STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr.ir. J.W. Cohen

19 februari 1958

"Gegeneraliseerde Engset-formules"

1958

ZW 1958-005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"
door
Prof. Dr Ir J.W.Cohen
19 februari 1958

"Gegeneraliseerde Engset-formules"

Inleiding

Gebeurtenis E kan optreden op tijdstippen $t_1, t_2, \ldots$; $\tau_r \overset{df}{=} t_r - t_{r-1}$ (voor $r=1,2,\ldots,$) wordt als stoch.var.beschouwd. $\tau_1, \tau_2, \ldots$ onderling onafhankelijk, en proces stationair.

$P_r\{\tau < t\} = F(t)$ met $F(t)=0$ voor $t<0$

$$E(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, dF(t) < \infty .$$

Kans, dat gedurende t na w.m. (willekeurig gekozen moment) E niet optreedt $= \dfrac{1}{E(\tau)} \displaystyle\int_{z=t}^{\infty} \{1-F(z)\} \, dz.$

Bewijs: Deze kans = tijdsinterval per tijdseenheid gunstig voor keuze van w.m. Per tijdseenheid T gemiddeld $T/E(\tau)$ gebeurtenissen E, die optreden op $t_1, t_2, \ldots, t_{T/E(\tau)}$. Hieronder gemiddeld $\dfrac{T}{E(\tau)} \, dF(x+t)$ intervallen τ_r met lengte $x+t \leq \tau_r \leq x+dx+t$. Van ieder dezer τ_r is deel x gunstig voor keuze w.m.

Dus kans $= {}^{T}/E(\tau) \displaystyle\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{x}{T} \, dF(x+t) = \frac{1}{E(\tau)} \int_{z=t}^{\infty} (1-F(z))dz.$

(1) Volgt: Elementaire kans, dat E voor eerste maal optreedt op tijdstip tussen t en t+dt na w.m. = -dt x afgeleide van bovenstaande kans naar t, $= \dfrac{1-F(t)}{E(\tau)} dt.$

Cond. kans dat wanneer op w.m. laatste E een tijd τ geleden is, eerstvolgende E nog minstens t duurt = verhouding aantal $\tau_r \geqq t+\tau$ en aantal $\tau_r > \tau$, dus $= \dfrac{1-F(t+\tau)}{1-F(\tau)}$.

(2) Volgt: cond.el. kans dat wanneer op w.m. laatste E een tijd τ geleden is, eerstvolgende E binnen dt optreedt =

$$= \frac{1-F(0+\tau)}{1-F(\tau)} - \frac{1-F(\Delta t+\tau)}{1-F(\tau)} = \frac{dF(\tau)}{1-F(\tau)}$$

Houdtijd- en oproepverdeling

Groep van c abonné's en groep van n lijnen ($c > n$), volledig toegankelijk voor iedere ab. Indien een ab. een oproep maakt en er is op dit moment minstens één vrije lijn dan volgt ogenblikkelijk een bezetting van één der vrije lijnen.

De oproep heet <u>geslaagd.</u> Zijn er geen vrije lijnen dan volgt geen bezetting; de oproep heet <u>mislukt.</u> Een ab. kan alleen dan geen nieuwe oproep maken, indien bezetting, volgend op zijn voorafgaande oproep, nog niet beëindigd is, m.a.w. indien hij niet vrij is.

Duur τ van de bezetting (= houdtijd) wordt als stationaire stoch. var. beschouwd. Verschillende beleggingsduren van één zelfde ab. onderling onafhankelijk.

$P_r\{\tau_i < t\} = B_i(t)$; $B_i(t) = 0$ voor $t < 0$ en alle $i = 1,2,\ldots, c$.

$$H_i \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d\, B_i(t) < \infty \text{ voor alle } i.$$

Tijdsinterval $\sigma_i^{(1)}$ tussen einde bezetting en eerstvolgende oproep, beide van ab. i wordt als stat. stoch. var. beschouwd. Deze tijdsinterval onderling onafhankelijk.

$P_r\{\sigma_i^{(1)} < t\} = A_i^{(1)}(t)$; $A_i^{(1)}(t) = 0$ voor $t < 0$ en alle i.

$$K_i^{(1)} \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d\, A_i^{(1)}(t) < \infty \text{ voor alle } i.$$

Tijdsinterval $\sigma_i^{(2)}$ tussen mislukte oproep en eerstvolgende oproep, beide van ab. i, wordt als stat. stoch. var. beschouwd. Deze tijdsinterval onderling onafhankelijk.

$P_r\{\sigma_i^{(2)} < t\} = A_i^{(2)}(t)$; $A_i^{(2)}(t) = 0$ voor $t < 0$ en alle i.

$$K_i^{(2)} \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d\, A_i^{(2)}(t) < \infty \text{ voor alle } i.$$

(1^a) Cond. el. kans, dat wanneer op w.m. ab. i vrij is en zijn laatste oproep <u>geslaagd</u> was, hij eerstvolgende oproep maakt op $t \div t+dt$ na w.m. $= \dfrac{dt}{K_i^{(1)}} \{1-A_i^{(1)}(t)\}$.

(1^b) Cond. el. kans, dat wanneer op w.m. ab. i vrij is en zijn laatste oproep <u>mislukt</u> was, hij eerstvolgende oproep maakt op $t \div t+dt$ na w.m. $= \dfrac{dt}{K_i^{(2)}} \{1-A_i^{(2)}(t)\}$.

$P_{n|i}^{c-1} \overset{df}{=}$ kans, dat wanneer ab. i een oproep maakt, hij alle n lijnen bezet aantreft.

Volgt:

(1[c]) Cond. el. kans, dat wanneer op w.m. ab. i vrij is, hij zijn eerstvolgende oproep maakt op t $\div$ t+dt na w.m. =

$$\frac{dt}{K_i^{(2)}} P_{n|i}^{c-1} \{1-A_i^{(2)}(t)\} + \frac{dt}{K_i^{(1)}} \{1-P_{n|i}^{c-1}\}\{1-A_i^{(1)}(t)\}.$$

Fundamentele veronderstelling voor verliesproblemen:
ab. wijzigt zijn oproep verdeling niet, indien oproep mislukt (mislukte oproepen worden niet herhaald).

Volgt: $A_i^{(1)}(t) = A_i^{(2)}(t)$ voor alle i.

$s_i' \overset{df}{=} \frac{1}{K_i^{(1)}} = \frac{1}{K_i^{(2)}}$ = gemiddeld aantal oproepen van ab. i

per t.e. van de tijd, waarin ab. i vrij is.
$s_i \overset{df}{=}$ gemiddeld aantal oproepen van ab. i per t.e. van de totale tijd.

Volgt $s_i^{-1} = K_i^{(2)} P_{n|i}^{c-1} + (K_i^{(1)}+h_i)(1-P_{n|i}^{c-1})$,

waaruit

$$s_i' = s_i \{1- \alpha_i(1-P_{n|i}^{c-1})\}^{-1},$$

met

$$\alpha_i \overset{df}{=} s_i h_i = \text{aangeboden verkeer van ab. i.}$$

(1[d]) Cond. el. kans, dat wanneer op w.m. ab. i vrij is, hij zijn eerstvolgende oproep maakt binnen dt na w.m. = s_i' dt.

Tenslotte uit (2):

(2[a]) Cond. el. kans dat wanneer op w.m. een lijn sinds een tijd τ door ab. i bezet is, deze bezetting eindigt binnen dt na w.m. =

$$= \frac{dB_i(\tau)}{1-B_i(\tau)} .$$

Afleiding gegeneraliseerde Engset-formules.

$P_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x)$, voor $0 < x \leqq n$, zij kans, dat op w.m. ab.'s no. $\lambda_1,\ldots,\lambda_x$ ieder een lijn belegd hebben sinds resp. een tijd $<\tau_1,\ldots,<\tau_x$. $\lambda_i \varepsilon \{1,2,\ldots,c\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$.

Deze kans abs. cont. functie van $\tau_1,\ldots,\tau_x$.

Dus bestaat de kans dichtheid $p_{\lambda_1 \dots \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_x) =$

$= \frac{\partial^x}{\partial\tau_1 \dots \partial\tau_x} P_{\lambda_1 \dots \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_x)$ bijna overal.

$p_o \overset{df}{=}$ kans, dat op w.m. alle ab.'s vrij zijn.

Verondersteld wordt stoch. proces van het bezet zijn van x lijnen van de bundel is stationair.

a) Op w.m. zij geen der lijnen bezet. Deze toestand kan ontstaan zijn uit een toestand Δt vroeger met

1. ook alle lijnen vrij, indien tijdens Δt geen oproep wordt gemaakt;
2. één lijn bezet en waarvan bezetting tijdens Δt eindigt, terwijl geen oproepen gedurende Δt ontstaan;
3. met meerdere lijnen bezet, die alle in Δt vrijkomen, terwijl geen nieuwe oproepen verschijnen, etc.

Er geldt:

$$p_o = (1-\Delta t \sum_{i=1}^{c} s'_{\lambda_i})\, p_o + \sum_{i=1}^{c} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} p_{\lambda_i}(\tau-\Delta\tau)\Delta t \frac{d\, B_{\lambda_i}(\tau-\Delta\tau)}{1-B_{\lambda_i}(\tau-\Delta\tau)} + o(\Delta\, t),$$

waaruit voor $\Delta t \to 0$

$$(3) \quad p_o \sum_{i=1}^{c} s'_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{c} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\lambda_i}(\tau) \frac{d\, B_{\lambda_i}(\tau)}{1-B_{\lambda_i}(\tau)} .$$

b) Op w.m. zijn ab.'s $\lambda_1, \dots, \lambda_x$ bezig sinds een tijd gelegen tussen resp. $\tau_1 \div \tau_1+d\tau_1, \dots, \tau_x \div d\tau_x$ $(\tau_1 > 0, \dots, \tau_x > 0)$. Deze toestand kan ontstaan zijn een toestand $\Delta t < \min(\tau_1, \dots, \tau_x)$ vroeger met

1. dezelfde ab.'s bezig (geen dezer ab.'s eindigt gesprek, noch maakt een der vrije ab.'s een oproep);
2. x+1 ab.'s bezig en één eindigt bezetting;
3. verschillend van sub. 1 en 2, echter niet met x-1 bezige ab.'s en oproep gedurende Δt, wegens $0 < \Delta t < \min\{\tau_1, \dots, \tau_x\}$.

Er geldt:

$$p_{\lambda_1 \dots \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_x)d\tau_1 \dots d\tau_x =$$

$$(1-\Delta t \sum_{i=x+1}^{c} s'_{\lambda_i}) \prod_{i=1}^{x} \left\{1 - \frac{B_{\lambda_i}(\tau_i)-B_{\lambda_i}(\tau_i-\Delta t)}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i-\Delta t)}\right\}$$

$$p_{\lambda_1\ldots\lambda_x}(\tau_1-\Delta t,\ldots,\tau_x-\Delta t)\,d\tau_1\ldots d\tau_x$$

$$+ \sum_{i=x+1}^{c} \int_{\tau_i=0}^{\infty} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x,\lambda_i}(\tau_1-\Delta t,\ldots,\tau_x-\Delta t,\tau_i)$$

$$d\tau_1\ldots d\tau_x \Delta t \frac{d\,B_{\lambda_i}(\tau_i-\Delta t)}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i-\Delta t)} + o(\Delta t)\,d\tau_1\ldots d\tau_x,$$

voor $0 < x < n$.

Voor $\Delta t \to 0$ en $0 < x < n$:

$$(4)\quad \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\tau_x}\right) p_{\lambda_1\ldots\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x) \overset{\text{b.o.}}{=}$$

$$-\left\{\sum_{i=x+1}^{c} s'_{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{x} \frac{d\,B_{\lambda_i}/d\tau_i}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)}\right\} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x)$$

$$+ \sum_{i=x+1}^{c} \int_{\tau_i=0}^{\infty} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x,\lambda_i}(\tau_1,\ldots,\tau_x,\tau_i) \frac{d\,B_{\lambda_i}(\tau_i)}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)}.$$

Bestaat $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{B_{\lambda_i}(\tau_i)-B_{\lambda_i}(\tau_i-\Delta t)}{\Delta t}$ niet, dan indien $\Delta t \to 0$,

$$(4^a)\quad p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1+,\ldots,\tau_x+) \overset{\text{b.n.}}{=} \prod_{i=1}^{x} \frac{1-B_{\lambda_i}(\tau_i+)}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i-)}\,.$$

$$.\ p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1-,\ldots,\tau_x-), \qquad (0 < x \leq n).$$

Voor $x = n$

$$(4^b)\quad \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial\tau_n}\right) p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x) \overset{\text{b.o.}}{=} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{d\,B_{\lambda_i}(\tau_i)/d\tau_i}{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

(4) en evenzo (4^a) stellen elk $\binom{c}{x}$ verg. voor.

In totaal $\sum_{x=1}^{n} \binom{c}{x} = 2^c$ onbek.

(c) Bezie nu int. Δt voorafgaand aan w.m. waarin een ab. een oproep maakt. Vanwege symmetrie van $P_{\lambda_1 \dots \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_x)$, mogen we ab. λ_x hiervoor kiezen.
Er geldt voor $1 < x \leqq n$:

$$p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{x-1}, \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_{x-1}, \Theta \Delta t) d\tau_1 \dots d\tau_{x-1} \; \Delta t =$$

$$= s'_{\lambda_x} \Delta t \; p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{x-1}} (\tau_1 - \Delta t, \dots, \tau_x - \Delta t) d\tau_1, \dots, d\tau_x + o(\Delta t), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Dus

$$5) \begin{cases} p_{\lambda_1, \dots, \lambda_x}(\tau_1, \dots, \tau_{x-1}, 0+) = s'_{\lambda_x} \; p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{x-1}} (\tau_1, \dots, \tau_{x-1}), \quad 1 < x \leqq n, \\ p_{\lambda_1}(0+) = s'_{\lambda_1} \; p_o. \end{cases}$$

Normerings voorwaarde

$$p_o + \sum_{x=1}^{n} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_x}^{c} \int_{\tau_1 = -\infty}^{\infty} \dots \int_{\tau_x = -\infty}^{\infty} p_{\lambda_1, \dots, \lambda_x} (\tau_1, \dots, \tau_x) d\tau_1 \dots d\tau_x =$$

$\sum\limits_{\lambda_1, \dots, \lambda_x}^{c}$ stelt voor sommatie over alle $\binom{c}{x}$ comb.

$\lambda_1, \dots, \lambda_x$ met $\lambda_i \varepsilon \{1, 2, \dots, c\}$

Uit (4^b) en (4^a)

$$(6) \quad p_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (\tau_1, \dots, \tau_n) = F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (\tau_1 - \tau_2, \tau_2 - \tau_3, \dots, \tau_{n-1} - \tau_n). \cdot \prod_{i=1}^{n} \{1 - B_{\lambda_i}(\tau_i)\},$$

waarin $F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_{n-1} - \tau_n)$ een nog nader te bepalen functie.
Uit (6) en (5) voor $x = n$:

$$(7) \quad p_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n} (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) =$$

$$= \frac{F_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n} (\tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_{n-2} - \tau_{n-1}, \tau_{n-1})}{s'_{\lambda_n}} \prod_{i=1}^{n-1} \{1 - B_{\lambda_i}(\tau_i)\}.$$

Uit (6), (7) en (4) voor $x = n-1$

$$(8)\quad \frac{1}{s'_{\lambda_n}} \frac{\partial}{\partial u} F_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n}(\tau_1-\tau_2,\dots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1},u) =$$

$$= -\frac{1}{s'_{\lambda_n}} \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i} F_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n}(\tau_1-\tau_2,\dots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1},u)$$

$$+ \sum_{i=n}^{c} \int_{v=0}^{\infty} F_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_i}(\tau_1-\tau_2,\dots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1},u-v)\,d\,B_{\lambda_i}(v).$$

Hier staan $c-(n-1)$verg. $\lambda_n \varepsilon \{1,2,\dots,c\}$; $\lambda_n \neq \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$.

$$H_{\lambda_n}(u) \overset{df}{=} F_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\tau_1-\tau_2,\dots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1},u).$$

Uit (8)

$$(9)\quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{H_{\lambda_k}(u)}{s'_{\lambda_k}} = -\frac{H_{\lambda_k}(u)}{s'_{\lambda_k}} \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i} + \sum_{i=n}^{c} \int_{0}^{\infty} H_{\lambda_i}(u-v)\,d\,B_{\lambda_i}(v),$$

voor iedere $k \varepsilon \{n,n+1,\dots, c\}$.

(7^a) Uit (7) $H_{\lambda_k}(u)/s'_{\lambda_k} = H_{\lambda_\ell}(u)/s'_{\lambda_\ell}$, k en $\ell \ \varepsilon \{n,n+1,\dots, c\}$.

Dus uit (9)

$$(10)\quad \frac{\partial}{\partial u} H_{\lambda_k}(u) = -H_{\lambda_k}(u) \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i} + \int_{0}^{\infty} H_{\lambda_k}(u-v) \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i}\, d\,B_{\lambda_i}(v).$$

Part. int. geeft:

$$\frac{\partial}{\partial u} H_{\lambda_k}(u) = \int_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} H_{\lambda_k}(u-v) \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i} \int_{w=v}^{\infty} d\,B_{\lambda_i}(w).$$

$$(11)\quad E(u) \overset{df}{=} \frac{\partial}{\partial u} H_{\lambda_k}(u)/s'_{\lambda_k}\,; \qquad R(v) \overset{df}{=} \sum_{i=n}^{c} s'_{\lambda_i} \int_{w=v}^{\infty} d\,B_{\lambda_i}(w).$$

Volgt:

$$E(u) = -\int_{0}^{\infty} E(u-v)\,R(v)\,dv \rightarrow E(u) = -\int_{-\infty}^{z=u} E(z)\,R(u-z)\,dz.$$

Tweede middelwaardestelling

$$E(u) = -R(0)\int_{\xi}^{u} E(z)dz - R(\infty)\int_{-\infty}^{\xi} E(z)dz, \qquad -\infty < \xi < u.$$

(12) $$E(u) = -R(0)\int_{\xi}^{u} E(z)dz.$$

Uit (9) en (11) volgt $|E(u)| < M < \infty$.

Uit (12) $|E(u)| < R(0)\, M(u-\xi)$. Dus uit (12)

$$|E(u)| < R(0)\, M\frac{(u-\xi)^2}{2}, \quad \rightarrow \quad |E(u)| < \frac{M(u-\xi)^n}{n!}\, R^n(0).$$

Volgt $E(u) = 0$.

Dus (zie ook 7^a). $H_{\lambda_k}(u) = s'_{\lambda_k} D$ voor $k = n, n+1, \ldots, c$.

(13) D.w.z. $$F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n}(\tau_1-\tau_2,\ldots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1},\tau_{n-1}-\tau_n) =$$

$$= s'_{\lambda_n} D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(\tau_1-\tau_2,\ldots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1}),$$ waarin

$D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(\ldots,\ldots,\ldots)$ een nog nader te bepalen functie.

(14) Uit (6) en (13) $$p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) =$$

$$= D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(\tau_1-\tau_2,\ldots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1})\, s'_{\lambda_n}\{1-B_{\lambda_n}(\tau_n)\}\prod_{i=1}^{n-1}\{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)\}.$$

Zodat uit (5)

$$p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) = D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(\tau_1-\tau_2,\ldots,\tau_{n-2}-\tau_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}\{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)\}.$$

Subst. hiervan in (5) en (4) voor x = n-2 leidt tot een diff-int. verg. van hetzelfde type als (8). Zodat het procédé zich herhaalt. Tenslotte wordt gevonden

(15) $$\begin{cases} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x) = C\prod_{i=1}^{x} s'_{\lambda_i}\{1-B_{\lambda_i}(\tau_i)\}, & 0 < x \leqq n. \\ p_0 = C \end{cases}$$

Dit resultaat volgt ook rechtstreeks uit (14) op grond van symmetrie overwegingen.

(15) is zeker een oplossing van (3) t/m (5). Of het de enige is, dient nog te worden aangetoond.

Zij $q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}$ kans dat op w.m. ab.'s $\lambda_1,\ldots,\lambda_x$ ieder een lijn bezetten, dan

$$q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x} = P_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\infty,\ldots,\infty) = \int_{\tau}^{\infty} \cdots\cdot \int_{\tau}^{\infty} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}(\tau_1,\ldots,\tau_x)\, d\tau_1 \ldots d\tau_x$$

$$= p_o \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}, \qquad 0 < x \leqq n.$$

Vanwege

$$\int_{\tau_i=o}^{\infty} d\tau_i \int_{t=\tau_i}^{\infty} d\, B_{\lambda_i}(t) = \int_{t=o}^{\infty} d\, B_{\lambda_i}(t) \int_{\tau_i=o}^{t} d\tau_i = \int_{t=o}^{\infty} t dB_{\lambda_i}(t) = h_{\lambda_i}.$$

Uit normeringsvoorwaarde, indien $\prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i} \overset{\text{df}}{=} 1$ voor $x = 0$,

$$p_o = \frac{1}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}^{c} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}} \rightarrow q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}^{c} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}}$$

P_x^c kans dat x van de n-lijnen bezet zijn

$$P_x^c = \frac{\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}^{x} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}^{c} \sum_{i=1}^{x} h_{\lambda_i}\, s'_{\lambda_i}}, \qquad (x=0,1,\ldots,n).$$

$p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x|j}(\tau_1,\ldots\tau_x)d\tau_1\ldots d\tau_x$ is cond. el. kans, dat wanneer op w.m. ab. j vrij is, ab.'s $\lambda_1,\ldots,\lambda_x$ ieder een lijn belegd hebben sinds resp. een tijd $\tau_1 \div \tau_1+d\tau_1,\ldots,\tau_x \div \tau_x+d\tau_x$,

($j=1,2,\ldots,c$, $\lambda_i \neq j$, $\lambda_i\ \varepsilon\{1,2,\ldots,c\}$, $x=1,2,\ldots,n$, j is geen variabele).

Voor $p_{\lambda_1,\dots,\lambda_{x|j}}(\tau_1,\dots,\tau_x)$ gelden de betrekkingen (3) t/m (5) met dien verstande dat overal c door c-1 vervangen moet worden. Volgt oplossing is analoog.

Derhalve

$$q_{\lambda_1,\dots,\lambda_{x|j}} = \frac{\prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i} s'_{\lambda_i}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_x}^{c-1} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i} s'_{\lambda_i}}, \quad (x=0,1,\dots,n),$$

waarin $q_{\lambda_1,\dots,\lambda_{x|j}}$ cond. kans dat wanneer op w.m. ab. j vrij is de ab.'s $\lambda_1,\dots,\lambda_x$ ieder een lijn bezet hebben. (Voor x=o is dit de kans op alle lijnen vrij).

Volgt voor kans $P^{c-1}_{x|j}$ dat wanneer op w.m. ab. j vrij is, er x lijnen bezet zijn.

$$P^{c-1}_{x|j} = \frac{\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_x}^{c-1} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i} s'_{\lambda_i}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_x}^{c-1} \prod_{i=1}^{x} h_{\lambda_i} s'_{\lambda_i}}, \quad \lambda_i \neq j, \quad (x=0,1,\dots,n).$$

$P^{c-1}_{n|j}$ is de oproep congestie voor ab. j.

Volgt uit def. α_i

$$(16) \quad P^{c-1}_{n|j} = \frac{\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{c-1} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_{\lambda_i}}{1-\alpha_{\lambda_i}(1-P^{c-1}_{n|\lambda_i})}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{c-1} \prod_{i=1}^{x} \dfrac{\alpha_{\lambda_i}}{1-\alpha_{\lambda_i}(1-P^{c-1}_{n|\lambda_i})}}, \quad \lambda_i \neq j.$$

(16) stelt c verg. voor, in de c onbek. $P^{c-1}_{n|j}$, $j=1,2,\dots,c$, die zoals uit hun afleiding volgt, één en slechts één opl. $0 < P^{c-1}_{n|j} < 1$ hebben. Bij gegeven α_i $(i=1,\dots,c)$ zijn dus de $P^{c-1}_{n|j}$ te bepalen.

We kunnen schrijven

$$P^{c}_{x} = \frac{\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_x}^{c} \prod_{i=1}^{x} \dfrac{\alpha_{\lambda_i}}{1-\alpha_{\lambda_i}(1-P^{c-1}_{n|\lambda_i})}}{\sum_{x=o}^{n} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_x}^{c} \prod_{i=1}^{x} \dfrac{\alpha_{\lambda_i}}{1-\alpha_{\lambda_i}(1-P^{c-1}_{n|\lambda_i})}}, \quad x = 0,1,\dots,n$$

(16) en (17) zijn de gegeneraliseerde Engset-formules.

Bijzondere gevallen.

1. Iedere ab. levert hetzelfde verkeer ($\alpha_i = \alpha$ voor alle i).

$$P_{n|j}^{c-1} = \frac{\binom{c-1}{n}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha(1-P_{n|j}^{c-1})}\right\}^{n}}{\sum\limits_{x=o}^{n}\binom{c-1}{x}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha(1-P_{n|j}^{c-1})}\right\}^{x}}, \ (P_{n|j}^{c-1} \text{ onafh. van } j).$$

$x=o,1,\dots,n,$

$$P_x^c = \frac{\binom{c}{x}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha(1-P_{n|j}^{c-1})}\right\}^{x}}{\sum\limits_{x=o}^{n}\binom{c}{x}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha(1-P_{n|j}^{c-1})}\right\}^{x}} .$$

Dit zijn de formules van Engset.

2. m subgroepen, c_k aantal ab.'s in subgroep k. Ab.'s behorend tot subgroep k alle zelfde verkeersaanbod α_k.

$P_{n|k}^{c_1,\dots,c_m}$ oproep congestie voor ab. van subgroep k.

$$P_{n|k}^{c_1,\dots,c_m} = \frac{\sum\limits_{\xi=o}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}\binom{c_j-\partial_{kj}}{\xi_j}\left\{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j\{1-P_{n|j}^{c_1,\dots,c_m}\}}\right\}^{\xi_j}}{\sum\limits_{x=o}^{n}\sum\limits_{\xi=o}^{x}\prod\limits_{j=1}^{m}\binom{c_j-\partial_{kj}}{\xi_j}\left\{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j\{1-P_{n|j}^{c_1,\dots,c_m}\}}\right\}^{\xi_j}} .$$

waarin $\partial_{kj} = \begin{matrix} o \\ 1 \end{matrix}$ voor $\begin{matrix} k \neq j \\ k=j \end{matrix}$, $\xi = \xi_1+\dots+\xi_m$ en $\sum\limits_{\xi=o}^{x}$ een sommatie voorstelt over alle gehele niet-neg. waarden van ξ_1, $\xi_2,\dots,\xi_m$, met de **restrictie $\xi = \xi_1+\dots+\xi_m$.**

$P_x^{c_1,\dots,c_m}$ kans op x bezette lijnen.

$$P_c^{c_1,\dots,c_m} = \frac{\sum\limits_{\xi=o}^{x}\prod\limits_{j=1}^{m}\binom{c_j}{\xi_j}\left\{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j\{1-P_{n|j}^{c_1,\dots,c_m}\}}\right\}^{\xi_j}}{\sum\limits_{x=o}^{n}\sum\limits_{\xi=o}^{x}\prod\limits_{j=1}^{m}\binom{c_j}{\xi_j}\left\{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j\{1-P_{n|j}^{c_1,\dots,c_m}\}}\right\}^{\xi_j}} .$$

3. $c \to \infty$, $s_i \to 0$ voor alle i en $\lim \sum_{i=1}^{c} \alpha_i \to A$,

bijv. $\alpha_i = \frac{A}{c+f_i(c)}$, met $\infty > f_i(c) > 0$.

Er geldt

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_x}^{c} \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \sim \frac{A^x}{c^x} \binom{c}{x} \to \frac{A^x}{x!} .$$

Zodat uit (17)

$$P_x^{\infty} = \frac{A^x/x!}{1+A+\frac{A^2}{2!}+\ldots+\frac{A^n}{n!}} .$$

Dit is de formule van Erlang.
Voor $c \to \infty$ en $s_i \to 0$ voor alle i zullen de individuele oproepverdelingen van de ab.'s aanleiding geven tot een resulterende oproepverdeling, die afhankelijk is van de eigenschappen der component verd. Voor ieder element der klasse van resulterende oproepverdelingen, geldt de formule van Erlang onafh. van de houdtijd-verdeling. Tot deze klasse behoort de neg. exp. oproepverdeling.