de voorwaardelijke waarschijnlijkheid, dat simultaan geldt

$$(1) \quad x_k(t') \leq \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

aanduiden met $F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$. We zullen steeds aannemen, dat de functie $F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ continu is in t en t' . Wanneer we het stelsel ongelijkheden (1) kortweg schrijven als $\bar{x} \leq \bar{\xi}$, dan geldt in het bijzonder

$$F(t, \bar{x}; t, \bar{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{als } \bar{x} \leq \bar{\xi} \\ 0 & \text{als } \bar{x} \not\leq \bar{\xi}. \end{cases}$$

Verder volgt uit het stochastisch definitief zijn van de random walk voor elk drietal waarden $t < \sigma < t'$

$$(2) \quad F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \int_{E_n} F(\sigma, y; t', \bar{\xi}) d^n_y F(t, \bar{x}; \sigma, y).$$

Dit is de z.g. vergelijking van Chapman-Smoluchowski-Kolmogoroff.

Het stochastische proces heet homogeen in de tijd (resp. in de ruimte), wanneer $F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ niet van t en t' (resp. $\bar{x}$ en $\bar{\xi}$) afzonderlijk afhangt, doch alleen van het verschil $t' - t$ (resp. $\bar{\xi} - \bar{x}$). Het proces heet homogeen, wanneer het zowel in de tijd als in de ruimte homogeen is.

Voor een in de ruimte homogeen stochastisch proces stellen we

$$F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = F(t, t'; \bar{\xi} - \bar{x}).$$

Uit (2) volgt dan voor $t < \sigma < t'$

$$(3) \quad F(t, t', x) = \int_{E_n} F(\sigma, t', \bar{x} - \bar{y}) d^n F(t, \sigma, \bar{y}).$$

Stellen we nu

$$\varphi(t, t', z_1, \dots, z_n) = \int_{E_n} \exp(i \sum_{i=1}^n z_i x_i) d_{x_1} \dots d_{x_n} F(t, t', \bar{x})$$

1) Alle in dit rapport voorkomende functies en verzamelingen zullen Borel-meetbaar worden ondersteld.

of kortweg

$$\varphi(t, t', \bar{z}) = \int_{E_n} e^{i\bar{z}\bar{x}} d^n F(t, t', \bar{x}),$$

dan volgt uit (3) voor $t < \sigma < t'$

$$(4) \quad \varphi(t, t', \bar{z}) = \varphi(t, \sigma, \bar{z}) \varphi(\sigma, t', \bar{z}).$$

Indien het proces bovendien homogeen is in de tijd (en dus homogeen is), dan stellen we

$$F(t, t', \bar{x}) = F(t' - t, \bar{x})$$

en

$$(5) \quad \varphi(\sigma, \sigma + t, \bar{z}) = \varphi(t, \bar{z}) = \int_{E_n} e^{i\bar{z}\bar{x}} d^n F(t, \bar{x}).$$

Uit (4) volgt dan voor $t < \sigma < t'$

$$\varphi(t' - t, \bar{z}) = \varphi(\sigma - t, \bar{z}) \varphi(t' - \sigma, \bar{z})$$

met als algemene oplossing

$$(6) \quad \varphi(t, z) = e^{t\Lambda(z)},$$

daar immer $F(t, \bar{x})$ en dus $\varphi(t, \bar{z})$ een continue functie van t is. Formule (6) is zeer analoog aan de formule

$$\varphi_n(\bar{z}) = \varphi(\bar{z})^n$$

voor de karakteristieke functie van de som van n onafhankelijke stochastische variabelen, elk met eenzelfde karakteristieke functie $\varphi(\bar{z})$. Het essentiële verschil ligt in het feit, dat t een continue en n een discrete variabele is.

Een belangrijke vraag is nu met welke functies $\Lambda(\bar{z})$ een homogene (stochastisch definitieve) random walk overeenkomt. Voor de één-dimensionale random walk is deze vraag beantwoord door Kolmogoroff [2].

Stelling van Kolmogoroff¹⁾. Beschouw een homogene één-dimensionale "random walk" $F(t, x)$, waarvoor

$$\alpha_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(t, x)$$

in een zeker interval op de t -as begrensd is en waarvoor

$$\alpha_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(t, x)$$

eindig is voor elke $t > 0$. Onder deze voorwaarden kan de in (6) voorkomende functie $\Lambda(z)$ geschreven worden als

$$(7) \quad \Lambda(z) = im - \frac{1}{2} \sigma_0^2 z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izu} - 1 - izu}{u^2} d\Omega(u);$$

hierin zijn m en $\sigma_0 \geq 0$ reële constanten en is $\Omega(u)$ een begrensd monotoon niet afnemende functie, die ^{eenheids} begrensd is voor $x=0$. Omgekeerd bepa-

1) Zie ook Cramér [1] blz.91.

len de formules (5), (6) en (7) een homogene random walk, indien m , σ_0 en $\Omega(u)$ genoemde eigenschappen hebben.

Voorlopig beperken wij ons tot de één-dimensionale homogene random walk, waarvoor de condities van Kolmogoroff's stelling zijn vervuld. Indien $\Omega(u)$ een constante is, dan volgt uit (5), (6) en (7)

$$(8) \quad F(t, x) = \Phi\left(\frac{x - mt}{\sigma_0 \sqrt{t}}\right) \quad \text{als} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.$$

De termen $-im - \frac{1}{2} \sigma_0^2 z$ in (7) geven dus een normale verdeling als (additieve) bijdrage tot de random walk. Zonder de algemeenheid te schaden stellen wij voortaan $m = \sigma_0 = 0$.

We zullen nu veronderstellen¹⁾, dat de integraal

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\Omega(x)}{x^2}$$

convergeert voor zekere $\delta > 0$; (dit is b.v. het geval, wanneer $\Omega(x)$ constant is in een zekere omgeving van de oorsprong).

Dan convergeert de integraal

$$\int_{-\infty}^x \frac{d\Omega(x)}{x^k}$$

voor elke waarde x en voor elke waarde k met $0 \leq k \leq 2$.

Stel nu

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega(x)}{x^2}$$

en

$$\Pi(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^x \frac{d\Omega(x)}{x^2}.$$

De functie $\Pi(x)$ is dus een verdelingsfunctie. Het bijbehorende gemiddelde wordt gegeven door

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} x d\Pi(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega(x)}{x}.$$

Uit (7) volgt dan

$$\Lambda(z) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1 - izx) d\Pi(x)$$

(wegens $m = \sigma_0 = 0$), ofwel

$$\Lambda(z) = \lambda \left[-1 - isz + \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d\Pi(x) \right]$$

en uit (5) en (6) vinden we nu

1) De beschouwingen van blz. 3 en 4 zijn ontleend aan Segerdahl [1]. Men kan aantonen, dat de gemaakte beperking globaal gesproken equivalent is met de aanname, dat zeer kleine sprongen van het deeltje W met een zeer kleine waarschijnlijkheid optreden.

$$(9) \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d_x F(t, x - \lambda st) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d \Pi(x) \right]^n.$$

Zij $\Pi_n(x)$ ($n \geq 1$) de verdelingsfunctie van de som van n onafhankelijke stochastische variabelen, elk met de verdelingsfunctie $\Pi(x)$. Verder stellen wij

$$\begin{aligned} \Pi_0(x) &= 1 && \text{als } x \geq 0 \\ &= 0 && \text{als } x < 0. \end{aligned}$$

Dan volgt uit (9)

$$(10) \quad f(t, x - \lambda st) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Pi_n(x).$$

Voor kleine waarden t geldt dus asymptotisch

$$f(t, x - \lambda st) = (1 - \lambda t) \Pi_0(x) + \lambda t \Pi_1(x) + o(t^2).$$

In een klein tijdsinterval Δt kan de random walk dus als volgt worden beschreven.

1. Met een waarschijnlijkheid $1 - \lambda \Delta t$ blijft $x(t) - \lambda st$ constant.
2. Met een waarschijnlijkheid $\lambda \Delta t$ maakt $x(t) - \lambda st$ één sprong. Deze sprong is stochastisch verdeeld volgens de verdelingsfunctie $\Pi(x)$.
3. De overige gebeurtenissen (meer dan één sprong) hebben een totale waarschijnlijkheid $< C(\Delta t)^2$, waarin C een constante voorstelt.

Zonder de algemeenheid te schaden stellen wij voortaan $s=0$. Het homogene proces is reeds bepaald door het boven beschreven gedrag in een klein tijdsinterval. Immers, wanneer de kans op één sprong gedurende een klein tijdsinterval Δt gegeven wordt door

$$\lambda \Delta t + o((\Delta t)^2),$$

dan is het aantal sprongen in een eindig tijdsinterval $(\tau, \tau + t)$ volgens Poisson verdeeld. Een wel wordt de kans op precies n sprongen in dit interval gegeven door

$$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Onder de voorwaarde, dat in $(\tau, \tau + t)$ precies n sprongen plaats vinden, heeft $x(\tau + t) - x(\tau)$ de waarschijnlijkheidsverdeling $\Pi_n(x)$. De onvoorwaardelijke verdeling $F(t, x)$ van $x(\tau + t) - x(\tau)$ wordt dus gegeven door

$$(10) \quad F(t, x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Pi_n(x),$$

hetgeen juist formule (9) is ($s=0$).

We hebben aldus bewezen, dat de algemene één-dimensionale homogene random walk (welke de voorwaarden vervult van de stelling van Kolmogoroff) prongsgewijze geschiedt op een normale component van de vorm (8) en en "stroming" $x(t) = st$ na.

en random walk, waarbij geen continue bewegingen, maar alleen rusttoe-

en $\lambda < \infty$

stand of sprongen optreden, noemen wij discontinu en wij zullen ons voortaan tot dit discontinue geval beperken.

We beschouwen nu de volgende algemene discontinue random walk¹⁾ in E_n , welke stochastisch definit is. Indien het deeltje W op het tijdstip t in het punt $\bar{x}$ is, dan wordt de waarschijnlijkheid, dat een sprong plaats vindt in het kleine interval $(t, t + \Delta t)$ asymptotisch gegeven door $p(t, \bar{x}) \Delta t + o(\Delta t)$.

Hierin is $p(t, \bar{x})$ een bekende niet-negatieve functie, welke continu is in t . Indien in genoemd tijdsinterval een sprong optreedt, dan is de verdelingsfunctie van het eindpunt $\bar{\xi}$ van deze sprong asymptotisch gelijk aan een gegeven, in t continue, verdelingsfunctie $P(t, \bar{x}, \bar{\xi})$.

We zullen nu de op blz. 1 genoemde functie $F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ voor dit proces bepalen. Onder de voorwaarde $\bar{x}(t) = \bar{x}$ zij $\psi_n(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ ($n=0, 1, 2, \dots$) de voorwaardelijke waarschijnlijkheid, dat in het tijdsinterval (t, t') precies n sprongen plaats vinden en dat verder $\bar{x}(t') \leq \bar{\xi}$ geldt. Dan hebben wij

$$(11) \quad F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}).$$

De waarschijnlijkheid, dat een op het tijdstip t een in $\bar{x}$ zich bevindend deeltje gedurende het interval (t, t') geen sprong maakt (en dus in $\bar{x}$ blijft) wordt gegeven door

$$(12) \quad \exp \left(- \int_t^{t'} p(\sigma, \bar{x}) d\sigma \right) = q(t, t', \bar{x}).$$

Dus volgt

$$(13) \quad \psi_0(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) q(t, t', \bar{x}),$$

wanneer $\delta(\bar{x}, \bar{\xi})$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) &= 1 && \text{als } \bar{x} \leq \bar{\xi} \\ &= 0 && \text{als } \bar{x} > \bar{\xi}. \end{aligned}$$

We willen nu de functie $\psi_{n+1}(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ ($n=0, 1, 2, \dots$) uitdrukken in de functie $\psi_n(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$. Indien het deeltje W op het tijdstip t in $\bar{x}$ is, en gedurende het interval (t, t') door precies $n+1$ sprongen een punt van de verzameling $\bar{x}(t') \leq \bar{\xi}$ bereikt (de totale kans op een dergelijke gebeurtenis is $\psi_{n+1}(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$, dan is de eerste sprong gemaakt in een zeker klein interval $(\sigma, \sigma + d\sigma)$ met $t \leq \sigma < t'$. De waarschijnlijkheid, dat in het interval (t, σ) geen sprong wordt gemaakt, is gelijk aan $q(t, t', \sigma)$ en de kans, dat wel een sprong plaats

1) Een generalisatie van een random walk in E_1 gegeven door Feller [1].

vindt in het interval $(\sigma, \sigma + d\sigma)$ is gelijk aan $p(\sigma, \bar{x}) d\sigma$.

Na deze eerste sprong heeft $\bar{Y}$ een positie $\bar{y}$ met verdelingsfunctie $P(\sigma, \bar{x}, \bar{y})$. Tenslotte is de waarschijnlijkheid, dat $\bar{Y}$ op het tijdstip $\sigma + d\sigma$ een positie $\bar{y}$ heeft en gedurende $(\sigma + d\sigma, t')$ in precies n sprongen een punt bereikt van de verzameling $\bar{x}(t') \in \bar{\xi}$ is gelijk aan $\Psi_n(\sigma, \bar{y}; t', \bar{\xi}) + O(d\sigma)$. Bovenstaande redenering geeft de formule

$$(14) \quad \Psi_{n+1}(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \int_t^{t'} q(t, \sigma, \bar{x}) p(\sigma, \bar{x}) d\sigma \int_{E_n} \Psi_n(\sigma, \bar{y}; t', \bar{\xi}) d_y^n P(\sigma, \bar{x}, \bar{y})$$

($n=0, 1, 2, \dots$). De functies $\Psi_n(t, \bar{x}, t', \bar{\xi})$ ($n=0, 1, 2, \dots$) worden dus door (13) en (14) recursief gegeven en volgens (11) is nu ook $F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi})$ bekend.

In het geval, dat de beschouwde (discontinue) random walk homogeen is in de tijd, zijn de functies $p(t, \bar{x})$ en $P(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ van t onafhankelijk. We zullen nu het bijzondere geval beschouwen, dat bovendien $p(t, \bar{x})$ onafhankelijk is van $\bar{x}$. We stellen dan

$$p(t, \bar{x}) = \lambda \quad \text{en} \quad P(t, \bar{x}, \bar{\xi}) = P(\bar{x}, \bar{\xi}).$$

Formule (12) geeft nu

$$q(t, t', \bar{x}) = e^{-\lambda(t'-t)}$$

en dus gaan (13) en (14) over in

$$\Psi_0(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) e^{-\lambda(t'-t)}$$

en

$$\Psi_{n+1}(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \int_t^{t'} e^{-\lambda(\sigma-t)} p \, d\sigma \int_{E_n} \Psi_n(\sigma, \bar{y}; t', \bar{\xi}) d_y^n P(\bar{x}, \bar{y}).$$

Hieruit volgt (voor $t < t'$)

$$\Psi_n(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = \frac{\lambda^n (t'-t)^n}{n!} e^{-\lambda(t'-t)} P_n(\bar{x}, \bar{\xi}),$$

waarin de functies $P_n(\bar{x}, \bar{\xi})$ ($n=0, 1, 2, \dots$) voldoen aan

$$(15) \quad \begin{cases} P_0(\bar{x}, \bar{\xi}) = \delta(\bar{x}, \bar{\xi}); & P_1(\bar{x}, \bar{\xi}) = P(\bar{x}, \bar{\xi}) \\ P_{n+1}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \int_{E_n} P_n(\bar{y}, \bar{\xi}) d_y^n P(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases}$$

Formule (11) wordt nu

$$(16) \quad F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = e^{-\lambda(t'-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (t'-t)^n}{n!} P_n(\bar{x}, \bar{\xi}).$$

Achteraf bezien, is formule (16) evident. Immers

$$e^{-\lambda(t'-t)} \frac{\lambda^n(t'-t)^n}{n!}$$

is gelijk aan de kans op precies n sprongen in het interval (t, t') en verder heeft wegens (15) een in het punt $\bar{x}$ startend deeltje W na precies n sprongen een positie $\bar{\xi}$ met verdelingsfunctie $P_n(\bar{x}, \bar{\xi})$.

We zullen ons voortaan weer beperken tot het geval, dat de random walk homogeen is in tijd en ruimte. Dan stellen wij

$$F(t, \bar{x}; t', \bar{\xi}) = F(\bar{\xi} - \bar{x}) \quad \text{en} \quad P_n(\bar{x}, \bar{\xi}) = \prod_n(\bar{\xi} - \bar{x}).$$

en gaat formule (16) over in

$$(17) \quad F(t, \bar{\xi}) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \prod_n(\bar{\xi})$$

(met $t \geq 0$), welke formule een n -dimensionale generalisatie van (10) is.

De fundamentele identiteit van Wald.

We beschouwen voortaan de homogene n -dimensionale random walk, welke bepaald wordt door formule (17). Zij verder $\mathcal{G}$ een open, enkelvoudig samenhangende deelverzameling van de Euclidische ruimte E_n , welke de oorsprong bevat. We zullen aannemen, dat de positieve constante M zodanig te vinden is, dat voor elk tweetal in $\mathcal{G}$ gelegen punten $\bar{x}$ en $\bar{y}$ geldt $|x_1 - y_1| < M$. Betreffende de verdelingsfunctie $\prod_n(\xi)$ zullen wij veronderstellen, dat de positieve constante δ kan worden gevonden met

$$(18) \quad \varepsilon = \int_{x_i > \delta} d^n \prod(\bar{x}) > 0.$$

We interesseren ons voor de waarschijnlijkheid ρ , dat een op het tijdstip $t=0$ in de oorsprong O startend deeltje W gedurende de random walk een punt bereikt van het complement $A = E_n - \mathcal{G}$ van $\mathcal{G}$. We zullen aantonen dat geldt $\rho = 1$.

De waarschijnlijkheid, dat W gedurende het interval $(0, t)$ minder dan n stappen doet, is gelijk aan

$$e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\lambda^m t^m}{m!}$$

en nadert dus tot nul als $t \rightarrow +\infty$. Dus is er voor elk natuurlijk getal n een zekerheid, dat W ooit een n -de stap maakt. We interesseren ons voorlopig niet voor het tijdstip, waarop deze n -de stap wordt gedaan en laten daarom de tijd buiten beschouwing.

Zij onder de voorwaarde, dat W precies n stappen heeft gemaakt, Γ_n de voorwaardelijke waarschijnlijkheid dat het deeltje W de "rand" A nog niet heeft ontmoet. Opdat $\rho = 1$ is voldoende, dat de positieve constanten C en $\Theta < 1$ kunnen worden gevonden met

$$(19) \quad \Gamma_n < C \Theta^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Zij nu N een natuurlijk getal $\geq \frac{M}{\delta}$. Uit (18) volgt, dat een tussen de n -de en $(n+1)$ -de stap zich in $\mathcal{G}$ bevindend deeltje W (totale weer

schijnlijkheid σ_n) na de $(n+N)$ -de stap met een waarschijnlijkheid $\geq \varepsilon^N$ in A is gearriveerd.

Dus geldt:

$$\sigma_{n+N} \leq \sigma_n (1 - \varepsilon^N) \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

en hieruit volgt onmiddellijk (19) (kies $\theta = (1 - \varepsilon^N)^{\frac{1}{N}}$) en dus $\rho = 1$.

Zij nu $H_n(\bar{\xi})$ de waarschijnlijkheid, dat het (in 0 startend) deeltje W na precies n stappen zich in het ruimtedeel $\bar{x} \leq \bar{\xi}$ bevindt en tevoren de rand A niet heeft ontmoet. Dan geldt

$$(20) \quad H_0(\bar{\xi}) = \delta(0, \bar{\xi})$$

en

$$(21) \quad H_{n+1}(\bar{\xi}) = \int_{\mathcal{O}} \Pi(\bar{\xi} - \bar{y}) d^n H_n(\bar{y})$$

($n=0, 1, 2, \dots$). Uit de definitie van $H_n(\bar{\xi})$ volgt

$$(22) \quad \sigma_n = \int_{\mathcal{O}} d^n H_n(\bar{\xi})$$

en

$$(23) \quad p_n = \int_A d^n H_n(\bar{\xi}),$$

vanneer p_n de kans is, dat W na precies n stappen de rand A bereikt. Verder is $\Pi_n(\bar{\xi})$ gelijk aan de waarschijnlijkheid, dat het deeltje W zich na precies n stappen in het ruimtedeel $\bar{x} \leq \bar{\xi}$ bevindt (zonder verdere restricties) en hieruit volgt voor elke deelverzameling D van E_n

$$(24) \quad \int_D d^n H_n(\bar{\xi}) \leq \int_D d^n \Pi_n(\bar{\xi}).$$

Zij $(z_1, \dots, z_n) = \bar{z}$ een rij van n reële of complexe getallen, zodanig dat het positieve getal K kan worden gevonden met

$$(25) \quad \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^n z_i x_i\right) = \operatorname{Re}(\bar{z}\bar{x}) \leq K \text{ voor elk punt } \bar{x} \in \mathcal{O}.$$

We nemen verder aan, dat de volgende n-voudige integraal absoluut convergeert.

$$(26) \quad \Psi(\bar{z}) = \int_{E_n} e^{\bar{z}\bar{x}} d^n \Pi(x).$$

an volgt

$$(27) \quad \Psi(\bar{z})^n = \int_{E_n} e^{\bar{z}\bar{x}} d^n \Pi_n(\bar{x}) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

waarbij ook de integraal in het rechterlid van (27) absoluut convergeert. We vormen nu de functies

$$(28) \quad r_n(\bar{z}) = \int_A e^{\bar{z}\bar{\xi}} d^n H_n(\bar{\xi})$$

en

$$(29) \quad s_n(\bar{z}) = \int_{\mathcal{O}} e^{\bar{z}\bar{\xi}} d^n H_n(\bar{\xi}),$$

welke integralen wegens (24) eveneens absoluut convergeren.

We merken op, dat wegens (25) en (22) geldt

$$\begin{aligned} |s_n(\bar{z})| &\leq \int_{\mathcal{O}} \exp[\operatorname{Re}(\bar{z}\bar{\xi})] d^n H_n(\bar{\xi}) \\ &\leq e^K \int_{\mathcal{O}} d^n H_n(\bar{\xi}) = e^{K G_n} \end{aligned}$$

en uit (19) volgt dus

$$(30) \quad |s_n(\bar{z})| \leq c e^K \theta^n \quad (0 < \theta < 1).$$

Verder vinden wij uit (28), (29) en (21) voor $n \geq 0$

$$\begin{aligned} r_{n+1}(\bar{z}) + s_{n+1}(\bar{z}) &= \int_{E_n} e^{\bar{z}\bar{\xi}} d^{n+1} H_{n+1}(\bar{\xi}) = \\ &= \int_{E_n} e^{\bar{z}\bar{\xi}} \int_{\mathcal{O}} d_{\xi}^n \prod(\bar{\xi} - \bar{y}) d^n H_n(\bar{y}). \end{aligned}$$

Deze $2n$ -voudige integraal is absoluut convergent en de integraties naar $\bar{\xi}$ en $\bar{y}$ mogen dus worden verwisseld.

$$r_{n+1}(\bar{z}) + s_{n+1}(\bar{z}) = \int_{\mathcal{O}} e^{\bar{z}\bar{y}} d^n H_n(\bar{y}) \int_{E_n} e^{\bar{z}(\bar{\xi} - \bar{y})} d_{\xi}^n \prod(\bar{\xi} - \bar{y})$$

en uit (26) en (29) volgt nu voor $n=0,1,2,\dots$

$$(31) \quad r_{n+1}(\bar{z}) + s_{n+1}(\bar{z}) = \psi(\bar{z}) \cdot s_n(\bar{z}).$$

Uit (29) vinden wij

$$r_0(\bar{z}) = 0 \quad ; \quad s_0(\bar{z}) = 1$$

(het deeltje W start n.l. in het tot $\mathcal{O}$ behorend punt 0) en uit (31) concluderen wij dan voor $N=0,1,2,\dots$

$$(32) \quad \sum_{n=0}^N r_n(\bar{z}) \psi(\bar{z})^{-n} = 1 - s_N(\bar{z}) \psi(\bar{z})^{-N}$$

mits $\psi(\bar{z}) \neq 0$. Tenslotte volgt uit (30) en (32) onder de aanname

$$(33) \quad |\psi(\bar{z})| \geq 1,$$

dat

$$(34) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\bar{z}) \psi(\bar{z})^{-n} = 1,$$

waarin het linkerlid absoluut convergent is, zoals met (31) en (30) kan worden bewezen. Dit is de n-dimensionale generalisatie van de bekende fundamentele identiteit van Wald (zie Wald [1] blz. 286). We gaan nu niet nader in op de betekenis en het nut van deze identiteit, maar zullen trachten voor de algemene homogene random walk een analogon van (34) te vinden.

We interesseren ons hier niet voor het aantal afgelegde stappen; in plaats van $H_n(\bar{\xi})$ is hier veeleer de volgende functie $A(t, \bar{\xi})$ van belang. Zij $A(t, \bar{\xi})$ de waarschijnlijkheid, dat W gedurende het tijdsinterval $(0, t)$ voortdurend in $\mathcal{O}$ is, en in het interval $(t, t+dt)$ een sprong maakt, welke W brengt in de verzameling $\bar{x} \leq \bar{\xi}$. Dat de functie $A(t, \bar{\xi})$ van bijzonder belang is blijkt uit het feit, dat

$$(35) \quad \rho(t) dt = dt \int d^n A(t, \bar{\xi})$$

gelijk is aan de waarschijnlijkheid, dat het deeltje W in het tijdsinterval $(t, t+dt)$ voor het eerst de rand A bereikt.

Beschouw de gebeurtenis, waarbij

1. Het deeltje W in het tijdsinterval $(0, t)$ precies n sprongen maakt.
2. W gedurende het gehele interval $(0, t)$ binnen $\mathcal{O}$ blijft.
3. W in het interval $(t, t+dt)$ een sprong maakt, welke hem brengt in een punt van de verzameling $\bar{x} \leq \bar{\xi}$.

Zij $A_n(t, \bar{\xi})$ de waarschijnlijkheid van deze gebeurtenis. Dan volgt vooreerst uit de definitie van $A(t, \bar{\xi})$

$$(36) \quad A(t, \bar{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, \bar{\xi}).$$

Verder is de waarschijnlijkheid, dat in $(0, t)$ precies n sprongen plaats vinden gelijk aan $e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$.

Uit de definitie van $H_n(\bar{\xi})$ volgt nu gemakkelijk

$$A_n(t, \bar{\xi}) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \int_{\mathcal{O}} \prod(\bar{\xi} - \bar{y}) d^n H_n(\bar{y})$$

hetgeen wegens (21) equivalent is met

$$(37) \quad A_n(t, \bar{\xi}) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} H_{n+1}(\bar{\xi}).$$

Zij nu $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$ weer een reële of complexe vector, waarvoor (25) geldt en waarvoor verder de integraal (26) absoluut convergeert. Ten slotte nemen wij aan, dat geldt

$$(38) \quad \operatorname{Re} [\psi(\bar{z})] \geq 1$$

(de laatste voorwaarde sluit (33) in). Dan geldt, zoals we bewezen hebben, de fundamentele identiteit

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(\bar{z}) \psi(\bar{z})^{-n} = 1,$$

welke wegens $\operatorname{Re} [\psi(\bar{z})] \geq 1 > 0$ geschreven kan worden als

$$(39) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n(\bar{z}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t \psi(\bar{z})} dt = 1.$$

De laatste som-integraal is absoluut convergent. Immers wegens (30) en (31) geldt de ongelijkheid

$$(40) \quad |r_n(\bar{z})| \leq c e^K \theta^{n-1} (\theta + |\psi(\bar{z})|),$$

terwijl wegens (38)

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp[-\lambda t \operatorname{Re}(\psi(\bar{z}))] dt = [\operatorname{Re} \psi(\bar{z})]^{-n} \leq 1.$$

We mogen dus in (39) het som- en integratieteken verwisselen. Dan volgt

$$(41) \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda t \psi(\bar{z})} e^{\lambda t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} r_{n+1}(\bar{z}) \right] dt = 1$$

(uit (40) blijkt, dat de som onder het integratieteken absoluut convergent is). Nu geldt wegens (28) en (37)

$$(42) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} r_{n+1}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A e^{\bar{z} \bar{\xi}} d^n A_n(t, \bar{\xi}).$$

De som-integraal in het rechterlid is absoluut convergent.

Immers, zij $\bar{\xi} = \operatorname{Re}(\bar{z})$, dan volgt

$$\begin{aligned} \left| \int_A e^{\bar{z} \bar{\xi}} d^n A_n(t, \bar{\xi}) \right| &\leq \int_A e^{\bar{\xi} \bar{\xi}} d^n A_n(t, \bar{\xi}) \\ &\leq \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} r_{n+1}(\bar{\xi}). \end{aligned}$$

Nu is, zoals wij hebben verondersteld, de integraal (26) absoluut convergent d.w.z. zij blijft convergent, indien $\bar{z}$ door $\bar{\xi}$ wordt vervangen. Dus bij vervanging van $\bar{z}$ door $\bar{\xi}$ hebben de formules (28) en (29) zin en gelden de formules (30) en (31) en dus (40). Dan volgt

$$\int_A e^{\bar{\xi} \bar{\xi}} d^n A_n(t, \bar{\xi}) \leq \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} c e^K \theta^n (\theta + \psi(\bar{\xi}))$$

en inderdaad is de som-integraal in het rechterlid van (42) absoluut convergent. Aldaar mogen wij dus het som- en integratieteken verwisselen en vinden dan wegens (36)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} r_{n+1}(\bar{z}) = \int_A e^{\bar{z} \bar{\xi}} d^n A(t, \bar{\xi}).$$

Uit (41) volgt nu

$$(43) \quad \int_0^{\infty} \exp[\lambda t(1 - \psi(\bar{z}))] dt \int_A e^{\bar{z} \bar{\xi}} d^n A(t, \bar{\xi}) = 1$$

Dit is de gezochte fundamentele identiteit voor de homogene random walk.

De nauwkeurige betekenis van de in (43) voorkomende functie $A(t, \bar{\xi})$ blijkt direct uit de volgende eigenschap, welke direct uit de vroeger gegeven definitie van $A(t, \bar{\xi})$ voortvloeit. Zij D een deelverzameling van A , dan is

$$dt \int_D d^n A(t, \bar{\xi})$$

gelijk aan de waarschijnlijkheid, dat het in O startend deeltje W de rand A het eerst ontmoet in het tijdsinterval $(t, t+dt)$ en wel juist in een punt van D .

We zullen nu een toepassing van (43) geven op een random walk in E_1 . Zij $\mathcal{O}$ het interval $-a < x < b$ ($a > 0$, $b > 0$). We nemen aan, dat de integraal

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} d\pi(x)$$

voor alle reële waarden z convergeert. Verder veronderstellen wij

$$(44) \quad \psi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\pi(x) < 0$$

en

$$(45) \quad 1 - \pi(\delta) > 0$$

voor zekere $\delta > 0$. Dan geldt wegens (45) voor reële waarden z

$$\psi''(z) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\pi(x) > 0$$

en

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \psi(z) = +\infty.$$

Mede wegens $\psi(0) = 1$ en (44) volgt nu, dat er precies één reëel getal $h > 0$ bestaat met $\psi(h) = 1$. De (toegelaten) toepassing van (43) voor $z = h$ geeft nu

$$(46) \quad \int_0^{\infty} dt \int_A e^{h\xi} dA(t, \xi) = 1.$$

In de veronderstelling, dat de variantie

$$(47) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\pi(x)$$

klein is, zal bij de eerste ontmoeting van W met A (bestaande uit de intervallen $x \leq -a$ en $x \geq b$) de afstand tot een der grenspunten $-a$ of $+b$ met grote waarschijnlijkheid vrij klein zijn. In dit geval mogen wij dus (46) in goede benadering vervangen door

$$(48) \quad \int_0^{\infty} [e^{hb} \rho_1(t) + e^{-ha} \rho_2(t)] dt = 1.$$

Hierin is

$$\rho_1(t) = \int_{b-}^{\infty} dA(t, \xi) \quad \text{en} \quad \rho_2(t) = \int_{-\infty}^{-a} dA(t, \xi),$$

en wel is $\rho_1(t) dt$ (resp. $\rho_2(t) dt$) gelijk aan de kans, dat W de rand A voor het eerst ontmoet gedurende het tijdsinterval $(t, t+dt)$ en wel aan de bovenrand $x \geq b$ (resp. aan de benedenrand $x \leq -a$). Uit (48) volgt

$$(49) \quad e^{hb} \rho_1 + e^{-ha} \rho_2 = 1,$$

waarbij ρ_1 de kans is, dat W de rand A voor het eerst ontmoet in een punt van de bovenrand en waarbij ρ_2 de kans is dat W de rand A voor het eerst ontmoet in een punt van de benedenrand. Wegens $\rho_1 + \rho_2 = \rho = 1$ volgt uit (49)

$$(50) \quad \rho_1 = \frac{1 - e^{-ha}}{e^{hb} - e^{-ha}}; \quad \rho_2 = \frac{e^{hb} - 1}{e^{hb} - e^{-ha}},$$

welke formules in zeer goede benadering gelden, als de variantie (47) klein is t.o.v. de breedte $a+b$ van het interval O_f .

In de limiet $a \rightarrow \infty$ volgt uit (50) $\rho_2 = 0$ en

$$(51) \quad \rho_1 = e^{-hb},$$

welke formule zeer belangrijk is in de ruïneringstheorie.

Literatuur.

- H.Cramér [1], Random variables and probability distributions, Cambridge 1937.
- A.Kolmogoroff [1], Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104 (1931), 415-458.
- A.Kolmogoroff [2], Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, Rend.R. Ac. Lincei (6) 15 (1932), 805-808 en 866-869.
- W.Feller, [1], Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann. 113 (1936), 113-160.
- C.O.Segerdahl [1], On homogeneous random processes and collective risk theory, Thesis, Uppsala 1939.
- A.Wald [1], On cumulative sums of random variables, Ann.Math. Stat. 15 (1944), 283-296.