STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW-005

Schema Theorie Matrixfuncties

N.G. de Bruijn

1955

Rapport ZW 1955-005

April 1955

Schema Theorie Matrixfuncties

door

N.G. de Bruijn.

Def. 1. MR_n = ruimte van alle complexe n x n matrices. Gebruikelijke topologie.

MR_n^* = verz. der niet-singuliere matrices uit MR_n.

Def. 2. $A \in MR_n$ heet diagonaal (notatie $A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$) als in de hoofddiagonaal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ staan, en daarbuiten nullen. De eenheidsmatrix is aangeduid door I.

Def. 3. A heet triangulair als onder de hoofddiagonaal slechts nullen staan.

A heet supertriangulair als ook de hoofddiagonaal nul is.

Def. 4. Als $\nu_1 + \ldots + \nu_s = n$ een partitie van n is, dan zeggen wij dat A het type $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ heeft, wanneer A s verschillende eigenwaarden heeft, resp. met multipliciteiten $\nu_1, \ldots, \nu_s$. In het symbool $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ is de volgorde der ν's irrelevant.

Zijn α en β typen, dan heet $\alpha < \beta$ als α uit β ontstaat door hier en daar ν's samen te nemen: b.v. $(2,2,3) < (2,1,1,1,2)$.

Wij gebruiken ook het symbool $\leq$

Def. 5. A heet niet-critiek, als A het type $(1,1,\ldots,1)$ heeft (d.w.z. alle eigenwaarden verschillend). In alle andere gevallen heet A critiek.

Def. 6. Is $A \in MR_n$, $X \in MR_n^*$, dan is A^X gedefinieerd door $X^{-1}AX$. Dus $(A^X)^Y = A^{XY}$.

St. 1. Is A niet-critiek, dan volgt uit $A^X = A^Y$, dat $X = DY$, waarin D diagonaal en niet singulier is, en omgekeerd. Is A critiek dan zijn er niet-diagonale matrices X met $A^X = A$.

Def. 7. Zij G een gebied in MR_n. $A_1 \in G$ en $A_2 \in G$ heten geconjugeerd in G, als er een continue afb. van $[0,1]$ in MR_n^* bestaat (aangeduid door $X(t)$), zó dat

$$A_1^{X(t)} \in G \ (0 \leq t \leq 1), \quad A_1^{X(0)} = A_1, \quad A_1^{X(1)} = A_2.$$

Def. 8. Een polynoom is een functie van de matrixvariabele Z, gegeven door een formule van de vorm:

$$P(Z) = c_0 I + c_1 Z + \ldots + c_N Z^N,$$

waarin de c's scalair en constant zijn.

Def. 9. Zij G een gebied in MR_n, F een matrixfunctie op G (d.i. een afb. van G in MR_n). F heet sterk analytisch in G, als er een rij polynomen $\{P_k(Z)\}$ is die in elk compact deel van G uniform naar F convergeert.

Def. 10. F heet analytisch in G, als er bij elk punt van G een omgeving is waarin F sterk analytisch is. F heet analytisch in A, als F analytisch is in een omgeving van A.

St. 2. G en H gebieden van MR_n. F_1 en F_2 analytisch in G resp. H. Verder wordt G door F_1 in H afgebeeld. Dan is $F_2(F_1(Z))$ analytisch in G.

St. 3. A_1 en A_2 geconjugeerd in G, X(t) de functie uit def. 7. F analytisch in G. Dan is

$$F(A_2) = F(A_1)^{X(1)}.$$

St. 4. P(Z) polynoom, dan $P(A) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P(\lambda)}{\lambda I - A}\, d\lambda$,

waarbij in positieve zin om alle eigenwaarden van A heen wordt geïntegreerd.

St. 5. A eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ met multipliciteiten $\nu_1, \dots, \nu_s$. Zij F analytisch in A. Dan is er een open verzameling S in het complexe vlak, die $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ bevat, en daarin een analytische functie f, zodanig dat voor alle Z in een zekere omgeving van A geldt

$$(1)\quad F(Z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} \frac{f(\lambda)}{\lambda I - Z}\, d\lambda \quad (W_j = \text{kring om } \lambda_j).$$

De functie $f(\lambda)$ is in zekere omgevingen van $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ eenduidig bepaald. Is $P_k(Z) \rightrightarrows F(Z)$ in een omgeving van A, dan is ook $P_k(\lambda) \rightrightarrows f(\lambda)$ in zekere omgevingen van $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Is Z voldoende dicht bij A, en is

$$Z = ([\zeta_1, \dots, \zeta_s] + K)^X \qquad (\text{K superdiagonaal}),$$

dan is

$$F(Z) = ([f(\zeta_1), \dots, f(\zeta_s)] + K_1)^X \; (K_1 \text{ superdiagonaal}).$$

Opm.: f is analytisch in elk deelgebied van S, doch deze verschillende functietakken behoeven niet analytisch samen te hangen.

St. 6. $\frac{1}{\lambda_0 I - Z}$ is een analytische functie van Z voor alle Z waarvan λ_0 geen eigenwaarde is.

St. 7 $G_1,\ldots,G_s$ disjuncte gebieden in complexe vlak. $f(\lambda)$ analytisch in elk dezer G's. Laat $\mathcal{K}(G_1^{\nu_1},\ldots,G_s^{\nu_s})$ de collectie zijn van alle matrices die ν_j eigenwaarden in G_j hebben $(j = 1,\ldots,s)$. Definieer de functie $F(Z)$ in $\mathcal{K}$ door (1) (st. 5; voor elke j loopt W_j nu in G_j om de in G_j gelegen eigenwaarden van Z). Dan is $F(Z)$ analytisch in $\mathcal{K}$.

Is $A \in \mathcal{K}$, en $A = ([\alpha_1,\ldots,\alpha_n] + N)^X$, waarin N nilpotent is en verwisselbaar met $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$, dan is

$$F(A) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[f^{(j)}(\alpha_1),\ldots, f^{(j)}(\alpha_n)\right] N^j / j\,!$$

St. 8. Is $F(Z)$ analytisch in een gebied, dan is daar

$$F(Z) = c_0(Z)I + c_1(Z)Z + \ldots + c_{n-1}(Z)Z^{n-1},$$

waarin de c's niet-constante scalairen zijn.

Het type van $F(Z)$ is $\leq$ het type van Z.

Def. 11. Block in MR_n. Laat gegeven zijn n disjuncte gebieden $G_1,\ldots,G_n$ in complexe vlak, en een samenhangend deel C van MR_n^*. Dan heet de verzameling $\mathcal{B}(G_1,\ldots,G_n;C)$, bestaande uit alle

$$[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]^X \qquad (\lambda_1\in G_1,\ldots,\lambda_n\in G_n,\ X\in C)$$

een block. De open verzameling $S(\mathcal{B}) = G_1 + \ldots + G_n$ heet het spectrum van het block.

St. 9. Is het block $\mathcal{B}$ gegeven, dan is $S(\mathcal{B})$ eenduidig bepaald. Bij elke rangschikking $G_1,\ldots,G_n$ van de samenhangende componenten van $S(\mathcal{B})$ is een C te vinden, zó dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G_1,\ldots,G_n,C)$. Bij elke $A\in\mathcal{B}$ is dan de X vastgelegd op een diagonale linksfactor na (st. 1); deze kan, daar C samenhangend moet zijn, echter niet overal willekeurig gekozen worden.

St. 10. Elk block is een gebied in MR_n.

St. 11. $A\in MR_n$, O omgeving van A, A niet-critiek. Dan is er een block $\mathcal{B}$ met $A\in\mathcal{B}\subset O$.

St. 12. Zijn $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ blocks, en ligt A in hun doorsnede, dan bevat die doorsnede ook een block dat A bevat (de doorsnede behoeft zelf geen block te zijn).

St. 13. Laat $\mathcal{B}$ een block zijn in MR_n, en laat F analytisch zijn in $\mathcal{B}$. Dan is er een in $S(\mathcal{B})$ eenduidig bepaalde analytische functie f zó dat voor elke $A\in\mathcal{B}$ geldt, dat bij elke representatie

$$A = [\lambda_1,\ldots,\lambda_n]^X$$

geldt $$F(A) = [f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)]^X.$$

F en f bepalen elkaar eenduidig.

St. 14. Laat F het block $\mathfrak{B}$ uit MR_n ééneenduidig afbeelden op de verzameling $\mathfrak{B}'$ van MR_n. Dan is $\mathfrak{B}'$ een block (uit 2^e deel van st. 1 volgt dat $\mathfrak{B}'$ geen critieke punten bevat); de inverse afbeelding F_1 is analytisch in $\mathfrak{B}'$. De volgens st. 13 bij F behorende functie f beeldt $S(\mathfrak{B})$ conform af op $S(\mathfrak{B}')$. De bij F_1 behorende functie f_1 is de inverse van f.

Def. 12. Een <u>analytic matrix manifold</u> (MM) is een samenhangende Hausdorff-ruimte M met een klasse van gelijkwaardige systemen van uniformiserende parameters. Een uniformiserende parameter is een topologische afbeelding van een gebied van M op een gebied van MR_n. Een systeem van uniformiserende parameters is een dusdanige collectie, dat 1^e elk punt van M in het definitiegebied van minstens één uniformiserende parameter ligt, en 2^e zijn de uniformiserende parameters φ en ψ beide in P gedefinieerd, dan is er een in een omgeving van $\varphi(P)$ gedefinieerde analytische functie F zó dat $F(\varphi(Q)) = \psi(Q)$ voor alle Q in een omgeving van P. Twee systemen heten gelijkwaardig als ze samen weer een systeem vormen.

Een in een gebied G van M gedefinieerde afbeelding F van G in MR_n heet analytisch als er bij elke $P \in G$ een uniformiserende parameter φ is, gedefinieerd in een omgeving van P en gekozen uit één der gegeven systemen, zó dat in een omgeving van Q $F(Q)$ een analytische functie van $\varphi(Q)$ is.

St. 15. Zij Σ een verzameling. Bij elke $\sigma \in \Sigma$ zij gegeven een gebied G_σ uit MR_n. In de collectie van alle paren (G_σ, A) $(\sigma \in \Sigma,\ A \in G_\sigma)$ zij een equivalentie relatie gegeven, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. reflexief, symmetrisch, transitief.

2. Is $(G_\sigma, A) \sim (G_\tau, A_1)$, dan is er een omgeving O $(A \in O \subset G_\sigma)$ en daarop een analytische functie F, zó dat voor alle $B \in O$ geldt $(G_\sigma, B) \sim (G_\tau, F(B))$, terwijl $F(A) = A_1$.

3. Uit $(G_\sigma, A) \sim (G_\sigma, B)$ volgt $A = B$.

4a. Is (G_σ, A) niet equivalent met (G_τ, A_1), dan zijn er omgevingen O en O_1 $(A \in O \subset G_\sigma,\ A_1 \in O_1 \subset G_\tau)$ zo dat voor alle $B \in O$, $B_1 \in O_1$ geldt dat (G_σ, B) en (G_τ, B_1) niet equivalent zijn.

4b. (gelijkwaardig met 4a) Is $\sigma \in \Sigma, \tau \in \Sigma$, en is een rij $A, A_1, A_2, \ldots$ van punten uit G_σ gegeven en een rij $B, B_1, B_2, \ldots$ uit G_τ, zó dat $(G_\sigma, A_k) \sim (G_\tau, B_k)$ $(k = 1,2,\ldots)$ en is $A_k \to A$, $B_k \to B$, dan is ook $(G_\sigma, A) \sim (G_\tau, B)$.

5. Zijn (G_σ, A) en (G_τ, B) paren uit de collectie, dan zijn er rijen $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m = \tau$ (alle uit Σ), $A = A_0, A_1, \ldots, A_m$ $(A_j \in G_{\sigma_j})$, $B_0, \ldots, B_m = B$ $(B_j \in G_{\sigma_j})$ met $(G_{\sigma_{j-1}}, B_{j-1}) \sim (G_{\sigma_j}, A_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Laat M de collectie zijn van alle klassen van equivalente paren. Een deel M_1 van M heet open als er bij elk punt van M_1 een paar (G_σ, A) uit de door dat punt aangewezen klasse is te vinden, zó dat er een omgeving O ($A \in O \subset G_\sigma$) bestaat met de eigenschap dat alle klassen (G_σ, B) ($B \in O$) eveneens tot M behoren. Kies als een systeem van uniformiserende parameters de afbeeldingen $\varphi_\sigma (\sigma \in \Sigma)$, gedefinieerd door

$$\varphi_\sigma \{(G_\sigma, A)\} = A \qquad (A \in G_\sigma).$$

Bewering: M is, met het hier aangegeven systeem, een analytic matrix manifold.

St.16. Is G een gebied in MR_n, dan is het slechts uit de identieke afbeelding bestaande systeem een systeem van uniformiserende parameters, en G is daarbij een MM.

Def.13. Zijn M en M_1 beide MM's, en is er een éénéénduidige afbeelding zó dat elke uniformiserende parameter op M analytisch is op M_1 en elke uniformiserende parameter op M_1 analytisch is op M, dan heten M en M_1 isomorph.

Def.14. Een afbeelding van M in M_1 heet homeomorph, als elke uniformiserende parameter van M_1 een analytische functie op M is.
Opmerking. Het is niet noodzakelijk, dat hierbij open verzamelingen in open verzamelingen overgaan. Voorbeeld: $M=M_1=MR_n$, $F(A)=A^2-A$. De matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ treden voor geen enkele a als beeld op.

St.17. Is M een MM, en $P \in M$, φ en ψ uniformiserende parameters in P, dan hebben $\varphi(P)$ en $\psi(P)$ hetzelfde type (St.8). Is $\varphi(P)$ diagonaal resp. triangulair, symmetrisch, dan $\psi(P)$ ook.

Def.15. Type van een punt P van M = type van $\varphi(P)$.
P heet kritiek resp. diagonaal, triangulair, symmetrisch, als $\varphi(P)$ dat is.

St.18. De verzameling der niet-critieke punten van een MM is open en overal dicht.

Def.16. Een samenhangend deel $\mathfrak{F}$ van een MM heet een fiber, als er bij elke $P \in \mathfrak{F}$ een omgeving O van P is met daarop een uniformiserende parameter φ, zó dat $Q_1 \in (\mathfrak{F} \cap O)$, $Q_2 \in (\mathfrak{F} \cap O) \Rightarrow \varphi(Q_1)$ en $\varphi(Q_2)$ geconjugeerd in $\varphi(\mathfrak{F})$.
De definitie is onafhankelijk van de keuze van φ (zie St.3).

Def.17. Een verzameling $\mathfrak{B} \subset M$ heet een block als er een analytische functie op $\mathfrak{B}$ is, die $\mathfrak{B}$ éénéénduidig op een block van MR_n afbeeldt.

St.19. Block op M bevat geen critieke punten. Elk niet-critiek punt is bevat in een block. Hebben de blocks $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ een punt P gemeen, dan is er een block $\mathfrak{B} \ni P$ dat in de doorsnede ligt. Is een block $\mathfrak{B} \in M$ éénéénduidig analytisch afgebeeld op een block $\mathfrak{B}'$ van MR_n, dan is elk deelblok van $\mathfrak{B}'$ het beeld van een deelblock van $\mathfrak{B}$.

St.20. Zijn P en Q niet critieke punten in een gebied G van M, dan is er een continue kromme van P naar Q, die in G verloopt en geen critieke punten bevat.

Def.18. M^- is datgene wat uit M ontstaat door de critieke punten weg te nemen, en de uniformiserende parameters tot de niet-critieke punten te beperken.

St.21. M^- is een samenhangend open deel van M, en dus weer een MM.

Def.19. <u>Spectral manifold</u> van M^-.

Zij Σ een verzameling; kies bij elke $\sigma \in \Sigma$ een block $\mathfrak{B}_\sigma$ uit M^-, zó dat M^- door deze blocks geheel wordt overdekt. Verder kiezen we bij elke $\mathfrak{B}_\sigma$ een éénéénduidige afbeelding φ_σ van $\mathfrak{B}_\sigma$ op een block $\mathfrak{B}'_\sigma$ van MR_n. $S(\mathfrak{B}'_\sigma)$, het spectrum van $\mathfrak{B}'_\sigma$, korten we af tot V_σ.

Beschouw de collectie van alle paren $(V_\sigma, z)(\sigma \in \Sigma, z \in V_\sigma)$. Definieer equivalentie

$$(V_\sigma, z) \sim (V_\tau, w),$$

zodra er een punt $P \in M$ is met $P \in \mathfrak{B}_\sigma, P \in \mathfrak{B}_\tau$, z en w eigenwaarden van $\varphi_\sigma(P)$ resp. $\varphi_\tau(P)$, terwijl $w=f(z)$. Hierbij is f de functie die volgens St.5 (of St.13) met F correspondeert, een F is de in een omgeving van $\varphi_\sigma(P)$ analytische functie die voldoet aan $F(\varphi_\sigma(Q)) = \varphi_\tau(Q)$ (Q in omgeving van P).

Noem nu een klasse van equivalente paren een punt van SM, definieer omgevingen en uniformiserende parameters als in St.15 (pas St.15 toe met n=1). Zo ontstaat een <u>analytic manifold</u>, i.h.a. niet samenhangend (aan de 5e eis van St.15 is niet steeds voldaan).

St.22. SM is onafhankelijk van de keuze der $\mathfrak{B}_\sigma$'s en der φ_σ's.

Def.20. Bij elke $P \in M^-$ behoort een verzameling van n punten van SM (n.l. de klassen gerepresenteerd door (V_σ, z_j), waarin $z_1, \dots, z_n$ de eigenwaarden van $\varphi_\sigma(P)$ zijn). Deze n punten vormen het z.g. spectrum van P.

St.23. Er zijn getallen $\nu_1, \dots, \nu_s$ $(\nu_1 + \dots + \nu_s = n)$ met de volgende eigenschap: SM bestaat uit s samenhangende delen $S_1, \dots, S_s$. Voor elke $P \in M^-$ bestaat het spectrum uit ν_1 punten van S_1, ν_2 punten van $S_2, \dots$.

Def.21 . Zijn $u_1, \dots, u_n$ onbepaalden, is $\pi(1), \dots, \pi(n)$ een permutatie van $1, \dots, n$, en is $X \in MR_n^*$, dan heet $[u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}]^X$ een normaalvormsymbool.

Twee met dezelfde u's gevormde symbolen heten equivalent:

$$[u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)}]^X \sim [u_{\varrho(1)},\dots,u_{\varrho(n)}]^Y$$

als $XY^{-1} = DR$, waarin D diagonaal is en R de permutatiematrix gedefinieerd door $r_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$, waar $\sigma = \pi^{-1}\varrho$. M.a.w., als in het geval dat de u's verschillende complexe getallen zijn, de hierboven aangeduide matrices identiek zijn.

Def.22. Is $P \in M^-$, $\sigma \in \Sigma$ (zie Def.19), $z_1,\dots,z_n$ een rangschikking van het spectrum van $\varphi_\sigma(P)$, en zijn $P_1,\dots,P_n$ de respectievelijk door $(V_\sigma, z_1),\dots,(V_\sigma, z_n)$ gerepresenteerde punten van M^-, en is $\varphi_\sigma(P) = [z_1,\dots,z_n]^X$, dan heet $[P_1,\dots,P_n]^X$ een normaalvorm van P.

St.24. Alle normaalvormen van P zijn onderling equivalent.

St.25. Is F analytisch op de gehele M^-, dan is er een analytische functie f op de SM van M^-, zó dat voor elk punt P van M^- geldt

$$[P_1,\dots,P_n]^X \text{ normaalvorm van } P \Rightarrow F(P) = [f(P_1),\dots,f(P_n)]^X.$$

Def.23. $(\nu_1,\dots,\nu_s)$ heet het type van M. Het symbool $S_1^{\nu_1}\dots S_s^{\nu_s}$ heet de spectral manifold van M (volgorde irrelevant).

Def.24. Laat S een (niet noodzakelijk samenhangende) complex manifold zijn. We definiëren nu het (niet noodzakelijk samenhangend) MM dat door S wordt voorgebracht, en dat door M(S) wordt aangegeven.

Beschouw een collectie $\{K_\sigma\}$ $(\sigma \in \Sigma)$ van open verzamelingen op S, zodanig dat elke K_σ conform in het z-vlak kan worden afgebeeld, en zó dat elk n-tal punten van S in minstens een K_σ is bevat. (De existentie van deze K_σ's blijkt als volgt: Zijn $\omega_1,\dots,\omega_n$ disjuncte gebieden van S, die alle op begrensde gebieden van het z-vlak conform kunnen worden afgebeeld, dan kan hun vereniging conform op een stel disjuncte gebieden worden afgebeeld). Bij elke K_σ is een conforme afbeelding φ_σ gekozen; $\varphi_\sigma(K_\sigma) = L_\sigma$. De inverse afbeelding heet η_σ. Zij $\mathcal{H}_\sigma$ de verzameling van alle matrices waarvan het spectrum tot L_σ behoort. $\mathcal{H}_\sigma$ valt uiteen in samenhangende componenten $\mathcal{H}_\sigma^{(1)}, \mathcal{H}_\sigma^{(2)},\dots$

Beschouw nu alle paren $(\mathcal{H}_\sigma^{(i)}, A)$ $(\sigma \in \Sigma, A \in \mathcal{H}_\sigma^{(i)})$. We noemen $(\mathcal{H}_\sigma^{(i)}, A)$ en $(\mathcal{H}_\tau^{(j)}, B)$ equivalent als

1° $\eta_\sigma(S(A)) \in (K_\sigma \cap K_\tau)$, $\eta_\tau(S(B)) \in (K_\sigma \cap K_\tau)$

2° $B = F(A)$, als F de matrixfunctie is die (vgl.St.5) met de scalarfunctie $f(z) = \varphi_\tau(\eta_\sigma(z))$ correspondeert ($f(z)$ is gedefinieerd in $\varphi_\sigma(K_\sigma \cap K_\tau)$).

Deze equivalentierelatie voldoet aan de eisen van St.15 (behalve 5°). Het resultaat is een niet-samenhangend MM, dat we

$M(S)$ noemen.

St.26. $M(S)$ is onafhankelijk van de keuze der ω's.

St.27. $M(S)$ valt uiteen in samenhangende componenten, elk corresponderende met een mogelijkheid om de componenten van S te waarderen met gehele getallen $\nu \geq 0$ met som n.

Def.25. $M(S_1^{\nu_1},..S_s^{\nu_s})$ is de component die met de aangegeven waardering correspondeert.

St.28. De spectral manifold van $\{M(S_1^{\nu_1}...S_s^{\nu_s})\}^-$ is $S_1^{\nu_1}...S_s^{\nu_s}$.

St.29. Is M een MM, $S_1^{\nu_1}...S_s^{\nu_s}$ het spectral manifold van M^-, en M_1 het MM uit Def.24, dan is er een analytische afbeelding van M^- in M_1, zó dat origineel en beeld steeds equivalente normaalvormen hebben.

Is F analytisch in M, dan is F ook analytisch in het corresponderende gebied van M_1; punten van M die op eenzelfde punt van M_1 worden afgebeeld, hebben gelijke waarden van F.

St.30. $A \in MR_n$. Dan is er een omgeving $O_1 \ni A$ zó dat voor elke samenhangende omgeving O $(A \in O \subset O_1)$ het spectrale oppervlak van O^- hetzelfde type heeft als A.

St.31. De afbeelding van st.29 kan tot een afbeelding van M in M_1 worden voortgezet.

St.32. Zijn M_1 en M_2 beide MM's en is F een analytische afbeelding van M_1 in M_2, dan correspondeert daarmee een analytische afbeelding f van S_1 in S_2 (S_i=SM van M_i). F en f bepalen elkaar éénduidig.

St.33. Is F analytisch op M, en f de corresponderende functie op S (S het SM van f), en zijn $P_1,...,P_n$ de punten van S die met het punt P van M corresponderen, dan zijn $f(P_1),...,f(P_n)$ de eigenwaarden van $F(P)$.

Def.26. Matrix bol = $M(S^n)$, als S de complexe bol voorstelt.

Def.27. Zij M een MM. Analytische afbeeldingen van M in de $M(S^n)$ heten meromorphe functies op M.

St.34. Met elke meromorphe functie op M correspondeert ééneénduidig een meromorphe functie op zijn SM.

St.35. Is M een MM, en convergeert een rij functies f_k uniform in elk compact deel van de SM, dan convergeren de corresponderende functies F_k uniform in elk compact deel van M.