STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr.ir. A.I. van de Vooren

18 mei 1960

Het binaire getallenstelsel en de algebra van Boole

1960

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960-005

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr Ir A.I. van de Vooren

18 mei 1960

Het binaire getallenstelsel en de algebra van Boole

1. Inleiding

De algebra van Boole (1815-1864) is een logisch systeem met behulp waarvan men in bepaalde situaties op overzichtelijke wijze dwingende conclusies kan trekken. Een gebied van toepassingen, waardoor voor deze algebra een hernieuwde belangstelling valt waar te nemen, doet zich voor bij electronische digitale rekenmachines, die in het binaire talstelsel werken. Het ontwerp en de bestudering van de logica, die aan deze machines ten grondslag ligt, wordt zeer vergemakkelijkt door toepassing van de algebra van Boole.

2. Definities

We beginnen met een verzameling of klasse van elementen te definiëren tezamen met twee rekenregels, nl. de bewerkingen + (plus) en .(maal). Wat onder deze bewerkingen wordt verstaan zal in het vervolg duidelijk worden, maar het zijn niet de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging. Alle elementen, die kunnen worden onderworpen aan de rekenregels behoren tot de klasse, die beschouwd wordt.

We voeren nu in navolging van Huntington een aantal grondeigenschappen of axioma's in, die aan de volgende eisen moeten voldoen:

1. Zij moeten consistent zijn, d.w.z. niet onderling strijdig.
2. Zij moeten eenvoudig zijn, d.w.z. niet te splitsen in twee of meer delen.
3. Zij moeten onafhankelijk zijn, d.w.z. niet uit elkaar volgen.

We voeren de volgende axioma's in:

T1a. Als A en B beide behoren tot de klasse K, dan is A+B ook een element van K.

T1b. Als A en B beide behoren tot de klasse K, dan is A.B ook een element van K.

T2a. Er bestaat een element 0 zodanig, dat A+0 = A voor ieder element A uit K.

T2b. Er bestaat een element 1 zodanig, dat A.1 = A voor ieder element A uit K.

T3a. Als A en B beide behoren tot de klasse K, dan geldt A+B = B+A.

T3b. Als A en B beide behoren tot de klasse K, dan geldt A.B = B.A.

T4a. Als A,B en C ieder behoren tot de klasse K, dan geldt A + (B.C) = (A+B).(A+C).

T4b. Als A,B en C ieder behoren tot de klasse K, dan geldt A.(B+C) = (A.B) + (A.C).

T5. Aan ieder element A uit K kan een element $\bar{A}$ worden toegevoegd zodanig, dat tegelijkertijd geldt $A.\bar{A} = 0$ en $A+\bar{A} = 1$.

T6. De klasse bestaat uit minstens 2 verschillende elementen.

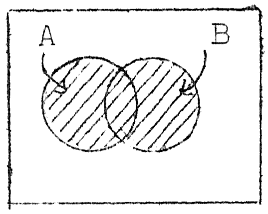
<u>Opmerkingen</u>: De axioma's T1a t/m T4b vertonen een zekere dualiteit. Indien men + en . verwisselt en tegelijkertijd de elementen 0 en 1 gaan de axioma's a en b in elkaar over.
Het element $\bar{A}$, geïntroduceerd in T5, wordt de ontkenning of het complement van A genoemd.
Aan het axioma T6 is reeds voldaan indien 0 en 1 verschillende elementen zijn.

3. Interpretatie

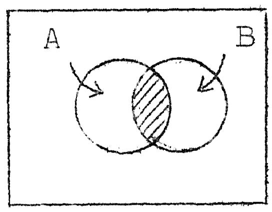
Om aan te tonen dat de bovengenoemde axioma's niet met elkaar in strijd zijn, is het voldoende een systeem aan te geven, waarin aan alle axioma's voldaan is. Er zijn verschillende van deze systemen mogelijk en op dergelijke systemen is dan de algebra van Boole toepasbaar. Er is echter een verschil tussen de algebra van Boole en de gewone algebra, want indien + en . resp. als gewone optelling en vermenigvuldiging worden opgevat, dan gelden T4a en T5 niet.

Voor de volgende meetkundige interpretatie geldt de algebra van Boole. Onder de elementen van de klasse K verstaan we alle mogelijke gebieden binnen een vierkant. Het element A+B wordt dan gedefinieerd als het kleinste gebied dat zowel A als B bevat (fig. 1a), terwijl A.B wordt gedefinieerd als het kleinste gebied dat zowel tot A als tot B behoort (fig. 1b). Dus A+B is niets anders dan de vereniging van A en B (ook wel $A \cup B$), terwijl A.B de doorsnijding van A en B is (ook AB of $A \cap B$).

Aan alle voornoemde axioma's is nu voldaan, indien we onder het element 0 het nulgebied (dus een gebied dat geen enkel punt bevat) verstaan en onder het element 1 het volledige vierkant. Het complement van $\bar{A}$ is het gebied van het vierkant, dat buiten A ligt. De diagrammen van fig.1 zijn zeer illustratief en worden <u>Venn-diagrammen</u> genoemd.



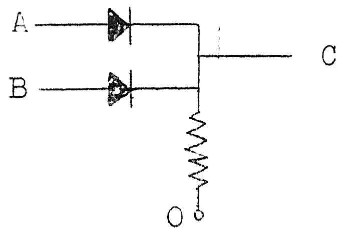
Gearceerd
A + B
fig. 1a



Gearceerd
A.B
fig. 1b

Een ander systeem, waarin de algebra van Boole geldt, en dat is dan het systeem dat voor rekenmachines van belang is, is de klasse waarbij de elementen bestaan uit draden, waarvan de electrische spanning hetzij 0, hetzij 1 is. De bewerkingen + en . bestaan dan uit de volgende schakelingen (fig.2).

De zwarte driehoekjes duiden gelijkrichters (diodes) aan, die de stroom alleen geleiden in de richting van het dwarsstreepje. In de linker figuur is C via een weerstand met de spanning 0 en in de rechter figuur met de spanning 1 verbonden. In de tabelletjes is aangegeven welke spanning C zal aannemen bij de verschillende mogelijkheden voor A en B. Bij dit systeem bestaan er evenals in het binaire talstelsel slechts 2 verschillende elementen, nl. 0 en 1. Als A = 0 is, is $\bar{A}$ = 1. Dat de axioma's T4a en T4b kloppen kan gemakkelijk worden geverifieerd door een tabel op te stellen, waarin alle mogelijkheden voor A,B en C voorkomen.



A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

C = A+B

C = 1 als òf A òf B 1 is

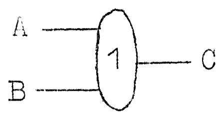
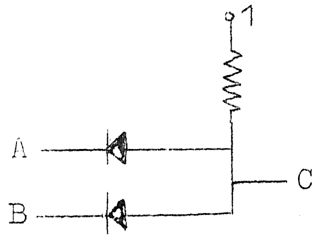


fig. 2a De "of"-schakeling



A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

C = A.B

C = 1 als èn A èn B 1 is

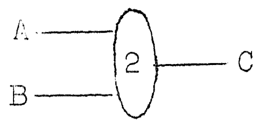


fig. 2b De "en"-schakeling

We hebben nu 2 systemen aangegeven, waarvoor de axioma's consistent zijn. Om aan te tonen, dat de axioma's ook onafhankelijk zijn, is het voldoende te laten zien dat er systemen zijn waarvoor alle axioma's op één na gelden (waarbij onder a en b genoemde axioma's als afzonderlijke axioma's moeten worden opgevat). We kunnen bijv. een systeem aangeven, waarvoor alle axioma's gelden behalve T1a. Neem hiertoe een systeem, dat slechts 2 elementen bevat en waarvoor alle axioma's behalve 1a gelden. Dan is bijv. 0+0 = 0, 0+1 = 1, 1+0 = 1, maar 1+1 = x, waarbij x niet tot de klasse behoort. We moeten nu de restrictie maken dat T4a en T4b alleen voor die gevallen gelden, waarbij A+B, A+C en B+C ook tot de klasse behoren, daar de bewerkingen + en . alleen zijn gedefinieerd voor elementen uit de klasse. Met deze restrictie blijkt dat alle eigenschappen behalve T1a gelden. Dus is T1a een onafhankelijk axioma, dat niet uit de andere volgt.

4. Stellingen

Uit de gegeven axioma's kunnen verdere eigenschappen of stellingen worden afgeleid. Ook de stellingen zullen als duale paren voorkomen, die in elkaar overgaan door verwisseling van + en . en gelijktijdig van 0 en 1.

S1a. Het element 0 in T2a is eenduidig.
Bewijs: Stel dat er 2 elementen 0 bestaan, bijv. 0_1 en 0_2, Dan geldt voor ieder element A dat

$$A + 0_1 = A \quad \text{en} \quad A + 0_2 = A . \qquad \text{(T2a)}$$

Substitueer in de eerste vergelijking $A = 0_2$ en in de tweede $A = 0_1$. Dus

$$0_2 + 0_1 = 0_2 \quad \text{en} \quad 0_1 + 0_2 = 0_1$$

Daar $$0_2 + 0_1 = 0_1 + 0_2 \qquad \text{(T3a)}$$

volgt hieruit $$0_2 = 0_1 \ .$$

S1b. Het element 1 in T2b is eenduidig.

Het bewijs van alle b-stellingen volgt uit dat van de overeenkomstige a-stelling door de verwisseling van + en . en van 0 en 1.

S2a. $A + A = A$.

Bewijs:
$$\begin{aligned} A + A &= (A+A).1 && \text{(T2b)}\\ &= (A+A).(A+\bar{A}) && \text{(T5)}\\ &= A + A.\bar{A} && \text{(T4a)}\\ &= A + 0 && \text{(T5)}\\ &= A && \text{(T2a)} \end{aligned}$$

S2b. $A.A = A$

S3a. $A + 1 = 1$ S3b. $A.0 = 0$

S4a. $A + A.B = A$ S4b. $A.(A+B) = A$

S5. $\bar{A}$ is eenduidig bepaald.

Bewijs: Stel dat A 2 complementen heeft, nl. $\bar{A}_1$ en $\bar{A}_2$. Dan is $A + \bar{A}_1 = 1$, $A + \bar{A}_2 = 1$, $A.\bar{A}_1 = 0$ en $A.\bar{A}_2 = 0$.

Dan is
$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= 1.\bar{A}_2 && \text{(T2b)}\\ &= (A+\bar{A}_1).\bar{A}_2 && \text{(T5)}\\ &= A.\bar{A}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2 && \text{(T4b)}\\ &= 0 + \bar{A}_1.\bar{A}_2 && \text{(T5)}\\ &= \bar{A}_1A + \bar{A}_1\bar{A}_2 && \text{(T5)}\\ &= \bar{A}_1(A+\bar{A}_2) && \text{(T4b)}\\ &= \bar{A}_1 && \text{(T2b)} \end{aligned}$$

S6. Het complement van $\bar{A}$ is A.

S7a. $(\overline{A+B}) = \bar{A}\bar{B}$.

Om deze stelling te bewijzen moeten we aantonen dat

$$A + B + \bar{A}\bar{B} = 1 \qquad \text{en} \qquad (A+B).(\bar{A}\bar{B}) = 0 \ .$$

Hiertoe leiden we eerst twee hulpstellingen af, nl.

H1a. $A + (\bar{A}+C) = 1$ en H1b. $A.(\bar{A}C) = 0$.

Bewijs van H1a:

$$\begin{aligned} A + (\bar{A}+C) &= 1.[A+(\bar{A}+C)] && \text{(T2b)}\\ &= (A+\bar{A}).[A+(\bar{A}+C)] && \text{(T5)}\\ &= A + \bar{A}.(\bar{A}+C) && \text{(T4a)}\\ &= A + \bar{A} && \text{(S4b)}\\ &= 1 && \text{(T5)} \end{aligned}$$

Vervolgens geldt

$$\begin{aligned} A + B + \bar{A}\bar{B} &= [(A+B)+\bar{A}].[(A+B)+\bar{B}] && \text{(T4a)}\\ &= 1.1 && \text{(H1a)}\\ &= 1 && \text{(T2b)} \end{aligned}$$

Evenzo

$$\begin{aligned} (A+B).(\bar{A}\bar{B}) &= A.(\bar{A}\bar{B}) + B.(\bar{A}\bar{B}) && \text{(T4b)}\\ &= 0 + 0 && \text{(H1b)}\\ &= 0 && \text{(T2a)} \end{aligned}$$

S7b. $(\overline{AB}) = \bar{A} + \bar{B}$.

Uit de stellingen 7a en 7b volgt dat we het complement van een Boole'se uitdrukking krijgen door alle + door . en alle . door + tekens te vervangen en bovendien ieder element door zijn complement te vervangen.

Voorbeeld: $\overline{A[\bar{B}+(C\bar{D}+\bar{E}F)]} = \bar{A} + B.\{(\bar{C}+D).(E+\bar{F})\}$.

S8a. $(A+B) + C = A + (B+C)$ S8b. $(AB).C = A.(BC)$.

Deze stelling, die de associatieve eigenschap uitdrukt, heeft een vrij gecompliceerd bewijs. Het bewijs van S8a kan als volgt worden gegeven. Stel $(A+B) + C = X$ en $A + (B+C) = Y$. Indien nu kan worden aangetoond dat $Y + \bar{X} = 1$ en $Y\bar{X} = 0$, dan volgt hieruit dat Y en $\bar{X}$ elkaars complement zijn. Dus is Y het complement van $\bar{X}$, maar aangezien ook X het complement is van $\bar{X}$ (S6) en het complement bovendien eenduidig is (S5) moet $X = Y$ zijn.

Uit $X = (A+B) + C$ volgt $\bar{X} = (\bar{A}\bar{B}).\bar{C}$. (S7a)

Dus

$$\begin{aligned} Y + \bar{X} &= Y + \{(\bar{A}\bar{B}).\bar{C}\}\\ &= [(Y+\bar{A})(Y+\bar{B})].(Y+\bar{C}) && \text{(T4a)} \end{aligned}$$

Verder geldt $Y + \bar{A} = \bar{A} + \{A+(B+C)\} = 1$ (H1a)

Voorts

$$\begin{aligned} Y + \bar{B} &= (\bar{B}+B)(\bar{B}+Y) && \text{(T2b,T5)}\\ &= \bar{B} + BY && \text{(T4a)}\\ &= \bar{B} + B\{A+(B+C)\}\\ &= \bar{B} + \{AB+B(B+C)\} && \text{(T4b)}\\ &= \bar{B} + [AB+B] && \text{(S4b)}\\ &= \bar{B} + B && \text{(S4a)}\\ &= 1\ . && \text{(T5)} \end{aligned}$$

Op dezelfde manier geldt $Y + \bar{C} = 1$. Dan is ook $Y + \bar{X} = 1$. Het bewijs dat $Y\bar{X} = 0$ gaat in principe op analoge wijze.

S9a. $A + \bar{A}B = A + B$ S9b. $A(\bar{A}+B) = AB$

S10. $(A+B)(\bar{A}+C) = AC + \bar{A}B$

S11a. $\overline{(AC+B\bar{C})} = \bar{A}C + \bar{B}\bar{C}$ S11b. $\overline{(\overline{A+C})(\overline{B+\bar{C}})} = (\bar{A}+C)(\bar{B}+\bar{C})$.

5. Mintermen en maxtermen

Onder een Boole'se uitdrukking of Boole'se functie verstaan we een functie van een aantal Boole'se elementen of variabelen. Bijv. functie van 1 variabele is $f = \bar{B}$, van 2 variabelen is $f = \bar{A} + B + A\bar{B}$. Zoals uit de voorafgaande stellingen blijkt kan dezelfde functie op vele manieren worden uitgedrukt in de variabelen. Zo blijkt ook dat $f=B+\bar{B}$ en $f = \bar{A} + B + A\bar{B}$ dezelfde functie is, d.w.z. voor alle verschillende mogelijkheden voor A en B nemen beide functies steeds dezelfde waarde aan.

Onder een minterm van n variabelen verstaat men een Boole product van deze n variabelen, waarbij iedere variabele hetzij zelf, hetzij als zijn complement voorkomt. Er zijn 4 mintermen van 2 variabelen, nl. AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ en $\bar{A}\bar{B}$. In het algemeen zijn er 2^n mintermen van n variabelen.

Een maxterm van n variabelen is een Boole som van deze n variabelen, waarbij wederom iedere variabele hetzij zelf hetzij in de vorm van zijn complement voorkomt. Voor 2 variabelen zijn de maxtermen $A+B$, $A+\bar{B}$, $\bar{A}+B$, $\bar{A}+\bar{B}$. Ook 2^n maxtermen van n variabelen.

We zullen een notatie voor mintermen en maxtermen invoeren. Mintermen worden aangegeven door m, maxtermen door M, beide aangevuld met een index. De index wordt verkregen door de variabelen van de betreffende term in een standaard volgorde te schrijven, bijv. A,B,C, enz. Dan wordt ieder complement van een variabele vervangen door 0 en iedere variabele zelf door 1. Het binaire getal dat dan ontstaat geeft, geschreven als een decimaal getal, de index.

Bijv. $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = M_0$, $AB\bar{C} = m_6$.

Men zou als bovenindex de waarde van n nog kunnen toevoegen, maar dit wordt vrijwel nooit gedaan, omdat men slechts met 1 waarde van n tegelijkertijd heeft te maken.

Met een Venn-diagram (fig.3) kan men een grafische interpretatie van mintermen en maxtermen geven. Een dergelijk diagram kan men ook nog schematisch aangeven als een Veitch-diagram (fig.4). Iedere minterm correspondeert met een minimaal oppervlak in het Veitch-diagram.

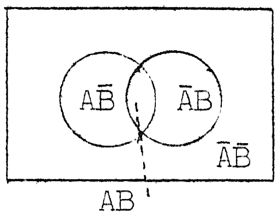


Fig.3

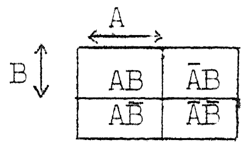


fig.4a

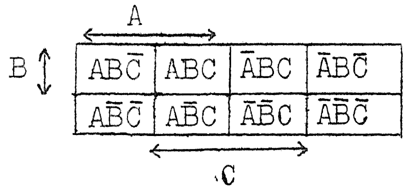


fig.4b

Evenzo correspondeert met een maxterm een maximaal oppervlak in het Veitch-diagram. Zo is in fig.5a de maxterm $M_2 = A + \bar{B}$ gearceerd en in fig.5b $M_5 = A + \bar{B} + C$

Voorts ziet men dat bij $n = 2$, $\bar{M}_2 = m_1$ is en bij $n = 3$, $\bar{M}_5 = m_2$. In het algemeen geldt

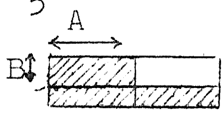


fig.5a

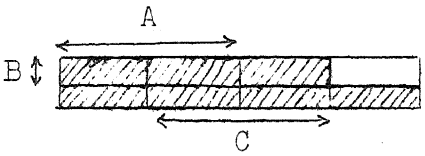


fig.5b

$$\bar{M}_i = m_{2^n-1-i} \quad \text{en} \quad \bar{m}_i = M_{2^n-1-i}$$

Dit is weer de duale voorstelling. Het complement van M_i krijgt men door alle + door . tekens te vervangen, waardoor men een minterm krijgt en verder door alle variabelen door hun complement te vervangen. De som van de oude index en de nieuwe index is dan een binair getal dat uit n enen bestaat en dus de waarde 2^n-1 heeft. Tenslotte geldt.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad \text{en} \quad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0 \quad .$$

6. Het basistheorema

Het basistheorema van de Boole'se algebra zegt dat iedere Boole'se functie zowel kan worden geschreven als een som van mintermen als als een product van maxtermen. Dat dit zo is volgt zonder meer uit de meetkundige interpretatie met de Veitch-diagrammen. Immers iedere Boole'se functie stelt een bepaald gebied uit dit diagram voor en dit gebied kan worden opgebouwd als som van minimale oppervlakken (mintermen) of als product (doorsnijding) van maximale oppervlakken (maxtermen).

Om nu een willekeurige Boole'se uitdrukking als som van mintermen te schrijven, stelt men eerst de waarheidstabel op, die bij deze functie behoort. Dit betekent dat we de waarde van de Boole'se functie opschrijven voor alle mogelijke combinaties van de waarden 0 en 1 voor de afzonderlijke variabelen. Beschouw bijv. de functie $f = AC + \bar{B}C$. De waarheidstabel ziet er dan als volgt uit:

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	0	0	1	0	1

f wordt dus alleen 1 als A,B en C de waarden aannemen van 001, 101 of 111. Dit komt resp. overeen met $\bar{A}\bar{B}C$. $A\bar{B}C$ en ABC. Men kan dus schrijven

$$f = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC \ .$$

Dit is de gevraagde som van mintermen ($f = m_1 + m_5 + m_7$). Wanneer we f als een product van maxtermen willen schrijven, dan beginnen we met $\bar{f}$ als een som van mintermen te schrijven en passen dan het duale theorema toe. Bij het gegeven voorbeeld wordt

$$\bar{f} = m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6$$

of $f = M_7M_5M_4M_3M_1 = (A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)$.

7. Bepaling van de eenvoudigste vorm van een Boole'se functie

In het voorgaande hebben we gezien, dat er vele vormen zijn, die alle eenzelfde Boole'se functie representeren. Voor de ontwerpen van een digitale rekenmachine is het van belang die vorm te kennen, die enerzijds een zo klein mogelijk aantal diodes vereist, maar anderzijds slechts van de tweede orde is. Deze vorm zullen we de eenvoudigste vorm noemen. De orde geeft het aantal bewerkingen aan, dat na elkaar moet worden uitgevoerd. In verband met de vertraging, die iedere bewerking met zich mee brengt, beperkt men zich bij rekenmachines tot tweede orde uitdrukkingen, hoewel het verlagen van de orde in het algemeen een vermeerdering van het aantal diodes met zich meebrengt.

Bijv. $[(A+B)CD + E]F + G$ is 5^{de} orde en vereist 11 diodes.
$ACDF + BCDF + EF + G$ is 2^{de} orde en vereist 14 diodes.

Het is mogelijk iedere functie als som van producttermen en als product van somtermen te schrijven. Van deze alternatieven moeten we de eenvoudigste bepalen. Dit kan met de volgende methode geschieden, afkomstig van Quine.

a) <u>De eenvoudigste som van producttermen</u>

<u>1</u>. Schrijf de functie als een som van mintermen. Hierbij moeten dus in iedere term alle veranderlijken voorkomen, hetzij zelf hetzij in de vorm van hun complement. Als voorbeeld nemen we

$f = \bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{C}D + B(\bar{A}CD + A\bar{C}\bar{D})$

In de vorm van mintermen wordt dit

$f = A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + AB\bar{C}\bar{D}$

<u>2</u>. We gaan nu de zg. <u>prime implicants</u> (primaire termen) vormen. Hierbij zoeken we alle paren van termen op, die in slechts 1 variabele verschillen en laten dan deze variabele weg (want $A + \bar{A} = 1$). Dit geeft achtereenvolgens

$\bar{B}CD + A\bar{B}D + \bar{A}CD + \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}D + \bar{A}BD + B\bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + AB\bar{C}$

waarbij alle termen bestaande uit 4 variabelen gebruikt zijn. De nieuwe uitdrukking is dus gelijkwaardig met de oude. We passen dezelfde regel nogmaals toe en vinden dan de term $B\bar{C}$, maar thans zijn niet alle termen van 3 variabelen gebruikt. Als primaire termen houden we over

$\bar{B}CD + A\bar{B}D + \bar{A}CD + \bar{A}BD + A\bar{C}D + B\bar{C}$.

Daar in het algemeen ieder der oorspronkelijke mintermen aanleiding zal hebben gegeven tot meer dan 1 van de primaire termen, bestaat omgekeerd de mogelijkheid dat niet alle primaire termen noodzakelijk zijn.

<u>3</u>. We gaan een tabel maken, waaruit blijkt hoe de oorspronkelijke termen voorkomen in de primaire termen.

	$A\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$AB\bar{C}\bar{D}$
$\bar{B}CD$	*	*						
$A\bar{B}D$	*					*		
$\bar{A}CD$		*					*	
$\bar{A}BD$			*				*	
$A\bar{C}D$					*	*		
$B\bar{C}$			*	*	*			*

4. We gaan na welke van de primaire termen in ieder geval in de uiteindelijke uitdrukking moeten worden opgenomen. Dit zijn de essentiële termen. $B\bar{C}$ is een essentiële term. Als we $B\bar{C}$ niet opnemen zouden de termen $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ en $AB\bar{C}\bar{D}$ niet in de uiteindelijke vorm zijn verwerkt. Om de essentiële termen te vinden gaan we na welke kolommen slechts 1 merkteken bevatten. De bij deze merktekens behorende primaire termen zijn essentiële termen. In ons geval is BC de enige essentiële term. Door BC zijn tevens $\bar{A}B\bar{C}D$ en $AB\bar{C}D$ verwerkt.

5. We maken een tabel van de resterende originele mintermen en de resterende primaire termen. Dit is

	$A\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$
$\bar{B}CD$	*	*		
$A\bar{B}D$	*		*	
$\bar{A}CD$		*		*
$\bar{A}BD$				*
$A\bar{C}D$			*	

6. Uit deze tabel moeten we de primaire termen zoeken, die alle overgebleven mintermen representeren. Het is duidelijk dat deze primaire termen zijn $A\bar{B}D + \bar{A}CD$.

7. De gevraagde eenvoudigste vorm is dus

$f = A\bar{B}D + \bar{A}CD + B\bar{C}$ $\quad 2^{de}$ orde $\quad$ 11 diodes

b) Het eenvoudigste product van somtermen

Het vinden van het eenvoudigste product van somtermen voor f komt volgens het duale theorema neer op het vinden van de eenvoudigste som van producttermen voor $\bar{f}$. We vormen dus

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= (\bar{A}+B+\bar{D})(A+\bar{C}+\bar{D})(\bar{B}+C) \\
&= [(\bar{A}+B)(A+\bar{C}) + \bar{D}](\bar{B}+C) && (T4a) \\
&= (\bar{A}\bar{C}+AB+\bar{D})(\bar{B}+C) && (S10) \\
&= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + ABC + C\bar{D} && (T4b, T5)
\end{aligned}$$

Op deze uitdrukking moeten we het onder a) beschreven proces toepassen. Het resultaat is dan dat deze zelfde vorm ook de eevoudigste vorm voor f is. Dus is het eenvoudigste product van somtermen voor f

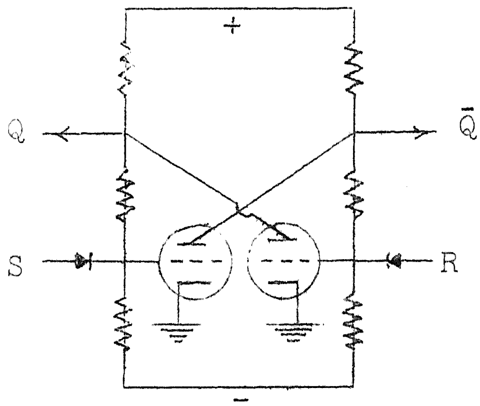
$f = (B+D)(\bar{C}+D)(A+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$ $\quad 2^{de}$ orde $\quad$ 14 diodes

De onder a) gevormde som van producttermen verdient dus de voorkeur.

8. Toepassing bij een teller

We zullen nu de schakeling voor een teller gaan ontwerpen, die in het binaire stelsel met 3 bits (= 3 binary digits) telt. Hiermee komt dus de decimale telvolgorde 0,1,2,...,7,0, enz. overeen. Er zijn geen principiële moeilijkheden om het aantal bits te vergroten.

Bij een teller wordt gebruik gemaakt van flip-flops. Een flip-flop (fig.6) is een schakelelement, dat 2 stabiele toestanden heeft, waarmee een uitgangsspanning 0 of een uitgangsspanning 1 correspondeert. Indien S = 1 is, dus de roosterspanning van de linker buis hoog is, dan gaat door deze buis stroom lopen, zodat $\bar{Q}$ laag wordt ($\bar{Q}$ = 0) en tegelijkertijd Q hoog (Q = 1). Als R = 1 wordt, wordt Q = 0, maar $\bar{Q}$ = 1. Er verloopt een klein tijdsinterval tussen de impuls van R of S en de impuls van de uitgang Q.



Schematisch

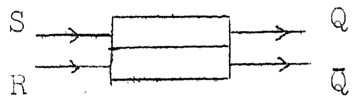


Fig. 6 Flip-flop

De werking van de flip-flop is bepaald door de nevenstaande tabel. De toestand R = 1, S = 1 geeft een onbepaalde waarde voor Q en deze mag daarom niet voorkomen.

Tijd n		Tijd n+1
R^n	S^n	Q^{n+1}
0	0	Q^n
0	1	1
1	0	0
1	1	?

We kunnen derhalve de flip-flop werking door de volgende Boole-vergelijkingen beschrijven:

$Q^{n+1} = \bar{R}^n\bar{S}^nQ^n + \bar{R}^nS^n$ met nevenconditie $R^nS^n = 0$.

Met eenvoudiger notatie wordt dit

$Q^{n+1} = (\bar{R}\bar{S}Q+\bar{R}S)^n$ met $(RS)^n = 0$.

Ook $Q^{n+1} = (\bar{R}\bar{S}Q+\bar{R}S+RS)^n = (\bar{R}\bar{S}Q+S)^n = (\bar{R}Q+S)^n$. (S9a)

De vergelijkingen zijn dus uiteindelijk

$Q^{n+1} = (\bar{R}Q+S)^n$ en $(RS)^n = 0$.

Voor een teller met 3 bits hebben we 3 flip-flops nodig. We noemen deze flip-flops A,B en C en duiden hiermee ook de uitgangen aan. De achtereenvolgens te doorlopen toestanden zijn dus

A	0	0	0	0	1	1	1	1	0	enz.
B	0	0	1	1	0	0	1	1	0	enz.
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0	enz.

De werkingsvergelijkingen voor de flip-flops zijn dus:

$$A^{n+1} = (\bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C})^n ,$$
$$B^{n+1} = (\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C})^n ,$$
$$C^{n+1} = (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C})^n .$$

Ieder van deze vergelijkingen kan in de vorm

$$Q^{n+1} = (g_1Q + g_2\bar{Q})^n$$

worden gebracht. Voor de 3 gevallen hebben we resp.

$Q \equiv A$	$g_1 = \bar{B}C + \bar{B}\bar{C} + B\bar{C}$	$= \bar{B} + \bar{C}$	$g_2 =$	$= BC$
$Q \equiv B$	$g_1 = \bar{A}\bar{C} + A\bar{C}$	$= \bar{C}$	$g_2 = \bar{A}C + AC$	$= C$
$Q \equiv C$	$g_1 = 0$	$= 0$	$g_2 = \bar{A} + A$	$= 1$

Het probleem is nu om van ieder der flip-flops de impuls R en S vast te stellen.

Voor ieder der flip-flops geldt

$$\bar{R}Q + S = g_1Q + g_2\bar{Q} \quad \text{en} \quad RS = 0$$

waarbij g_1 en g_2 in elk geval verschillen. Uit deze Boole'se vergelijkingen moeten de onbekenden R en S worden opgelost.

Teneinde de oplossing te vinden, maken we de volgende tabel, waarin alle mogelijke combinaties van waarden van g_1, g_2 en Q worden onderzocht.

De laatste twee kolommen worden als volgt gevonden. Voor die rijen (nl. de rijen 0,1,3 en 4), waar $\bar{R}Q + S = 0$ is, moet S in ieder geval 0 zijn. In de rijen 2 en 6, waar $\bar{R}Q + S = 1$ is maar $Q = 0$ moet $S = 1$ zijn. In rij 1 en 3 moet $\bar{R} = 0$ zijn en dus $R = 1$. Daar R en S niet tegelijkertijd 1 kunnen zijn, moet in rij 2 en 6 $R = 0$ zijn. In rij 5 en 7 moet $R = 0$ zijn, want als $R = 1$ was, dan zou ook $S = 1$ moeten zijn om $\bar{R}Q + S$ de vereiste waarde 1 te geven. De nu nog niet bepaalde getallen mogen zowel 0 als 1 zijn. Dit zijn dus onbepaalde constanten, die nog in de oplossing voorkomen.

g_1	g_2	Q	$g_1Q+g_2\bar{Q}=R\bar{Q}+S$	R	S
0	0	0	0	a_0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	a_4	0
1	0	1	1	0	a_5
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	a_7

De algemene oplossing is dus

$$R = a_0\bar{g}_1\bar{g}_2\bar{Q} + \bar{g}_1\bar{g}_2Q + \bar{g}_1g_2Q + a_4g_1\bar{g}_2\bar{Q}$$

$$S = \bar{g}_1g_2\bar{Q} + a_5g_1\bar{g}_2Q + g_1g_2\bar{Q} + a_7g_1g_2Q \ ,$$

hetgeen door substitutie in de vergelijkingen kan worden geverifieerd. We krijgen in ons geval de eenvoudigste oplossing door te nemen $a_0 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$.

Dan wordt $R = \bar{g}_1Q$ en $S = g_2\bar{Q}$. Als resultaat vinden we dus

$$R_A = ABC \qquad S_A = ABC$$

$$R_B = BC \qquad S_B = BC$$

$$R_C = C \qquad S_C = C \ .$$

Dat de teller goed werkt, kunnen we aan de volgende tabel zien:

tijd	A	R_A	S_A	B	R_B	S_B	C	R_C	S_C
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	1
3	C	0	1	1	1	0	1	1	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	1	1	1	0
6	1	0	0	1	0	0	0	0	1
7	1	1	0	1	1	0	1	1	0
8	0			0			0		

Het gestelde ogenblik wordt gegeven door ABC.

Het schakelschema is als volgt (fig. 7).

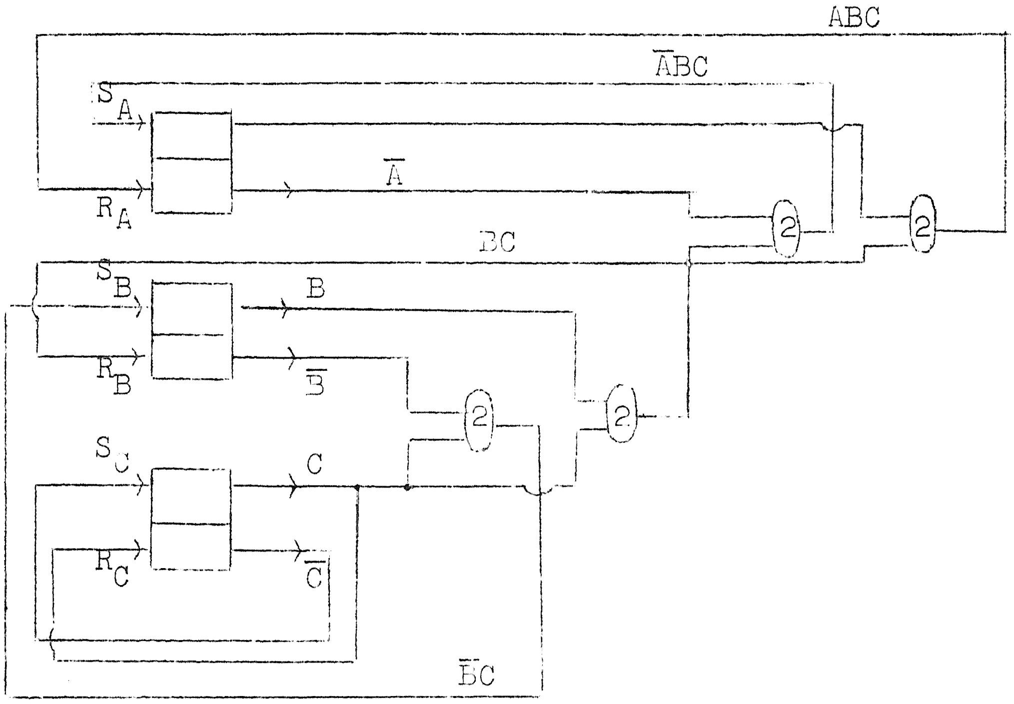


fig.7 3-bits teller

9. Literatuur

Montgomery Phister, "Logical Design of Digital Computers", John Wiley, New York(1958).

E.V. Huntington, "The Algebra of Logic", Trans. Amer. Math. Soc. 5, 288-309 (1904).

R. Serrell, "Elements of Boolean Algebra for the Study of Information-Handling Systems", Proc. I.R.E. 41, 1366-1379 (1953).

W.V. Quine, "The Problem of Simplifying Truth-Functions", Amer.Math. Monthly 59, 521-531 (1952) en 62, 627-631 (1955).