STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-005

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Prof.dr. C.G.G. van Herk

23 februari 1957

Volledige systemen van niet-harmonische trigonometrische functies

1957

Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

door

Prof.Dr C.G.G. van Herk

23 Februari 1957

Volledige systemen van niet-harmonische trigonometrische functies

1. Een rij functies $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ heet gesloten in een interval (a,b) als (onder zekere voorwaarden van integrabiliteit) f in (a,b) een nulfunctie is, indien

$$\int_a^b f(t)g_n(t)dt = 0 \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Voor ons onderwerp is het doelmatiger de index n alle gehele waarden $-\infty < n < \infty$ te laten doorlopen, wat geen beperking inhoudt. Overigens wordt hier alleen het geval beschouwd waarbij

$$b = -a = \pi\ , \ g_n(t) = e^{ix_n t} \quad (x_n \text{ reëel}),\ f \in L^p(-\pi,\pi)\ (p \geq 1). \tag{1}$$

Gesloten systemen die aan (1) beantwoorden zullen worden aangeduid als gesloten in (de klasse) $L^p(-\pi,\pi)$. Tenzij anders vermeld is $p = 2$.

Over deze stelsels van trigonometrische functies schreef Wiener in 1934: "This is a subject with a surprisingly small literature" (l.c. p. 86). Ook nu lijkt het onderwerp verre van uitgeput,

2. De geslotenheid van $\{e^{ix_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ in $L^2(-\pi,\pi)$ houdt niet in dat

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ix_n t} \tag{2}$$

voor zekere waarden van t; ook niet dat een formele reeks als in (2) tot f(t) kan worden gesommeerd. Wel is een dergelijk stelsel volledig, d.w.z. er is voor iedere $\varepsilon > 0$ een "veelterm"

$$P(t,\varepsilon) = \sum_{n=-N}^{N} a(n,\varepsilon)e^{ix_n t} \qquad (N = N(\varepsilon))$$

waarvoor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - P(t, \varepsilon) \right|^2 dt < \varepsilon .$$

Omgekeerd is een volledig systeem ook gesloten; beide termen kunnen dus door elkaar worden gebruikt.

De vragen wanneer $f(t)$ een ontwikkeling(2) toelaat, en welke eigenschappen deze dan bezit, worden nu niet behandeld. Deze vragen, - en in bepaalde gevallen hun antwoorden - , hebben een analogon in de theorie van de reeks van Fourier.Paley en Wiener bewezen dat voor

$$|x_n - n| \leqslant D \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots), \qquad (3)$$

waarbij $D < \pi^{-2}$, het systeem $\{e^{ix_n t}\}_{-\infty}^{\infty}$ volledig is, en er een ontwikkeling (2) bestaat die tegelijk met de Fourier-reeks van f convergeert, resp. sommeerbaar is. Dit blijft waar voor $D < \frac{1}{4}$, maar niet meer voor $D = \frac{1}{4}$ (Levinson).

3. Het bekendste voorbeeld van een volledig stelsel in $L^2(-\pi, \pi)$, - en zelfs in $L(-\pi, \pi)$ - , is de "basis" $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ van de reeks van Fourier. Hierover valt o.m. het volgende op te merken:

(a) de basis is volledig over ieder interval ter lengte 2π, maar onvolledig in ieder groter interval (tegenvoorbeeld bij Levinson p. 2);

(b) voor een intervallengte 2π is de basis "minimaal": deze wordt onvolledig door er één element uit weg te laten;

(c) het stelsel $\{e^{int}\}_{n=N}^{\infty}$ is volledig in ieder interval ter lengte van $2\pi - \varepsilon$, maar niet minimaal; a fortiori geldt dit als uit $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ een eindig aantal elementen wordt weggelaten.

4. Deze resultaten kunnen tot systemen van de algemene gedaante (1) worden uitgebreid. Levinson onderscheidt daarbij eenzijdige systemen en tweezijdige, al naar de verzameling $\{x_n\}$ alleen $+\infty$ (of alleen $-\infty$) tot verdichtingspunt heeft, dan wel $+\infty$ en $-\infty$ beide (andere verdichtingspunten komen niet in aanmerking). Eenzijdige systemen komen nu niet ter sprake.

De volgende stellingen, met een enkele bekorting ontleend aan Paley-Wiener en Levinson, geven een indruk van het terrein waar deze voordracht thuishoort (Romeinse cijfers duiden het nummer van hun theorema aan).

L III. Stel

$$\Lambda(u) = \sum_{|x_n| \leq u} 1 .$$

Zij

$$\int_1^v \frac{\Lambda(u)}{u}\, du > 2v - \frac{p-1}{p} \log v + O(1) \qquad (p \geq 1) .$$

Dan is het stelsel $\{e^{ix_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ volledig in $L^p(-\pi, \pi)$.

L IV. Zij

$$|x_n| \leq |n| + \frac{N}{2} + \frac{p-1}{2p} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) .$$

Mocht het stelsel $\{e^{ix_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nog niet volledig zijn, dan **wordt dit volledig** door er ten hoogste N elementen $e^{i\alpha_n t}$ aan toe te voegen. In het bijzonder is $\{e^{ix_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ volledig in $L^p(-\pi, \pi)$ $(p \geq 1)$ als

$$|x_n| \leq |n| + \frac{p-1}{2p} \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots) .$$

L VI. Een volledig stelsel $\{e^{ix_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ in $L^p(-\pi, \pi)$ $(p \geq 1)$ blijft volledig door een willekeurige x_n door een ander getal te vervangen.

P-W XXX. Zij

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

Stel

$$F(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\right) .$$

Zij het stelsel $\{e^{\pm ix_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ volledig en minimaal in $L^2(-\pi, \pi)$. Dan is

$$F(x) \notin L^2(0, \infty), \ \frac{F(x)}{x} \in L^2(1, \infty) .$$

Zij vervolgens $\{1, e^{\pm ix_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ volledig en minimaal in $L^2(-\pi, \pi)$. Dan is

$$xF(x) \notin L^2(0, \infty), \ F(x) \in L^2(0, \infty).$$

5. Er bestaat een zeker verband tussen een volledig stelsel $\{e^{ix_nt}\}$ en de gehele functie

$$F(x) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \frac{x}{x_n})e^{\frac{x}{x_n}}, \qquad (4)$$

dit blijkt zowel uit de formulering van P-W XXX als bijv. uit het bewijs van L III (is een grootheid $x_n = 0$, dan moet de bijbehorende primaire factor van F door x worden vervangen). Omgekeerd kan een probleem over gehele functies met uitsluitend reële nulpunten tot beschouwingen over volledige systemen voeren.

Op een dergelijke wijze rees de vraag naar de volledigheid van $\{e^{ix_nt}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ onder voorwaarden voor de nulpunten x_n die geen begrensdheid van de verschillen $x_n - n$ impliceerden. De zo juist opgesomde stellingen boden daarbij geen houvast, L IV uiteraard niet, en naar bleek L III evenmin. Ook bij (oppervlakkig!) litteratuuronderzoek werden geen uitkomsten gevonden die in deze moeilijkheid voorzagen.

Voor eindig veel waarden n kan het verschil $x_n - n$ wegens L VI willekeurig worden gekozen. Verder kan men aftelbaar veel verschillen willekeurig groot maken, door eenvoudig de verzameling $\{x_n\}$ te vernummeren. Dan zijn echter de nulpunten x_n in het algemeen niet meer naar klimmende grootte gerangschikt (wat tevoren steeds stilzwijgend werd verondersteld), bovendien zijn de tussengelegen intervallen voor vernummeren invariant (de volgorde van de nulpunten blijft wel onveranderd door de index n met een constant maar overigens willekeurig getal te vermeerderen). Toch blijkt er wel aanleiding te zijn de conditie $x_n < x_{n+1}$ te laten vallen en de mogelijkheid van inversies toe te laten, waarbij $x_{n+j} < x_n$ voor bepaalde waarden van n en j. - Wordt een gehele functie gedefinieerd door, zeg, een reeks van Taylor, dan is er natuurlijk geen enkele reden om de reële nulpunten anders dan naar klimmende grootte te nummeren. Dit wordt anders als zulke nulpunten door een expliciete analytische uitdrukking worden vastgelegd.

Het bedoelde vraagstuk was in sommige opzichten specialer en daardoor enigszins eenvoudiger dan de door Levinson behandelde. Daarom wordt van nu af aangenomen dat (a) F even, (b) $F(0) \neq 0$, (c) $F'(x_n) \neq 0$. Omdat F even is, kunnen wij ons tot reële functies f(t) beperken.

De nulpunten van F worden nu aangegeven door x_q, waarbij steeds

$$q = m + \tfrac{1}{2} \quad (m \text{ geheel}, -\infty < m < \infty), \tag{5}$$

zodat (4) overgaat in

$$F(x) = \prod_{q>0} \left(1 - \frac{x^2}{x_q^2}\right) . \tag{4'}$$

Bij <u>even</u> gehele functies met uitsluitend reële nulpunten is dit nl. de enige wijze van indiceren waarbij $x_{-q} = -x_q$, $q - q'$ geheel voor ieder indexpaar (q,q'), en $q + 1$ index als q dit is (bij <u>oneven</u> functies treedt deze moeilijkheid niet op).

<u>Stelling</u>. Stel

$$x_q = q + \xi_q, \qquad \eta_q = \frac{\xi_q}{q} . \tag{6}$$

Zij $x_q > 0$ voor $q > 0$, $x_q \neq x_{q'}$ voor $q \neq q'$; zij

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{0<q<N} \xi_q^2 < \frac{9}{4} . \tag{7}$$

Schrijf

$$\eta_q = \int_0^{\pi} \varphi(v) \cos qv \, dv \tag{8}$$

(wat wegens (7) mogelijk is). Zij

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(v) \in \mathrm{Lip}\,\alpha \quad ((v) = \langle 0,h \rangle) \tag{9}$$

voor zekere $0 < \alpha \leq 1$ en zekere $0 < h \leq \pi$. Dan is $\{e^{ix_q t}\}_{-\infty}^{\infty}$ volledig in $L^2(-\pi,\pi)$.

<u>Opmerkingen</u>

(a). De formule $x_q = q + \xi_q$ splitst x_q in een "seculaire" en een "oscillerende" term; de nulpunten van $F(x)$ schommelen om de corresponderende nulpunten van $\cos \pi x$. Schommelt ξ_q krachtig genoeg dan kunnen inversies optreden; is φ differentieerbaar en van voldoend kleine totale schommeling, dan zijn deze uitgesloten.

(b). Voor voldoend grote q is de voorwaarde $x_q > 0$ vanzelf vervuld wegens (7).

(c). In het oorspronkelijke vraagstuk was aan (7) en (9) ruimschoots voldaan wegens

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{0<q<N} \xi_q^2 = \frac{1}{3}, \quad \eta_q = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(v) \cos qv \, dv ,$$

waarbij φ in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ overigens niet van beperkte schommeling was.

Bewijs

(a). De constante $\frac{9}{4}$ speelt voorlopig in het bewijs geen rol. Uit de mildere voorwaarde

$$s_n = \sum_{0<q<n} \xi_q^2 = O(n) \qquad (7')$$

volgt, door partieel sommeren en rekening houdend met

$$\xi^2_{m+\frac{1}{2}} = s_{m+1} - s_m , \qquad (10)$$

de convergentie van $\sum_{q>0} \eta_q^2$. Volgens Riesz-Fischer is er dan een functie $\varphi \in L^2(0,\pi)$ waarvoor (8) geldt, zoals onmiddellijk in te zien.

(b). Enkele schattingen worden meermalen gebruikt. Uit (10) volgt

$$\xi_q = O(q^{\frac{1}{2}}), \quad \eta_q = O(q^{-\frac{1}{2}}), \qquad (11)$$

zodat $x_q \sim q$, wat opmerking (b) staaft. - Voor $q > 0$ is $x_q > 0$, dus $\eta_q > -1$, zodat wegens (11)

$$\log(1+\eta_q) = \eta_q + O(\eta_q^2) = \eta_q + O(q^{-1}), \qquad (12)$$

en

$$q \log(1+\eta_q) = \xi_q + O(1). \qquad (13)$$

(c). Vervolgens levert (8)

$$\sum_{0<q<N} \eta_q = \sum_{0<q<N} \int_0^{\pi} \varphi(v) \cos qv \, dv = \int_0^{\pi} \varphi(v) \frac{\sin Nv}{2 \sin v/2} \, dv = \int_0^h + \int_h^{\pi} .$$

Voor $N \to \infty$ nadert de laatste term van het meest rechtse lid tot 0 (Riemann-Lebesgue); wegens (9) nadert ook de eerste term van dit lid tot 0 (Lipschitz). Dus is

$$\sum_{q>0} \eta_q = 0 \; . \tag{14}$$

Hieruit volgt weer, wegens (12),

$$\sum_{q>0} \log(1+\eta_q) = \sum_{q>0} \{\eta_q + O(\eta_q^2)\} = \sum_{q>0} O(\eta_q^2) \; .$$

Zo juist is bewezen dat

$$\sum_{q>0} \eta_q^2 < \infty \; ,$$

dus is ook de reeks

$$\sum_{q>0} \log(1+\eta_q)$$

convergent. Wegens (6) convergeert dan ook het product

$$\prod_{q>0} \frac{x_q}{q} = \prod_{q>0} (1+\eta_q) = A > 0. \tag{15}$$

(d). Wij gaan nu het kanonieke product F in de berekening betrekken. Uit

$$\cos \pi x = \tfrac{1}{2}(e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}) = \prod_{q>0} \left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)$$

volgt

$$\tfrac{1}{2}(e^{\pi y} + e^{-\pi y}) = \prod_{q>0} \left(1 + \frac{y^2}{q^2}\right) ,$$

zodat wegens (4') en (15)

$$\frac{2F(iy)}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} = \prod_{q>0} \frac{1 + y^2/x_q^2}{1 + y^2/q^2} = \prod_{q>0} \frac{q^2}{x_q^2} \cdot \frac{y^2 + x_q^2}{y^2 + q^2} = A^{-2} \prod_{q>0} \frac{y^2 + x_q^2}{y^2 + q^2}$$

dus, voor $y \to +\infty$,

$$\log F(iy) - \pi y = \sum_{q>0} \log\left(1 + \frac{2q\xi_q + \xi_q^2}{y^2 + q^2}\right) + O(1) =$$

$$= \sum_{q>0} \left\{ \frac{2q\,\xi_q}{y^2 + q^2} + \frac{\xi_q^2}{y^2 + q^2} + O\left(\frac{(2q\xi_q + \xi_q^2)^2}{(y^2 + q^2)^2} \right) \right\} + O(1) \; .$$

Nu is

$$\sum_{q>0} \frac{\xi_q^2}{y^2+q^2} < \sum_{q>0} \eta_q^2 = O(1),$$

$$\sum_{q>0} O\left\{\left(\frac{2q\xi_q + \xi_q^2}{y^2+q^2}\right)^2\right\} = O\left\{\sum_{q>0}\left(\frac{2q\xi_q + \xi_q^2}{y^2+q^2}\right)^2\right\} < O\left\{\sum_{q>0}\left(\frac{2q\xi_q+\xi_q^2}{q^2}\right)^2\right\}$$

$$= O\left\{\sum_{q>0}(2\eta_q + \eta_q^2)^2\right\} = O(1) ,$$

zodat

$$\log \Gamma(iy) - \pi y = 2 \sum_{q>0} \frac{q\xi_q}{q^2+y^2} + O(1) .$$

Wegens (14) is

$$\sum_{q>0} \frac{q\xi_q}{q^2+y^2} = \sum_{q>0} \xi_q \left\{\frac{1}{q} - \frac{y^2}{q(q^2+y^2)}\right\} = - y^2 \sum_{q>0} \frac{\xi_q}{q(q^2+y^2)}$$

wat geeft

$$\log F(iy) - \pi y = - 2y^2 \sum_{q>0} \frac{\eta_q}{q^2+y^2} + O(1) . \qquad (16)$$

Uit de absolute convergentie van

$$\sum_{q>0} \frac{1}{q^2+y^2} , \quad \int_0^{\pi} |\varphi(v) \cos qv| \, dv$$

volgt nu

$$\sum_{q>0} \frac{\eta_q}{q^2+y^2} = \int_0^{\pi} \varphi(v) \sum_{q>0} \frac{\cos qv}{q^2+y^2} \, dv =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \varphi(v) \left\{e^{(\pi-v)y} - e^{(-\pi+v)y}\right\} dv / y(e^{\pi y} + e^{-\pi y}) , \qquad (17)$$

waarbij wegens $\varphi \in L^2(0,\pi)$

$$\int_0^{\pi} \varphi(v) \left\{e^{(\pi-v)y} - e^{(-\pi+v)y}\right\} dv = e^{\pi y} \int_0^{\pi} \varphi(v) e^{-vy} dv + O(1) ,$$

$$\int_0^{\pi} \varphi(v) \quad e^{-vy} dv = \int_0^{h} \varphi(v) e^{-vy} dv + O(e^{-hy}) .$$

Verder is $\varphi \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ in $\langle 0,h \rangle$, dus begrensd, zeg $|\varphi| < B$, zodat

$$\int_0^{h} \varphi(v) e^{-vy} dv < B \int_0^{h} e^{-vy} dv < By^{-1} .$$

Dit ingezet in (17) geeft

$$\sum_{q>0} \frac{\eta_q}{q^2 + y^2} = O(y^{-2}) ,$$

wat wegens (16) oplevert

$$\log F(iy) = \pi y + O(1) \qquad (y \to +\infty). \qquad (18)$$

(e). Stel

$$\Lambda(u) = \sum_{|x_q| \leq u} 1 . \qquad (19)$$

De zojuist verkregen schatting had betrekking op het gedrag van F op de <u>imaginaire</u> as. Paley en Wiener verkregen deze in hun gevallen (die eveneens <u>even</u> functies F golden) met behulp van een formule waarin $\Lambda(u)$ optreedt, nl., in de hier gebruikte normering,

$$\log F(iy) = y^2 \int_0^\infty \frac{\Lambda(u)}{u} \frac{du}{u^2 + y^2} ,$$

waarbij het rechterlid dus afhangt, behalve van y, van het gedrag van F op de <u>reële</u> as; de formule volgt direct uit de productontwikkeling van Weierstrass. Daarnaast moet een tweede integraal, die $\Lambda(u)$ bevat, worden geschat (ditmaal alleen naar beneden), nl.

$$\int_0^r u^{-1} \Lambda(u) du . \qquad (20)$$

Een complicatie is dat er nu rekening moet worden gehouden met eventuele inversies. Hiertoe voeren wij het begrip <u>gave rij</u> in. Een rij $\{x_q\}_{0<q<n}$ zal gaaf worden genoemd als deze juist **uit de n kleinste (positieve)** grootheden x_q bestaat. Volgens lemma I zijn er dan wegens (7) gave rijen voor willekeurig grote waarden van n. Wij zullen aannemen dat het getal N steeds aan een gave rij van n = N - 1 elementen beantwoordt.

Dan heeft de rij $\{x_q\}_{0<q<N}$ de eigenschap dat het laatste element tevens het grootste is. Stelt men

$$\Lambda_N(u) = \sum \llcorner |x_q| \leq u, \quad 0<q<N \lrcorner 1, \qquad (21)$$

dan is dus

$$\Lambda(u) \geqslant \Lambda_N(u),\ \Lambda_N(0) = 0,\ \Lambda_N(x_{N-\frac{1}{2}}) = 2N\ . \qquad (22)$$

Verder maakt de schatting van (20) nog gebruik van

$$\sum_{0<q<N} \log q = N \log N - N + O(1)\ . \qquad (23)$$

Dit vooropgezet volgt uit (21), (22) en (23)

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} u^{-1}\,\Lambda(u)du \geq \tfrac{1}{2}\int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} u^{-1}\Lambda_N(u)du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\Lambda_N(x_{N-\frac{1}{2}})\log x_{N-\frac{1}{2}} - \int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} \log u\, d\Lambda_N(u)\right\}$$

$$= N \log x_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{0<q<N} \log x_q$$

$$= N\left\{\log(N-\tfrac{1}{2}) + \log(1+\eta_{N-\frac{1}{2}})\right\} - \sum_{0<q<N}\left\{\log q + \log(1+\eta_q)\right\}$$

$$= N + N\log(1+\eta_{N-\frac{1}{2}}) - \sum_{0<q<N} \log(1+\eta_q) + O(1),$$

dus, omdat de reeks in het laatste lid convergeert, en wegens (11), (12), (13),

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} u^{-1}\Lambda(u)du \geqslant N + N\log(1+\eta_{N-\frac{1}{2}}) + O(1)$$

$$= N + \xi_{N-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\log(1+\eta_{N-\frac{1}{2}}) + O(1) = x_{N-\frac{1}{2}} + O(1)\ .$$

Er is dus een aftelbare rij gehele getallen $\{N_j\}$ zó dat

$$\int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} u^{-1}\,\Lambda(u)du \geqslant 2x_{N-\frac{1}{2}} + O(1) \quad (N \in \{N_j\}\ ). \qquad (24)$$

(f). Van hieraf verloopt het bewijs uit het ongerijmde en sluit het, afgezien van de normering van f, woordelijk aan bij dat van L III. Was de bewering over de volledigheid van $\{e^{ix_q t}\}_{-\infty}^{\infty}$ onjuist, dan bestond er een functie f waarvoor

$$H(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{izt}dt,\ H(x_q) = 0 \quad (-\infty < q < \infty\ ), \qquad (25)$$

zonder dat f zelf een nulfunctie zou zijn. Het is direct in te zien dat men f reëel mag nemen, en hetzij even, hetzij oneven; H is dan eveneens even resp. oneven. De gehele functie H kan niet identiek verdwijnen (tenzij f een nulfunctie is), zoals door inversie van (25) blijkt. Dan is

$$H(z) = F(z)G(z), \tag{26}$$

waarbij G geheel. Stel n(r) gelijk aan het aantal nulpunten van H voor $|z| \leqslant r$, en $n_1(r)$ aan dit aantal voor G, zodat

$$n(r) = \Lambda(r) + n_1(r) \; .$$

Toepassing van "de" stelling van Jensen geeft (zie Levinson)

$$\int_0^r u^{-1}\, n(u)du \leqslant 2r + O(1),$$

dus wegens (24)

$$\int_0^{x_{N-\frac{1}{2}}} u^{-1} n_1(u)du \leqslant O(1)$$

voor alle $N \in \{N_j\}$. Derhalve is $n_1(r) = 0$, en volgens Hadamard

$$H(z) = a\; e^{bz}F(z)$$

als a en b constanten voorstellen. De mogelijkheid van oneven H is daarmee al uitgesloten; het geval van even H levert

$$H(z) = a\; F(z) \qquad (a \neq 0). \tag{27}$$

Levinson (p. 8) schat nu H(iy) met behulp van (25) en vindt, voor ons geval p = 2 en voor $y > 0$,

$$|H(iy)| \leqslant A\; y^{-\frac{1}{2}}\; e^{\pi y}(e^{-\varepsilon y} + \delta)$$

waarbij $\varepsilon > 0$ en δ willekeurig klein. Dit geeft

$$\log\; |H(iy)| \leqslant \pi y - \tfrac{1}{2}\log y + \log(e^{-\varepsilon y} + \delta),$$

waarbij de laatste term in het rechter lid negatief is (en zelfs kleiner gemaakt kan worden dan een willekeurig negatief getal). Dit strijdt met (18) en (27), q.e.d.

<u>Lemma</u>

Zij a_i reëel $(i \geqslant 1)$, $a_i \to \infty$ voor $i \to \infty$, zodat de rij $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ in de ruime zin naar klimmende grootte van de elementen kan worden geordend. Zij $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ het resultaat van een dergelijke herschikking. Laat $\{a_i\}_1^n$ geen gave deelrij zijn voor $n > N$ en vaste N, dus geen permutatie van $\{b_j\}_1^n$. Stel

$$a_i = i + c_i + d,$$

als d een constante voorstelt. Dan is

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n c_i^2 \geqslant \frac{9}{4},$$

waarbij het minimum $\frac{9}{4}$ kan worden bereikt, ook als alle grootheden a_i onderling ongelijk zijn.

<u>Opmerkingen</u>

(a). De uitbreiding die wordt verkregen door de voorwaarde $a_i \to \infty$ te vervangen door $a_i < \limsup_{i \to \infty} a_i$ is triviaal.

(b). De grens $\frac{9}{4}$ wordt bereikt voor $a_{2k-1} = 2k$, $a_{2k} = 2k - 2$
$d = -\frac{1}{2}$.

(c). Het bewijs is geheel elementair.

Een aanvulling hierop (die voor het hierboven gestelde ontbeerlijk is) luidt:

<u>Stelling</u> .

Indien geen twee gave deelrijen $\{a_i\}_1^n$ en $\{a_i\}_1^{n+1}$ van $\{a_i\}_1^{\infty}$ op elkaar volgen is

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n c_i^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Ook deze ongelijkheid kan niet worden verbeterd, zoals blijkt uit het voorbeeld $a_{2k-1} = a_{2k} = 2k$, $d = \frac{1}{2}$.

Of de hier behandelde volledige stelsels volledig blijven indien men 2 of meer nulpunten van F met elkaar laat samenvallen is nog onopgehelderd. Het ligt voor de hand aan ieder nulpunt x_q evenveel elementen toe te voegen als zijn multipliciteit bedraagt; behalve $e^{ix_n t}$ zullen dit niet-zuiver-exponentiële functies moeten zijn. De analogie met lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten en meervoudige wortels van de karakteristieke vergelijking ligt voor de hand.

Het lijkt niet doenlijk het probleem op te lossen zo lang de ontwikkelbaarheid van f naar functies van het benaderende stelsel niet vaststaat. Voor de door Paley, Wiener en Levinson behandelde gevallen, waarbij $|x_n - n| \leq D < \frac{1}{4}$, zou het te beproeven zijn.

<u>Litteratuur</u>

R.E.A.C. Paley en N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, 1934.

N. Levinson, Gap and density theorems, 1940.

R.P. Boas en H. Pollard, Properties equivalent to the completeness of $\{e^{-t}t^{\lambda_n}\}$, Bull. Am. Math. Soc. 52 ('46), 348-351.

R.J. Duffin en A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Am. Math. Soc. 72 ('52), 341-366.

M.E. Noble, The consistency of cardinal series, Proc. Cambridge Phil. Soc. 50 ('54), 139-142.

K. Saidukov (Russisch), vgl. Math. Rev. 16 ('55), 241.

J. Czipszer en A. Rényi (Hongaars), vgl. Math. Rev. 17 ('56), 608
